

# Математический анализ, Коллоквиум 2

Балюк Игорь

@lodthe, [GitHub](#)

Дата изменения: 2020.05.28 в 19:44

## Содержание

|          |                                                                                                                                         |          |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>1</b> | <b>Вопросы предварительной части коллоквиума</b>                                                                                        | <b>3</b> |
| 1.1      | Определение непрерывности функции в точке.                                                                                              | 3        |
| 1.2      | Точки разрыва, их классификация.                                                                                                        | 3        |
| 1.3      | Теорема о непрерывности сложной функции.                                                                                                | 3        |
| 1.4      | Формулировки первой и второй теорем Вейерштрасса.                                                                                       | 3        |
| 1.5      | Понятие производной функции в точке.                                                                                                    | 3        |
| 1.6      | Геометрический и физический смысл производной.                                                                                          | 3        |
| 1.7      | Уравнение касательной к графику функции в точке.                                                                                        | 4        |
| 1.8      | Понятие дифференцируемости функции в точке.                                                                                             | 4        |
| 1.9      | Правила дифференцирования (производная суммы, произведения, частного).                                                                  | 4        |
| 1.10     | Формула вычисления производной сложной функции.                                                                                         | 4        |
| 1.11     | Таблица производных основных элементарных функций.                                                                                      | 4        |
| 1.12     | Понятие дифференциала (первого) функции в точке.                                                                                        | 4        |
| 1.14     | Определение локального экстремума. Необходимое условие для внутреннего локального экстремума (теорема Ферма).                           | 5        |
| 1.15     | Формулы Лагранжа и Коши.                                                                                                                | 5        |
| 1.16     | Многочлен Тейлора и формула Тейлора для функций одной переменной.                                                                       | 5        |
| 1.17     | Формулы Маклорена для основных элементарных функций.                                                                                    | 6        |
| 1.18     | Правило Лопиталю.                                                                                                                       | 6        |
| <b>2</b> | <b>Вопросы на знание доказательств</b>                                                                                                  | <b>7</b> |
| 2.1      | Определение непрерывности функции в точке. Точки разрыва, их классификация.                                                             | 7        |
| 2.2      | Непрерывность элементарных функций.                                                                                                     | 7        |
| 2.3      | Арифметические свойства непрерывных функций.                                                                                            | 7        |
| 2.4      | Теорема о непрерывности сложной функции.                                                                                                | 7        |
| 2.5      | Свойства функций, непрерывных на отрезке (первая и вторая теоремы Вейерштрасса).                                                        | 8        |
| 2.6      | Теорема Коши о прохождении непрерывной функции через промежуточные значения.                                                            | 9        |
| 2.7      | Понятие производной функции в точке.                                                                                                    | 10       |
| 2.8      | Геометрический и физический смысл производной.                                                                                          | 10       |
| 2.9      | Уравнение касательной к графику функции в точке.                                                                                        | 10       |
| 2.11     | Понятие дифференцируемости функции в точке.                                                                                             | 10       |
| 2.12     | Необходимое условие дифференцируемости.                                                                                                 | 10       |
| 2.13     | Правила дифференцирования.                                                                                                              | 10       |
| 2.14     | Теорема о дифференцируемости и производной сложной функции.                                                                             | 12       |
| 2.16     | Таблица производных основных элементарных функций.                                                                                      | 13       |
| 2.17     | Понятие дифференциала (первого) функции в точке.                                                                                        | 13       |
| 2.20     | [На коллоквиуме будет только производная высших порядков] Производные и дифференциалы высших порядков функции одной переменной в точке. | 13       |
| 2.21     | Понятие об экстремумах функции одной переменной.                                                                                        | 15       |
| 2.22     | Локальный экстремум. Необходимое условие для внутреннего локального экстремума (теорема Ферма).                                         | 15       |
| 2.23     | Основные теоремы о дифференцируемых функциях на отрезке (теорема Ролля, формулы Лагранжа и Коши).                                       | 15       |

|          |                                                                                                                        |           |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 2.24     | Многочлен Тейлора и формула Тейлора для функций одной переменной с остаточным членом в форме Пеано и Лагранжа. . . . . | 17        |
| 2.25     | Формулы Маклорена для основных элементарных функций (без доказательства). . . . .                                      | 18        |
| 2.26     | Правило Лопиталья. . . . .                                                                                             | 18        |
| 2.27     | Достаточное условие строгого возрастания (убывания) функции на промежутке. . . . .                                     | 20        |
| <b>3</b> | <b>Вопросы, которые были убраны из программы коллоквиума</b>                                                           | <b>20</b> |
| 3.1      | Эквивалентность определений предела функции по Коши и Гейне . . . . .                                                  | 20        |
| 3.2      | Теорема о дифференцируемости обратной функции. . . . .                                                                 | 21        |
| 3.3      | Производные функций, графики которых заданы параметрически. . . . .                                                    | 21        |
| 3.4      | Геометрический смысл дифференциала. . . . .                                                                            | 22        |

# 1 Вопросы предварительной части коллоквиума

Список вопросов предварительной части коллоквиума, ответ на которые необходим для подготовки к основной части.

## 1. Определение непрерывности функции в точке.

Функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , если она определена на некоторой окрестности этой точки и  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ . Другими словами,  $A = f(x_0)$  и справедливы следующие определения предела функции в точке  $x_0$ :

- **По Коши:**

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

- **По Гейне:**

$$\forall \{x_n\} : x_n \in \overset{\circ}{U}(x_0), \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$$

## 2. Точки разрыва, их классификация.

Пусть  $f(x)$  определена в некоторой окрестности  $U_\delta(a)$  и функция разрывна в  $a$ . Тогда этот разрыв является одним из следующих:

- **Устранимый разрыв:** пределы  $f(x)$  справа и слева существуют и равны друг другу, но отличаются от значения функции в исследуемой точке:

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \neq f(a)$$

- **Неустраняемый разрыв первого рода:** пределы  $f(x)$  справа и слева существуют, но не равны друг другу
- **Неустраняемый разрыв второго рода:** хотя бы один из односторонних пределов  $f(x)$  не существует или равен бесконечности.

## 3. Теорема о непрерывности сложной функции.

**Теорема.** Пусть функция  $g(x)$  непрерывна в точке  $a_0$  и функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $b_0 = g(a_0)$ . Тогда функция  $f(g(x))$  непрерывна в точке  $a_0$ .

## 4. Формулировки первой и второй теорем Вейерштрасса.

**Теорема Вейерштрасса (первая)** Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то она ограничена на этом отрезке.

**Теорема Вейерштрасса (вторая)** Непрерывная на отрезке  $[a, b]$  функция  $f$  достигает на нем своих точных нижней и верхней граней. То есть существуют такие точки  $x_1, x_2 \in [a, b]$ , так что для любого  $x \in [a, b]$ , выполняются неравенства:

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

## 5. Понятие производной функции в точке.

Рассмотрим функцию, область определения которой содержит точку  $x_0$ . Тогда функция  $f(x)$  является дифференцируемой в точке  $x_0$ , и ее производная определяется  $f'(x_0)$ , если следующий предел существует:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta}$$

## 6. Геометрический и физический смысл производной.

**Геометрический смысл производной.** Производная в точке  $x_0$  равна угловому коэффициенту касательной к графику функции  $y = f(x)$  в этой точке.

**Физический смысл производной.** Если точка движется вдоль оси  $OX$  и ее координата изменяется по закону  $x(t)$ , то мгновенная скорость точки:  $v(t) = x'(t)$ .

## 7. Уравнение касательной к графику функции в точке.

Пусть дана функция  $f$ , которая в некоторой точке  $x_0$  имеет конечную производную  $f'(x_0)$ . Тогда прямая, проходящая через точку  $(x_0; f(x_0))$ , имеющая угловой коэффициент  $f'(x_0)$ , называется касательной.

Итак, пусть дана функция  $y = f(x)$ , которая имеет производную  $y = f'(x)$  на отрезке  $[a, b]$ . Тогда в любой точке  $x_0 \in (a; b)$  к графику этой функции можно провести касательную, которая задается уравнением:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

[Подробнее тут](#)

## 8. Понятие дифференцируемости функции в точке.

Функция  $f(x)$  является дифференцируемой в точке  $x_0$  своей области определения  $D[f]$ , если существует такая константа  $A$ , что:

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \bar{o}(x - x_0)$$

и

$$A = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

## 9. Правила дифференцирования (производная суммы, произведения, частного).

Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  имеют производные в точке  $x_0$ . Тогда,

$$\begin{aligned}(g + f)'(x_0) &= g'(x_0) + f'(x_0) \\ (g \cdot f)'(x_0) &= g'(x_0) \cdot f(x_0) + g(x_0) \cdot f'(x_0)\end{aligned}$$

Если  $g(x_0) \neq 0$ , то

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

## 10. Формула вычисления производной сложной функции.

Если  $g(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$  и  $f(x)$  дифференцируема в точке  $y_0 = g(x_0)$ , тогда,

$$(f \circ g)'(x_0) = (f(g(x_0)))' = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

## 11. Таблица производных основных элементарных функций.

| $f(x)$                 | $f'(x)$                   |
|------------------------|---------------------------|
| $const$                | $0$                       |
| $x^a$                  | $a \cdot x^{a-1}$         |
| $a^x$                  | $a^x \cdot \ln a$         |
| $e^x$                  | $e^x$                     |
| $\log_a x$             | $\frac{1}{\ln a \cdot x}$ |
| $\ln x$                | $\frac{1}{x}$             |
| $\sin x$               | $\cos x$                  |
| $\cos x$               | $-\sin x$                 |
| $\operatorname{tg} x$  | $\frac{1}{\cos^2 x}$      |
| $\operatorname{ctg} x$ | $-\frac{1}{\sin^2 x}$     |

| $f(x)$                    | $f'(x)$                   |
|---------------------------|---------------------------|
| $\arcsin x$               | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  |
| $\arccos x$               | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\operatorname{arctg} x$  | $\frac{1}{1+x^2}$         |
| $\operatorname{arcctg} x$ | $-\frac{1}{1+x^2}$        |

## 12. Понятие дифференциала (первого) функции в точке.

Функция  $f(x)$  является дифференцируемой в точке  $x_0$  своей области определения  $D[f]$ , если существует такая константа  $A$ , что:

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \bar{o}(x - x_0)$$

$$A = f'(x_0) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta}$$

Тогда выражение  $f'(x_0)dx$  называют дифференциалом функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ . Обозначение:  $df = df(x_0, dx)$ . Обратите внимание, что  $df$  зависит и от точки, и от  $dx$ .

#### 14. Определение локального экстремума. Необходимое условие для внутреннего локального экстремума (теорема Ферма).

Точка  $x_0$  называется точкой локального максимума (минимума) функции  $f$ , если существует такая окрестность  $U_\delta(x_0)$  точки  $x_0$ , что

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \implies f(x) \leq f(x_0) \text{ (для минимума соответственно } f(x) \geq f(x_0))$$

$x_0$  называется точкой строгого локального максимума (минимума), если

$$\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \implies f(x) < f(x_0) \text{ (для минимума соответственно } f(x) > f(x_0))$$

**Теорема Ферма** Если функция имеет в точке локального экстремума производную, то эта производная равна нулю.

#### 15. Формулы Лагранжа и Коши.

**Теорема Лагранжа. Формула конечных приращений** Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и дифференцируема на интервале  $(a, b)$ , то в этом интервале существует хотя бы одна точка  $x_0$ , что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$$

**Теорема Коши. Обобщает формулу конечных приращений Лагранжа.** Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывны на отрезке  $[a, b]$  и дифференцируемы на интервале  $(a, b)$ , причем  $g'(x) \neq 0$  при всех  $x \in (a, b)$ . Тогда в этом интервале существует точка  $x = \xi$  такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

#### 16. Многочлен Тейлора и формула Тейлора для функций одной переменной.

Предположим, что имеется некоторая функция  $f(x)$  и надо исследовать ее поведение в некоторой точке  $x_0$  или ее окрестности. Сама функция может быть при этом достаточно сложной, и поэтому непосредственное вычисление  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  (как пример того, что мы хотим узнать о функции в  $x_0$ ) окажется крайне трудоемким. Идея в том, чтобы найти такой многочлен  $P_n(x)$ , что  $f(x) \sim P_n(x - x_0)$  при  $x \rightarrow x_0$ , а затем исследовать его. Работать с многочленами практически всегда намного проще.

Предположим пока, что  $x_0 = 0$ . Тогда  $P_n(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n$ .  $P_n(0) = c_0$ , а  $P'_n(x) = c_1 + 2c_2x + \dots + nc_nx^{n-1}$ , из чего следует, что  $c_1 = P'_n(0)$ . По аналогии можно получить, что  $c_2 = \frac{P''_n(0)}{2!}, \dots, c_n = \frac{P^{(n)}_n(0)}{n!}$ . Т.е. получаем, что  $P_n(x) = P_n(0) + \frac{P'_n(0)}{1!}x + \dots + \frac{P^{(n)}_n(0)}{n!}x^n$ .

Пусть  $\exists f^{(n)}(x_0)$ , тогда справедлива формула:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(f, x)$$

Эта формула называется **формулой Тейлора** и обычно записывается в виде:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k}_{\text{многочлен Тейлора}} + \underbrace{r_n(f, x)}_{\text{остаточный член}}$$

## 17. Формулы Маклорена для основных элементарных функций.

При  $x_0 = 0$  формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано называется формулой Маклорена

Приведем пример:  $f(x) = \sin x$ . Вспомним, что

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right) \implies f^{(n)}(0) = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k, \\ (-1)^k, & \text{если } n = 2k + 1 \end{cases}$$

Тогда получаем следующее разложение:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \bar{o}(x^{2n})$$

$$1. e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \bar{o}(x^n), x \rightarrow 0$$

$$2. \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n} + \bar{o}(x^n), x \rightarrow 0$$

$$3. (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{\alpha}{k} x^k + \bar{o}(x^n)$$

$$\text{Например } (1+x)^{\frac{1}{3}} - 1 = \binom{\frac{1}{3}}{1} x + \binom{\frac{1}{3}}{2} x^2 + \bar{o}(x^2) = \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2}x^2 + \bar{o}(x^2)$$

$$4. \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \bar{o}(x^{2n})$$

$$5. \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \bar{o}(x^{2n+1})$$

$$6. \operatorname{tg}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \dots + \frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!} \cdot x^{2n-1} + \bar{o}(x^{2n-1}), \text{ где } B_{2n} - \text{ числа Бернулли}$$

Но достаточно помнить, что  $\operatorname{tg}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \bar{o}(x^5)$ , т.е. общая формула для семинаров не нужна

$$7. \arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \dots + \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)} \cdot x^{2n+1} + \bar{o}(x^{2n+1})$$

$$\text{Достаточно знать } \arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \bar{o}(x^5)$$

$$8. \arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$$

$$9. \operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \bar{o}(x^{2n-1})$$

## 18. Правило Лопиталья.

**Теорема Лопиталья (первое правило)** Если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  таковы, что

1.  $f(x)$  и  $g(x)$  дифференцируемы в проколотой окрестности точки  $a$
2.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$
3.  $g'(x) \neq 0$  в окрестности  $U$
4. Существует  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Тогда существует  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

**Теорема Лопиталья (второе правило)** Если для функций  $f(x)$  и  $g(x)$  справедливо следующее:

1.  $f(x)$  и  $g(x)$  дифференцируемы на интервале  $(a, b)$
2.  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = \infty$
3.  $g'(x) \neq 0$  при  $x \in (a, b)$
4. Существует  $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$

Тогда  $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$

## 2 Вопросы на знание доказательств

### 1. Определение непрерывности функции в точке. Точки разрыва, их классификация.

Функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , если она определена на некоторой окрестности этой точки  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ . Другими словами,  $A = f(x_0)$  и справедливы следующие определения предела функции в точке  $x_0$ :

- **По Коши:**

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

- **По Гейне:**

$$\forall \{x_n\} : x_n \in \overset{\circ}{U}(x_0), \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$$

#### Классификация разрывов:

Пусть  $f(x)$  определена в некоторой окрестности  $U_\delta(a)$  и функция разрывна в  $a$ . Тогда говорят, что функция имеет

- **Устранимый разрыв:** пределы  $f(x)$  справа и слева существуют и равны друг другу, но отличаются от значения функции в исследуемой точке:

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \neq f(a)$$

- **Неустраняемый разрыв первого рода:** пределы  $f(x)$  справа и слева существуют, но не равны друг другу
- **Неустраняемый разрыв второго рода:** хотя бы один из односторонних пределов  $f(x)$  не существует или равен бесконечности.

### 2. Непрерывность элементарных функций.

Многие элементарные функции непрерывны на своей области определения (например,  $\sin x, \cos x$ ). Докажем для некоторых из них

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sin(x_0 + \Delta) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} (\sin x_0 \cos \Delta + \cos x_0 \sin \Delta) = \sin x_0 \cdot 1 + \cos x_0 \cdot 0 = \sin x_0$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \cos(x_0 + \Delta) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} (\cos x_0 \cos \Delta - \sin x_0 \sin \Delta) = \cos x_0 \cdot 1 - \sin x_0 \cdot 0 = \cos x_0$$

Тангенс и котангенс выражаются через синус и косинус. Воспользуемся арифметическими свойствами непрерывных функций. Поскольку синус и косинус определены и непрерывны для всех  $x$ , то тангенс и котангенс определены и непрерывны для всех  $x$ , кроме точек, в которых знаменатель обращается в нуль:

$$y = \operatorname{tg} x, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$y = \operatorname{ctg} x, \quad x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} a^{x_0 + \Delta} = a^{x_0} \cdot a^0 = a^{x_0} \cdot 1 = a^{x_0}$$

### 3. Арифметические свойства непрерывных функций.

**Теорема.** Пусть  $g(x)$  и  $f(x)$  непрерывны в  $a$ , тогда функции  $f \pm g, f \cdot g, \frac{f}{g} (g \neq 0)$  также непрерывны в точке  $a$ .

*Доказательство.* Рассмотрим сумму  $(f(x) + g(x))$ . Для остальных операций доказательство практически аналогично. По определению  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  и  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$ . Но тогда, используя свойство суммы для пределов, получаем, что  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = f(a) + g(a)$ , что означает, что  $(f(x) + g(x))$  непрерывна в точке  $a$ . ■

### 4. Теорема о непрерывности сложной функции.

**Теорема.** Если функция  $g(t)$  непрерывна в точке  $t_0$  и функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0 = g(t_0)$ , то  $f(g(t))$  непрерывна в  $t_0$ .

*Доказательство.* Для доказательства этой теоремы воспользуемся формальным преобразованием двух выражений с кванторами.

$f(x)$  непрерывна в  $x_0$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$g(t)$  непрерывна в  $t_0$ :

$$\forall \delta > 0 \exists \mu > 0 : \forall t : 0 < |t - t_0| < \mu \implies |g(t) - g(t_0)| < \delta$$

Получается,  $f(g(t))$  непрерывна в  $t_0$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \mu > 0 : \forall t : 0 < |t - t_0| < \mu \implies |f(g(t)) - f(g(t_0))| < \varepsilon$$

■

## 5. Свойства функций, непрерывных на отрезке (первая и вторая теоремы Вейерштрасса).

**Теорема Вейерштрасса (первая)** Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то она на нём ограничена, то есть  $\exists A : \forall x \in [a, b] \implies |f(x)| \leq A$

*Доказательство.* Докажем от противного.

Пусть  $f$  не ограничена на отрезке  $[a, b]$ , тогда:

$$\begin{aligned} \forall A > 0 \exists x_A \in [a, b] : |f(x_A)| > A \\ A = 1 &\implies \exists x_1 \in [a, b] : |f(x_1)| > 1 \\ A = 2 &\implies \exists x_2 \in [a, b] : |f(x_2)| > 2 \\ &\vdots \\ A = n &\implies \exists x_n \in [a, b] : |f(x_n)| > n \end{aligned}$$

Получим последовательность  $\{x_n\} \subset [a, b]$ , то есть последовательность  $\{x_n\}$  ограничена.

По теореме Больцано-Вейерштрасса из неё можно выделить подпоследовательность, которая сходится к точке  $c$ , то есть

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = c$$

Тогда  $c \in [a, b]$ . Но по условию функция непрерывна в точке  $c$  и тогда по определению непрерывности в точке по Гейне  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(c)$ .

С другой стороны

$$|f(x_{n_k})| > n_k, n_k \geq k \implies \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \infty$$

А это противоречит единственности предела.

■

**Теорема Вейерштрасса (вторая)** Непрерывная на отрезке  $[a, b]$  функция  $f$  достигает на нём своих точных нижней и верхней граней. То есть существуют такие точки  $c_1, c_2 \in [a, b]$ , так что для любого  $x \in [a, b]$ , выполняются неравенства:

$$f(c_2) \leq f(x) \leq f(c_1)$$

*Доказательство.* Докажем  $\exists c_1 \in [a, b] : f(c_1) = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ .

Пусть  $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$  (существование следует из первой теоремы Вейерштрасса). В силу определения точной верхней грани выполняется условие:

$$\begin{cases} \forall x \in [a, b] \implies f(x) \leq M \\ \forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in [a, b] : M - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \end{cases}$$



Полагая  $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}$  получим последовательность  $\{x_n\}$  такую, что для всех  $n \in \mathbb{N}$  выполняются условия  $M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$ , откуда  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ . Существует подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}$  последовательности  $\{x_n\}$  (она ограничена отрезком  $[a, b]$ , а значит является ограниченной) и точка  $c$  (по теореме Больцано-Вейерштрасса, из последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к точке  $c$ ), такие что  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = c$ , где  $c \in [a, b]$ .

В силу непрерывности функции  $f$  в точке  $c$ , получаем  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(c)$ .

С другой стороны,  $\{f(x_{n_k})\}$  — подпоследовательность последовательности  $\{f(x_n)\}$ , сходящейся к числу  $M$ . Поэтому  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = M$ .

В силу единственности предела последовательности заключаем, что  $f(c) = M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ .

Утверждение  $\exists c_1 \in [a, b] : f(c_1) = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$  доказано.

Аналогично доказывается  $\exists c_2 \in [a, b] : f(c_2) = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$

Функция непрерывна на интервале может не достигать своих точных граней (требовать непрерывности на сегменте существенно). ■

## 6. Теорема Коши о прохождении непрерывной функции через промежуточные значения.

**Теорема Больцано-Коши (первая), о нулях непрерывной функции** Если функция  $f(x)$  непрерывна на сегменте  $[a, b]$  и на своих концах принимает значение разных знаков, то существует такая точка, принадлежащая этому отрезку, в которой функция обращается в нуль.

*Доказательство.* Геометрически очень легко: функция пересечет ось  $OX$ .

Алгебраически: разделим отрезок  $[a, b]$  точкой  $x_0$  на два равных по длине отрезка, тогда либо  $f(x_0) = 0$  и, значит, искомая точка  $x_0$  найдена, либо  $f(x_0) \neq 0$  и тогда на концах одного из полученных промежутков функция  $f$  принимает значения разных знаков, точнее, на левом конце значение меньше нуля, на правом — больше.

Обозначим этот отрезок  $[a_1, b_1]$  и разделим его снова на два равных по длине отрезка и т.д. В результате, либо через конечное число шагов придем к искомой точке  $x$ , в которой  $f(x) = 0$ , либо получим последовательность вложенных отрезков  $[a_n, b_n]$  по длине стремящихся к нулю и таких, что

$$f(a_n) < 0 < f(b_n)$$

Пусть  $\gamma$  — общая точка всех отрезков  $[a_n, b_n]$ . Тогда  $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ . Поэтому, в силу непрерывности функции  $f$

$$f(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$$

Но тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$$

Откуда следует, что  $f(\gamma) = 0$ . ■

**Теорема Больцано-Коши (вторая), о промежуточном значении непрерывных функций** Если функция  $f$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и  $A = f(a) \neq f(b) = B$ , число  $C \in (A, B)$ , тогда существует такая точка  $c \in [a, b]$ , что  $f(c) = C$ .

Другими словами, утверждается, что если непрерывная функция, принимает два значения, то она принимает и любое значение между ними.

*Доказательство.* Не нарушая общности будем считать, что  $A = f(a) < f(b) = B$ . Рассмотрим функцию  $h(x) = f(x) - C$ , непрерывность на отрезке  $[a, b]$  которой следует из непрерывности функции  $f$ . Очевидно что  $h(a) = A - C < 0$  и  $h(b) = B - C > 0$ . Применяем к  $h$  первую теорему Больцано-Коши и находим точку  $c$ , в которой  $h(c) = f(c) - C = 0$ , то есть  $f(c) = C$ . Теорема доказана. ■

## 7. Понятие производной функции в точке.

Рассмотрим функцию, область определения которой содержит точку  $x_0$ . Тогда функция  $f(x)$  является дифференцируемой в точке  $x_0$ , и ее производная  $f'(x_0)$  определяется следующей формулой, если существует предел

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta}$$

## 8. Геометрический и физический смысл производной.

**Геометрический смысл производной.** Производная в точке  $x_0$  равна угловому коэффициенту касательной к графику функции  $y = f(x)$  в этой точке.

**Физический смысл производной.** Если точка движется вдоль оси  $OX$  и ее координата изменяется по закону  $x(t)$ , то мгновенная скорость точки:  $v(t) = x'(t)$ .

## 9. Уравнение касательной к графику функции в точке.

Пусть дана функция  $f$ , которая в некоторой точке  $x_0$  имеет конечную производную  $f'(x_0)$ . Тогда прямая, проходящая через точку  $(x_0; f(x_0))$ , имеющая угловой коэффициент  $f'(x_0)$ , называется касательной.

Итак, пусть дана функция  $y = f(x)$ , которая имеет производную  $y = f'(x)$  на отрезке  $[a, b]$ . Тогда в любой точке  $x_0 \in (a; b)$  к графику этой функции можно провести касательную, которая задается уравнением:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

## 11. Понятие дифференцируемости функции в точке.

Функция  $f(x)$  является дифференцируемой в точке  $x_0$  своей области определения  $D[f]$ , если существует такая константа  $A$ , что:

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \bar{o}(x - x_0)$$

и

$$A = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

**Теорема**  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x$  только и только тогда, когда  $\exists f'(x)$ , причем  $A = f'(x)$

*Доказательство.* Докажем необходимость и достаточность

- **Необходимость.** Пусть  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x \implies \Delta y = A\Delta x + \bar{o}(\Delta x) \implies \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{\bar{o}(\Delta x)}{\Delta x} = A + \bar{o}(1)$

$$\text{Тогда } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A \implies A = f'(x)$$

- **Достаточность.** Пусть  $\exists f'(x) \implies \exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ . Рассмотрим  $\beta(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)$ .  
 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \beta(\Delta x) = 0$ , т.е.  $\beta(\Delta x) = \bar{o}(1) \implies \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = \bar{o}(1) \implies \Delta y = f'(x)\Delta x + \bar{o}(\Delta x)$

■

## 12. Необходимое условие дифференцируемости.

**Теорема.** Если функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$ , то она непрерывна в этой точке.

*Доказательство.* Пусть функция  $y = f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$ . Тогда её приращение представимо в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \bar{o}(\Delta x)$$

Но тогда при  $\Delta x \rightarrow 0$  будет  $\Delta y \rightarrow 0$ , а это означает непрерывность функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$ . ■

Обратите внимание, что из непрерывности не следует дифференцируемости (например,  $f(x) = |x|$ ).

## 13. Правила дифференцирования.

**Теорема.** Если  $f(x)$  и  $g(x)$  дифференцируемы в точке  $x$ , то  $f \pm g$ ,  $f \cdot g$ ,  $\frac{f}{g}$  ( $g \neq 0$ ) также дифференцируемы в точке  $x$ , причем  $(f \pm g)' = f' \pm g'$ ,  $(f \cdot g)' = f'g + fg'$ ,  $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

*Доказательство.* Будем считать, что  $\Delta f$  отвечает приращению  $f(x)$ ,  $\Delta g$  отвечает приращению  $g(x)$ , а  $\Delta h$  отвечает приращению  $h(x)$ .

$$1. \ h(x) = f(x) \pm g(x)$$

$$\begin{aligned} \Delta h &= h(x + \Delta x) - h(x) = (f(x + \Delta x) \pm g(x + \Delta x)) - (f(x) \pm g(x)) \\ &= (f(x + \Delta x) - f(x)) \pm (g(x + \Delta x) - g(x)) \\ &= \Delta f \pm \Delta g \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} \pm \frac{\Delta g}{\Delta x}$$

При  $\Delta x \rightarrow 0$  существует предел правой части, равный  $f'(x) \pm g'(x)$ , а значит, существует и предел левой части

$$h'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

$$2. \ h(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\begin{aligned} \Delta h &= h(x + \Delta x) - h(x) = f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x)g(x) \\ &= (f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x + \Delta x) \cdot g(x)) + (f(x + \Delta x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x)) \end{aligned}$$

Далее можно записать

$$\Delta h = f(x + \Delta x) \cdot (g(x + \Delta x) - g(x)) + g(x) \cdot (f(x + \Delta x) - f(x)) = f(x + \Delta x) \cdot \Delta g + g(x) \Delta f$$

Таким образом

$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = f(x + \Delta x) \frac{\Delta g}{\Delta x} + g(x) \cdot \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Возьмем теперь предел правой части при  $\Delta x \rightarrow 0$ . В силу непрерывности  $f(x)$  в  $x$  (т.к. она дифференцируема в этой точке)  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) = f(x)$ . Тогда получаем, что

$$h'(x) = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

**Лемма.** Если  $f(x)$  непрерывна в точке  $a$  и  $f(a) > 0$  ( $f(a) < 0$ ), то  $\exists \delta > 0 : f(x) > 0$  ( $f(x) < 0$ )  $\forall x \in U_\delta(a)$

*Доказательство.* Так как  $f(x) \in C(a)$ , то  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(a) \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon \iff f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$ . Положим  $\varepsilon = \frac{|f(a)|}{2}$ , тогда  $f(a) - \varepsilon > 0$  при  $f(a) > 0$  и  $f(a) + \varepsilon < 0$  при  $f(a) < 0$ . Т.е. левая и правая части неравенства всегда одного знака, значит  $\forall x \in U_\delta(a)$  выполнено требуемое. ■

$$3. \ h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}. \text{ По лемме, } g(x) \neq 0, \text{ то } g(x + \Delta x) \neq 0 \text{ для малых } \Delta x. \text{ Тогда}$$

$$\begin{aligned} \Delta h &= h(x + \Delta x) - h(x) = \frac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)} \\ &= \frac{f(x + \Delta x)g(x) - g(x + \Delta x)f(x)}{g(x)g(x + \Delta x)} \\ &= \frac{(f(x + \Delta x)g(x) - f(x)g(x)) - (g(x + \Delta x)f(x) - f(x)g(x))}{g(x)g(x + \Delta x)} \\ &= \frac{g(x)(f(x + \Delta x) - f(x)) - f(x)(g(x + \Delta x) - g(x))}{g(x)g(x + \Delta x)} \\ &= \frac{g(x)\Delta f - f(x)\Delta g}{g(x)g(x + \Delta x)} \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{g(x) \frac{\Delta f}{\Delta x} - f(x) \frac{\Delta g}{\Delta x}}{g(x)g(x + \Delta x)}$$

Снова используя непрерывность и беря предел правой и левой частей, получаем, что

$$h'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

■

#### 14. Теорема о дифференцируемости и производной сложной функции.

**Теорема.** Пусть функцию  $y = y(x)$  от переменной  $x$  можно представить как сложную функцию в следующем виде:

$$y(x) = f(u(x))$$

где  $f(u)$  и  $u(x)$  есть некоторые функции. Функция  $u = u(x)$  дифференцируема при некотором значении переменной  $x$ . Функция  $f(u)$  дифференцируема при значении переменной  $u = u(x)$ . Тогда сложная (составная) функция  $y = f(u(x))$  дифференцируема в точке  $x$  и ее производная определяется по формуле:

$$y'(x) = f'(u) \cdot u'(x)$$

*Доказательство.* Введем следующие обозначения.

$$\begin{aligned}\Delta u &= u(x + \Delta x) - u(x) \\ \Delta f &= f(u + \Delta u) - f(u) = f(u(x + \Delta x)) - f(u(x))\end{aligned}$$

Здесь  $\Delta u$  есть функция от переменных  $x$  и  $\Delta x$ ,  $\Delta f$  есть функция от переменных  $u$  и  $\Delta u$ . Но мы будем опускать аргументы этих функций, чтобы не загромождать выкладки.

Поскольку функции  $u$  и  $f$  дифференцируемы в точках  $x$  и  $u = u(x)$ , соответственно, то в этих точках существуют производные этих функций, которые являются следующими пределами:

$$\begin{aligned}u'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ f'(u) &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta u}\end{aligned}$$

Рассмотрим следующую функцию:

$$\varepsilon(\Delta u) = \frac{\Delta f}{\Delta u} - f'(u)$$

При фиксированном значении переменной  $u$ ,  $\varepsilon$  является функцией от  $\Delta u$ . Очевидно, что

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta u) = 0$$

Тогда

$$\Delta f = (f'(u) + \varepsilon(\Delta u)) \cdot \Delta u$$

Поскольку функция  $u(x)$  является дифференцируемой функцией в точке  $x$ , то она непрерывна в этой точке. Поэтому

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u = 0$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta u) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta u) = 0$$

Теперь находим производную.

$$\begin{aligned}
 y'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( f'(u) \frac{\Delta u}{\Delta x} + \varepsilon(\Delta u) \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) \\
 &= f'(u) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta u) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\
 &= f'(u) \cdot u'(x) + 0 \cdot u'(x) \\
 &= f'(u) \cdot u'(x)
 \end{aligned}$$

Формула доказана. ■

## 16. Таблица производных основных элементарных функций.

| $f(x)$                 | $f'(x)$                   |
|------------------------|---------------------------|
| $const$                | $0$                       |
| $x^a$                  | $a \cdot x^{a-1}$         |
| $a^x$                  | $a^x \cdot \ln a$         |
| $e^x$                  | $e^x$                     |
| $\log_a x$             | $\frac{1}{\ln a \cdot x}$ |
| $\ln x$                | $\frac{1}{x}$             |
| $\sin x$               | $\cos x$                  |
| $\cos x$               | $-\sin x$                 |
| $\operatorname{tg} x$  | $\frac{1}{\cos^2 x}$      |
| $\operatorname{ctg} x$ | $-\frac{1}{\sin^2 x}$     |

| $f(x)$                    | $f'(x)$                   |
|---------------------------|---------------------------|
| $\arcsin x$               | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  |
| $\arccos x$               | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\operatorname{arctg} x$  | $\frac{1}{1+x^2}$         |
| $\operatorname{arcctg} x$ | $-\frac{1}{1+x^2}$        |

## 17. Понятие дифференциала (первого) функции в точке.

Функция  $f(x)$  является дифференцируемой в точке  $x_0$  своей области определения  $D[f]$ , если существует такая константа  $A$ , что:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= f(x_0) + A(x - x_0) + \bar{o}(x - x_0) \\
 A &= f'(x_0) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta}
 \end{aligned}$$

Тогда выражение  $f'(x_0)dx$  называют дифференциалом функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ . Обозначение:  $df = df(x_0, dx)$ . Обратите внимание, что  $df$  зависит и от точки, и от  $dx$ .

## 20. [На коллоквиуме будет только производная высших порядков] Производные и дифференциалы высших порядков функции одной переменной в точке.

Рассмотрим функцию, дифференцируемую на множестве  $E$ . Т.е.  $\exists f'(x)$ . Если  $f'(x)$  тоже дифференцируема на  $E$ , то  $\exists (f'(x))' = f''(x)$ .

Производной  $n$ -ого порядка будем считать  $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$ , причем  $f^{(0)}(x) = f(x)$ . Разумеется, для существования производной  $n$ -ого порядка должны существовать производные всех меньших порядков.

Множество функций, имеющих все производные до порядка  $n$  включительно на множестве  $E$ , обозначается  $C^{(n)}(E)$ . Рассмотрим несколько примеров

- $f(x) = \sin x$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \\
f''(x) &= -\sin x = \sin\left(\frac{2\pi}{2} + x\right) \\
f'''(x) &= -\cos x = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \\
f^{(4)}(x) &= \sin x = \sin x
\end{aligned}$$

Докажем по индукции, что  $f^{(n)}(x) = \sin\left(\frac{\pi n}{2} + x\right)$ . При  $n = 1$  уже было показано ранее. Пусть это верно при некотором  $n$ , покажем для  $n = n + 1$ .

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= \sin\left(\frac{\pi(n+1)}{2} + x\right) \\
f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)}(x))' = \left(\sin\left(\frac{\pi n}{2} + x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi n}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi(n+1)}{2} + x\right)
\end{aligned}$$

- $f(x) = e^x$ .  $f^{(n)}(x) = e^x$
- $f(x) = x^m$ . Беря  $n$  раз производную, получаем, что  $f^{(n)}(x) = m(m-1)\dots(m-n+1)x^{m-n}$
- $f(x) = \ln x$ .  $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ .  $f^{(n)}(x^{-1}) = (-1)(-2)\dots(-n)x^{-1-n} = (-1)^n \cdot n! \cdot x^{-1-n}$ , Тогда получаем, что

$$f^{(n)}(x) = f^{(n-1)}(x-1) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot x^{-n}$$

**Теорема (Формула Лейбница)** Пусть  $u(x)$  и  $v(x)$  имеют не менее  $n$  производных на множестве  $E$ . Тогда

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot u^{(n-k)} \cdot v^{(k)}$$

*Доказательство.* Докажем по индукции. При  $n = 1$

$$(u \cdot v)' = u'v + uv' = \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} \cdot u^{(1-k)} \cdot v^{(k)}$$

Пусть равенство верно при некотором  $n$ , докажем его справедливость при  $n = n + 1$ . Беря по определению производную  $(u \cdot v)^{(n+1)}$

$$\begin{aligned}
(u \cdot v)^{(n+1)} &= \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot u^{(n-k)} \cdot v^{(k)}\right)' \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot u^{(n-k+1)} \cdot v^{(k)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot u^{(n-k)} \cdot v^{(k+1)} \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot u^{(n-k+1)} \cdot v^{(k)} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \cdot u^{(n-k+1)} \cdot v^{(k)} \\
&= \binom{n}{0} \cdot u^{(n+1)} \cdot v + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right) \cdot u^{(n-k+1)} \cdot v^{(k)} + \binom{n}{n} \cdot u \cdot v^{(n+1)} \\
&= \binom{n}{0} \cdot u^{(n+1)} \cdot v + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} \cdot u^{(n-k+1)} \cdot v^{(k)} + \binom{n}{n} \cdot u \cdot v^{(n+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot u^{(n-k+1)} \cdot v^{(k)}
\end{aligned}$$

Последний переход сделан при помощи следующего рассуждения:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

■

## 21. Понятие об экстремумах функции одной переменной.

Точка  $x_0$  называется точкой локального максимума (минимума) функции  $f$ , если существует такая окрестность  $U_\delta(x_0)$  точки  $x_0$ , что

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \implies f(x) \leq f(x_0)$$

и точкой локального минимума, если

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \implies f(x) \geq f(x_0)$$

Точка  $x_0$  будет называться точкой строгого локального экстремума, если заменить окрестность на проколотую окрестность и нестрогий знак заменить на строгий.

**Теорема Ферма** Если функция  $y = f(x)$  имеет экстремум в точке  $x_0$ , то ее производная  $f'(x_0)$  либо равна нулю, либо не существует.

## 22. Локальный экстремум. Необходимое условие для внутреннего локального экстремума (теорема Ферма).

**Теорема Ферма** Пусть функция  $f$  определена на интервале  $(a, b)$  и в некоторой точке  $x_0 \in (a, b)$  принимает наибольшее (наименьшее) значение на этом интервале. Если существует  $f'(x_0)$ , то  $f'(x_0) = 0$ .

*Доказательство.* Пусть  $x_0$  — точка максимума функции  $f$ . Рассмотрим разностное отношение  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ . Так как  $f(x) \leq f(x_0)$ , то при  $x > x_0$  имеем  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ , и, следовательно,  $f'_+(x_0) \leq 0$ . Если же  $x < x_0$ , то  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ , и поэтому  $f'_-(x_0) \geq 0$ . Но из дифференцируемости функции  $f$  в точке  $x_0$  следует, что  $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$  (следует из равенности предела справа и слева). ■

С геометрической точки зрения теорема Ферма означает, что если в точке экстремума у графика функции существует касательная, то она параллельна оси  $OX$ .

## 23. Основные теоремы о дифференцируемых функций на отрезке (теорема Ролля, формулы Лагранжа и Коши).

**Теорема Ролля. О нуле производной функции, принимающей на концах отрезка равные значения** Пусть функция  $y = f(x)$

1. непрерывна на отрезке  $[a, b]$ ;
2. дифференцируема на интервале  $(a, b)$ ;
3.  $f(a) = f(b)$

Тогда на интервале  $(a, b)$  найдется, по крайней мере, одна точка  $x_0$ , в которой  $f'(x_0) = 0$ .

*Доказательство.* Если функция  $f(x)$  постоянна на отрезке  $[a, b]$  (а значит, её минимальное и максимальное значение совпадают), то производная равна нулю в любой точке интервала  $(a, b)$ , в этом случае утверждение справедливо.

Иначе, минимальное и максимальное значение функции не совпадают. По второй теореме Вейерштрасса (о достижении функции значения точной верхней/нижней грани на отрезке), функция достигает своего наибольшего или наименьшего значения в точке  $\xi$  интервала  $(a, b)$ , т.е. в точке  $\xi$  существует локальный экстремум. Тогда по теореме Ферма производная в этой точке равна нулю

$$f'(\xi) = 0$$

**Теорема Лагранжа. Формула конечных приращений** Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и дифференцируема на интервале  $(a, b)$ , то в этом интервале существует хотя бы одна точка  $x_0$ , что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$$

*Доказательство.* Рассмотрим вспомогательную функцию  $F(x) = f(x) + \lambda x$ .

Выберем число  $\lambda$  таким, чтобы выполнялось условие  $F(a) = F(b)$ , тогда

$$f(a) + \lambda a = f(b) + \lambda b \implies f(b) - f(a) = \lambda(a - b) \implies \lambda = -\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

В результате получаем

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot x$$

Функция  $F(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , дифференцируема на интервале  $(a, b)$  и принимает одинаковые значения на концах отрезка. Следовательно, для неё выполнены все условия теоремы Ролля. Тогда в интервале  $(a, b)$  существует такая точка  $\xi$ , что  $F'(\xi) = 0$ .

Отсюда следует, что  $0 = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  или

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

■

Теорема Лагранжа имеет простой геометрический смысл. Хорда, проходящая через точки графика, соответствующие концам отрезка  $a$  и  $b$  имеет угловой коэффициент, равный

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Тогда внутри отрезка существует точка  $x = \xi$ , в которой касательная к графику параллельна хорде.

**Теорема Коши.** Обобщает формулу конечных приращений Лагранжа. Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывны на отрезке  $[a, b]$  и дифференцируемы на интервале  $(a, b)$ , причем  $g'(x) \neq 0$  при всех  $x \in (a, b)$ . Тогда в этом интервале существует точка  $x = \xi$  такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

*Доказательство.* Доказательство совпадает с доказательством теоремы Лагранжа.

Прежде всего заметим, что знаменатель в левой части формулы Коши не равен нулю:  $g(b) - g(a) \neq 0$ . Действительно, если  $g(a) = g(b)$ , то по теореме Ролля найдется точка  $\mu \in (a, b)$ , в которой  $g'(\mu) = 0$ . Это, однако, противоречит условию, где указано, что  $\forall x \in (a, b) : g'(x) \neq 0$ .

Введем вспомогательную функцию  $F(x) = f(x) + \lambda g(x)$ .

Выберем число  $\lambda$  таким, чтобы выполнялось условие  $F(a) = F(b)$ , тогда

$$f(a) + \lambda g(a) = f(b) + \lambda g(b) \implies f(b) - f(a) = \lambda(g(b) - g(a)) \implies \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

В результате получаем

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g(x)$$

Функция  $F(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , дифференцируема на интервале  $(a, b)$  и при найденном значении  $\lambda$  принимает одинаковые значения на концах отрезка. Следовательно, для неё выполнены все условия теоремы Ролля. Тогда в интервале  $(a, b)$  существует такая точка  $\xi$ , что  $F'(\xi) = 0$ .

Отсюда следует, что

$$0 = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(\xi)$$

или

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

■



## 24. Многочлен Тейлора и формула Тейлора для функций одной переменной с остаточным членом в форме Пеано и Лагранжа.

Предположим, что имеется некоторая функция  $f(x)$  и надо исследовать ее поведение в некоторой точке  $x_0$  или ее окрестности. Сама функция может быть при этом достаточно сложной, и поэтому непосредственное вычисление  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  (как пример того, что мы хотим узнать о функции в  $x_0$ ) окажется крайне трудоемким. Идея в том, чтобы найти такой многочлен  $P_n(x)$ , что  $f(x) \sim P_n(x - x_0)$  при  $x \rightarrow x_0$ , а затем исследовать его. Работать с многочленами практически всегда намного проще.

Предположим пока, что  $x_0 = 0$ . Тогда  $P_n(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n$ .  $P_n(0) = c_0$ , а  $P'_n(x) = c_1 + 2c_2x + \dots + nc_nx^{n-1}$ , из чего следует, что  $c_1 = P'_n(0)$ . По аналогии можно получить, что  $c_2 = \frac{P''_n(0)}{2!}, \dots, c_n = \frac{P^{(n)}_n(0)}{n!}$ . Т.е. получаем, что  $P_n(x) = P_n(0) + \frac{P'_n(0)}{1!}x + \dots + \frac{P^{(n)}_n(0)}{n!}x^n$ .

Пусть  $\exists f^{(n)}(x_0)$ , тогда справедлива формула:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(f, x)$$

Эта формула называется **формулой Тейлора** и обычно записывается в виде:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k}_{\text{многочлен Тейлора}} + \underbrace{r_n(f, x)}_{\text{остаточный член}}$$

**Лемма.** Пусть  $\exists f^{(n)}(x_0)$  и  $\exists f'(x)$  на некоторой  $U(x_0)$ . Тогда  $(r_n(f, x))' = r_{n-1}(f', x)$ .

*Доказательство.*

$$r_n(f, x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

$$(r_n(f, x))' = f'(x) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x - x_0)^{k-1} = f'(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = r_{n-1}(f', x)$$

так как  $f^{(k+1)}(x_0) = (f')^{(k)}(x_0)$ . Следует также обратить внимание на то, что дифференцирование  $r_n(f, x)$  происходит по  $x$ , поэтому все члены суммы, кроме  $(x - x_0)^k$ , — константы. ■

**Теорема о локальной форме остаточного члена (Форма Пеано)** Пусть  $\exists f^{(n)}(x_0)$  и  $\exists f^{(n-1)}(x)$  на некоторой  $U(x_0)$ . Тогда справедлива формула Тейлора, причем  $r_n(f, x) = \bar{o}((x - x_0)^n), x \rightarrow x_0$ .

*Доказательство.* Докажем с помощью метода математической индукции. При  $n = 1$ ,  $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \bar{o}(x - x_0)$ , что верно, т.к.  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$ . Предположим теперь, что теорема верна для произвольной функции  $f$  при  $n = n - 1$ , и докажем её при  $n = n$ .

Заметим сначала, что  $r_n(f, x_0) = 0$  (следует из обычной формулы Тейлора). Тогда  $r_n(f, x) = r_n(f, x) - r_n(f, x_0) = (r_n(f, \xi))'(x - x_0)$ , где  $\xi$  принадлежит интервалу  $(\min\{x, x_0\}, \max\{x, x_0\})$  по теореме Лагранжа.

По лемме получаем, что  $(r_n(f, \xi))'(x - x_0) = r_{n-1}(f', \xi)(x - x_0)$ . По предположению для произвольной функции  $f$ , у которой есть  $n$ -ая производная в  $x_0$  и  $(n - 1)$ -ая в окрестности  $x_0$ , можно выполнить индукционный переход для  $f'$ , т.к. для  $r_{n-1}$  у  $f'(x)$  существуют  $(n - 1)$ -ая производная в  $x_0$  и  $(n - 2)$ -ая в окрестности  $x_0$ . Тогда  $r_{n-1}(f', \xi)(x - x_0) = \bar{o}((\xi - x_0)^{n-1})(x - x_0) = [|\xi - x_0| < |x - x_0| \implies \bar{o}((\xi - x_0)^{n-1}) = \bar{o}((x - x_0)^{n-1})] = \bar{o}((x - x_0)^{n-1})(x - x_0) = \bar{o}((x - x_0)^n)$  ■

**Теорема о форме Лагранжа** Пусть  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  и  $\exists f^{(n)}(x)$ , причем  $f^{(n)}(x)$  непрерывна на отрезке  $[x_0, x]$ . Кроме того,  $\exists f^{(n+1)}(x)$  на  $(x_0, x)$ . Тогда справедлива формула Тейлора, причем  $r_n(f, x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ , где  $\xi \in (x_0, x)$ .

*Доказательство.* Снова воспользуемся методом математической индукции. При  $n = 0$ ,  $f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)$  — формула Лагранжа. Предположим теперь, что для произвольной функции  $f$  справедливо, что  $r_{n-1}(f, x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n$ , где  $\xi \in (x_0, x)$ . При  $n = n$  имеем:

$$\begin{aligned}
\frac{r_n(f, x)}{(x - x_0)^{n+1}} &= \frac{r_n(f, x) - r_n(f, x_0)}{(x - x_0)^{n+1} - (x_0 - x_0)^{n+1}} \quad [\text{по формуле Коши}] = \\
&= \frac{(r_n(f, \mu))'}{(n+1)(\mu - x_0)^n} \quad [\text{по лемме, доказанной выше}] = \\
&= \frac{r_{n-1}(f', \mu)}{(n+1)(\mu - x_0)^n} = \frac{(f'(\xi))^{(n)}}{(n+1)n!} \implies r_n(f, x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}
\end{aligned}$$

■

## 25. Формулы Маклорена для основных элементарных функций (без доказательства).

При  $x_0 = 0$  формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано называется формулой Маклорена

Приведем пример:  $f(x) = \sin x$ . Вспомним, что

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right) \implies f^{(n)}(0) = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k, \\ (-1)^k, & \text{если } n = 2k + 1 \end{cases}$$

Тогда получаем следующее разложение:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \bar{o}(x^{2n})$$

$$1. e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \bar{o}(x^n), x \rightarrow 0$$

$$2. \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n} + \bar{o}(x^n), x \rightarrow 0$$

$$3. (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{\alpha}{k} x^k + \bar{o}(x^n)$$

$$\text{Например } (1+x)^{\frac{1}{3}} - 1 = \left(\frac{1}{3}\right)x + \left(\frac{1}{2}\right)x^2 + \bar{o}(x^2) = \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2}x^2 + \bar{o}(x^2)$$

$$4. \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \bar{o}(x^{2n})$$

$$5. \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \bar{o}(x^{2n+1})$$

$$6. \operatorname{tg}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \dots + \frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!} \cdot x^{2n-1} + \bar{o}(x^{2n-1}), \text{ где } B_{2n} \text{ — числа Бернулли}$$

Но достаточно помнить, что  $\operatorname{tg}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \bar{o}(x^5)$ , т.е. общая формула для семинаров не нужна

$$7. \arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \dots + \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)} \cdot x^{2n+1} + \bar{o}(x^{2n+1})$$

$$\text{Достаточно знать } \arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \bar{o}(x^5)$$

$$8. \arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$$

$$9. \operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \bar{o}(x^{2n-1})$$

## 26. Правило Лопиталья.

**Теорема Лопиталья (первое правило)** Если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  таковы, что

1.  $f(x)$  и  $g(x)$  дифференцируемы в проколотой окрестности точки  $a$

2.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

3.  $g'(x) \neq 0$  в окрестности  $U(a)$

4. Существует  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Тогда существует  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

*Доказательство.* Доопределим функции в точке  $a$  нулём (непрерывности не нарушится, так как предел этих функций при  $x \rightarrow a$  равен 0). Из первого условия следует, что  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывны на отрезке  $[a, x]$ , где  $x$  принадлежит рассматриваемой окрестности точки  $a$ .

Применим обобщённую формулу конечных приращений (Коши) к  $f(x)$  и  $g(x)$  на отрезке  $[a, x]$ .

$$\exists \xi \in [a, x] : \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Так как  $g(a) = f(a) = 0$  получим, что  $\forall x \exists \xi \in [a, x] : \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ .

По определению предела,  $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x : a < x < a + \delta \implies \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - A \right| < \varepsilon$ . Но для каждого  $x$  из указанного интервала найдётся своё  $\xi_x$ , такое что  $\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$ . Но раз  $\xi_x \in (a, x)$ , то выполняется  $\left| \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} - A \right| < \varepsilon \implies \left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| < \varepsilon$ , что и требовалось доказать. ■

**Теорема Лопиталья (второе правило)** Если для функций  $f(x)$  и  $g(x)$  справедливо следующее:

1.  $f(x)$  и  $g(x)$  дифференцируемы на интервале  $(a, b)$
2.  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = \infty$
3.  $g'(x) \neq 0$  при  $x \in (a, b)$
4. Существует  $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$

то  $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$

*Доказательство.* Для начала положим, что  $A \leq 0$  (при  $A > 0$  доказательство практически аналогично приведенному). Пусть  $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ . Тогда по определению предела

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \iff \exists x_\varepsilon \in (a, b) : \forall x \in (a, x_\varepsilon) \implies \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - A \right| < \varepsilon$$

Здесь мы просто приняли, что  $x_\varepsilon = a + \delta$ , в остальном же интерпретация определения предела не изменилась.

Выберем произвольное  $x$  из данного интервала  $(a, x_\varepsilon)$ . Заметим, что выполняется теорема Коши (доопределим функции  $f$  и  $g$  в точке  $a$ , а в точке  $x_\varepsilon$  они уже определены):

$$\frac{f(x) - f(x_\varepsilon)}{g(x) - g(x_\varepsilon)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \text{ где } a < x < \xi < x_\varepsilon < b$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1 - \frac{f(x_\varepsilon)}{f(x)}}{1 - \frac{g(x_\varepsilon)}{g(x)}} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot \frac{1 - \frac{g(x_\varepsilon)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_\varepsilon)}{f(x)}}$$

Заметим теперь, что  $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x_\varepsilon)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{g(x_\varepsilon)}{g(x)} = 0$ , т.к.  $f(x_\varepsilon)$  и  $g(x_\varepsilon)$  — константы (а знаменатели по условию стремятся к  $\infty$ ). Тогда выберем для текущего закреплённого  $\varepsilon$  такое  $\delta(\varepsilon) > 0$ :

$$\forall x \in (a, a + \delta), \delta + a < b \implies \left| \frac{f(x_\varepsilon)}{f(x)} \right| < \varepsilon, \left| \frac{g(x_\varepsilon)}{g(x)} \right| < \varepsilon$$

Тогда получаем следующую оценку:

$$\frac{1 - \frac{g(x_\varepsilon)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_\varepsilon)}{f(x)}} \in \left( \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}, \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \right)$$

Поскольку  $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ , то  $\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} = 1 - \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon} > 1 - 2\varepsilon$  и  $\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} = 1 + \frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon} < 1 + \frac{8}{3}\varepsilon$ . Учитывая, что  $\frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overset{\circ}{U}_\varepsilon(A)$ :

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot \frac{1 - \frac{g(x_\varepsilon)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_\varepsilon)}{f(x)}} \in \left( (A - \varepsilon)(1 - 2\varepsilon), (A + \varepsilon) \left(1 + \frac{8}{3}\varepsilon\right) \right) = \\ &= \left( A - (\varepsilon + 2A\varepsilon - 2\varepsilon^2), A + \left(\varepsilon + \frac{8}{3}\varepsilon A + \frac{8}{3}\varepsilon^2\right) \right) \implies \\ \implies \frac{f(x)}{g(x)} &\in U_\mu(A), \text{ где } \mu = \max \left\{ \varepsilon + 2A\varepsilon - 2\varepsilon^2, \varepsilon + \frac{8}{3}\varepsilon A + \frac{8}{3}\varepsilon^2 \right\} \end{aligned}$$

Как видно,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu = 0$ , а для любого сколько угодно малого  $\mu$  всегда можно найти соответствующее  $\varepsilon$ , такое, что все значения отношения функций попадут в заданную  $\mu$ -трубку. Это и означает, что предел отношения функции равен  $A$ . ■

## 27. Достаточное условие строгого возрастания (убывания) функции на промежутке.

**Теорема.** Для того чтобы дифференцируемая функция  $f(x)$  на интервале  $(a, b)$  строго возрастала, достаточно, чтобы  $\forall x \in (a, b) : f'(x) > 0$

Для того чтобы дифференцируемая функция  $f(x)$  на интервале  $(a, b)$  строго убывала, достаточно, чтобы  $\forall x \in (a, b) : f'(x) < 0$

*Доказательство.* Докажем для строгого возрастания. Пусть  $f'(x) > 0 \forall x \in (a, b)$ . Выберем произвольные точки  $x_1, x_2 \in (a, b)$ , и, не ограничивая общности, скажем, что  $x_1 < x_2$ .

Применим формулу конечных приращений Лагранжа. Так как  $f'(\xi) > 0$  и  $x_2 > x_1$ , имеем

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1) > 0 \implies f(x_2) > f(x_1)$$

■

## 3 Вопросы, которые были убраны из программы коллоквиума

### 1. Эквивалентность определений предела функции по Коши и Гейне

**Теорема.** Определения предела функции в точке по Коши и Гейне эквивалентны

*Доказательство.* Пусть  $f$  определена на множестве  $X$  и число  $A$  является пределом функции  $f$  в точке  $x_0$  в смысле Коши. Выберем произвольную подходящую последовательность  $x_n, n \in \mathbb{N}$ , т.е. такую, для которой  $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in X$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ . Покажем, что  $A$  является пределом в смысле Гейне.

Зададим произвольное число  $\varepsilon > 0$  и укажем для него такое  $\delta > 0$ , что  $\forall x \in X$  из условия  $0 < |x - x_0| < \delta$  следует неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ . В силу того, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ , для  $\delta > 0$  найдется такой номер  $N \in \mathbb{N}$ , что для всех  $n \geq N$  будет выполняться неравенство  $|f(x_n) - A| < \varepsilon$ , т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ .

Докажем теперь обратное утверждение: предположим, что  $A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  в смысле Гейне, и покажем, что число  $A$  является пределом функции  $f$  в точке  $x_0$  в смысле Коши. Предположим, что это неверно, т.е.

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall \delta > 0 \exists x_\delta \in X : 0 < |x_\delta - x_0| < \delta : |f(x_\delta) - A| \geq \varepsilon$$

В качестве  $\delta$  рассмотрим  $\delta = \frac{1}{n}$ , а соответствующие значения  $x_\delta$  будем обозначать  $x_n$ . Тогда при любом  $n \in \mathbb{N}$  выполняются условия  $x_n \neq x_0$ ,  $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$  и  $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon$ . Отсюда следует, что последовательность  $\{x_n\}$  является подходящей, но число  $A$  не является пределом функции  $f$  в точке  $x_0$ . Получили противоречие. ■

## 2. Теорема о дифференцируемости обратной функции.

**Теорема.** Рассмотрим функцию  $f(x)$ , которая является строго монотонной на некотором интервале  $(a, b)$ . Если в этом интервале существует такая точка  $x_0$ , что  $f'(x_0) \neq 0$ , то функция  $x = \varphi(y)$ , обратная к функции  $y = f(x)$ , также дифференцируема в точке  $y_0 = f(x_0)$  и её производная равна

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

*Доказательство.* Пусть переменная  $y$  в точке  $y_0$  получает приращение  $\Delta y \neq 0$ . Соответствующее ему приращение переменной  $x$  в точке  $x_0$  обозначим как  $\Delta x$ , причем  $\Delta x \neq 0$  в силу строгой монотонности функции  $y = f(x)$ . Запишем отношение приращений в виде

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Допустим, что  $\Delta y \rightarrow 0$ , тогда  $\Delta x \rightarrow 0$ , поскольку обратная функция  $x = \varphi(y)$  является непрерывной в точке  $y_0$ . В пределе, при  $\Delta x \rightarrow 0$ , правая часть записанного соотношения становится равной

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

В таком случае левая часть тоже стремится к пределу, который по определению равен производной обратной функции:

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \varphi'(y_0)$$

Таким образом,

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

■

## 3. Производные функций, графики которых заданы параметрически.

**Теорема.** Зависимость между аргументом  $x$  и функцией  $y$  может быть задана в параметрическом виде с помощью двух уравнений:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

Пусть  $x = \varphi(t)$  и  $y = \psi(t)$  определены и дифференцируемы при  $t \in (a, b)$ , причем  $x'_t = \varphi'(t) \neq 0$  и  $x = \varphi(t)$  имеет обратную функцию  $t = \theta(x)$ , то

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

*Доказательство.* Перейдем от параметрического задания к явному. При этом получаем сложную функцию  $y = \psi(t) = \psi(\theta(x))$ , аргументов которой является  $x$ .

По правилу нахождения производной сложной функции имеем

$$y'_x = (\psi(\theta(x)))' = \psi'(\theta(x)) \cdot \theta'(x)$$

По теореме об обратной функции  $\theta'(x) = \frac{1}{\varphi'(t)}$ . А значит

$$y'_x = \psi'(\theta(x)) \cdot \theta'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

■

#### 4. Геометрический смысл дифференциала.

Дифференциал функции численно равен приращению ординаты касательной, проведенной к графику функции  $y = f(x)$  в данной точке, когда аргумент  $x$  получает приращение  $\Delta x$ .

[Подробнее тут](#)