

Линейная алгебра, Коллоквиум II

Бобень Вячеслав

@darkkeks, GitHub

Благодарность выражается Левину Александру (@azerty1234567890)

и Милько Андрею (@andrew_milko) за видеозаписи лекций.

2019 — 2020

“К коллоку можете даже не готовиться”.

— Роман Сергеевич Авдеев

Содержание

1	Определения и формулировки	4
1.1	Сумма двух подпространств векторного пространства	4
1.2	Теорема о связи размерности суммы двух подпространств с размерностью их пересечения	4
1.3	Сумма нескольких подпространств векторного пространства	4
1.4	Линейная независимость нескольких подпространств векторного пространства	4
1.5	Разложение векторного пространства в прямую сумму подпространств	4
1.6	При каких условиях на подпространства U_1, U_2 векторного пространства V имеет место разложение $V = U_1 \oplus U_2$?	4
1.7	Матрица перехода от одного базиса векторного пространства к другому	4
1.8	Формула преобразования координат вектора при замене базиса	4
1.9	Линейное отображение векторных пространств, его простейшие свойства	4
1.10	Изоморфизм векторных пространств, изоморфные векторные пространства	5
1.11	Какими свойствами обладает отношение изоморфности на множестве всех векторных пространств?	5
1.12	Критерий изоморфности двух конечномерных векторных пространств	5
1.13	Матрица линейного отображения	5
1.14	Связь между координатами вектора и его образа при линейном отображении	5
1.15	Формула изменения матрицы линейного отображения при замене базисов	6
1.16	Сумма двух линейных отображений и её матрица. Произведение линейного отображения на скаляр и его матрица	6
1.17	Композиция двух линейных отображений и её матрица	6
1.18	Ядро и образ линейного отображения. Являются ли они подпространствами в соответствующих векторных пространствах?	6
1.19	Критерий инъективности линейного отображения в терминах его ядра	6
1.20	Связь между рангом матрицы линейного отображения и размерностью его образа	7
1.21	Каким свойством обладает набор векторов, дополняющих базис ядра линейного отображения до базиса всего пространства?	7
1.22	Теорема о связи размерностей ядра и образа линейного отображения	7
1.23	К какому простейшему виду можно привести матрицу линейного отображения путём замены базисов?	7
1.24	Линейная функция на векторном пространстве	7
1.25	Сопряжённое (двойственное) векторное пространство и его размерность	7
1.26	Базис сопряжённого пространства, двойственный к данному базису исходного векторного пространства	8
1.27	Билинейная форма на векторном пространстве	8
1.28	Матрица билинейной формы	8
1.29	Формула для вычисления значений билинейной формы в координатах	8
1.30	Формула изменения матрицы билинейной формы при переходе к другому базису	8
1.31	Симметричная билинейная форма. Критерий симметричности билинейной формы в терминах её матрицы	8
1.32	Квадратичная форма	9
1.33	Соответствие между симметричными билинейными формами и квадратичными формами	9
1.34	Симметризация билинейной формы	9

1.35	Поляризация квадратичной формы	9
1.36	Матрица квадратичной формы	9
1.37	Канонический вид квадратичной формы	9
1.38	Нормальный вид квадратичной формы над \mathbb{R}	9
1.39	Индексы инерции квадратичной формы над \mathbb{R}	9
1.40	Закон инерции для квадратичной формы над \mathbb{R}	9
1.41	Положительно/неотрицательно определённая квадратичная форма над \mathbb{R}	10
1.42	Отрицательно/неположительно определённая квадратичная форма над \mathbb{R}	10
1.43	Неопределённая квадратичная форма над \mathbb{R}	10
1.44	Способ нахождения индексов инерции квадратичной формы над \mathbb{R} , вытекающий из метода Якоби	10
1.45	Критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы над \mathbb{R}	10
1.46	Критерий отрицательной определённости квадратичной формы над \mathbb{R}	10
1.47	Евклидово пространство	10
1.48	Длина вектора в евклидовом пространстве	10
1.49	Неравенство Коши–Буняковского	11
1.50	Угол между ненулевыми векторами евклидова пространства	11
1.51	Матрица Грама системы векторов евклидова пространства	11
1.52	Свойства определителя матрицы Грама	11
1.53	Ортогональная система векторов евклидова пространства. Ортогональный базис	11
1.54	Ортонормированная система векторов евклидова пространства. Ортонормированный базис	11
1.55	Описание всех ортонормированных базисов евклидова пространства в терминах одного такого базиса и матриц перехода	11
1.56	Ортогональная матрица	11
1.57	Формула для координат вектора в ортогональном и ортонормированном базисах евклидова пространства	12
1.58	Ортогональное дополнение подмножества евклидова пространства	12
1.59	Чему равна размерность ортогонального дополнения к подпространству евклидова пространства?	12
1.60	Каким свойством обладают подпространство евклидова пространства и его ортогональное дополнение?	12
1.61	Ортогональная проекция вектора на подпространство	12
1.62	Ортогональная составляющая вектора относительно подпространства	12
1.63	Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в \mathbb{R}^n , заданное своим базисом	12
1.64	Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в терминах его ортогонального базиса	13
1.65	Теорема Пифагора в евклидовом пространстве	13
1.66	Расстояние между векторами евклидова пространства	13
1.67	Неравенство треугольника в евклидовом пространстве	13
1.68	Теорема о расстоянии между вектором и подпространством в терминах ортогональной составляющей	13
1.69	Псевдорешение несовместной системы линейных уравнений	13
1.70	Формула для расстояния от вектора до подпространства в терминах матриц Грама	13
1.71	k -мерный параллелепипед и его объём	13
1.72	Формула для объёма k -мерного параллелепипеда в n -мерном евклидовом пространстве	14
1.73	Формула для объёма n -мерного параллелепипеда в n -мерном евклидовом пространстве в терминах координат в ортонормированном базисе	14
1.74	В каком случае два базиса евклидова пространства называются одинаково ориентированными?	14
1.75	Векторное произведение в трёхмерном евклидовом пространстве	14
1.76	Критерий коллинеарности двух векторов трёхмерного евклидова пространства	14
1.77	Формула для вычисления векторного произведения в терминах координат в положительно ориентированном ортонормированном базисе	14
1.78	Смешанное произведение векторов трёхмерного евклидова пространства	14
1.79	Формула для вычисления смешанного произведения в терминах координат в положительно ориентированном ортонормированном базисе	14
1.80	Критерий компланарности трёх векторов трёхмерного евклидова пространства	14
1.81	Линейное многообразие. Характеризация линейных многообразий как сдвигов подпространств	14
1.82	Критерий равенства двух линейных многообразий. Направляющее подпространство и размерность линейного многообразия	15
1.83	Теорема о плоскости, проходящей через $k + 1$ точку в \mathbb{R}^n	15
1.84	Три способа задания прямой в \mathbb{R}^2 . Уравнение прямой в \mathbb{R}^2 , проходящей через две различные точки	15
1.85	Три способа задания плоскости в \mathbb{R}^3 . Уравнение плоскости в \mathbb{R}^3 , проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой	15
1.86	Три способа задания прямой в \mathbb{R}^3 . Уравнения прямой в \mathbb{R}^3 , проходящей через две различные точки	15
1.87	Случаи взаимного расположения двух прямых в \mathbb{R}^3	15
1.88	Формула для расстояния от точки до прямой в \mathbb{R}^3	15
1.89	Формула для расстояния от точки до плоскости в \mathbb{R}^3	15
1.90	Формула для расстояния между двумя скрещивающимися прямыми в \mathbb{R}^3	15
1.91	Линейный оператор	15

1.92	Матрица линейного оператора	15
1.93	Связь между координатами вектора и его образа при действии линейного оператора	15
1.94	Формула изменения матрицы линейного оператора при переходе к другому базису	15
1.95	Подобные матрицы	15
1.96	Подпространство, инвариантное относительно линейного оператора	15
1.97	Вид матрицы линейного оператора в базисе, дополняющем базис инвариантного подпространства	15
1.98	Вид матрицы линейного оператора в базисе, согласованном с разложением пространства в прямую сумму двух инвариантных подпространств	15
1.99	Собственный вектор линейного оператора	15
1.100	Собственное значение линейного оператора	15
1.101	Спектр линейного оператора	15
1.102	Диагонализуемый линейный оператор	15
1.103	Критерий диагонализуемости линейного оператора в терминах собственных векторов	15
1.104	Собственное подпространство линейного оператора	15
1.105	Характеристический многочлен линейного оператора	15
1.106	Связь спектра линейного оператора с его характеристическим многочленом	15
1.107	Алгебраическая кратность собственного значения линейного оператора	15
1.108	Геометрическая кратность собственного значения линейного оператора	15
1.109	Связь между алгебраической и геометрической кратностями собственного значения линейного оператора	15
1.110	Критерий диагонализуемости линейного оператора в терминах его характеристического многочлена и кратностей его собственных значений	15
1.111	Линейное отображение евклидовых пространств, сопряжённое к данному	16
1.112	Линейный оператор в евклидовом пространстве, сопряжённый к данному	16
1.113	Самосопряжённый линейный оператор в евклидовом пространстве	16
1.114	Теорема о каноническом виде самосопряжённого линейного оператора	16
1.115	Каким свойством обладают собственные подпространства самосопряжённого линейного оператора, отвечающие попарно различным собственным значениям?	16
1.116	Приведение квадратичной формы к главным осям	16
2	Вопросы на доказательство	16

1 Определения и формулировки

1. Сумма двух подпространств векторного пространства

Пусть V – векторное пространство над F .

$U, W \subseteq V$ – подпространства.

Определение. Суммой подпространств U, W называется множество

$$U + W := \{u + w \mid u \in U, w \in W\}.$$

2. Теорема о связи размерности суммы двух подпространств с размерностью их пересечения

Теорема. $\dim(U \cap W) + \dim(U + W) = \dim U + \dim W$.

Пример. Всякие две плоскости в \mathbb{R}^3 (содержащие 0) имеют общую прямую.

Здесь $V = \mathbb{R}^3$, $\dim U = 2$, $\dim W = 2$.

При этом $\dim(U + W) \leq 3$.

Тогда, $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) \geq 2 + 2 - 3 = 1$.

3. Сумма нескольких подпространств векторного пространства

Пусть $U_1, \dots, U_k \subseteq V$ – подпространства.

Определение. Суммой подпространств U_1, \dots, U_k называется множество

$$U_1 + \dots + U_k = \{u_1 + \dots + u_k \mid u_i \in U_i\}.$$

Замечание. $\dim(U_1 + \dots + U_k) \leq \dim U_1 + \dots + \dim U_k$.

4. Линейная независимость нескольких подпространств векторного пространства

Определение. Подпространства U_1, \dots, U_k называются *линейно независимыми*, если $\forall u_1 \in U_1, \dots, u_k \in U_k$ из условия $u_1 + \dots + u_k = 0$ следует $u_1 = \dots = u_k = 0$.

Пример. Если $\dim U_i = 1$ и $U_i = \langle u_i \rangle \forall i$, то U_1, \dots, U_k линейно независимы $\iff u_1, \dots, u_k$ линейно независимы.

5. Разложение векторного пространства в прямую сумму подпространств

Определение. Говорят, что векторное пространство V разлагается в *прямую сумму* U_1, \dots, U_k , если

1. $V = U_1 + \dots + U_k$,
2. U_1, \dots, U_k линейно независимы.

Обозначение: $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k$.

Пример. Если e_1, \dots, e_n – базис V , то $V = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle e_n \rangle$

6. При каких условиях на подпространства U_1, U_2 векторного пространства V имеет место разложение $V = U_1 \oplus U_2$?

7. Матрица перехода от одного базиса векторного пространства к другому

8. Формула преобразования координат вектора при замене базиса

9. Линейное отображение векторных пространств, его простейшие свойства

Пусть V, W – векторные пространства над F .

Определение. Отображение $\varphi: V \rightarrow W$ называется *линейным*, если

1. $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$,
2. $\varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v)$.

$\forall v_1, v_2, v \in V, \forall \lambda \in F$.

Простейшие свойства

1. $\varphi(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$.

Доказательство: $\varphi(\vec{0}_V) = \varphi(0 \cdot \vec{0}_V) = 0 \cdot \varphi(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$.

2. $\varphi(-v) = -\varphi(v)$.

Доказательство: $\varphi(-v) + \varphi(v) = \varphi(-v + v) = \varphi(0) = \varphi(\vec{0}_V) = \vec{0}_W \implies \varphi(-v) = -\varphi(v)$.

10. Изоморфизм векторных пространств, изоморфные векторные пространства

Определение. Отображение $\varphi: V \rightarrow W$ называется *изоморфизмом* если оно линейно и биективно.

Обозначение: $\varphi: V \xrightarrow{\sim} W$.

Определение. Два векторных пространства V, W называются *изоморфными*, если существует изоморфизм $\varphi: V \xrightarrow{\sim} W$.

Обозначается: $V \simeq W$ (либо $V \cong W$).

11. Какими свойствами обладает отношение изоморфности на множестве всех векторных пространств?

Теорема. Отношение изоморфности является отношением эквивалентности на множестве всех векторных пространств над фиксированным полем F .

12. Критерий изоморфности двух конечномерных векторных пространств

Теорема. Пусть V, W — два конечномерных векторных пространства над F .

Тогда, $V \simeq W \iff \dim V = \dim W$.

13. Матрица линейного отображения

Пусть V, W — векторные пространства над F .

$\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V ,

$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$ — базис W .

Пусть $\varphi: V \rightarrow W$ — линейное отображение.

$\forall j = 1, \dots, n$

$$\varphi(e_j) = a_{1j}f_1 + a_{2j}f_2 + \dots + a_{mj}f_m = (f_1, \dots, f_m) \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

Тогда, $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = (f_1, \dots, f_m) \cdot A$, где $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{m \times n}(F)$.

Определение. A называется матрицей линейного отображения φ в базисах \mathbf{e} и \mathbf{f} .

Обозначение: $A = A(\varphi, \mathbf{e}, \mathbf{f})$.

В j -м столбце матрицы A стоят координаты вектора $\varphi(e_j)$ в базисе \mathbf{f} .

14. Связь между координатами вектора и его образа при линейном отображении

Предложение. Пусть $\varphi: V \rightarrow W$ — линейное отображение,

$\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V ,

$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$ — базис W ,

$A = A(\varphi, \mathbf{e}, \mathbf{f})$.

$v \in V \implies v = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$,

$\varphi(v) = y_1f_1 + \dots + y_mf_m$.

Тогда,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

15. Формула изменения матрицы линейного отображения при замене базисов

Пусть теперь \mathbf{e}' — другой базис в V , \mathbf{f}' — другой базис в W .

$$\mathbf{e}' = \mathbf{e} \cdot C_{\in M_n},$$

$$\mathbf{f}' = \mathbf{f} \cdot D_{\in M_m}.$$

$$A = A(\varphi, \mathbf{e}, \mathbf{f}),$$

$$A' = A(\varphi, \mathbf{e}', \mathbf{f}').$$

Предложение. $A' = D^{-1}AC$.

16. Сумма двух линейных отображений и её матрица. Произведение линейного отображения на скаляр и его матрица

Пусть $\varphi, \psi \in \text{Hom}(V, W)$, $\lambda \in F$.

Определение.

1. Суммой линейных отображений φ и ψ называется линейное отображение $\varphi + \psi \in \text{Hom}(V, W)$, такое что $(\varphi + \psi)(v) := \varphi(v) + \psi(v)$.
2. Произведение φ на λ — это линейное отображение $\lambda\varphi \in \text{Hom}(V, W)$, такое что $(\lambda\varphi)(v) := \lambda\varphi(v)$.

Зафиксируем базисы $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ в V и $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$ в W .

Предложение.

1. $\varphi, \psi \in \text{Hom}(V, W)$, $A_\varphi = A(\varphi, \mathbf{e}, \mathbf{f})$
 $A_\psi = A(\psi, \mathbf{e}, \mathbf{f})$
 $A_{\varphi+\psi} = A(\varphi + \psi, \mathbf{e}, \mathbf{f}) \implies A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$
2. $\lambda \in F, \varphi \in \text{Hom}(V, W)$, $A_\varphi = A(\varphi, \mathbf{e}, \mathbf{f})$
 $A_{\lambda\varphi} = A(\lambda\varphi, \mathbf{e}, \mathbf{f}) \implies A_{\lambda\varphi} = \lambda A_\varphi$

17. Композиция двух линейных отображений и её матрица

Пусть $U \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{\varphi} W$ — цепочка линейных отображений, а $\varphi \circ \psi : U \rightarrow W$ — их композиция,

$\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V ,

$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$ — базис W ,

$\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_k)$ — базис U .

$$A_\varphi = A(\varphi, \mathbf{e}, \mathbf{f}),$$

$$A_\psi = A(\psi, \mathbf{g}, \mathbf{e}),$$

$$A_{\varphi \circ \psi} = A(\varphi \circ \psi, \mathbf{g}, \mathbf{f}).$$

Тогда, $A_{\varphi \circ \psi} = A_\varphi \cdot A_\psi$.

18. Ядро и образ линейного отображения. Являются ли они подпространствами в соответствующих векторных пространствах?

Пусть $\varphi : V \rightarrow W$.

Определение. Ядро линейной оболочки φ — это $\ker \varphi := \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\} \subseteq V$.

Образ линейного отображения φ — это $\text{Im } \varphi := \varphi(V) \subseteq W$.

Пример. $\Delta : \mathbb{R}[x]_{\leq n} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq n}, f \mapsto f'$,

$$\ker \Delta = \{f \mid f = \text{const}\},$$

$$\text{Im } \Delta = \mathbb{R}[x]_{\leq n-1}.$$

Предложение.

1. Ядро — подпространство в V .
2. Образ — подпространство в W .

19. Критерий инъективности линейного отображения в терминах его ядра

Пусть V, W — векторные пространства над F ,

$\varphi : V \rightarrow W$ — линейное отображение.

Ядро: $\ker \varphi := \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\} \subseteq V$.

Образ: $\text{Im } \varphi := \varphi(V) \subseteq W$.

Предложение.

- (a) φ инъективно $\iff \ker \varphi = \{0\}$,
 (b) φ сюръективно $\iff \operatorname{Im} \varphi = W$.

20. Связь между рангом матрицы линейного отображения и размерностью его образа

Пусть $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V ,
 $\mathfrak{f} = (f_1, \dots, f_m)$ — базис W ,
 $A = A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f})$.

Теорема. $\operatorname{rk} A = \dim \operatorname{Im} \varphi$.

Замечание. Число $\dim \operatorname{Im} \varphi$ называется *рангом* линейного отображения φ , обозначается $\operatorname{rk} \varphi$.

Следствие. $\operatorname{rk} A$ не зависит от выбора пары базисов \mathfrak{e} и \mathfrak{f} .

21. Каким свойством обладает набор векторов, дополняющих базис ядра линейного отображения до базиса всего пространства?

Предложение. Пусть e_1, \dots, e_k — базис $\ker \varphi$ и векторы e_{k+1}, \dots, e_n дополняют его до базиса всего V .
 Тогда, $\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)$ образуют базис в $\operatorname{Im} \varphi$.

22. Теорема о связи размерностей ядра и образа линейного отображения

Теорема. $\dim \operatorname{Im} \varphi + \dim \ker \varphi = \dim V$.

23. К какому простейшему виду можно привести матрицу линейного отображения путём замены базисов?

Предложение. Пусть $\operatorname{rk} \varphi = r$. Тогда существует базис \mathfrak{e} в V и базис \mathfrak{f} в W , такие что

$$A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}) = \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) = \begin{matrix} & \begin{matrix} r & & & n-r \end{matrix} \\ \begin{matrix} r \\ m-r \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

24. Линейная функция на векторном пространстве

Определение. *Линейной функцией* (или *линейной формой*, или *линейным функционалом*) на V называется всякое линейное отображение $\alpha: V \rightarrow F$.

Обозначение. $V^* := \operatorname{Hom}(V, F)$ — множество всех линейных функций на V .

25. Сопряжённое (двойственное) векторное пространство и его размерность

Из общей теории линейных отображений:

- V^* — векторное пространство (оно называется *сопряжённым* или *двойственным*).
- Если $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — фиксированный базис в V , то есть изоморфизм $V^* \simeq \operatorname{Mat}_{1 \times n}(F)$ (а это ни что иное, как строки длины n).
 $\alpha \rightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$
 $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$
 $\alpha(v) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n.$
 $\alpha_i = \alpha(e_i)$ — коэффициенты линейной функции α в базисе \mathfrak{e} .

Следствие. $\dim V^* = \dim V$ ($\implies V^* \simeq V$).

26. Базис сопряжённого пространства, двойственный к данному базису исходного векторного пространства

При $i = 1, \dots, n$ рассмотрим линейную функцию $\varepsilon_i \in V^*$, соответствующую строке $(0 \dots 1 \dots 0)$. Тогда $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ — базис V^* , он однозначно определяется условием $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$ (δ_{ij} — символ Кронекера)

Определение. Базис $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ пространства V^* , определенный условием выше, называется базисом, *двойственным* (сопряженным) к базису e .

Удобная запись условия:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} (e_1, \dots, e_n) = E.$$

27. Билинейная форма на векторном пространстве

Пусть V — векторное пространство над F .

Определение. *Билинейная форма* на V — это отображение $\beta: V \times V \rightarrow F$, линейное по каждому аргументу.

Линейность по 1-му аргументу

- $\beta(x_1 + x_2, y) = \beta(x_1, y) + \beta(x_2, y) \quad \forall x_1, x_2, y \in V,$
- $\beta(\lambda x, y) = \lambda \beta(x, y) \quad \forall x, y \in V, \lambda \in F.$

Линейность по 2-му аргументу

- $\beta(x, y_1 + y_2) = \beta(x, y_1) + \beta(x, y_2) \quad \forall x, y_1, y_2 \in V,$
- $\beta(x, \lambda y) = \lambda \beta(x, y) \quad \forall x, y \in V, \lambda \in F.$

28. Матрица билинейной формы

Считаем, что $\dim V = n < \infty$.

Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V .

Определение. Матрицей билинейной формы β в базисе e называется такая матрица $B \in M_n$, что $b_{ij} = \beta(e_i, e_j)$.

Обозначение: $B(\beta, e)$.

29. Формула для вычисления значений билинейной формы в координатах

Пусть $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$,

$$y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n.$$

Тогда,

$$\begin{aligned} \beta(x, y) &= \beta \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \beta \left(e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \underbrace{\beta(e_i, e_j)}_{\beta_{ij}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \beta_{ij} y_j \\ &= (x_1, \dots, x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

30. Формула изменения матрицы билинейной формы при переходе к другому базису

$$B = B(\beta, e).$$

Пусть $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ — другой базис V .

$$e' = e \cdot C.$$

$$B' := B(\beta, e').$$

Предложение. $B' = C^T B C$.

31. Симметричная билинейная форма. Критерий симметричности билинейной формы в терминах её матрицы

Определение. Билинейная форма β называется *симметричной*, если $\beta(x, y) = \beta(y, x) \forall x, y \in V$.

Пусть e — произвольный базис V .

Предложение. β симметрична $\iff B = B^T$.

32. Квадратичная форма

Пусть $\beta: V \times V \rightarrow F$ — билинейная форма на V .

Определение. Отображение $Q_\beta: V \rightarrow F$, $Q_\beta(x) = \beta(x, x)$, называется *квадратичной формой*, ассоциированной с билинейной формой β .

Пусть e — базис V , $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, $B = B(\beta, e)$.

Тогда,

$$Q_\beta(x) = (x_1 \dots x_n) B \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (b_{ij} + b_{ji}) x_i x_j.$$

33. Соответствие между симметричными билинейными формами и квадратичными формами

Предложение. Пусть в поле F выполнено условие $1 + 1 \neq 0$ (то есть $2 \neq 0$). Тогда отображение $\beta \mapsto Q_\beta$ является биекцией между симметричными билинейными формами на V и квадратичными формами на V .

34. Симметризация билинейной формы

Билинейная форма $\sigma(x, y) = \frac{1}{2} (\beta(x, y) + \beta(y, x))$ называется *симметризацией* билинейной формы β .

Если B и S — матрицы билинейных форм β и σ в некотором базисе, то $S = \frac{1}{2}(B + B^T)$.

35. Поляризация квадратичной формы

Симметричная билинейная форма $\beta(x, y) = \frac{1}{2} [Q(x + y) - Q(x) - Q(y)]$ называется *поляризацией* квадратичной формы Q .

36. Матрица квадратичной формы

Определение. Матрицей квадратной формы Q в базисе e называется матрица соответствующей симметричной билинейной формы (поляризации) в базисе e .

Обозначение: $B(Q, e)$.

Пример. Пусть $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$.

Если e — стандартный базис, то $B(Q, e) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

37. Канонический вид квадратичной формы

Определение. Квадратичная форма Q имеет в базисе e *канонический вид*, если $B(Q, e)$ диагональна.

Если $B(Q, e) = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n)$, то $Q(x_1, \dots, x_n) = b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + \dots + b_n x_n^2$.

38. Нормальный вид квадратичной формы над \mathbb{R}

Определение. Квадратичная форма над \mathbb{R} имеет *нормальный вид* в базисе e , если в этом базисе

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \varepsilon_1 x_1^2 + \dots + \varepsilon_n x_n^2,$$

где $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$.

39. Индексы инерции квадратичной формы над \mathbb{R}

Пусть $F = \mathbb{R}$.

Пусть $Q: V \rightarrow \mathbb{R}$ — квадратичная форма.

Можно привести к нормальному виду

$$Q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_{s+t}^2.$$

Здесь $i_+ := s$ — положительный индекс инерции квадратичной формы Q ,

$i_- := t$ — отрицательный индекс инерции квадратичной формы Q .

40. Закон инерции для квадратичной формы над \mathbb{R}

Теорема. Числа i_+ и i_- не зависят от базиса в котором Q принимает нормальный вид.

41. Положительно/неотрицательно определённая квадратичная форма над \mathbb{R}

42. Отрицательно/неположительно определённая квадратичная форма над \mathbb{R}

43. Неопределённая квадратичная форма над \mathbb{R}

Определение. Квадратичная форма Q над \mathbb{R} называется

Термин	Обозначение	Условие	Нормальный вид	Индексы инерции
Положительно определённой	$Q > 0$	$Q(x) > 0 \forall x \neq 0$	$x_1^2 + \dots + x_n^2$	$i_+ = n, i_- = 0$
Отрицательно определённой	$Q < 0$	$Q(x) < 0 \forall x \neq 0$	$-x_1^2 - \dots - x_n^2$	$i_+ = 0, i_- = n$
Неотрицательно определённой	$Q \geq 0$	$Q(x) \geq 0 \forall x$	$x_1^2 + \dots + x_k^2, k \leq n$	$i_+ = k, i_- = 0$
Неположительно определённой	$Q \leq 0$	$Q(x) \leq 0 \forall x$	$-x_1^2 - \dots - x_k^2, k \leq n$	$i_+ = 0, i_- = k$
Неопределённой	—	$\exists x : Q(x) > 0$ $\exists y : Q(y) < 0$	$x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_{s+t}^2$ $s, t \geq 1$	$i_+ = s, i_- = t$

44. Способ нахождения индексов инерции квадратичной формы над \mathbb{R} , вытекающий из метода Якоби

Пусть $Q: V \rightarrow \mathbb{R}$ — квадратичная форма,

$e = (e_1, \dots, e_n)$ — базис,

$B = B(Q, e)$,

δ_k — k -й угловой минор матрицы B .

Следствие (из метода Якоби). Пусть $\delta_k \neq 0 \forall k$. Тогда:

Число i_+ равно количеству сохранений знака в последовательности $1, \delta_1, \dots, \delta_n$.

Число i_- равно количеству перемен знака в последовательности $1, \delta_1, \dots, \delta_n$.

45. Критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы над \mathbb{R}

Пусть V — векторное пространство над \mathbb{R} , $\dim V = n$,

$e = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V ,

$B = B(Q, e)$,

B_k — левый верхний $k \times k$ блок,

$\delta_k = \det B_k$.

Теорема (Критерий Сильвестра положительной определенности).

$$Q > 0 \iff \delta_k > 0 \forall k = 1 \dots n.$$

46. Критерий отрицательной определённости квадратичной формы над \mathbb{R}

Следствие.

$$Q < 0 \iff \delta_k \begin{cases} > 0 & \text{при } k : 2, \\ < 0 & \text{при } k \not: 2. \end{cases}$$

47. Евклидово пространство

Определение. Евклидово пространство — это векторное пространство \mathbb{E} над \mathbb{R} , на котором задано *скалярное произведение*, то есть такое отображение $(\cdot, \cdot): \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$, что

1. (\cdot, \cdot) — симметричная билинейная форма,
2. Квадратичная форма (x, x) положительно определённая.

48. Длина вектора в евклидовом пространстве

Определение. Длина вектора $x \in \mathbb{E}$ — это $|x| := \sqrt{(x, x)}$.

Свойство: $|x| \geq 0$, причем $|x| = 0 \iff x = 0$.

Пример. Если $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением, то $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.

49. Неравенство Коши–Буняковского

Предложение (неравенство Коши–Буняковского). $\forall x, y \in \mathbb{E}$ верно $|(x, y)| \leq |x| \cdot |y|$, причём равенство $\iff x, y$ пропорциональны.

Пример. Пусть $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением, тогда

$$|x_1 y_1 + \dots + x_n y_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}.$$

50. Угол между ненулевыми векторами евклидова пространства

Пусть $x, y \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$, тогда $-1 \leq \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|} \leq 1$.

Определение. Угол между ненулевыми векторами $x, y \in \mathbb{E}$, это такой $\alpha \in [0, \pi]$, что $\cos \alpha = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}$.

Тогда $(x, y) = |x| |y| \cos \alpha$.

51. Матрица Грама системы векторов евклидова пространства

Пусть v_1, \dots, v_k — произвольная система векторов.

Определение. Матрица Грама этой системы — это

$$G(v_1, \dots, v_k) = \begin{pmatrix} (v_1, v_1) & (v_1, v_2) & \dots & (v_1, v_k) \\ (v_2, v_1) & (v_2, v_2) & \dots & (v_2, v_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (v_k, v_1) & (v_k, v_2) & \dots & (v_k, v_k) \end{pmatrix}.$$

Пример. $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением.

$a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n \rightsquigarrow A := (a_1, \dots, a_k) \in \text{Mat}_{n \times k}(\mathbb{R})$.

Тогда, $G(a_1, \dots, a_k) = A^T \cdot A$.

52. Свойства определителя матрицы Грама

Предложение. $\forall v_1, \dots, v_k \in \mathbb{E} \implies \det G(v_1, \dots, v_k) \geq 0$.

Более того, $\det G(v_1, \dots, v_k) > 0 \iff v_1, \dots, v_k$ линейно независимы.

53. Ортогональная система векторов евклидова пространства. Ортогональный базис

54. Ортонормированная система векторов евклидова пространства. Ортонормированный базис

Определение. Система ненулевых векторов v_1, \dots, v_k называется

1. *ортогональной*, если $(v_i, v_j) = 0 \ \forall i \neq j$ (то есть $G(v_1, \dots, v_k)$ диагональна),
2. *ортонормированной*, если $(v_i, v_j) = 0 \ \forall i \neq j$ и $(v_i, v_i) = 1$ ($\iff |v_i| = 1$). То есть $G(v_1, \dots, v_k) = E$.

Замечание. Всякая ортогональная (и в частности ортонормированная) система векторов автоматически линейно независима.

$$\det G(v_1, \dots, v_k) = |v_1|^2 \dots |v_k|^2 \neq 0.$$

Определение. Базис пространства называется *ортогональным* (соответственно *ортонормированным*), если он является ортогональной (ортонормированной) системой векторов.

55. Описание всех ортонормированных базисов евклидова пространства в терминах одного такого базиса и матриц перехода

Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ — ортонормированный базис в E .

Пусть $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ — какой-то другой базис.

$$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C, \ C \in M_n^0(\mathbb{R}).$$

Предложение. e' — ортонормированный базис $\iff C^T \cdot C = E$.

$$\text{Доказательство. } G(e'_1, \dots, e'_n) = C^T \underbrace{G(e_1, \dots, e_n)}_E C = C^T C.$$

$$e' \text{ ортонормированный} \iff G(e'_1, \dots, e'_n) = E \iff C^T C = E. \quad \blacksquare$$

56. Ортогональная матрица

Определение. Матрица $C \in M_n(\mathbb{R})$ называется *ортогональной* если $C^T C = E$.

Замечание. $C^T C = E \iff C C^T = E \iff C^{-1} = C^T$.

Свойства.

1. $C^T C = E \implies$ система столбцов $C^{(1)}, \dots, C^{(n)}$ — это ортонормированный базис в \mathbb{R}^n ,
2. $C C^T = E \implies$ система строк $C_{(1)}, \dots, C_{(n)}$ — это тоже ортонормированный базис в \mathbb{R}^n ,

В частности, $|c_{ij}| \leq 1$.

3. $\det C = \pm 1$.

Пример. $n = 2$. Ортогональные матрицы:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}.$$

$\det = 1 \qquad \det = -1$

57. Формула для координат вектора в ортогональном и ортонормированном базисах евклидова пространства

Пусть \mathbb{E} — евклидово пространство, (e_1, \dots, e_n) — ортогональный базис.

$v \in \mathbb{E}$.

Предложение. $v = \frac{(v, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 + \frac{(v, e_2)}{(e_2, e_2)} e_2 + \dots + \frac{(v, e_n)}{(e_n, e_n)} e_n$.

В частности, если e_1, \dots, e_n ортонормирован, то $v = (v, e_1) e_1 + \dots + (v, e_n) e_n$.

58. Ортогональное дополнение подмножества евклидова пространства

Определение. Ортогональное дополнение множества $S \subseteq \mathbb{E}$ — это множество $S^\perp := \{x \in \mathbb{E} \mid (x, y) = 0 \ \forall y \in S\}$.

59. Чему равна размерность ортогонального дополнения к подпространству евклидова пространства?

60. Каким свойством обладают подпространство евклидова пространства и его ортогональное дополнение?

Считаем, что $\dim \mathbb{E} = n < \infty$.

Предложение. Пусть $S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство. Тогда:

1. $\dim S^\perp = n - \dim S$.
2. $\mathbb{E} = S \oplus S^\perp$.
3. $(S^\perp)^\perp = S$.

61. Ортогональная проекция вектора на подпространство

62. Ортогональная составляющая вектора относительно подпространства

S — подпространство $\implies \mathbb{E} = S \oplus S^\perp$

$\forall v \in \mathbb{E} \exists! x \in S, y \in S^\perp$, такие что $x + y = v$.

Определение.

1. x называется *ортогональной проекцией* вектора v на подпространство S .
Обозначение: $x = \text{pr}_S v$.
2. y называется *ортогональной составляющей* вектора v относительно подпространства S .
Обозначение: $y = \text{ort}_S v$.

63. Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в \mathbb{R}^n , заданное своим базисом

Пусть $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением.

$S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство, a_1, \dots, a_k — базис S .

Пусть $A := (a_1, \dots, a_k) \in \text{Mat}_{n \times k}(\mathbb{R})$, $A^{(i)} = a_i$.

Предложение. $\forall v \in \mathbb{R}^n \quad \text{pr}_S v = A(A^T A)^{-1} A^T v$.

64. Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в терминах его ортогонального базиса

Пусть $S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство.

e_1, \dots, e_k — ортогональный базис в S .

Предложение. $\forall v \in \mathbb{E} \quad \text{pr}_S v = \sum_{i=1}^k \frac{(v, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i$.

В частности, если e_1, \dots, e_k ортонормирован, то $\text{pr}_S v = \sum_{i=1}^k (v, e_i) e_i$.

65. Теорема Пифагора в евклидовом пространстве

Теорема. Пусть $x, y \in \mathbb{E}$, $(x, y) = 0$. Тогда $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$.

66. Расстояние между векторами евклидова пространства

Определение. Расстояние между векторами $x, y \in \mathbb{E}$ — это $\rho(x, y) = |x - y|$.

67. Неравенство треугольника в евклидовом пространстве

Предложение. $\forall a, b, c \in \mathbb{E} \implies \rho(a, b) + \rho(b, c) \geq \rho(a, c)$.

68. Теорема о расстоянии между вектором и подпространством в терминах ортогональной составляющей

Теорема. Пусть $x \in \mathbb{E}$, $S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство. Тогда, $\rho(x, S) = |\text{ort}_S x|$, причем $\text{pr}_S x$ — это ближайший к x вектор из S .

69. Псевдорешение несовместной системы линейных уравнений

СЛУ $Ax = b$, $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$.

$$x_0 \text{ — решение системы} \iff Ax_0 = b \iff Ax_0 - b = 0 \iff |Ax_0 - b| = 0 \iff \rho(Ax_0, b) = 0.$$

Если СЛУ несовместна, то x_0 называется *псевдорешением*, если $\rho(Ax_0, b)$ минимально.

$$\rho(Ax_0, b) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \rho(Ax, b).$$

x_0 — решение задачи оптимизации $\rho(Ax, b) \xrightarrow{x \in \mathbb{R}^n} \min$.

70. Формула для расстояния от вектора до подпространства в терминах матриц Грама

Пусть \mathbb{E} — евклидово пространство, $\dim \mathbb{E} = n < \infty$.

$S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство, e_1, \dots, e_k — базис в S .

Теорема. $\forall x \in \mathbb{E} \quad \rho(x, S)^2 = \frac{\det G(e_1, \dots, e_k, x)}{\det G(e_1, \dots, e_k)}$.

71. k -мерный параллелепипед и его объём

Определение. k -мерный параллелепипед, натянутый на векторы a_1, \dots, a_k , это множество

$$P(a_1, \dots, a_k) := \left\{ \sum_{i=1}^k x_i a_i \mid 0 \leq x_i < 1 \right\}.$$

Основание: $P(a_1, \dots, a_{k-1})$.

Высота: $h := |\text{ort}_{\langle a_1, \dots, a_{k-1} \rangle} a_k|$.

Пример.

$k = 1$ $h = |a_1|$ здесь картинка, тоже лень :(

$k = 2$ основание — $P(a_1)$, высота — h дада, люблю картинку делать

Пример. k -мерный объём k -мерного параллелепипеда $P(a_1, \dots, a_k)$ — это величина $\text{vol } P(a_1, \dots, a_k)$, определяемая индуктивно:

$$k = 1 \implies \text{vol } P(a_1) := |a_1|.$$

$$k > 1 \implies \text{vol } P(a_1, \dots, a_k) := \text{vol } P(a_1, \dots, a_{k-1}) \cdot h.$$

72. Формула для объёма k -мерного параллелепипеда в n -мерном евклидовом пространстве

Теорема. $\text{vol } P(a_1, \dots, a_k)^2 = \det G(a_1, \dots, a_k)$.

73. Формула для объёма n -мерного параллелепипеда в n -мерном евклидовом пространстве в терминах координат в ортонормированном базисе

Пусть (e_1, \dots, e_n) — ортонормированный базис в \mathbb{E} ,

$$(a_1, \dots, a_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot A, \quad A \in M_n(\mathbb{R}).$$

Предложение. $\text{vol } P(a_1, \dots, a_n) = |\det A|$.

74. В каком случае два базиса евклидова пространства называются одинаково ориентированными?

Пусть $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$ и $\mathfrak{e}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ — два базиса в \mathbb{E} .

$$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C, \quad C \in M_n^0(\mathbb{R}).$$

Определение. Говорят, что \mathfrak{e} и \mathfrak{e}' одинаково ориентированы, если $\det C > 0$.

75. Векторное произведение в трёхмерном евклидовом пространстве

Теорема. Пусть $a, b \in \mathbb{R}^3$. Тогда $\exists! v \in \mathbb{E}$, такой что $(v, x) = \text{Vol}(a, b, x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$.

Определение. Вектор v из теоремы выше называется *векторным произведением* векторов a и b .

Обозначение: $[a, b]$ или $a \times b$.

76. Критерий коллинеарности двух векторов трёхмерного евклидова пространства

Предложение. $a, b \in \mathbb{E}$ коллинеарны $\iff [a, b] = 0$.

77. Формула для вычисления векторного произведения в терминах координат в положительно ориентированном ортонормированном базисе

Если $\mathfrak{e} = (e_1, e_2, e_3)$ — положительно ориентированный базис и $a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$, то

$$b = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$$

$$[a, b] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} := \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} e_3.$$

78. Смешанное произведение векторов трёхмерного евклидова пространства

Определение. $\forall a, b, c \in \mathbb{E}$ число $(a, b, c) := ([a, b], c)$ называется *смешанным произведением* векторов a, b, c .

Замечание. $(a, b, c) = \text{Vol}(a, b, c)$.

79. Формула для вычисления смешанного произведения в терминах координат в положительно ориентированном ортонормированном базисе

Если e_1, e_2, e_3 — положительно ориентированный ортонормированный базис, то

$$\begin{vmatrix} a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \\ b = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 \\ c = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3 \end{vmatrix} \implies (a, b, c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

80. Критерий компланарности трёх векторов трёхмерного евклидова пространства

a, b, c компланарны $\iff (a, b, c) = 0$.

81. Линейное многообразие. Характеризация линейных многообразий как сдвигов подпространств

Определение. *Линейное многообразие* в \mathbb{R}^n — это множество решений некоторой совместной СЛУ.

Пусть $Ax = b$ — СЛУ, $\emptyset \neq L \subseteq \mathbb{R}^n$ — множество решений, $x_z \in L$ — частное решение.

Было: Лемма: $L = x_z + S$, где S — множество решений ОСЛУ $Ax = 0$.

Предложение. Множество $L \subseteq \mathbb{R}^n$ является линейным многообразием $\iff L = v_0 + S$ для некоторых $v_0 \in \mathbb{R}^n$ и подпространства $S \subseteq \mathbb{R}^n$.

82. Критерий равенства двух линейных многообразий. Направляющее подпространство и размерность линейного многообразия

Предложение. Пусть $L_1 = v_1 + S_1$ и $L_2 = v_2 + S_2$ — два линейных многообразия в \mathbb{R}^n . Тогда,

$$L_1 = L_2 \iff \begin{cases} S_1 = S_2 (= S) \\ v_1 - v_2 \in S \end{cases}.$$

Если L — линейное многообразие, то $L = v_0 + S$, где S определено однозначно.

Определение. S называется *направляющим подпространством* линейного многообразия L .

Определение. *Размерностью* линейного многообразия называется размерность его направляющего подпространства.

- 83. Теорема о плоскости, проходящей через $k + 1$ точку в \mathbb{R}^n
- 84. Три способа задания прямой в \mathbb{R}^2 . Уравнение прямой в \mathbb{R}^2 , проходящей через две различные точки
- 85. Три способа задания плоскости в \mathbb{R}^3 . Уравнение плоскости в \mathbb{R}^3 , проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой
- 86. Три способа задания прямой в \mathbb{R}^3 . Уравнения прямой в \mathbb{R}^3 , проходящей через две различные точки
- 87. Случаи взаимного расположения двух прямых в \mathbb{R}^3
- 88. Формула для расстояния от точки до прямой в \mathbb{R}^3
- 89. Формула для расстояния от точки до плоскости в \mathbb{R}^3
- 90. Формула для расстояния между двумя скрещивающимися прямыми в \mathbb{R}^3
- 91. Линейный оператор
- 92. Матрица линейного оператора
- 93. Связь между координатами вектора и его образа при действии линейного оператора
- 94. Формула изменения матрицы линейного оператора при переходе к другому базису
- 95. Подобные матрицы
- 96. Подпространство, инвариантное относительно линейного оператора
- 97. Вид матрицы линейного оператора в базисе, дополняющем базис инвариантного подпространства
- 98. Вид матрицы линейного оператора в базисе, согласованном с разложением пространства в прямую сумму двух инвариантных подпространств
- 99. Собственный вектор линейного оператора
- 100. Собственное значение линейного оператора
- 101. Спектр линейного оператора
- 102. Диагонализуемый линейный оператор
- 103. Критерий диагонализуемости линейного оператора в терминах собственных векторов
- 104. Собственное подпространство линейного оператора
- 105. Характеристический многочлен линейного оператора
- 106. Связь спектра линейного оператора с его характеристическим многочленом
- 107. Алгебраическая кратность собственного значения линейного оператора
- 108. Геометрическая кратность собственного значения линейного оператора
- 109. Связь между алгебраической и геометрической кратностями собственного значения линейного оператора
- 110. Критерий диагонализуемости линейного оператора в терминах его характеристического многочлена и кратностей его собственных значений

- 111. Линейное отображение евклидовых пространств, сопряжённое к данному
- 112. Линейный оператор в евклидовом пространстве, сопряжённый к данному
- 113. Самосопряжённый линейный оператор в евклидовом пространстве
- 114. Теорема о каноническом виде самосопряжённого линейного оператора
- 115. Каким свойством обладают собственные подпространства самосопряжённого линейного оператора, отвечающие попарно различным собственным значениям?
- 116. Приведение квадратичной формы к главным осям

2 Вопросы на доказательство