Второй коллоквиум по МА-2

Денис Козлов
Telegram

Версия от 17.12.2020 16:21

0.1

0.2

0.3

0.4

0.5

0.6

0.7

0.8

0.9

0.10

0.11

0.12

0.13

0.14

0.15

0.16

0.17

0.18

0.19

0.20

0.21

0.22

0.23

0.24

0.25

0.26

0.27

0.28

0.29

0.30

0.31 Сформулируйте свойство непрерывности интеграла (о предельном переходе под знаком интеграла).

Теорема. Пусть все функции f_n ограничены и интегрируемы на D, а также $f_n \rightrightarrows f$ на D. Тогда функция f будет интегрируема на D и

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_D f_n(x)dx = \int\limits_D f(x)dx.$$

0.32 Сформулируйте свойство аддитивности интеграла.

Теорема. Пусть D — жорданово множество, а функция f — ограничена и интегрируема на D. Пусть A и B это дизъюнктные (непересекающиеся) жордановы подмножества D. Тогда:

$$\int\limits_{A \sqcup B} f(x)dx = \int\limits_{A} f(x)dx + \int\limits_{B} f(x)dx.$$

0.33 Как вводится понятие заряда на кольце множеств? Покажите, что для заряда справедлива формула включения-исключения.

Определение. Функция ν, определенная на некотором кольце множеств, называется зарядом, если

a) $\nu(\varnothing) = 0$;

b) $\nu(A \sqcup B) = \nu(A) + \nu(B)$ (аддитивность).

Таким образом, мера — это неотрицательный заряд.

Пример. Пусть f это ограниченная интегрируемая функция на множестве D. В силу свойства аддитивности интеграла имеем

$$\nu(A) = \int\limits_{A} f(x)dx.$$

Теорема. Для заряда справедлива формула включений-исключений:

$$\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B) - \nu(A \cap B).$$

Доказательство. Заметим, что $A \cup B = A \sqcup (B \setminus A)$ и $B = (B \setminus A) \sqcup (A \cap B)$.

- С одной стороны имеем

$$\nu(A \cup B) = \nu(A \sqcup (B \setminus A)) = \nu(A) + \nu(B \setminus A).$$

- С другой стороны имеем

$$\nu(A)+\nu(B)-\nu(A\cap B) = \nu(A)+\nu((B\setminus A)\sqcup(A\cap B))-\nu(A\cap B) = \nu(A)+\nu(B\setminus A)+\nu(A\cap B)-\nu(A\cap B) = \nu(A)+\nu(B\setminus A).$$

То есть оба выражения равны $\nu(A) + \nu(B \setminus A)$, из чего делаем вывод:

$$\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B \setminus A) = \nu(A) + \nu(B) - \nu(A \cap B).$$

■

0.34

0.35

0.36

0.37

0.38

0.39

0.40

0.41

0.42

0.43

0.44

0.45 Дайте определение цилиндрических координат (формулы, область задания, координатные линии, матрица Якоби перехода, якобиан)

Цилиндрические координаты (r, φ, z) в пространстве (x, y, z) вводятся формулами

$$x = r \cos \varphi$$

$y = r\sin\varphi$

$z = z$

При этом $U = (0;+\infty)\times[0;2\pi)\times\mathbb{R}$ и $X = \mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,z)|z\in\mathbb{R}\}$ Выколотая ось z при этом называется полярной осью. Угол φ называется азимутом или азимутальным углом.

Координатные линии r – лучи, выходящие из точки на полярной оси перпендикулярно полярной оси. Координатные линии φ – окружности с центром на полярной оси, расположенные в плоскостях, перпендикулярных полярной оси. Координатные линии z – прямые, параллельные полярной оси.

Матрица Якоби перехода имеет вид:
$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$
Якобиан равен r.

0.46 Дайте определение сферических координат (формулы, область задания, координатные линии, матрица Якоби перехода, якобиан)

Сферические координаты (r,θ,φ) в пространстве (x,y,z) вводятся формулами

$x = r\sin\theta\cos\varphi$

$y = r\sin\theta\sin\varphi$

$z = r\cos\theta$

При этом $U = (0;+\infty)\times(0;\pi)\times[0;2\pi)$ и $X = \mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,z)|z\in\mathbb{R}\}$ Выколотая ось z при этом называется полярной осью. Угол θ называется полярным углом, а угол φ называется азимутальным углом.

Координатные линии r – лучи, выходящие из начала координат. Координатные линии θ – полуокружности с центром в начале координат, и концами, расположенными на полярной оси. Координатные линии φ – окружности с центром на полярной оси, расположенные в плоскостях, перпендикулярных полярной оси.

Матрица Якоби перехода имеет вид:
$$\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi\\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0\end{pmatrix}$$
Якобиан равен $r^2\sin\theta$.

0.47

0.48

0.49

0.50

0.51

0.52

0.53

0.54

0.55

0.56

0.57

0.58

0.59

0.60

0.61

0.62

0.63

0.64 Выведите формулу для площади гладкой поверхности в $\mathbb{R}^3$, заданной уравнением $z = f(x, y)$, f – непрерывно дифференцируемая функция.

Простейший способ задать поверхность D – это задать её как график функции $f(x, y)$. Параметризацией такой поверхности будет

$$z = f(x, y), (x, y) \in G$$

Получим формулу для её площади. Вычислислим матрицу Якоби:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f'_x & f'_y \end{pmatrix}$$

Найдём матрицу Грама:

$$\left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x, y)}\right)^T \cdot \left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x, y)}\right) = \begin{pmatrix} (f'_x)^2 + 1 & f'_x f'_y \\ f'_x f'_y & (f'_y)^2 + 1 \end{pmatrix}$$

и её определитель:

$$((f'_x)^2 + 1)((f'_y)^2 + 1) - (f'_x f'_y)^2 = (f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1$$

Получаем площадь графика функции $z = f(x, y)$

$$\mu(D) = \iint_G \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1} dxdy$$

0.65

0.66

0.67

0.68

0.69

0.70

0.71

0.72

0.73

0.74

0.75