

# Линейная алгебра

Бобень Вячеслав

@darkkeks, [GitHub](#)

Большую часть исходного кода предоставила Левина Александра.

Благодарность выражается Левиному Александру за видеозаписи лекций.

2019 — 2020

“К коллоку можете даже не готовиться”.

— Роман Сергеевич Авдеев

## Содержание

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Лекция 9.09.2019</b>   | <b>6</b>  |
| 1.1      | Матрицы   | 6         |
| 1.2      | Операции над матрицами  | 6         |
| 1.3      | Пространство $\mathbb{R}^n$ , его отождествление с матрицами-столбцами высоты $n$                                 | 6         |
| 1.4      | Транспонирование матриц, его простейшие свойства  | 7         |
| 1.5      | Умножение матриц  | 7         |
| <b>2</b> | <b>Лекция 12.09.2019</b>  | <b>9</b>  |
| 2.1      | Отступление о суммах  | 9         |
| 2.2      | Основные свойства умножения матриц  | 9         |
| 2.3      | Диагональные матрицы  | 10        |
| 2.4      | Единичная матрица и её свойства   | 10        |
| 2.5      | След квадратной матрицы и его свойства  | 11        |
| 2.6      | Системы линейных уравнений  | 11        |
| 2.6.1    | Совместные и несовместные системы   | 12        |
| 2.6.2    | Матричная форма записи СЛУ  | 12        |
| <b>3</b> | <b>Лекция 14.09.2019</b>  | <b>13</b> |
| 3.1      | Расширенная матрицы системы линейных уравнений  | 13        |
| 3.2      | Эквивалентные системы   | 13        |
| 3.3      | Как решить СЛУ?   | 13        |
| 3.3.1    | Элементарные преобразования СЛУ и соответствующие преобразования строк её расширенной матрицы                     | 13        |
| 3.3.2    | Сохранение множества решений системы линейных уравнений при элементарных преобразованиях                          | 14        |
| 3.4      | Ступенчатые матрицы   | 14        |
| 3.4.1    | Улучшенный ступенчатый вид матрицы  | 14        |
| 3.5      | Реализация элементарных преобразований строк матрицы при помощи умножения слева на подходящую матрицу             | 15        |
| <b>4</b> | <b>Лекция 19.09.2019</b>  | <b>16</b> |
| 4.1      | Метод Гаусса решения систем линейных уравнений  | 16        |
| 4.2      | Однородные системы линейных уравнений   | 17        |
| 4.3      | Связь между множеством решений системы линейных уравнений и множеством решений соответствующей однородной системы | 17        |
| 4.4      | Матричные уравнения вида $AX = B$ и $XA = B$ , общий метод их решения   | 17        |
| 4.5      | Обратные матрицы  | 18        |
| 4.6      | Перестановки на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$  | 18        |

|           |   |           |
|-----------|---|-----------|
| <b>5</b>  | <b>Лекция 23.09.2019</b>  | <b>19</b> |
| 5.1       | Инверсии в перестановке   | 19        |
| 5.2       | Знак и чётность перестановки  | 19        |
| 5.3       | Произведение перестановок   | 19        |
| 5.4       | Ассоциативность произведения перестановок   | 19        |
| 5.5       | Тождественная перестановка  | 19        |
| 5.6       | Обратная перестановка и её знак   | 20        |
| 5.7       | Теорема о знаке произведения перестановок   | 20        |
| 5.8       | Транспозиции, знак транспозиции   | 20        |
| 5.9       | Определитель квадратной матрицы   | 21        |
| 5.10      | Определители порядков 2 и 3   | 21        |
| <b>6</b>  | <b>Лекция 26.09.2019</b>  | <b>22</b> |
| 6.1       | Свойства определителей  | 22        |
| 6.2       | Поведение определителя при элементарных преобразованиях строк (столбцов)  | 24        |
| <b>7</b>  | <b>Лекция 30.09.2019</b>  | <b>25</b> |
| 7.1       | Определитель с углом нулей  | 25        |
| 7.2       | Определитель произведения матриц  | 25        |
| 7.3       | Дополнительные миноры и алгебраические дополнения к элементам квадратной матрицы  | 26        |
| 7.4       | Лемма об определителе матрицы, содержащей ровно один ненулевой элемент в некоторой строке   | 26        |
| 7.5       | Разложение определителя по строке (столбцу)   | 26        |
| 7.6       | Лемма о фальшивом разложении определителя   | 27        |
| 7.7       | Обратная матрица, её единственность   | 27        |
| 7.8       | Невырожденные матрицы   | 27        |
| 7.9       | Определитель обратной матрицы   | 27        |
| 7.10      | Присоединённая матрица  | 27        |
| 7.11      | Критерий обратимости квадратной матрицы, явная формула для обратной матрицы   | 27        |
| <b>8</b>  | <b>Лекция 2.11.2019</b>   | <b>29</b> |
| 8.1       | Следствия из критерия обратимости квадратной матрицы  | 29        |
| 8.2       | Формулы Крамера   | 29        |
| 8.3       | Понятие поля  | 29        |
| 8.4       | Простейшие примеры  | 29        |
| 8.5       | Построение поля комплексных чисел   | 30        |
| 8.5.1     | Формальная конструкция поля $\mathbb{C}$  | 30        |
| 8.5.2     | Проверка аксиом   | 30        |
| 8.6       | Алгебраическая форма комплексного числа, его действительная и мнимая части  | 31        |
| 8.7       | Комплексное сопряжение  | 31        |
| 8.7.1     | Свойства комплексного сопряжения  | 31        |
| 8.8       | Геометрическая модель комплексных чисел, интерпретация сложения и сопряжения в этой модели  | 31        |
| <b>9</b>  | <b>Лекция 7.11.2019</b>   | <b>32</b> |
| 9.1       | Модуль комплексного числа, его свойства   | 32        |
| 9.2       | Аргумент комплексного числа   | 32        |
| 9.3       | Тригонометрическая форма комплексного числа   | 32        |
| 9.4       | Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме  | 33        |
| 9.5       | Возведение в степень комплексных чисел в тригонометрической форме, формула Муавра   | 33        |
| 9.6       | Извлечение корней из комплексных чисел  | 33        |
| 9.7       | Основная теорема алгебры комплексных чисел (без доказательства)   | 33        |
| 9.8       | Деление многочленов с остатком  | 34        |
| 9.9       | Теорема Безу  | 34        |
| 9.10      | Кратность корня многочлена  | 34        |
| 9.11      | Утверждение о том, что всякий многочлен степени $n$ с комплексными коэффициентами имеет ровно $n$ корней с учётом кратностей        | 34        |
| <b>10</b> | <b>Лекция 14.11.2019</b>  | <b>35</b> |
| 10.1      | Векторные пространства, простейшие следствия из аксиом  | 35        |
| 10.1.1    | Определение векторного пространства   | 35        |
| 10.1.2    | Простейшие следствия из аксиом  | 35        |
| 10.2      | Подпространства векторных пространств   | 36        |
| 10.3      | Утверждение о том, что множество решений однородной системы линейных уравнений с $n$ неизвестными является подпространством в $F^n$ | 36        |
| 10.4      | Линейная комбинация конечного набора векторов   | 36        |

|           |  |           |
|-----------|--|-----------|
| 10.5      | Линейная оболочка подмножества векторного пространства, примеры  | 36        |
| <b>11</b> | <b>Лекция 21.11.2019</b>   | <b>37</b> |
| 11.1      | Утверждение о том, что линейная оболочка системы векторов является подпространством объемлющего векторного пространства                  | 37        |
| 11.2      | Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов   | 37        |
| 11.3      | Критерий линейной зависимости конечного набора векторов  | 38        |
| 11.4      | Основная лемма о линейной зависимости  | 38        |
| 11.5      | Базис векторного пространства  | 39        |
| 11.6      | Конечномерные и бесконечномерные векторные пространства  | 39        |
| 11.7      | Независимость числа элементов в базисе векторного пространства от выбора базиса  | 39        |
| 11.8      | Размерность конечномерного векторного пространства   | 39        |
| <b>12</b> | <b>Лекция 28.11.2019</b>   | <b>40</b> |
| 12.1      | Характеризация базисов в терминах единственности линейного выражения векторов  | 40        |
| 12.2      | Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений  | 40        |
| 12.3      | Метод построения фундаментальной системы решений   | 40        |
| 12.4      | Утверждение о возможности выбора из конечной системы векторов базиса её линейной оболочки  | 42        |
| 12.5      | Дополнение конечной линейно независимой системы векторов до базиса конечномерного векторного пространства                                | 42        |
| 12.6      | Лемма о добавлении вектора к конечной линейной независимой системе   | 42        |
| <b>13</b> | <b>Лекция 5.12.2019</b>  | <b>43</b> |
| 13.1      | Размерность подпространства конечномерного векторного пространства   | 43        |
| 13.2      | Ранг системы векторов  | 43        |
| 13.3      | Связь ранга системы векторов с размерностью её линейной оболочки   | 43        |
| 13.4      | Ранг матрицы: столбцовый и строковый   | 43        |
| 13.5      | Сохранение линейных зависимостей между столбцами матрицы при элементарных преобразованиях строк  | 44        |
| 13.6      | Инвариантность столбцового и строкового рангов матрицы при элементарных преобразованиях строк и столбцов                                 | 44        |
| 13.7      | Столбцовый и строковый ранги матрицы, имеющей улучшенный ступенчатый вид   | 44        |
| 13.8      | Равенство столбцового и строкового рангов матрицы  | 45        |
| 13.9      | Связь ранга квадратной матрицы с её определителем  | 45        |
| 13.10     | Подматрицы   | 45        |
| 13.11     | Связь рангов матрицы и её подматрицы   | 45        |
| <b>14</b> | <b>Лекция 12.12.2019</b>   | <b>46</b> |
| 14.1      | Миноры   | 46        |
| 14.2      | Теорема о ранге матрицы  | 46        |
| 14.3      | Приложения ранга матрицы к исследованию СЛУ  | 46        |
| 14.3.1    | Теорема Кронекера-Капелли  | 46        |
| 14.3.2    | Критерий существования единственного решения у совместной системы линейных уравнений в терминах ранга её матрицы коэффициентов           | 46        |
| 14.3.3    | Критерий существования единственного решения у системы линейных уравнений с квадратной матрицей коэффициентов в терминах её определителя | 47        |
| 14.3.4    | Размерность пространства решений однородной системы линейных уравнений в терминах ранга её матрицы коэффициентов                         | 47        |
| 14.3.5    | Реализация подпространства в $F^n$ в качестве множества решений однородной системы линейных уравнений                                    | 47        |
| 14.4      | Координаты вектора по отношению к фиксированному базису векторного пространства  | 47        |
| 14.5      | Описание всех базисов конечномерного векторного пространства в терминах одного базиса и матриц координат                                 | 48        |
| 14.6      | Матрица перехода от одного базиса конечномерного векторного пространства к другому   | 48        |
| 14.7      | Формула преобразования координат вектора при замене базиса   | 48        |
| <b>15</b> | <b>Лекция 9.01.2020</b>  | <b>50</b> |
| 15.1      | Сумма двух подпространств векторного пространства  | 50        |
| 15.2      | Связь размерностей двух подпространств с размерностями их суммы и пересечения  | 50        |
| 15.3      | Сумма нескольких подпространств векторного пространства  | 51        |
| 15.4      | Линейно независимые подпространства, пять эквивалентных условий  | 51        |
| 15.5      | Разложение векторного пространства в прямую сумму нескольких подпространств  | 52        |
| 15.6      | Проекция вектора на подпространство вдоль дополнительного подпространства  | 52        |

|  |           |
|--|-----------|
| <b>16 Лекция 16.01.2020</b>  | <b>53</b> |
| 16.1 Линейные отображения векторных пространств  | 53        |
| 16.2 Примеры линейных отображений  | 53        |
| 16.2.1 Пример 0  | 53        |
| 16.2.2 Пример 1  | 53        |
| 16.2.3 Пример 2  | 53        |
| 16.2.4 Пример 3  | 54        |
| 16.2.5 Пример 4  | 54        |
| 16.2.6 Пример 5  | 54        |
| 16.3 Простейшие свойства линейных отображений  | 54        |
| 16.4 Изоморфизм векторных пространств  | 54        |
| 16.5 Отображение, обратное к изоморфизму   | 55        |
| 16.6 Композиция двух линейных отображений, композиция двух изоморфизмов  | 55        |
| 16.7 Изоморфные векторные пространства   | 55        |
| 16.8 Отношение изоморфности на множестве всех векторных пространств  | 55        |
| 16.9 Классы изоморфизма векторных пространств  | 55        |
| 16.10 Критерий изоморфности двух конечномерных векторных пространств   | 56        |
| 16.11 Задание линейного отображения путём задания образов векторов фиксированного базиса   | 56        |
| <b>17 Лекция 23.01.2020</b>  | <b>57</b> |
| 17.1 Матрица линейного отображения   | 57        |
| 17.2 Примеры   | 57        |
| 17.3 Связь координат вектора и его образа при линейном отображении   | 58        |
| 17.4 Формула изменения матрицы линейного отображения между векторными пространствами $V$ и $W$ при замене их базисов                     | 58        |
| 17.5 Операции сложения и умножения на скаляр на множестве всех линейных отображений между двумя векторными пространствами                | 59        |
| 17.6 Матрица суммы двух линейных отображений и произведения линейного отображения на скаляр  | 59        |
| 17.7 Изоморфизм между пространством $\text{Hom}(V, W)$ и пространством $(m \times n)$ -матриц, где $n = \dim V$ , $m = \dim W$           | 59        |
| 17.8 Матрица композиции двух линейных отображений  | 59        |
| 17.9 Ядро и образ линейного отображения; утверждение о том, что они являются подпространствами в соответствующих векторных пространствах | 60        |
| <b>18 Лекция 25.01.2020</b>  | <b>61</b> |
| 18.1 Критерий инъективности линейного отображения в терминах его ядра  | 61        |
| 18.2 Характеризация изоморфизмов в терминах их ядер и образов  | 61        |
| 18.3 Связь размерности образа линейного отображения с рангом его матрицы   | 61        |
| 18.4 Инвариантность ранга матрицы относительно умножения на квадратную невырожденную матрицу слева или справа                            | 61        |
| 18.5 Свойство образов векторов, дополняющих базис ядра до базиса всего пространства  | 62        |
| 18.6 Теорема о связи размерностей ядра и образа линейного отображения  | 62        |
| 18.7 Приведение матрицы линейного отображения к диагональному виду с единицами и нулями на диагонали                                     | 62        |
| 18.8 Линейные функции на векторном пространстве  | 62        |
| 18.9 Примеры   | 62        |
| 18.10 Двойственное (сопряжённое) векторное пространство, его размерность в конечномерном случае  | 63        |
| 18.11 Двойственный базис   | 63        |
| <b>19 Лекция 6.02.2020</b>   | <b>64</b> |
| 19.1 Утверждение о том, что всякий базис сопряжённого пространства двойствен некоторому базису исходного пространства                    | 64        |
| 19.2 Билинейные формы на векторном пространстве  | 64        |
| 19.3 Примеры   | 64        |
| 19.3.1   | 64        |
| 19.3.2   | 64        |
| 19.3.3   | 64        |
| 19.4 Матрица билинейной формы по отношению к фиксированному базису   | 65        |
| 19.5 Существование и единственность билинейной формы с заданной матрицей   | 65        |
| 19.6 Формула изменения матрицы билинейной формы при переходе к другому базису  | 65        |
| 19.7 Ранг билинейной формы   | 66        |
| 19.8 Симметричные билинейные формы   | 66        |
| 19.9 Критерий симметричности билинейной формы в терминах её матрицы в каком-либо базисе  | 66        |
| 19.10 Квадратичные формы на векторном пространстве   | 66        |
| 19.11 Примеры  | 66        |

|   |           |
|---|-----------|
| 19.11.1   | 66        |
| 19.11.2   | 67        |
| 19.11.3   | 67        |
| 19.12 Соответствие между симметричными билинейными формами и квадратичными формами  | 67        |
| <b>20 Лекция 13.02.2020</b>   | <b>68</b> |
| 20.1 Симметризация билинейной формы и поляризация квадратичной формы  | 68        |
| 20.2 Канонический вид квадратичной формы  | 68        |
| 20.3 Теорема о приведении квадратичной формы к каноническому виду. Метод Лагранжа   | 68        |
| 20.4 Угловые миноры матрицы квадратичной формы  | 69        |
| 20.5 Метод Якоби приведения квадратичной формы к каноническому виду   | 70        |
| 20.6 Нормальный вид квадратичной формы над полем $\mathbb{R}$   | 71        |
| 20.7 Приведение квадратичной формы над $\mathbb{R}$ к нормальному виду  | 71        |
| <b>21 Лекция 20.02.2020</b>   | <b>72</b> |
| 21.1 Положительный и отрицательный индексы инерции квадратичной формы над $\mathbb{R}$  | 72        |
| 21.2 Закон инерции  | 72        |
| 21.3 Следствие метода Якоби о вычислении индексов инерции квадратичной формы над $\mathbb{R}$   | 72        |
| 21.4 Положительно определённые, отрицательно определённые, неотрицательно определённые, неположительно определённые, неопределённые квадратичные формы над $\mathbb{R}$ | 73        |
| 21.5 Примеры  | 73        |
| 21.6 Одно применение квадратичных форм над $\mathbb{R}$   | 74        |
| 21.6.1 Знаем из курса математического анализа   | 74        |
| 21.6.2 Применение квадратичных форм   | 74        |
| 21.7 Критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы  | 75        |
| 21.8 Критерий отрицательной определённости квадратичной формы   | 75        |
| 21.9 Евклидово пространство и скалярное произведение  | 75        |
| 21.10 Примеры   | 75        |
| <b>22 Лекция 20.02.2020</b>   | <b>76</b> |
| 22.1 Длина вектора евклидова пространства   | 76        |
| 22.2 Неравенство Коши–Буняковского  | 76        |
| 22.3 Угол между ненулевыми векторами евклидова пространства   | 76        |
| 22.4 Матрица Грама системы векторов евклидова пространства  | 76        |
| 22.5 Определитель матрицы Грама: неотрицательность, критерий положительности  | 77        |
| 22.6 Ортогональные векторы  | 77        |
| 22.7 Ортогональное дополнение подмножества евклидова пространства   | 77        |
| 22.8 Размерность ортогонального дополнения подпространства, ортогональное дополнение к ортогональному дополнению подпространства  | 77        |
| 22.9 Разложение евклидова пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения   | 77        |
| 22.10 Ортогональная проекция вектора на подпространство, ортогональная составляющая вектора относительно подпространства  | 78        |
| 22.11 Явная формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в $\mathbb{R}^n$ , заданное своим базисом   | 78        |
| 22.12 Ортогональные и ортонормированные системы векторов  | 78        |
| 22.13 Ортогональный и ортонормированный базис   | 78        |

# 1 Лекция 9.09.2019

## 1.1 Матрицы

**Определение 1.** Матрица размера  $n \times m$  — это прямоугольная таблица высоты  $m$  и ширины  $n$ .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$a_{ij}$  — элемент на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца

Краткая запись —  $A = (a_{ij})$

Множество всех матриц размера  $m \times n$  с коэффициентами из  $\mathbb{R}$  (множество всех действительных чисел) —  $\text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{R})$  или  $\text{Mat}_{n \times m}$

**Определение 2.** Две матрицы  $A \in \text{Mat}_{n \times m}$  и  $B \in \text{Mat}_{p \times q}$  называются *равными*, если  $m = p$ ,  $n = q$ , и соответствующие элементы равны

Пример.  $\begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix}$

## 1.2 Операции над матрицами

Для любых  $A, B \in \text{Mat}_{m \times n}$

• Сложение  $A + B := (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$

• Умножение на скаляр  $\lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda A := (\lambda a_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$

### Свойства суммы и произведения на скаляр

$\forall A, B, C \in \text{Mat}_{m \times n} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

- 1)  $A + B = B + A$  (коммутативность)
- 2)  $(A + B) + C = A + (B + C)$  (ассоциативность)
- 3)  $A + 0 = 0 + A = A$ , где

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ — нулевая матрица.}$$

- 4)  $A + (-A) = 0$   
 $-A = (-a_{ij})$  — противоположная матрица
- 5)  $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- 6)  $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- 7)  $\lambda(\mu A) = \lambda(\mu A)$
- 8)  $1A = A$

**Упражнение на дом.** Доказать эти свойства.

**Замечание.** Из свойств 1) – 8) следует, что  $\text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{R})$  является векторным пространством над  $\mathbb{R}$

## 1.3 Пространство $\mathbb{R}^n$ , его отождествление с матрицами-столбцами высоты $n$

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \forall i = 1, \dots, n\}$$

$\mathbb{R}$  — числовая прямая

$\mathbb{R}^2$  — плоскость

$\mathbb{R}^3$  — трехмерное пространство

Договоримся отождествлять  $\mathbb{R}^n$  со столбцами высоты  $n$

$$(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \text{вектор столбец}$$

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \forall i = 1, \dots, n \right\} = \text{Mat}_{n \times 1}(\mathbb{R})$$

$$\left[ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \right] \implies [x = y \iff x_i = y_i \forall i]$$

$$x + y := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

$$\lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda x_i := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

## 1.4 Транспонирование матриц, его простейшие свойства

$$A \in \text{Mat}_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A^T \in \text{Mat}_{n \times m} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} - \text{транспонированная матрица.}$$

Свойства:

- 1)  $(A^T)^T = A$
- 2)  $(A + B)^T = A^T + B^T$
- 3)  $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

$$\text{Пример. } (x_1 \quad \dots \quad x_n)^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Пример. } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^T = (x_1 \quad \dots \quad x_n)$$

$$\text{Пример. } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

## 1.5 Умножение матриц

Пусть  $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{m \times n}$

$A_{(i)} = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$  —  $i$ -я строка матрицы  $A$

$A^{(j)} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$  —  $j$ -й столбец матрицы  $A$

- 1) Частный случай: умножение строки на столбец той же длины

$$\underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_{1 \times n} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{n \times 1} = x_1 \cdot y_1 + \dots + x_n \cdot y_n$$

2) Общий случай:

$A$  – матрица размера  $m \times \underline{n}$

$B$  – матрица размера  $\underline{n} \times p$

$AB := C \in \text{Mat}_{m \times p}$ , где

$$C_{ij} = A_{(i)} B^{(j)} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Количество столбцов матрицы  $A$  равно количеству строк матрицы  $B$  — условие согласованности матриц.

$$\text{Пример.} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} (x_1 \quad \dots \quad x_n) := \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_2 y_1 & \dots & x_n y_1 \\ x_1 y_2 & x_2 y_2 & \dots & x_n y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 y_n & x_2 y_n & \dots & x_n y_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Пример.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 5 + 2 \cdot 1 \\ 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 1 & 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 5 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$



## 2 Лекция 12.09.2019

### 2.1 Отступление о суммах

Пусть  $S_p, S_{p+1}, \dots, S_q$  – набор чисел.

Тогда,  $\sum_{i=p}^q S_i := S_p + S_{p+1} + \dots + S_q$  – сумма по  $i$  от  $p$  до  $q$

Например,  $\sum_{i=1}^{100} i^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + 100^2$

**Свойства сумм:**

1.  $\lambda \sum_{i=1}^n S_i = \sum_{i=1}^n \lambda S_i$
2.  $\sum_{i=1}^n (S_i + T_i) = \sum_{i=1}^n S_i + \sum_{i=1}^n T_i$
3.  $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n S_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m S_{ij}$  – сумма всех элементов матрицы  $S = (S_{ij})$

### 2.2 Основные свойства умножения матриц

Пусть  $A \in \text{Mat}_{m \times n}$ ,  $B \in \text{Mat}_{n \times p}$

1.  $\underbrace{A(B+C)}_x = \underbrace{AB+AC}_y$  – левая дистрибутивность.

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} x_{ij} &= A_{(i)}(B+C)^{(j)} = \sum_{k=1}^n a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) \\ &= \sum_{k=1}^n (a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj}) \\ &= \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^n a_{ik}c_{kj} \\ &= A_{(i)}B^{(j)} + A_{(i)}C^{(j)} = y_{ij}. \end{aligned}$$

2.  $(A+B)C = AC + BC$  – правая дистрибутивность, доказывается аналогично.
3.  $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
4.  $(AB)C = A(BC)$  – ассоциативность.

*Доказательство.*  $\underbrace{(AB)C}_u = x$ ,  $A \underbrace{(BC)}_v = y$ .

$$\begin{aligned} x_{ij} &= \sum_{k=1}^n u_{ik} \cdot c_{kj} = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{l=1}^p a_{il}b_{lk} \right) c_{kj} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p (a_{il}b_{lk}c_{kj}) \\ &= \sum_{l=1}^p \sum_{k=1}^n (a_{il}b_{lk}c_{kj}) = \sum_{l=1}^p a_{il} \sum_{k=1}^n (b_{lk}c_{kj}) = \sum_{l=1}^p a_{il}v_{lj} = y_{ij}. \end{aligned}$$

5.  $\underbrace{(AB)^T}_x = \underbrace{B^T A^T}_y$ .

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} x_{ij} &= [AB]_{ji} = A_{(j)}B^{(i)} = \sum_{k=1}^n a_{jk} \cdot b_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^n b_{ki} \cdot a_{jk} = B_{(i)}^T (A^T)^{(j)} = y_{ij}. \end{aligned}$$

Умножение матриц не коммутативно.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Определение 3.**  $A \in \text{Mat}_{n \times n}$  называется *квадратной матрицей* порядка  $n$

Обозначение  $M_n := \text{Mat}_{n \times n}$

$A \in M_n$

## 2.3 Диагональные матрицы

**Определение 4.** Матрица  $A \in M_n$  называется *диагональной* если все ее элементы вне главной диагонали равны нулю ( $a_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ )

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} \implies A = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

**Лемма 2.1.**  $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n) \in M_n \implies$

1.  $\forall B \in \text{Mat}_{n \times p} \implies AB = \begin{pmatrix} a_1 B_{(1)} \\ a_2 B_{(2)} \\ \vdots \\ a_n B_{(n)} \end{pmatrix}$
2.  $\forall B \in \text{Mat}_{m \times n} \implies BA = \begin{pmatrix} a_1 B^{(1)} & a_2 B^{(2)} & \dots & a_n B^{(n)} \end{pmatrix}$

*Доказательство.*

1.  $[AB]_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_i & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_i b_{ij}$
2.  $[BA]_{ij} = \begin{pmatrix} b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ a_j \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = b_{ij} a_j$

■

## 2.4 Единичная матрица и её свойства

**Определение 5.** Матрица  $E = E_n = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$  называется *единичной матрицей* порядка  $n$ .

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

**Свойства:**

1.  $EA = A \quad \forall A \in \text{Mat}_{n \times p}.$
2.  $AE = A \quad \forall A \in \text{Mat}_{p \times n}.$
3.  $AE = EA = A \quad \forall A \in M_n.$

## 2.5 След квадратной матрицы и его свойства

**Определение 6.** Следом матрицы  $A \in M_n$  называется число  $tr A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ .

### Свойства:

1.  $\text{tr}(A + B) = \text{tr } A + \text{tr } B.$
2.  $\text{tr } \lambda A = \lambda \text{tr } A.$
3.  $\text{tr } A^T = \text{tr } A.$
4.  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA).$

$$\forall A \in \text{Mat}_{m \times n}, B \in \text{Mat}_{n \times m}.$$

*Доказательство.*  $AB = x \in M_m$ ,  $BA = y \in M_n$ .

$$\begin{aligned}\mathrm{tr} \, x &= \sum_{i=1}^m x_{ii} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (a_{ij} b_{ji}) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m (b_{ji} a_{ij}) = \sum_{j=1}^n y_{jj} = \mathrm{tr} \, y.\end{aligned}$$

*Пример.*  $A = (1, 2, 3), B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$tr(AB) = tr(1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6) = 32$$

$$\text{tr}(BA) = \text{tr} \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \\ 6 & 12 & 18 \end{pmatrix} = 4 + 10 + 18 = 32$$

## 2.6 Системы линейных уравнений.

Линейное уравнение:  $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$ .

$a_1, a_2, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$  – коэффициенты.

$x_1, x_2, \dots, x_n$  — НЕИЗВЕСТНЫЕ.

Система линейных уравнений (СЛУ):

[illegible]

m уравнений, n неизвестных

### Определение 7.

1. *Решение одного уравнения* – это такой набор значений неизвестных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , при подстановке которого в уравнение получаем тождество.
2. *Решение СЛУ* – такой набор значений неизвестных, который является решением каждого уравнения СЛУ.

Основная задача: решить СЛУ, т.е. найти все решения.

*Пример.*  $n = m = 1$

$$ax = b, a, b \in \mathbb{R}, x - \text{неизвестная}$$

1.  $a \neq 0 \implies x = \frac{b}{a}$  – единственное

- $$2. \ a = 0 \implies 0x = b$$

$$b \neq 0 \implies \text{решений нет.}$$
$$b = 0 \implies x - \text{любое} \implies \text{бесконечно много решений.}$$

### 2.6.1 Совместные и несовместные системы

**Определение 8.** СЛУ называется

- *совместной*, если у нее есть хотя бы одно решение,
- *несовместной*, если решений нет.

### 2.6.2 Матричная форма записи СЛУ

$$AX = B.$$

$$A \in \text{Mat}_{m \times n}(R) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{— матрица коэффициентов}$$

$$B \in \text{Mat}_{m \times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{— столбец правых частей}$$

$$X \in \text{Mat}_{m \times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{— столбец неизвестных}$$

### 3 Лекция 14.09.2019

#### 3.1 Расширенная матрицы системы линейных уравнений

$$Ax = b, A \in \text{Mat}_{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$$

Полная информация о СЛУ содержится в её *расширенной матрице*.

$$(A | b) = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

#### 3.2 Эквивалентные системы

**Определение 9.** Две системы уравнений от одних и тех же неизвестных называются *эквивалентными*, если они имеют одинаковые множества решений.

*Пример.* Рассмотрим несколько СЛУ

$$\text{А) } \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \iff \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{В) } \begin{cases} 2x_1 = 1 \\ 2x_2 = 1 \end{cases} \iff \left( \begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\text{С) } x_1 + x_2 = 1 \iff \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

А и В эквивалентны, так как обе имеют единственное решение  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

А и С не эквивалентны, так как С имеет бесконечно много решений.

#### 3.3 Как решить СЛУ?

**Идея:** выполнить преобразование СЛУ, сохраняющее множество её решений, и привести её к такому виду, в котором СЛУ легко решается.

$$\text{Пример. } \left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right) \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = b_1 \\ x_2 = b_2 \\ \vdots \\ x_n = b_n \end{cases}$$

##### 3.3.1 Элементарные преобразования СЛУ и соответствующие преобразования строк её расширенной матрицы

| тип | СЛУ  | расширенная матрица             |
|-----|--|---------------------------------|
| 1.  | К $i$ -му уравнению прибавить $j$ -ое, умноженное на $\lambda \in \mathbb{R}$ ( $i \neq j$ ) | $\mathfrak{A}_1(i, j, \lambda)$ |
| 2.  | Переставить $i$ -е и $j$ -е уравнения ( $i \neq j$ )   | $\mathfrak{A}_2(i, j)$          |
| 3.  | Умножить $i$ -ое уравнение на $\lambda \neq 0$   | $\mathfrak{A}_3(i, \lambda)$    |

1.  $\mathfrak{A}_1(i, j, \lambda)$ : к  $i$ -ой строке прибавить  $j$ -ую, умноженную на  $\lambda$  (покомпонентно),

$$a_{ik} \mapsto a_{ik} + \lambda a_{jk} \quad \forall k = 1, \dots, n,$$

$$b_i \mapsto b_i + \lambda b_j.$$

2.  $\mathfrak{A}_2(i, j)$ : переставить  $i$ -ую и  $j$ -ую строки.

3.  $\mathfrak{A}_3(i, \lambda)$ : умножить  $i$ -ю строку на  $\lambda$  (покомпонентно).

$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3$  называются *элементарными преобразованиями строк расширенной матрицы*.

### 3.3.2 Сохранение множества решений системы линейных уравнений при элементарных преобразованиях

**Лемма 3.1.** Элементарные преобразования СЛУ не меняют множество решений

*Доказательство.* Пусть мы получили СЛУ(★★) из СЛУ(★) путем применения элементарных преобразований.

1. Всякое решение системы (★) является решением (★★).
2. (★) получается из (★★) путем элементарных преобразований.

$$\begin{array}{c|c} (\star) \rightarrow (\star\star) & (\star\star) \rightarrow (\star) \\ \hline \Theta_1(i, j, \lambda) & \Theta_1(i, j, -\lambda) \\ \Theta_2(i, j) & \Theta_2(i, j) \\ \Theta_3(i, \lambda) & \Theta_3(i, \frac{1}{\lambda}) \end{array}$$

Следовательно, всякое решение (★★) является решением (★)  $\implies$  множества решений совпадают. ■

### 3.4 Ступенчатые матрицы

**Определение 10.** Строка  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  называется *нулевой*, если  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$  и *ненулевой* иначе ( $\exists i : a_i \neq 0$ ).

**Определение 11.** *Ведущим элементом* ненулевой строки называется первый её ненулевой элемент.

**Определение 12.** Матрица  $M \in \text{Mat}_{m \times n}$  называется *ступенчатой*, или имеет ступенчатый вид, если:

1. Номера ведущих элементов её ненулевых строк строго возрастают.
2. Все нулевые строки стоят в конце.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \diamond & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \diamond & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \diamond & * & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \diamond & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \diamond \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где  $\diamond \neq 0$ ,  $*$  – что угодно.

#### 3.4.1 Улучшенный ступенчатый вид матрицы

**Определение 13.** М имеет *улучшенный ступенчатый вид*, если:

1. М имеет обычный ступенчатый вид.
2. Все ведущие элементы равны 1.
3. В одном столбце с любым ведущим элементом стоят только нули.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & 0 & * & 0 & 0 & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & * & 0 & 0 & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Теорема 3.2.** 1) *Всякую матрицу элементарными преобразованиями можно привести к ступенчатому виду.*  
 2) *Всякую ступенчатую матрицу элементарными преобразованиями строк можно привести к улучшенному ступенчатому виду.*

**Следствие.** Всякую матрицу элементарными преобразованиями строк можно привести к **улучшенному** ступенчатому виду.

*Доказательство.*

1. Алгоритм. Если М - нулевая, то конец. Иначе:

Шаг 1: Ищем первый ненулевой столбец, пусть  $j$  – его номер.

Шаг 2: Переставляем строки, если нужно, добиваемся того, что  $a_{1j} \neq 0$

Шаг 3: Зануляем элементы в этом столбце используя первую строку –  $\Theta_1(2, 1, -\frac{a_{2j}}{a_{1j}}), \dots, \Theta_1(m, 1, -\frac{a_{mj}}{a_{1j}})$ .

В результате  $a_{ij} = 0$  при  $i = 2, 3, \dots, m$ .

Дальше повторяем все шаги для подматрицы  $M'$  (без первой строки и столбцов  $1, \dots, j$ ).

2. Алгоритм. Пусть  $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{rj_r}$  – ведущие элементы ступенчатой матрицы.

Шаг 1: Выполняем  $\mathfrak{E}_3(1, \frac{1}{a_{1j_1}}), \dots, \mathfrak{E}_3(r, \frac{1}{a_{rj_r}})$ , в результате все ведущие элементы равны 1.

Шаг 2: Выполняем  $\mathfrak{E}_1(r-1, r, -a_{r-1, j_r}), \mathfrak{E}_1(r-2, r, -a_{r-2, j_r}), \dots, \mathfrak{E}_1(1, r, -a_{1, j_r})$ . В результате все элементы над  $a_{rj_r}$  равны 0.

Аналогично обнуляем элементы над всеми остальными ведущими.

Итог: матрица имеет улучшенный ступенчатый вид. ■

### 3.5 Реализация элементарных преобразований строк матрицы при помощи умножения слева на подходящую матрицу

Всякое элементарное преобразование строк матрицы реализуется умножением как умножение слева на подходящую “элементарную матрицу”.

- $\mathfrak{E}_1(i, j, \lambda): A \mapsto U_1(i, j, \lambda)A$ , где

$$U_1(i, j, \lambda) = \begin{matrix} & & & & j \\ i & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(на диагонали стоят единицы, на  $i$ -м  $j$ -м месте стоит  $\lambda$ , остальные элементы нули)

- $\mathfrak{E}_2(i, j): A \mapsto U_2(i, j)A$ , где

$$U_2(i, j) = \begin{matrix} & i & & j \\ i & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ j & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(на диагонали стоят единицы, кроме  $i$ -го и  $j$ -го столбца (на  $i$ -м  $j$ -м и  $j$ -м  $i$ -м местах стоит 1, остальные нули)

- $\mathfrak{E}_3(i, \lambda): A \mapsto U_3(i, \lambda)A$ , где

$$U_3(i, \lambda) = \begin{matrix} & i \\ i & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(на диагонали стоят единицы, кроме  $i$ -го столбца, там  $\lambda$ , остальные элементы нули)

Элементарные преобразования столбцов — умножение на соответствующую матрицу справа.

**Упражнение на дом.** Доказательство.

## 4 Лекция 19.09.2019

Дана СЛУ с расширенной матрицей  $(A | b)$ .

Было: элементарные преобразования строк в  $(A | b)$  сохраняют множество решений.

### 4.1 Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Прямой ход метода Гаусса.

Выполняя элементарные преобразования строк в  $(A|b)$ , приведем  $A$  к ступенчатому виду:

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 0 & \dots & 0 & a_{ij_1} & * & \dots & \dots & b_1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_{2j_2} & * & \dots & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{rj_r} & b_r \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{r+1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

**Случай 1**  $\exists i \geq r+1 : b_i \neq 0$  (в  $A$  есть нулевая строка с  $b_i \neq 0$ )

Тогда в новой СЛУ  $i$ -е уравнение  $0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_n = b_i$ , т.е.  $0 = b_i \implies$  СЛУ несовместна.

**Случай 2** либо  $r = m$ , либо  $b_i = 0 \quad \forall i \geq r+1$

Выполняя элементарные преобразования строк приводим матрицу к улучшенному ступенчатому виду – обратный ход метода Гаусса

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 0 & \dots & 0 & 1 & * & 0 & * & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & * & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & b_3 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & b_r \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Неизвестные  $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_r}$  называются *главными*, а остальные *свободными*, где  $j_i$  – индексы столбцов с ведущими элементами.

**Подслучай 2.1**  $r = n$ , т.е. все неизвестные – главные

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right) \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = b_1 \\ x_2 = b_2 \\ \vdots \\ x_r = b_r \end{cases} \quad \text{— единственное решение.}$$

**Подслучай 2.2**  $r < n$ , т.е. есть хотя бы одна свободная неизвестная.

Перенесем в каждом уравнении все члены со свободными неизвестными в правую часть, получаем выражения всех главных неизвестных через свободные, эти выражения называется *общим решением исходной СЛУ*.

*Пример.* Улучшенный ступенчатый вид:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \end{array} \right)$$

Главные неизвестные:  $x_1, x_3$ .

Свободные неизвестные:  $x_2, x_4$ .

$x_2 = t_1, x_4 = t_2$  – параметры.

$$\begin{cases} x_1 = -1 - 3t_1 - t_2 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = 4 + 2t_2 \\ x_4 = t_2 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - 3t_1 - t_2 \\ t_1 \\ 4 + 2t_2 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = -1 - 3x_2 - x_4 \\ x_3 = 4 + 2x_4 \end{cases}$$

**Следствие.** Всякая СЛУ с коэффициентами из  $\mathbb{R}$  имеет либо 0 решений, либо одно решение, либо бесконечно много решений.



## 4.2 Однородные системы линейных уравнений

**Определение 14.** СЛУ называется однородной (ОСЛУ), если все её правые части равны 0. Расширенная матрица:  $(A \mid 0)$ .

**Очевидный факт.** Всякая ОСЛУ имеет нулевое решение ( $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ ).

**Следствие.** Всякая ОСЛУ либо имеет ровно 1 решение (нулевое), либо бесконечно много решений.

**Следствие.** Всякая ОСЛУ, у которой число неизвестных больше числа уравнений, имеет ненулевое решение (бесконечно много ненулевых решений).

*Доказательство.* В ступенчатом виде будет хотя бы одна свободная неизвестная. Придавая ей ненулевое значение, получим ненулевое решение. ■

## 4.3 Связь между множеством решений системы линейных уравнений и множеством решений соответствующей однородной системы.

Частное решение СЛУ — это какое-то одно её решение.

**Утверждение 4.1.** Пусть  $Ax = b$  — совместная СЛУ,

$x_0$  — частное решение  $Ax = b$ ,

$S \subset \mathbb{R}^n$  — множество решений ОСЛУ  $Ax = 0$ ,

$L \subset \mathbb{R}^n$  — множество решений  $Ax = b$ .

Тогда,  $L = x_0 + S$ , где  $x_0 + S = \{x_0 + v \mid v \in S\}$ .

*Доказательство.*

1. Пусть  $u \in L$  ( $u$  — решение  $Ax = b$ ), положим  $v = u - x_0$ .

Тогда,  $Av = A(u - x_0) = Au - Ax_0 = b - b = 0 \implies v \in S \implies L \subseteq x_0 + S$ .

2. Пусть  $v \in S$  ( $v$  — решение  $Ax = 0$ ), положим  $u = x_0 + v$ .

Тогда,  $Au = A(x_0 + v) = Ax_0 + Av = b + 0 = b \implies u \in L \implies x_0 + S \subseteq L$ .

Значит,  $x_0 + S = L$ . ■

## 4.4 Матричные уравнения вида $AX = B$ и $XA = B$ , общий метод их решения

Два типа матричных уравнений:

1.  $AX = B$

$A$  и  $B$  известны,  $X$  — неизвестная матрица.

2.  $XA = C$

$A$  и  $C$  известны,  $X$  — неизвестная матрица.

Из второго типа получается первый транспонированием матриц:  $XA = C \iff A^T X^T = B^T$ , то есть достаточно уметь решать только уравнения первого типа.

$A \quad X = B$  — это уравнение равносильно системе

$n \times m \times p \quad n \times p$

$$\begin{cases} AX^{(1)} = B^{(1)} \\ AX^{(2)} = B^{(2)} \\ \vdots \\ AX^{(p)} = B^{(p)} \end{cases}$$

Этот набор СЛУ надо решать одновременно методом Гаусса.

Записываем матрицу  $(A \mid B)$  и элементарными преобразованиями строк с ней приводим  $A$  к улучшенному ступенчатому виду.

Получаем  $(A' \mid B')$ , где  $A'$  имеет улучшенный ступенчатый вид.

Остается выписать общее решение для каждой СЛУ

$$\begin{cases} A'x^{(1)} = B'^{(1)} \\ A'x^{(2)} = B'^{(2)} \\ \vdots \\ A'x^{(p)} = B'^{(p)} \end{cases}$$

## 4.5 Обратные матрицы

**Определение 15.** Матрица  $B \in M_n$  называется *обратной*, к  $A$ , если  $AB = BA = E$ .

Обозначение:  $B = A^{-1}$ .

Факты:

1. Если  $\exists A^{-1}$ , то она определена однозначно

*Доказательство.* Пусть  $B, B'$  – две матрицы, обратные к  $A$ . Тогда  $B = B(AB') = (BA)B' = B'$ . ■

2. Если  $AB = E$  для некоторой  $B \in M_n$ , то  $BA = E$  автоматически и тогда  $B = A^{-1}$

**Замечание.** Доказывается на [Лекции 8](#).

**Следствие.**  $A^{-1}$  является решение матричного уравнения  $AX = E$  (если решение существует).

## 4.6 Перестановки на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$

**Определение 16.** *Перестановкой (подстановкой)* на множестве  $\{1, 2, \dots, n\}$  называется всякое биективное (взаимно однозначное) отображение множества  $\{1, 2, \dots, n\}$  в себя.

$$\sigma: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}.$$

$S_n$  – множество всех перестановок на множестве  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

Запись:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \text{ либо } \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \\ \sigma(i_1) & \sigma(i_2) & \sigma(i_3) & \dots & \sigma(i_n) \end{pmatrix}.$$

Здесь,  $\{i_1, i_2, \dots, i_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$ .

**Замечание.** Количество всех перестановок длины  $n$ :  $|S_n| = n!$

## 5 Лекция 23.09.2019

### 5.1 Инверсии в перестановке

Обозначение:  $S_n$  – множество всех перестановок из  $n$  элементов.

Пусть  $\sigma \in S_n$ ,  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $i \neq j$

**Определение 17.** Пара  $\{i, j\}$  (неупорядоченная) образует *инверсию* в  $\sigma$ , если числа  $i - j$  и  $\sigma(i) - \sigma(j)$  имеют разный знак (то есть либо  $i < j$  и  $\sigma(i) > \sigma(j)$ , либо  $i > j$  и  $\sigma(i) < \sigma(j)$ ).

### 5.2 Знак и чётность перестановки

**Определение 18.** *Знак* перестановки  $\sigma$  – это число  $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{\langle \text{число инверсий в } \sigma \rangle}$ .

**Определение 19.** Перестановка  $\sigma$  называется *четной*, если  $\text{sgn}(\sigma) = 1$  (четное количество инверсий), и *нечетной* если  $\text{sgn}(\sigma) = -1$  (нечетное количество инверсий).

Примеры.

| $\sigma$             | $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ |
|----------------------|--|--|
| число инверсий       | 0  | 1  |
| $\text{sgn}(\sigma)$ | 1  | -1   |
| чётность             | чётная   | нечетная                                       |

| $\sigma$             | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ |
|----------------------|--|--|--|--|--|--|
| число инверсий       | 0  | 1  | 2  | 3  | 2  | 1  |
| $\text{sgn}(\sigma)$ | 1  | -1   | 1  | -1   | 1  | -1   |
| чётность             | чётная   | нечетная   | чётная   | нечетная   | чётная   | нечетная   |

**Замечание.** число инверсий в  $\sigma \in S_n \leq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ , равенство достигается при  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

### 5.3 Произведение перестановок

**Определение 20.** *Произведением* (или *композицией*) двух перестановок  $\sigma, \rho \in S_n$  называется такая перестановка  $\sigma\rho \in S_n$ , что  $(\sigma\rho)(x) := \sigma(\rho(x)) \quad \forall x \in \{1, \dots, n\}$ .

Пример.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\rho\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Видно, что  $\sigma\rho \neq \rho\sigma \implies$  произведение перестановок не обладает свойством коммутативности.

### 5.4 Ассоциативность произведения перестановок

**Утверждение 5.1.** Умножение перестановок ассоциативно, то есть  $\sigma(\tau\pi) = (\sigma\tau)\pi \quad \forall \sigma, \tau, \pi \in S_n$ .

*Доказательство.*  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$  имеем:

$$[\sigma(\tau\pi)](i) = \sigma((\tau\pi)(i)) = \sigma(\tau(\pi(i))).$$

$$[(\sigma\tau)\pi](i) = (\sigma\tau)(\pi(i)) = \sigma(\tau(\pi(i))).$$

■

### 5.5 Тожественная перестановка

**Определение 21.** Перестановка  $id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \in S_n$  называется *тождественной* перестановкой.

**Свойства:**

$$\forall \sigma \in S_n \quad id \cdot \sigma = \sigma \cdot id = \sigma.$$

$$\text{sgn}(id) = 1.$$

## 5.6 Обратная перестановка и её знак

**Определение 22.**  $\sigma \in S_n$ ,  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \implies$  подстановка  $\sigma^{-1} := \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$  называется *обратной* к  $\sigma$  перестановкой.

**Свойства:**  $\sigma \cdot \sigma^{-1} = id = \sigma^{-1} \cdot \sigma$

## 5.7 Теорема о знаке произведения перестановок

**Теорема 5.2.**  $\sigma, \rho \in S_n \implies \text{sgn}(\sigma\rho) = \text{sgn} \sigma \cdot \text{sgn} \rho$ .

*Доказательство.* Для каждой пары  $i < j$  введем следующие числа:

$$\alpha(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если } \{i, j\} \text{ образует инверсию в } \rho \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\beta(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если } \{\rho(i), \rho(j)\} \text{ образует инверсию в } \sigma \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\gamma(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если } \{i, j\} \text{ образует инверсию в } \sigma\rho \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\text{“число инверсий в } \rho\text{”} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha(i, j)$$

$$\text{“число инверсий в } \sigma\rho\text{”} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \gamma(i, j)$$

$$\text{“число инверсий в } \sigma\text{”} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \beta(i, j) - \text{Почему?}$$

Когда  $\{i, j\}$  пробегает все неупорядоченные пары в  $\{1, 2, \dots, n\}$ , пара  $\{\rho(i), \rho(j)\}$  тоже пробегает все неупорядоченные пары в  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

Зависимость  $\gamma(i, j)$  от  $\alpha(i, j)$  и  $\beta(i, j)$ :

|                |   |   |   |   |
|----------------|---|---|---|---|
| $\alpha(i, j)$ | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $\beta(i, j)$  | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $\gamma(i, j)$ | 0 | 1 | 1 | 0 |

Вывод:  $\alpha(i, j) + \beta(i, j) \equiv \gamma(i, j) \pmod{2}$ .

Тогда  $\text{sgn}(\sigma\rho) = (-1)^{\sum \gamma(i, j)} = (-1)^{\sum \beta(i, j) + \sum \alpha(i, j)} = (-1)^{\sum \alpha(i, j)} \cdot (-1)^{\sum \beta(i, j)} = \text{sgn} \sigma \cdot \text{sgn} \rho$ . ■

**Следствие.**  $\sigma \in S_n \implies \text{sgn}(\sigma^{-1}) = \text{sgn}(\sigma)$ .

*Доказательство.*  $\sigma\sigma^{-1} = id \implies \text{sgn}(\sigma\sigma^{-1}) = \text{sgn}(id) \implies \text{sgn} \sigma \text{sgn} \sigma^{-1} = 1 \implies \text{sgn} \sigma = \text{sgn} \sigma^{-1}$ . ■

**Упражнение на дом:** Показать, что число инверсий в  $\sigma^{-1}$  такое же, как в  $\sigma$ .

## 5.8 Транспозиции, знак транспозиции

Пусть  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $i \neq j$ .

Рассмотрим перестановку  $\tau_{ij} \in S_n$ , такую что

$$\tau_{ij}(i) = j.$$

$$\tau_{ij}(j) = i.$$

$$\tau_{ij}(k) = k \quad \forall k \neq i, j.$$

**Определение 23.** Перестановки вида  $\tau_{ij}$  называются *транспозициями*.

**Замечание.**  $\tau$  – траспозиция  $\implies \tau^2 = id, \tau^{-1} = \tau$ .

**Определение 24.** Перестановки вида  $\tau_{i, i+1}$  называются *элементарными траспозициями*.

**Лемма 5.3.**  $\tau \in S_n$  – транспозиция  $\implies \text{sgn}(\tau) = -1$ .

*Доказательство.* Пусть  $\tau = \tau_{ij}$ , можем считать, что  $i < j$ .

$$\tau := \begin{pmatrix} 1 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n \\ 1 & \dots & i-1 & j & i+1 & \dots & j-1 & i & j+1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Посчитаем инверсии:

$\{i, j\}$

$\{i, k\}$  при  $i+1 \leq k \leq j-1$ , всего  $= j-i-1$

$\{k, j\}$  при  $i+1 \leq k \leq j-1$ , всего  $= j-i-1$

Значит, всего инверсий  $2(j-i-1) + 1 \equiv 1 \pmod{2} \implies \text{sgn}(\tau) = -1$ . ■

**Следствие.** При  $n \geq 2$  отображение  $\sigma \rightarrow \sigma\tau_{12}$  является биекцией между множеством четных перестановок в  $S_n$  и множеством нечетных перестановок в  $S_n$ .

**Следствие.** При  $n \geq 2$  количество нечетных перестановок в  $S_n$  равно количеству четных перестановок в  $S_n$  и равно  $\frac{n!}{2}$ .

**Теорема 5.4.** Всякая перестановка  $\sigma \in S_n$  может быть разложена в произведение конечного числа элементарных транспозиций.

*Доказательство.*

$$\sigma \in S_n := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\sigma\tau_{i,i+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & i+1 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(i+1) & \sigma(i) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

При умножении справа на  $\tau_{i,i+1}$  в нижней строке меняются местами  $i$ -ый и  $(i+1)$ -ый элементы.

Тогда, домножив  $\sigma$  на подходящее произведение  $\tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \dots \cdot \tau_k$  элементарных транспозиций, можем добиться, что нижняя строка есть  $(1, 2, \dots, n) \implies \sigma\tau_1\tau_2 \dots \tau_k = id$ .

Теперь, домножая справа на  $\tau_k\tau_{k-1} \dots \tau_1$ , получим  $\sigma = \tau_k\tau_{k-1} \dots \tau_1$ . ■

## 5.9 Определитель квадратной матрицы

**Определение 25.** Определителем матрицы  $A \in M_n$  называется число

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}.$$

( $\sum_{\sigma \in S_n}$  – сумма по всем перестановкам)

Другие обозначения:  $|A|$ ,  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

## 5.10 Определители порядков 2 и 3

•  $n = 2$

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

•  $n = 3$

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

## 6 Лекция 26.09.2019

Напомним что такое определитель:

$$\sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}. \quad (\star)$$

**Замечание.** Каждое слагаемое содержит ровно 1 элемент из каждой строки и ровно 1 элемент из каждого столбца.

### 6.1 Свойства определителей

**Свойство T**  $\det A = \det A^T$ .

*Доказательство.* Пусть  $B = A^T$ , тогда  $b_{ij} = a_{ji}$ .

$$\begin{aligned} \det A^T = \det B &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} \dots b_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)^{-1}} a_{2\sigma(2)^{-1}} \dots a_{n\sigma(n)^{-1}} \quad // \text{ замена } \sigma^{-1} = \rho // \\ &= \sum_{\rho \in S_n} \text{sgn}(\rho) a_{1\rho(1)} a_{2\rho(2)} \dots a_{n\rho(n)} = \det A. \end{aligned}$$

**Свойство 0** Если в  $A$  есть нулевая строка или нулевой столбец, то  $\det A = 0$ .

*Доказательство.* В связи со **свойством T** можно доказать только для строк.

Так как в каждом слагаемом  $(\star)$  присутствует элемент из каждой строки, то все слагаемые в  $(\star)$  равны 0  $\implies \det A = 0$ . ■

**Свойство 1** Если в  $A$  все элементы одной строки или одного столбца домножить на одно и то же число  $\lambda$ , то  $\det A$  тоже умножается на  $\lambda$ .

$$\begin{vmatrix} * & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda * & \lambda * & \lambda * & \lambda * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & \dots & * \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} * & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & * & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & \dots & * \end{vmatrix}$$

*Доказательство.* В связи со **свойством T** можно доказать только для строк.

$A_{(i)} \rightarrow \lambda A_{(i)} \implies a_{ij} \rightarrow \lambda a_{ij} \forall j \implies$  в  $(\star)$  каждое слагаемое умножается на  $\lambda \implies \det A$  умножается на  $\lambda$ . ■

**Свойство 2** Если  $A_{(i)} = A_{(i)}^1 + A_{(i)}^2$ , то  $\det A = \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)}^1 \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)}^2 \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$ .

Пример:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

Аналогично, если  $A^{(j)} = A_1^{(j)} + A_2^{(j)}$ , то  $\det A = \det(A^{(1)} \dots A_1^{(j)} \dots A^{(n)}) + \det(A^{(1)} \dots A_2^{(j)} \dots A^{(n)})$ .

*Доказательство.* В связи со **свойством T** можно доказать только для строк.

Пусть  $A_{(i)}^1 = (a'_{i1} a'_{i2} \dots a'_{in})$ ,  $A_{(i)}^2 = (a''_{i1} a''_{i2} \dots a''_{in}) \implies a_{ij} = a'_{ij} + a''_{ij}$ .

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots (a'_{i\sigma(i)} + a''_{i\sigma(i)}) \dots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a'_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a''_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} \\ &= \det A_1 + \det A_2. \end{aligned}$$

**Свойство 3** Если в  $A$  поменять местами две строки или два столбца, то  $\det A$  меняет знак.

*Доказательство.* В связи со **свойством Т** можно доказать только для строк.

Пусть  $A = (a_{ij}) \in M_n$ ,  $B = (b_{ij}) \in M_n$  – матрица, полученная из  $A$  перестановкой  $p$ -ой и  $q$ -ой строк.

Так же,  $\tau = \tau_{pq}$ .

$$b_{ij} = a_{\tau(i)j} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{если } i \neq p, q \\ a_{qj}, & \text{если } i = p \\ a_{pj}, & \text{если } i = q \end{cases}$$

$$b_{ij} = a_{\tau(i)j} \implies b_{i\sigma(i)} = a_{\tau(i)\sigma(i)} = a_{\tau(i),(\sigma\tau\tau)(i)}$$

$$\begin{aligned} \det B &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot b_{1\sigma(1)} \cdot b_{2\sigma(2)} \cdots b_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{\tau(1),\sigma(1)} \cdot a_{\tau(2),\sigma(2)} \cdots a_{\tau(n),\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{\tau(1),(\sigma\tau\tau)(1)} \cdot a_{\tau(2),(\sigma\tau\tau)(2)} \cdots a_{\tau(n),(\sigma\tau\tau)(n)} \\ &\quad // \text{ уберем } \tau(i), \text{ переупорядочив элементы в произведении } // \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1,(\sigma\tau)(1)} \cdot a_{2,(\sigma\tau)(2)} \cdots a_{n,(\sigma\tau)(n)} \\ &= - \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma\tau) \cdot a_{1,(\sigma\tau)(1)} \cdot a_{2,(\sigma\tau)(2)} \cdots a_{n,(\sigma\tau)(n)} \\ &\quad // \text{ замена } \rho = \sigma\tau // \\ &= - \sum_{\rho \in S_n} \operatorname{sgn}(\rho) \cdot a_{1,\rho(1)} \cdot a_{2,\rho(2)} \cdots a_{n,\rho(n)} \\ &= - \det A. \end{aligned}$$

**Свойство 4** Если к строке (столбцу) прибавить другую строку (столбец), умноженный на скаляр, то  $\det A$  не изменится.

*Доказательство.* В связи со **свойством Т** можно доказать только для строк.

$$A \rightarrow A' = \begin{pmatrix} \dots \\ A_{(i)} + \lambda A_{(j)} \\ \dots \\ A_{(j)} \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$|A'| = \begin{vmatrix} \dots \\ A_{(i)} \\ \dots \\ A_{(j)} \\ \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dots \\ \lambda A_{(j)} \\ \dots \\ A_{(j)} \\ \dots \end{vmatrix} = |A| + \lambda \begin{vmatrix} \dots \\ A_{(j)} \\ \dots \\ A_{(j)} \\ \dots \end{vmatrix} = |A| + \lambda 0 = |A|.$$

**Свойство 5** Если в  $A$  есть две одинаковые строки (столбца), то  $\det A = 0$ .

*Доказательство.* В связи со **свойством Т** можно доказать только для строк.

При перестановке двух одинаковых строк (столбцов):

–  $A$  не изменится  $\implies \det A$  не изменится

– по **свойству 3**:  $\det A$  меняет знак

Значит,  $\det A = -\det A \implies \det A = 0$ .

**Определение 26.** Матрица называется *верхнетреугольной*, если  $a_{ij} = 0$  при  $i > j$ , *нижнетреугольной*, если  $a_{ij} = 0$  при  $i < j$ .

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - \text{верхнетреугольная}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} - \text{нижнетреугольная}$$

**Замечание.** Всякая ступенчатая квадратная матрица верхнетреугольна.

**Свойство 6** Если  $A$  верхнетреугольная или нижнетреугольная, то  $\det A = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$ .

*Доказательство.* В связи со **свойством Т** можно доказать только для строк.

Выделим в  $(\star)$  слагаемые, которые могут быть отличны от нуля.

$$\begin{aligned} a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n-1,\sigma(n-1)} a_{n,\sigma(n)} &\neq 0 \\ \implies a_{n,\sigma(n)} &\neq 0 \implies \sigma(n) = n. \\ \implies a_{n-1,\sigma(n-1)} &\neq 0 \implies \sigma(n-1) \in \{n-1, n\}, \end{aligned}$$

но  $n$  уже занято, значит  $\sigma(n-1) = n-1$ , и так далее.

Рассуждая аналогично, получаем  $\sigma(k) = k \ \forall k \implies \sigma = id$  – это единственное слагаемое в  $(\star)$ , которое может быть не равно 0.

$$\operatorname{sgn}(id) = +1 \implies \det A = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}.$$

■

**Следствие.**  $\det \operatorname{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1 a_2 \dots a_n$ .

**Следствие.**  $\det E = 1$ .

## 6.2 Поведение определителя при элементарных преобразованиях строк (столбцов)

$\Theta_1(i, j, \lambda)$ :  $\det A$  не меняется.

$\Theta_2(i, j)$ :  $\det A$  меняет знак.

$\Theta_3(i, \lambda)$ :  $\det A$  умножается на  $\lambda$ .

*Алгоритм.* Элементарными преобразованиями строк  $A$  приводится к ступенчатому ( $\rightarrow$  верхнетреугольному) виду, в котором  $\det A$  легко считается.



## 7 Лекция 30.09.2019

### 7.1 Определитель с углом нулей

Предложение.

$$A = \left( \begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline 0 & R \end{array} \right) \text{ или } A = \left( \begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline Q & R \end{array} \right), \quad P \in M_k, \quad R \in M_{n-k} \implies \det A = \det P \det R.$$

Матрица с углом нулей:

$$\left( \begin{array}{c|ccc} * & * & * & * \\ \hline 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{array} \right)$$

НЕ матрица с углом нулей:

$$\left( \begin{array}{c|ccc} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ \hline 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{array} \right)$$

*Доказательство.* В силу свойства Т достаточно доказать для строк.

1. Элементарными преобразованиями строк в  $A$ , приведем  $(P \mid Q)$  к виду  $(P' \mid Q')$ , в котором  $P'$  имеет ступенчатый вид. При этом  $\det A$  и  $\det P$  умножаются на один и тот же скаляр  $\alpha \neq 0$ .
2. Элементарными преобразованиями строк в  $A$ , приведем  $(0 \mid R)$  к виду  $(0 \mid R')$ , в котором  $R'$  имеет ступенчатый вид. При этом  $\det A$  и  $\det R$  умножаются на один и тот же скаляр  $\beta \neq 0$ .

$$\begin{pmatrix} P' & Q' \\ 0 & R' \end{pmatrix} - \text{верхнетреугольная} \implies \det \begin{pmatrix} P' & Q' \\ 0 & R' \end{pmatrix} = \det P' \det R'.$$

$$\alpha\beta \det A = \det \begin{pmatrix} P' & Q' \\ 0 & R' \end{pmatrix} = \det P' \det R' = (\alpha \det P)(\beta \det R) = \alpha\beta \det P \det R. \quad \blacksquare$$

### 7.2 Определитель произведения матриц

**Теорема 7.1.**  $A, B \in M_n \implies \det(AB) = \det A \det B$ .

*Доказательство.* Выполним с матрицей  $A$  одно элементарное преобразование строк, получим матрицу  $A'$ .

$$A \rightsquigarrow A' = UA.$$

Такое же преобразование строк с  $AB$ .

$$AB \rightsquigarrow U(AB) = (UA)B = A'B.$$

Таким образом, сначала выполнив элементарное преобразование и домножив на матрицу  $B$ , либо домножив на  $B$  и затем применив элементарное преобразование, получим тот же результат.

Тогда, цепочка элементарных преобразований строк:

$$A \rightsquigarrow C - \text{улучшенный ступенчатый вид.}$$

Так же цепочка для  $AB$ :

$$AB \rightsquigarrow CB.$$

При этом,  $\det A$  и  $\det AB$  умножились на один и тот же скаляр  $\alpha \neq 0$

$$\det C = \alpha \det A.$$

$$\det CB = \alpha \det AB.$$

**Случай 1** Последняя строка состоит из нулей:

$$\begin{aligned} C_{(n)} &= (0 \dots 0) \\ \implies [CB]_{(n)} &= C_{(n)}B = (0 \dots 0) \\ \implies \det CB &= 0 = 0 \cdot \det B = \det C \det B. \end{aligned}$$

**Случай 2** Последняя строка ненулевая:

$$C_{(n)} \implies C = E,$$

так как матрица  $C$  имеет улучшенный ступенчатый вид.

Значит,

$$\det CB = \det B = 1 \cdot \det B = \det C \cdot \det B.$$

Из этих двух случаев следует, что  $\det CB = \det C \det B$ .

Сокращая  $\alpha$  получаем,

$$\det CB = \det C \det B \implies \det AB = \det A \det B. \quad \blacksquare$$

**Замечание.** Пусть  $A \in M_n$ ,  $A_{\text{ул}}$  – её улучшенный ступенчатый вид.

$$\det A \neq 0 \iff A_{\text{ул}} = E.$$

### 7.3 Дополнительные миноры и алгебраические дополнения к элементам квадратной матрицы

**Определение 27.** *Дополнительным минором* к элементу  $a_{ij}$  называется определитель  $(n-1) \times (n-1)$  матрицы, получающейся из  $A$  вычеркиванием  $i$ -ой строки и  $j$ -го столбца.

Обозначение:  $\overline{M}_{ij}$ .

**Определение 28.** *Алгебраическим дополнением* к элементу  $a_{ij}$  называется число  $A_{ij} = (-1)^{i+j} \overline{M}_{ij}$ .

### 7.4 Лемма об определителе матрицы, содержащей ровно один ненулевой элемент в некоторой строке

**Лемма 7.2.** Пусть  $a_{ik} = 0$  при всех  $k \neq j$ . Тогда  $\det A = a_{ij} \cdot A_{ij}$ .

*Доказательство.*

$$A = \left( \begin{array}{c|c|c} P & U & Q \\ \hline 0 \dots 0 & a_{ij} & 0 \dots 0 \\ \hline R & V & S \end{array} \right).$$

Переставляя соседние строки  $i-1$  раз, вытолкнем  $i$ -ю строку вверх.

$$A' = \left( \begin{array}{c|c|c} 0 \dots 0 & a_{ij} & 0 \dots 0 \\ \hline P & U & Q \\ \hline R & V & S \end{array} \right)$$

Переставляя соседние столбцы  $j-1$  раз, переместим  $j$ -й столбец на первое место.

$$A'' = \left( \begin{array}{c|c|c} a_{ij} & 0 \dots 0 & 0 \dots 0 \\ \hline U & P & Q \\ \hline V & R & S \end{array} \right)$$

$$\det A'' = a_{ij} \det \left( \begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline R & S \end{array} \right) = a_{ij} \overline{M}_{ij}.$$

$$\implies \det A = (-1)^{i-1+j-1} \det A'' = (-1)^{i+j} a_{ij} \overline{M}_{ij} = a_{ij} A_{ij}. \quad \blacksquare$$

### 7.5 Разложение определителя по строке (столбцу)

**Теорема 7.3.** При любом фиксированном  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij} \text{ — разложение по } i\text{-й строке.}$$

Аналогично, для любого фиксированного  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij} \text{ — разложение по } j\text{-у столбцу.}$$

*Доказательство.* В силу свойства Т достаточно доказать для строк.

$$A_{(i)} = (a_{i1}, 0, \dots, 0) + (0, a_{i2}, 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, 0, a_{in}).$$

Требуемое следует из [свойства 2](#) определителей и леммы. \blacksquare

## 7.6 Лемма о фальшивом разложении определителя

### Лемма 7.4.

1. При любых  $i, k \in \{1, 2, \dots, n\} : i \neq k \implies \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} = 0$ ,
2. При любых  $j, k \in \{1, 2, \dots, n\} : j \neq k \implies \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ik} = 0$ .

*Доказательство.* В силу свойства Т достаточно доказать для строк.

Пусть  $B \in M_n$  – матрица, полученная из  $A$  заменой  $k$ -й строки на  $i$ -ю.

$$B = \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$$

В  $B$  есть две одинаковые строки  $\implies \det B = 0$ .

Разлагая  $\det B$  по  $k$ -й строке, получаем

$$\det B = \sum_{j=1}^n b_{kj} B_{kj} = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj}.$$

■

## 7.7 Обратная матрица, её единственность

Пусть дана  $A \in M_n$ .

**Определение 29.** Матрица  $B \in M_n$  называется *обратной* к  $A$ , если  $AB = BA = E$ .

Обозначение:  $A^{-1}$ .

**Лемма 7.5.** Если  $\exists A^{-1}$ , то она единственна.

*Доказательство.* Пусть  $B, C \in M_n$  такие, что  $AB = BA = E$  и  $AC = CA = E$ . Тогда,

$$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C \implies B = C.$$

■

## 7.8 Невырожденные матрицы

**Определение 30.** Матрица  $A \in M_n$  называется *невырожденной*, если  $\det A \neq 0$ , и *вырожденной* иначе (то есть  $\det A = 0$ ).

## 7.9 Определитель обратной матрицы

**Лемма 7.6.** Если  $\exists A^{-1}$ , то  $\det A \neq 0$ .

*Доказательство.*  $AA^{-1} = E \implies \det(AA^{-1}) = \det E \implies \det A \det(A^{-1}) = 1$ .

■

## 7.10 Присоединённая матрица

**Определение 31.** Присоединённой к  $A$  матрицей называется матрица  $\hat{A} = (A_{ij})^T$ .

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

## 7.11 Критерий обратимости квадратной матрицы, явная формула для обратной матрицы

**Теорема 7.7.**  $A$  обратима (то есть  $\exists A^{-1}$ )  $\iff A$  невырождена ( $\det A \neq 0$ ), при этом  $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \hat{A}$ .

*Доказательство.* Утверждение в одну сторону следует из леммы 2.

Пусть  $\det A \neq 0$ . Покажем, что  $\frac{1}{\det A} \widehat{A} = A^{-1}$ . Для этого достаточно доказать, что  $A\widehat{A} = \widehat{A}A = \det A \cdot E$ .

Для  $X = A\widehat{A}$  имеем

$$x_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} [\widehat{A}]_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = \begin{cases} \det A, & \text{при } i = j \\ 0, & \text{при } i \neq j \end{cases}.$$

Для  $Y = \widehat{A}A$  имеем

$$y_{ij} = \sum_{k=1}^n [\widehat{A}]_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^n A_{ki} a_{kj} = \begin{cases} \det A, & \text{при } i = j \\ 0, & \text{при } i \neq j \end{cases}.$$

■

## 8 Лекция 2.11.2019

### 8.1 Следствия из критерия обратимости квадратной матрицы

**Следствие.** Если  $AB = E$ , то  $BA = E$  (и тогда  $A = B^{-1}$ ,  $B = A^{-1}$ ).

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} AB = E &\implies \det A \det B = 1 \implies \det A \neq 0 \implies \exists A^{-1}. \\ BA = EBA &= (A^{-1}A)BA = A^{-1}(AB)A = A^{-1}A = E. \end{aligned}$$

**Следствие.**  $A, B \in M_n \implies AB$  обратима  $\iff$  обе  $A, B$  обратимы. При этом  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

*Доказательство.* Эквивалентность ( $\iff$ ) следует из условия  $\det AB = \det A \det B$ .

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = E.$$

### 8.2 Формулы Крамера

Пусть есть СЛУ  $Ax = b(\star)$ ,  $A \in M_n$ ,  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ,  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ .

Также,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $A_i = (A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, b, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)})$ .

**Теорема 8.1.** Если  $\det A \neq 0$ , то СЛУ  $(\star)$  имеет единственное решение и его можно найти по формулам:

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}.$$

*Доказательство.*  $\det A \neq 0 \implies \exists A^{-1} \implies (\star) \iff x = A^{-1}b$  – единственное решение.

$$b = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 A^{(1)} + x_2 A^{(2)} + \dots + x_n A^{(n)}.$$

$$\begin{aligned} \det A_i &= \det \left( A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, x_1 A^{(1)} + \dots + x_n A^{(n)}, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)} \right) \\ &= x_1 \det \left( A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, A^{(1)}, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)} \right) \\ &\quad + x_2 \det \left( A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, A^{(2)}, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)} \right) \\ &\quad + \dots + \\ &\quad + x_n \det \left( A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, A^{(n)}, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)} \right) \\ &= x_i \det A \quad // \text{ Все слагаемые кроме } i\text{-го равны } 0. \end{aligned}$$

### 8.3 Понятие поля.

**Определение 32.** *Поле* называется множество  $F$ , на котором заданы две операции “сложение”  $((a, b) \rightarrow a + b)$  и “умножение”  $((a, b) \rightarrow a \cdot b)$ , причем  $\forall a, b, c \in F$  выполнены следующие условия:

1.  $a + b = b + a$  (коммутативность сложения)
2.  $(a + b) + c = a + (b + c)$  (ассоциативность сложения)
3.  $\exists 0 \in F : 0 + a = a + 0 = a$  (нулевой элемент)
4.  $\exists (-a) \in F : a + (-a) = (-a) + a = 0$  (противоположный элемент)  
↑ абелева группа ↑
5.  $a(b + c) = ab + ac$  (дистрибутивность)
6.  $ab = ba$  (коммутативность умножения)
7.  $(ab)c = a(bc)$  (ассоциативность умножения)
8.  $\exists 1 \in F \setminus \{0\} : 1a = a1 = a$  (единица)
9. Если  $a \neq 0$ ,  $\exists a^{-1} \in F : aa^{-1} = a^{-1}a = 1$  (обратный элемент)

### 8.4 Простейшие примеры.

$\mathbb{Q}$  – Рациональные числа.

$\mathbb{R}$  – Действительные числа.

$F_2 = \{0, 1\}$ , сложение и умножение по модулю 2.

## 8.5 Построение поля комплексных чисел.

Ближайшая цель — построить поле  $\mathbb{C}$  комплексных чисел.

Неформально,  $\mathbb{C}$  — это наименьшее поле со следующими свойствами:

1.  $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$ .
2. Многочлен  $x^2 + 1$  имеет корень, то есть  $\exists i : i^2 = -1$ .

### 8.5.1 Формальная конструкция поля $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

- $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$
- $(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1)$

Неформально, каждой такой паре  $(a, b)$  соответствует комплексное число  $a + bi$ :

- $(a, b) \iff a + bi$
- $(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$
- $(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = a_1a_2 + a_1b_2i + a_2b_1i + b_1b_2 \underbrace{i^2}_{=-1} = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$

### 8.5.2 Проверка аксиом

1, 2. Очевидны.

3.  $0 = (0, 0)$ .

4.  $-(a, b) = (-a, -b)$ .

5. Дистрибутивность

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1i)((a_2 + b_2i) + (a_3 + b_3i)) &= (a_1 + b_1i)((a_2 + a_3) + (b_2 + b_3)i) \\ &= (a_1(a_2 + a_3) - b_1(b_2 + b_3)) + (a_1(b_2 + b_3) + b_1(a_2 + a_3))i \\ &= a_1a_2 + a_1a_3 - b_1b_2 - b_1b_3 + (a_1b_2 + a_1b_3 + b_1a_2 + b_1a_3)i \\ &= ((a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i) + ((a_1a_3 + b_1b_3) + (b_1a_3 + a_1b_3)i) \\ &= (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) + (a_1 + b_1i)(a_3 + b_3i) \end{aligned}$$

6. Коммутативность умножения — из явного вида формулы.

$$(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$$

7. Ассоциативность умножения

$$\begin{aligned} (a_1, b_1)(a_2, b_2)(a_3, b_3) &= (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1)(a_3, b_3) \\ &= (a_1a_2a_3 - b_1b_2a_3 - a_1b_2b_3 - b_1a_2b_3, a_1a_2b_3 - b_1b_2b_3 + a_1b_2a_3 + b_1a_2a_3) \\ &= (a_1, b_1)(a_2a_3 - b_2b_3, a_2b_3 + b_2a_3) \\ &= (a_1, b_1)(a_2, b_2)(a_3, b_3). \end{aligned}$$

8.  $1 = (1, 0)$ .

9.  $(a, b) \neq 0 \implies a^2 + b^2 \neq 0$ . Тогда,  $(a, b)^{-1} = \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right)$ .

$$(a, b) \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right) = \left( \frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2}, \frac{-ab}{a^2 + b^2} + \frac{ba}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0).$$

Итак,  $\mathbb{C}$  — поле.

### Проверка свойств

1.  $a \in \mathbb{R} \iff (a, 0) \in \mathbb{C}$ .

$$a + b \iff (a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0).$$

$$ab \iff (a, 0)(b, 0) = (ab, 0)$$

Значит,  $\mathbb{R}$  отождествляется в  $\mathbb{C}$ .

2.  $i = (0, 1) \implies i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$ .

## 8.6 Алгебраическая форма комплексного числа, его действительная и мнимая части.

**Определение 33.** Представление числа  $z \in \mathbb{C}$  в виде  $a + bi$ , где  $a, b \in \mathbb{R}$  называется его *алгебраической формой*. Число  $i$  называется *мнимой единицей*.

$a =: \operatorname{Re}(z)$  – действительная часть числа  $z$ .

$b =: \operatorname{Im}(z)$  – мнимая часть числа  $z$ .

Числа вида  $bi$ , где  $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , называются *чисто мнимыми*.

## 8.7 Комплексное сопряжение.

**Определение 34.** Число  $\bar{z} := a - bi$  называется *комплексно сопряженным* к числу  $z = a + bi$ .

Операция  $z \rightarrow \bar{z}$  называется *комплексным сопряжением*.

### 8.7.1 Свойства комплексного сопряжения

- $\overline{\bar{z}} = z$ .
- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ .
- $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ .

*Доказательство.*

- $\bar{\bar{z}} = \overline{a + bi} = \overline{a - bi} = a + bi = z$ .
- $\overline{z + w} = \overline{(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i)} = \overline{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i} = (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)i = (a_1 - b_1i) + (a_2 - b_2i) = \bar{z} + \bar{w}$ .
- $\overline{z \cdot w} = \overline{(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i)} = \overline{(a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i} = (a_1a_2 - b_1b_2) - (a_1b_2 + a_2b_1)i = \bar{z}\bar{w}$ . ■

## 8.8 Геометрическая модель комплексных чисел, интерпретация сложения и сопряжения в этой модели.

Числу  $z = a + bi$  соответствует точка (или вектор) на плоскости  $\mathbb{R}^2$  с координатами  $(a, b)$ . Сумме  $z + w$  соответствует сумма соответствующих векторов. Сопряжению  $z \rightarrow \bar{z}$  – это отражение  $z$  относительно действительной оси.

## 9 Лекция 7.11.2019

### 9.1 Модуль комплексного числа, его свойства

**Определение 35.** Число  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  называется *модулем числа*  $z = a + bi \in \mathbb{C}$  (то есть длина соответствующего вектора).

#### Свойства

1.  $|z| \geq 0$ , причем  $|z| = 0 \iff z = 0$ .
2.  $|z + w| \leq |z| + |w|$  (неравенство треугольника).

Пусть  $z = a + bi$ ,  $w = c + di$ .

$$\begin{aligned}|z + w| &\leq |z| + |w| \\ \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} &\leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \\ (a+c)^2 + (b+d)^2 &\leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \\ ac + bd &\leq \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \\ ac + bd &\leq \sqrt{(ac)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 + (bd)^2} \\ (ac)^2 + (bd)^2 + 2acbd &\leq (ac)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 + (bd)^2 \\ 2acbd &\leq (ad)^2 + (bc)^2 \\ 0 &\leq (ad)^2 + (bc)^2 - 2abcd \\ 0 &\leq (ad - bc)^2\end{aligned}$$

3.  $z\bar{z} = |z|^2$ .

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$$

4.  $|zw| = |z||w|$ .

$$|zw|^2 = (zw) \cdot (\overline{zw}) = z \cdot w \cdot \bar{z} \cdot \bar{w} = |z|^2 |w|^2.$$

**Замечание.** Из 3) следует, что для  $\forall z \neq 0$ ,  $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ , то есть  $(a + bi)^{-1} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$

### 9.2 Аргумент комплексного числа

Пусть  $z = a + bi \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq 0$ .

Тогда,  $z = |z| \left( \frac{a}{|z|} + \frac{b}{|z|}i \right)$ , при этом  $\left( \frac{a}{|z|} \right)^2 + \left( \frac{b}{|z|}i \right)^2 = 1$

Значит,  $\frac{a}{|z|}$  и  $\frac{b}{|z|}$  являются синусом и косинусом некоторого угла.

**Определение 36.** Аргументом числа  $z = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  называется число  $\varphi \in \mathbb{R}$ , такое что

$$\cos \varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$$\sin \varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

В геометрических терминах,  $\varphi$  есть угол между осью  $Ox$  и соответствующим вектором.

**Замечание.** При  $z \neq 0$ , аргумент определен с точностью до  $2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Замечание.** При  $z = 0$ , удобно считать что любое  $\varphi$  является аргументом.

### 9.3 Тригонометрическая форма комплексного числа

$Arg(z) :=$  множество всех аргументов числа  $z$ .

$arg(z) :=$  единственное значение из  $Arg(z)$ , лежащее в  $[0; 2\pi)$ .

$Arg(z) = arg(z) + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

$Arg(z) = \{ \varphi \in \mathbb{R} \mid \cos \varphi = \frac{a}{|z|}, \sin \varphi = \frac{b}{|z|} \}$

Тогда,  $\forall z \in \mathbb{C}$ ,  $z = |z| \left( \frac{a}{|z|} + \frac{b}{|z|}i \right) = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , где  $\varphi \in Arg(z)$ .

**Определение 37.** Представление числа  $z \in \mathbb{C}$  в виде  $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  называется его *тригонометрической формой*.



## 9.4 Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме

**Предложение.** Пусть  $z_1 = |z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$  и  $z_2 = |z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ , тогда

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1| |z_2| (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\ &= |z_1| |z_2| ((\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)) \\ &= |z_1| |z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$

■

**Следствие.** В условиях предложения, предположим, что  $z_2 \neq 0$ .

$$\text{Тогда } \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

$$\text{В частности, } \frac{1}{|z_2|} (\cos(-\varphi_2) + i \sin(-\varphi_2)) = \frac{1}{|z_2|} (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2) = \frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2}.$$

## 9.5 Возведение в степень комплексных чисел в тригонометрической форме, формула Муавра

**Следствие.** Пусть  $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . Тогда  $\forall n \in \mathbb{Z}$ ,

$$z^n = |z|^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) - \text{формула Муавра.}$$

**Замечание.** В комплексном анализе функция  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \rightarrow e^x$ , доопределяется до функции  $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \rightarrow e^z$  с сохранением всех привычных свойств.

Доказывается  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ ,  $\forall \varphi \in \mathbb{C}$  – формула Эйлера.

Тогда  $\forall z \in \mathbb{C}$  представляется в виде  $z = |z|e^{i\varphi}$ , где  $\varphi \in \text{Arg}(z)$  – *показательная форма*.

## 9.6 Извлечение корней из комплексных чисел

Пусть  $z \in \mathbb{C}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ .

**Определение 38.** Корнем степени  $n$  (или корнем  $n$ -й степени) из числа  $z$  называется всякое число  $w \in \mathbb{C}$ , что  $w^n = z$ .

Положим  $\sqrt[n]{z} := \{w \in \mathbb{C} \mid w^n = z\}$ .

Опишем множество  $\sqrt[n]{z}$ .

$$w = \sqrt[n]{z} \implies w^n = z \implies |w|^n = |z|.$$

$$\text{Если } z = 0, \text{ то } |z| = 0 \implies |w| = 0 \implies w = 0 \implies \sqrt[n]{0} = \{0\}.$$

Далее считаем, что  $z \neq 0$ .

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$w = |w|(\cos \psi + i \sin \psi)$$

$$z = w^n = |w|^n (\cos(n\psi) + i \sin(n\psi))$$

Отсюда,

$$z = w^n \iff \begin{cases} |z| = |w|^n \\ n\psi = \varphi + 2\pi k, \text{ для некоторого } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \text{ для некоторого } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

С точностью до  $2\pi l$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ , получается ровно  $n$  различных значений для  $\psi$ , при  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .

В результате  $\sqrt[n]{z} = \{w_0, w_1, \dots, w_{n-1}\}$ , где  $w_k = \sqrt[n]{|z|} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right)$

**Замечание.** Числа  $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$  лежат в вершинах правильного  $n$ -угольника с центром в начале координат.

Примеры.

$$\sqrt{1} = \{\pm 1\}$$

$$\sqrt{-1} = \{\pm i\}$$

$$\sqrt[3]{1} = \{1, -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\}$$

$$\sqrt[4]{1} = \{\pm 1, \pm i\}$$

## 9.7 Основная теорема алгебры комплексных чисел (без доказательства)

$$\sqrt[n]{z} = \{ \text{корни многочлена } x^n - z \}.$$

**Теорема 9.1.** Всякий многочлен степени  $\geq 1$  с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень.

Пусть  $f = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ ,  $n \geq 1$ ,  $a_n \neq 0$ ,  $a_i \in \mathbb{C}$ , тогда  $\exists c \in \mathbb{C} : f(c) = 0$ .

**Замечание.** Свойство поля  $\mathbb{C}$ , сформулированное в теореме, называется *алгебраической замкнутостью*.

## 9.8 Деление многочленов с остатком

Пусть  $\mathbb{F}$  – поле.

$\mathbb{F}[x] :=$  все многочлены от переменной  $x$  с коэффициентами из  $\mathbb{F}$ .

$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0 \implies \deg f = n$ .

$\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g$ .

**Определение 39.** Многочлен  $f(x) \in F[x]$  *делится* на  $g(x) \in F[x]$ , если  $\exists h(x) \in F[x]$ , такой что  $f(x) = g(x)h(x)$ .

Если  $f(x)$  не делится на  $g(x)$ , то можно поделить с остатком.

**Предложение** (деление с остатком). Если  $f(x), g(x) \in F[x], g(x) \neq 0$ , то  $\exists! q(x), r(x) \in F[x]$ , такие что

$$\begin{cases} f(x) = q(x)g(x) + r(x) \\ \text{либо } r(x) = 0, \text{ либо } \deg r(x) < \deg g(x) \end{cases}$$

*Пример.*  $f(x) = x^3 - 2x, g(x) = x + 1$ .

$$f(x) = (x^2 - x - 1)(x + 1) + 1, q(x) = (x^2 - x - 1), r(x) = 1.$$

## 9.9 Теорема Безу

Частный случай деления многочлена  $f(x)$  на многочлен  $g(x)$  с остатком:  $g(x) = x - c, \deg g(x) = 1$ :

$f(x) = q(x)(x - c) + r(x)$ , где либо  $r(x) = 0$ , либо  $\deg r(x) < \deg g(x) = 1$

Значит,  $r(x) \equiv r = \text{const} \in F$ .

**Теорема 9.2.**  $r = f(c)$ .

*Доказательство.* Подставить  $x = c$  в  $f(x) = (x - c)g(x) + r(x)$ . ■

**Следствие.** Элемент  $c \in F$  является корнем многочлена  $f(x) \in F[x]$  тогда и только тогда, когда  $f(x)$  делится на  $(x - c)$ .

## 9.10 Кратность корня многочлена

**Определение 40.** *Кратностью* корня  $c \in F$  многочлена  $f(x)$  называется наибольшее целое  $k$  такое что,  $f(x)$  делится на  $(x - c)^k$ .

## 9.11 Утверждение о том, что всякий многочлен степени $n$ с комплексными коэффициентами имеет ровно $n$ корней с учётом кратностей

**Следствие.** Пусть  $f(z) \in F[z], \deg f = n \geq 1$ .

$$f(x) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0.$$

$c_1, \dots, c_s$  – корни  $f, k_1, \dots, k_s$  – их кратности.

Любой многочлен с комплексными коэффициентами разлагается в произведение линейных множителей:

$$f(x) = a_n (x - c_1)^{k_1} (x - c_2)^{k_2} \dots (x - c_s)^{k_s}.$$

Иными словами,  $f(z)$  имеет ровно  $n$  корней с учетом кратностей.

## 10 Лекция 14.11.2019

### 10.1 Векторные пространства, простейшие следствия из аксиом

#### 10.1.1 Определение векторного пространства

Фиксируем поле  $F$  (можно считать, что  $F = \mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ )

**Определение 41.** Множество  $V$  называется *векторным (линейным) пространством* над полем  $F$ , если на  $V$  заданы две операции

- “сложение”:  $V \times V \rightarrow V, (x, y) \mapsto x + y$ .
- “умножение на скаляр”:  $F \times V \rightarrow V, (\alpha \in F, x \in V) \mapsto \alpha x$ .

а также,  $\forall x, y, z \in V$  и  $\alpha, \beta \in F$  выполнены следующие условия (называются *аксиомами векторного пространства*):

1.  $x + y = y + x$ .
2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$ .
3.  $\exists \vec{0} \in V : x + \vec{0} = \vec{0} + x = x$  (нулевой элемент).
4.  $\exists -x : -x + x = x + (-x) = \vec{0}$  (противоположный элемент).
5.  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ .
6.  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ .
7.  $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ .
8.  $1 \cdot x = x$ .

**Определение 42.** Элементы векторного пространства называются (абстрактными) *векторами*.

*Пример.*

1.  $\mathbb{R}$  над  $\mathbb{R}$  (или  $F$  над  $F$ ).
2. Пространство  $\mathbb{R}^n$  над  $\mathbb{R}$  (или  $F^n$  над  $F$ ) реализованное как пространство столбцов или строк длины  $n$ .
3.  $\text{Mat}_{m \times n}(F)$ .
4.  $F[x]$  – многочлены то переменной  $x$  с коэффициентами в  $\mathbb{R}$ .
5. Пространство функций на множестве  $M$  с значениями в  $F$ :  
 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 
  - сложение  $(f_1 + f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x)$ .
  - умножение на скаляр  $(\alpha f)(x) := \alpha f(x)$ .

– это векторное пространство над  $F$ .

Например, множество всех функций  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ .

#### 10.1.2 Простейшие следствия из аксиом

$\forall \alpha \in F, x \in V$ .

1. Элемент  $\vec{0}$  единственный.

Если  $\vec{0}'$  – другой такой ноль, то  $\vec{0}' = \vec{0}' + \vec{0} = \vec{0}$ .

2. Элемент  $-x$  единственный.

Если  $(-x)'$  – другой такой противоположный элемент, то

$$(-x)' = (-x)' + \vec{0} = (-x)' + (x + (-x)) = ((-x)' + x) + (-x) = \vec{0} + (-x) = -x.$$

3.  $\alpha \vec{0} = \vec{0}$ .

Рассмотрим равенство  $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$ . Домножив на  $\alpha$  получаем  $\alpha(\vec{0} + \vec{0}) = \alpha \vec{0}$ .

Раскроем скобки,  $\alpha \vec{0} + \alpha \vec{0} = \alpha \vec{0}$ .

Прибавим к обоим частям обратный элемент к  $\alpha \vec{0}$ , получим  $\alpha \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \implies \alpha \vec{0} = \vec{0}$ .

4.  $\alpha(-x) = -(\alpha x)$ .

Рассмотрим равенство  $x + (-x) = \vec{0}$ .

$$x + (-x) = \vec{0} \implies ax + a(-x) = 0 \implies a(-x) = -(\alpha x).$$

5.  $0 \cdot x = \vec{0}$ .

Доказывается так же, как пункт 3, но с 0 вместо  $\vec{0}$ .

6.  $(-1) \cdot x = -x$ .

Рассмотрим равенство  $1 + (-1) = 0$ . Домножив на  $x$  получаем  $(1 + (-1))x = 0x$ .

Раскроем скобки и воспользуемся пунктом 5 —  $1x + (-1)x = 0$  или  $x + (-1)x = 0$ .

Прибавим к обоим частям  $-x$ , получим  $0 + (-1)x = -x$  или  $(-1)x = -x$ .

## 10.2 Подпространства векторных пространств

Пусть  $V$  — векторное пространство над  $F$ .

**Определение 43.** Подмножество  $U \subseteq V$  называется *подпространством* (в  $V$ ), если

1.  $\vec{0} \in U$ .
2.  $x, y \in U \implies x + y \in U$ .
3.  $x \in U, \alpha \in F \implies \alpha x \in U$ .

**Замечание.** Всякое подпространство само является векторным пространством относительно тех же операций.

*Пример.*

1.  $\{\vec{0}\}$  и  $V$  — всегда подпространства в  $V$ .  
они называются *несобственными* подпространствами, остальные называются *собственными*.
2. Множество всех верхнетреугольных, нижнетреугольных, диагональных матриц в  $M_n(F)$ .
3.  $F[x]_{\leq n}$  все многочлены в  $F[x]$  степени  $\leq n$  — подпространство в  $F[x]$ .

## 10.3 Утверждение о том, что множество решений однородной системы линейных уравнений с $n$ неизвестными является подпространством в $F^n$

**Предложение.** Множество решений любой ОСЛУ  $Ax = 0$  ( $A \in \text{Mat}_{m \times n}(F)$ ,  $x \in F^n$ ) является подпространством в  $F^n$ .

*Доказательство.* Пусть  $S$  — множество решений ОСЛУ  $Ax = 0$ .

1.  $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in S$ .
2.  $x, y \in S \implies Ax = \vec{0}$  и  $Ay = \vec{0} \implies A(x + y) = Ax + Ay = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \implies x + y \in S$ .
3.  $x \in S, \alpha \in F \implies Ax = \vec{0} \implies A(\alpha x) = \alpha(Ax) = \alpha \vec{0} = \vec{0} \implies \alpha x \in S$ . ■

## 10.4 Линейная комбинация конечного набора векторов

Пусть  $V$  — векторное пространство над  $F$  и  $v_1, \dots, v_k \in V$  — набор векторов.

**Определение 44.** *Линейной комбинацией* векторов  $v_1, \dots, v_k$  называется всякое выражение вида  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$ , где  $\alpha_i \in F$ .

## 10.5 Линейная оболочка подмножества векторного пространства, примеры

Пусть  $S \subseteq V$  — подмножество векторного пространства.

**Определение 45.** *Линейной оболочкой* множества  $S$  называются множество всех векторов из  $V$ , представимых в виде линейной комбинации какого-то конечного набора векторов из  $S$ .

Обозначение:  $\langle S \rangle$ .

Если  $S = \{v_1, \dots, v_k\}$  конечно и состоит из векторов  $v_1, \dots, v_k$ , то еще пишут  $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$  и говорят “линейная оболочка векторов  $v_1, \dots, v_k$ ”.

Соглашение:  $\langle \emptyset \rangle = \{\vec{0}\}$ .

*Пример.*

1.  $\langle \vec{0} \rangle = \{\vec{0}\}$ .
2.  $V = \mathbb{R}^2$ ,  $v \neq 0$ ,  $\langle v \rangle = \{\alpha v \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$  — прямая.
3.  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $v_1, v_2$  — пара неколлинеарных векторов.  
Тогда,  $\langle v_1, v_2 \rangle = \{a_1 v_1 + a_2 v_2 \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$  — плоскость натянутая на  $v_1, v_2$ .

## 11 Лекция 21.11.2019

Напомним, если  $V$  – векторное пространство над полем  $F$ , то при  $S \subseteq V$ , линейная оболочка  $\langle S \rangle = \{ \text{все линейные комбинации конечных наборов векторов из } S \}$

*Пример.*

4.  $V = F^n$ ,  $S = \{e_1, \dots, e_n\}$ , где

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда  $\langle S \rangle = \langle e_1, \dots, e_n \rangle = F^n$ .

$$\text{Так как для любого } x \in F^n \implies x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n.$$

### 11.1 Утверждение о том, что линейная оболочка системы векторов является подпространством объемлющего векторного пространства

Пусть  $V$  – векторное пространство,  $S \subseteq V$ .

**Предложение.**  $\langle S \rangle$  является подпространством в  $V$ .

*Доказательство.*

1. Два случая:

$$S = \emptyset \implies \langle \emptyset \rangle = \{ \vec{0} \} \implies \vec{0} \in \langle S \rangle.$$

$$S \neq \emptyset \implies \exists V \in S \implies \underbrace{0V}_{\in \langle S \rangle} = \vec{0} \implies \vec{0} \in \langle S \rangle.$$

2. Пусть  $v, w \in \langle S \rangle$ :

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m,$$

$$w = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_n w_n, \text{ где } v_i, w_i \in S, \alpha_i, \beta_i \in F.$$

$$\text{Тогда, } v + w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m + \beta_1 w_1 + \dots + \beta_n w_n \in \langle S \rangle.$$

$$(\text{если } v_i = w_j, \text{ то } \alpha_i v_i + \beta_j w_j = (\alpha_i + \beta_j) w_j)$$

3.  $v \in \langle S \rangle, \alpha \in F \implies v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$

$$\implies \alpha v = (\alpha \alpha_1) v_1 + \dots + (\alpha \alpha_m) v_m \in \langle S \rangle. \quad \blacksquare$$

### 11.2 Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов

**Определение 46.** Линейная комбинация  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$  называется *тривиальной*, если  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$  и *нетривиальной* иначе (то есть  $\exists i : \alpha_i \neq 0$  или  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)$ ).

*Пример.*  $v + (-v)$  – нетривиальная линейная комбинация векторов  $v$  и  $-v$ .

**Определение 47.**

1. Векторы  $v_1, \dots, v_n \in V$  называются *линейно зависимыми* если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная  $\vec{0}$  (то есть  $\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)$ , такие что  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \vec{0}$ ) и *линейно независимыми* иначе (то есть из условия  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \vec{0}$  следует  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ ).

2. Множество  $S \subseteq V$  (возможно бесконечное, возможно с повторяющимися элементами) называется *линейно зависимым* если существует конечное линейно зависимое подмножество, и *линейно независимым* если любое конечное подмножество линейно независимо.

**Соглашение.** Система векторов – множество векторов, в котором возможны повторения.

*Пример.*

1.  $S = \{ \vec{0} \}$   $1 \cdot \vec{0}$  – нетривиальная линейная комбинация  $\implies \vec{0}$  линейно зависимо.

2.  $S = \{v\}$ ,  $v \neq \vec{0}$  – линейно независимо.

Пусть  $\lambda v = \vec{0} \implies \vec{0} = \lambda^{-1} \vec{0} = \lambda^{-1}(\lambda v) = (\lambda^{-1}\lambda)v = 1v = v$  – противоречие.

3.  $S = \{v_1, v_2\} \implies S$  линейно зависимо тогда и только тогда, когда  $v_1$  и  $v_2$  пропорциональны (то есть либо  $v_2 = \lambda_1 v_1$ ,  $\lambda_1 \in F$ , либо  $v_1 = \lambda_2 v_2$ ,  $\lambda_2 \in F$ ).

*Доказательство.*

( $\implies$ )  $\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 = \vec{0}$ ,  $(\mu_1, \mu_2) \neq (0, 0)$ .

Если  $\mu_1 \neq 0$ , то  $v_1 = -\frac{\mu_2}{\mu_1} v_2$ .

Аналогично для  $\mu_2 \neq 0$ .

( $\impliedby$ )  $v_2 = \lambda_1 v_1 \implies \lambda_1 v_1 + (-1)v_2 = \vec{0} \implies v_1, v_2$  линейно зависимы.

Аналогично для  $v_1 = \lambda_2 v_2$ . ■

4.  $V = F^n$ ,  $S = \{e_1, \dots, e_n\} \implies S$  линейно независимо.

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \iff \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0.$$

### 11.3 Критерий линейной зависимости конечного набора векторов

**Предложение.** Пусть  $v_1, \dots, v_n \in V$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , тогда следующие условия эквивалентны:

1.  $\exists(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in F^n$ , такой что  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \vec{0}(\star)$  и  $\alpha_i \neq 0$ .

2.  $v_i \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle$ .

*Доказательство.*

(1)  $\implies$  (2)  $\alpha_i \neq 0$  в  $(\star) \implies v_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} v_1 - \dots - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} v_{i-1} - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} v_{i+1} - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_i} v_n \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle$ .

(2)  $\implies$  (1)  $v_i = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_{i-1} v_{i-1} + \beta_{i+1} v_{i+1} + \dots + \beta_n v_n \implies$

$$\beta_1 v_1 + \dots + \beta_{i-1} v_{i-1} + \underbrace{(-1)}_{\neq 0} v_i + \beta_{i+1} v_{i+1} + \dots + \beta_n v_n = \vec{0}.$$

(нетривиальная линейная комбинация с  $i$ -м скаляром  $\neq 0$ ). ■

**Следствие.** Векторы  $v_1, \dots, v_n$  линейно зависимы тогда и только тогда, когда  $\exists i \in \{1, \dots, n\}$ , такое что  $v_i \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle$ .

### 11.4 Основная лемма о линейной зависимости

**Лемма 11.1.** Пусть есть две системы векторов  $v_1, \dots, v_m$  и  $w_1, \dots, w_n$ , причем  $m < n$  и  $w_i \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle \quad \forall i = 1, \dots, n$ .

Тогда векторы  $w_1, \dots, w_n$  линейно зависимы.

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} w_1 &= a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \dots + a_{m1}v_m = (v_1, \dots, v_m) \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \\ &\dots \\ w_n &= a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \dots + a_{mn}v_m = (v_1, \dots, v_m) \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\implies (w_1, \dots, w_n) = (v_1, \dots, v_m)A, \quad (\star)$$

где  $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{m \times n}(F)$ .

Так как  $m < n$ , то ОСЛУ  $Ax = \vec{0}$  имеет ненулевое решение  $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix} \in F^n$ .

Тогда умножим  $(\star)$  справа на  $z$ :

$$(w_1, \dots, w_n) \cdot z = (v_1, \dots, v_m) \cdot \underbrace{A \cdot z}_{=\vec{0}} = (v_1, \dots, v_m) \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

$$\implies (w_1, \dots, w_n) \begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix} = \vec{0} \implies z_1 w_1 + \dots + z_n w_n = \vec{0}.$$

Это нетривиальная линейная комбинация, так как  $z \neq 0$ .

Следовательно,  $w_1, \dots, w_n$  линейно зависимы. ■

*Пример.* Любые  $n + 1$  векторов в  $F^n$  линейно зависимы, так как  $F^n = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ .

## 11.5 Базис векторного пространства

**Определение 48.** Подмножество  $S \subseteq V$  называется *базисом* пространства  $V$ , если

1.  $S$  линейно независимо,
2.  $\langle S \rangle = V$ .

*Пример.*  $e_1, \dots, e_n$  — это базис в  $F^n$ . Он называется *стандартным базисом* в  $F^n$ .

**Замечание.** Всякая линейно независимая система векторов является базисом своей линейной оболочки.

## 11.6 Конечномерные и бесконечномерные векторные пространства

**Определение 49.** Векторное пространство  $V$  называется *конечномерным*, если в нем есть конечный базис, и *бесконечномерным* иначе.

## 11.7 Независимость числа элементов в базисе векторного пространства от выбора базиса

**Предложение.**  $V$  — конечномерное векторное пространство. Тогда, все базисы в  $V$  содержат одно и то же количество элементов.

*Доказательство.*  $V$  конечномерно, тогда существует конечный базис  $e_1, \dots, e_n$ .

Пусть  $S \subseteq V$  — другой базис. Так как  $\langle e_1, \dots, e_n \rangle = V$ , то  $\forall v \in S \implies v \in \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ . Тогда любые  $n + 1$  векторов в  $S$  линейно зависимы по основной лемме о линейной зависимости. Но  $S$  линейно независимо, значит  $|S| \leq n$ .

Пусть  $S = \{e'_1, \dots, e'_m\}$ , где  $m \leq n$ . Тогда  $\forall i = 1, \dots, n \quad e_i \in \langle e'_1, \dots, e'_m \rangle$ , по основной лемме о линейной зависимости получаем  $n \leq m$ .

То есть  $m = n$ . ■

## 11.8 Размерность конечномерного векторного пространства

**Определение 50.** *Размерностью* конечномерного векторного пространства называется число элементов в (любом) его базисе.

Обозначение:  $\dim V$ .

*Пример.*

1.  $\dim F^n = n$ ,
2.  $V = \{\vec{0}\} \implies \dim V = 0$  так как базисом  $V$  будет  $\emptyset$ .

## 12 Лекция 28.11.2019

Пусть  $V$  – векторное пространство над полем  $F$ .

Обозначение  $\dim V < \infty$  –  $V$  конечномерно.

### 12.1 Характеризация базисов в терминах единственности линейного выражения векторов

**Утверждение 12.1.** Пусть  $\dim V < \infty$ ,  $e_1, \dots, e_n \in \langle V \rangle$ .

$e_1, \dots, e_n$  – базис  $V$  тогда и только тогда, когда,  $\forall v \in V$  единственным образом представим в виде

$$v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \quad x_i \in F.$$

*Доказательство.*

$\Rightarrow$  Пусть есть два представления  $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = x'_1 e_1 + \dots + x'_n e_n$ .

Тогда,  $(x_1 - x'_1)e_1 + \dots + (x_n - x'_n)e_n = \vec{0}$ .

Так как  $e_1, \dots, e_n$  линейно независимы, то  $(x_1 - x'_1) = \dots = (x_n - x'_n) = 0$ .

Значит,  $x_i = x'_i \quad \forall i$ .

$\Leftarrow \forall v \in V$  имеем  $v \in \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ .

Значит,  $\langle e_1, \dots, e_n \rangle = V$ .

Для  $v = \vec{0}$  существует единственное представление  $\vec{0} = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ .

Но мы знаем, что  $\vec{0} = 0e_1 + \dots + 0e_n$ .

Следовательно  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ , то есть  $e_1, \dots, e_n$  линейно независимы.

Итог:  $e_1, \dots, e_n$  – базис  $V$ . ■

### 12.2 Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений

$$Ax = 0 \text{ – ОСЛУ.} \quad (\star)$$

$$A \in \text{Mat}_{m \times n}(F), x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in F^n.$$

$S \subseteq F^n$  – множество решений.

Знаем, что  $S$  – подпространство в  $F^n$ .

**Определение 51.** Фундаментальной системой решений (ФСР) для ОСЛУ  $(\star)$  называется всякий базис пространства её решений.

**Замечание.** У одной ОСЛУ может быть много разных ФСР.

### 12.3 Метод построения фундаментальной системы решений

Приведем матрицу к улучшенному ступенчатому виду элементарными преобразованиями строк.

$$(A | \vec{0}) \rightsquigarrow (B | \vec{0}) \leftarrow \text{улучшенный ступенчатый вид.}$$

Пусть  $r$  – число ненулевых строк в  $B$ .

Тогда будет  $r$  главных неизвестных и  $n - r$  свободных.

Выполнив перенумерацию будем считать что,

$x_1, \dots, x_r$  – главные неизвестные,

$x_{r+1}, \dots, x_n$  – свободные.

Тогда, общее решение для  $(\star)$  имеет вид

$$x_1 = c_{11}x_{r+1} + c_{12}x_{r+2} + \dots + c_{1,n-r}x_n$$

$$x_2 = c_{21}x_{r+1} + c_{22}x_{r+2} + \dots + c_{2,n-r}x_n$$

$\dots$

$$x_r = c_{r1}x_{r+1} + c_{r2}x_{r+2} + \dots + c_{r,n-r}x_n.$$



Предъявим некоторую систему решений

$$u_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \dots \\ c_{r1} \\ \underline{1} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \dots \\ c_{r2} \\ 0 \\ \underline{1} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, u_{n-r} = \begin{pmatrix} c_{1,n-r} \\ c_{2,n-r} \\ \dots \\ c_{r,n-r} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \underline{1} \end{pmatrix}.$$

$$u_1, \dots, u_{n-r} \in S$$

**Предложение.**  $u_1, \dots, u_{n-r}$  — это ФСР для ОСЛУ  $(\star)$ .

*Доказательство.*

1. Линейная независимость.

$$\text{Пусть } \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{n-r} u_{n-r} = \vec{0}.$$

При любом  $k \in \{1, \dots, n-r\}$ ,  $(r+k)$ -я координата левой части равна  $\alpha_k$ , значит  $\alpha_k = 0$ .

Следовательно  $\alpha_1 = \dots = \alpha_{n-r} = 0$ .

2.  $\langle u_1, \dots, u_{n-r} \rangle = S$ .

“ $\subseteq$ ” Верно, так как  $u_1, \dots, u_{n-r} \in S$ .

“ $\supseteq$ ” Пусть  $u \in S$ , тогда

$$u = \begin{pmatrix} * \\ \dots \\ * \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_{n-r} \end{pmatrix} \text{ для некоторых } \alpha_1, \dots, \alpha_{n-r} \in F.$$

Положим  $v := u - \alpha_1 u_1 - \dots - \alpha_{n-r} u_{n-r}$ .

Тогда,  $v \in S$ , но

$$v = \begin{pmatrix} * \\ \dots \\ * \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда формулы для общего решения дают  $v = \vec{0}$ .

Поэтому  $u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{n-r} u_{n-r}$ .

Значит  $\langle u_1, \dots, u_{n-r} \rangle = S$ . ■

*Пример.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = 3x_2 - x_4 \\ x_3 = 2x_4 \end{cases}$$

Тогда ФСР:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

## 12.4 Утверждение о возможности выбора из конечной системы векторов базиса её линейной оболочки

Пусть  $V$  – векторное пространство над  $F$ .

Наблюдение: если  $v, v_1, \dots, v_m \in V$  и  $v \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ , тогда  $\langle v, v_1, \dots, v_m \rangle = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$

**Предложение.** Из всякой конечной системы векторов  $S \subseteq V$  можно выбрать подсистему, которая является базисом в линейной оболочке  $\langle S \rangle$ .

*Доказательство.* Пусть  $S = \{v_1, \dots, v_m\}$ .

Индукция по  $m$ .

**База**  $m = 1$ :  $S = \{v_1\}$ .

Если  $v_1 = \vec{0}$ , то  $\langle S \rangle = \{\vec{0}\}$ , значит в качестве базиса берем  $\emptyset$ .

Если  $v_1 \neq 0$ , то  $S$  линейно независимо.

Следовательно  $S$  – базис в  $\langle S \rangle$ .

**Шаг** Пусть доказано для  $< m$ , докажем для  $m$ .

Если  $v_1, \dots, v_m$  линейно независимо, то  $v_1, \dots, v_m$  – это уже базис в  $\langle S \rangle$ .

Иначе,  $\exists i : v_i \in \langle S \setminus \{v_i\} \rangle$ .

Положим  $S' := S \setminus \{v_i\}$ .

Тогда,  $\langle S' \rangle = \langle S \rangle$ .

Так как  $|S'| = m - 1 < m$ , то по предположению индукции в  $S'$  можно выбрать базис для  $\langle S' \rangle = \langle S \rangle$ . ■

## 12.5 Дополнение конечной линейно независимой системы векторов до базиса конечномерного векторного пространства

**Предложение.** Пусть  $\dim V < \infty$ , тогда всякую линейно независимую систему векторов в  $V$  можно дополнить до базиса всего пространства  $V$ .

*Доказательство.* Пусть  $v_1, \dots, v_m$  – данная линейно независимая система.

Так как  $\dim V < \infty$ , в  $V$  есть конечный базис  $e_1, \dots, e_n$ .

Рассмотрим систему векторов  $v_1, \dots, v_m, e_1, \dots, e_n$ .

Пройдемся по этим векторам слева направо и выбросим те, которые линейно выражаются через предыдущие (не выброшенные).

При этом:

- 1) линейная оболочка системы сохраняется и равна  $\langle v_1, \dots, v_m, e_1, \dots, e_n \rangle = V$ ;
- 2)  $v_1, \dots, v_m$  останутся в системе, так как они линейно независимы;
- 3) в новой системе никакой вектор линейно не выражается через предыдущие.

Пусть новая система – это  $S' = \{v_1, \dots, v_m, e_{i_1}, \dots, e_{i_t}\}$ .

Докажем, что  $S'$  – базис в  $V$ .

По свойству 1) имеем, что  $\langle S' \rangle = V$ .

Осталось доказать, что  $S'$  линейно независимо.

Пусть  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n + \beta_1 e_{i_1} + \dots + \beta_t e_{i_t} = \vec{0}$ .

Предположим, что эта линейная комбинация нетривиальна.

Так как  $v_1, \dots, v_m$  линейно независимы, то  $\exists k : \beta_{i_k} \neq 0$ .

Выберем  $k$  максимальным с этим свойством.

Тогда,  $e_{i_k}$  линейно выражается через предыдущие — противоречие. ■

**Следствие.** Если  $\dim V = n$  и  $v_1, \dots, v_n$  – линейно независимая система, тогда  $v_1, \dots, v_n$  – базис  $V$ .

## 12.6 Лемма о добавлении вектора к конечной линейной независимой системе

**Лемма 12.2.** Пусть  $v, v_1, \dots, v_m \in V$  и  $v_1, \dots, v_m$  линейно независимы, тогда либо  $v, v_1, \dots, v_m$  линейно независимы, либо  $v \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ .

*Доказательство.* Пусть  $v, v_1, \dots, v_m$  линейно зависимы, тогда  $\exists (\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \neq (0, \dots, 0)$ , такой что

$$\alpha v + \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = \vec{0}.$$

Но, так как  $v_1, \dots, v_m$  линейно независимы, то  $\alpha \neq 0$ . Значит,  $v \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$  по [предложению](#). ■

## 13 Лекция 5.12.2019

### 13.1 Размерность подпространства конечномерного векторного пространства

Пусть  $V$  – конечномерное векторное пространство.

**Предложение.** Если  $U \subseteq V$  – подпространство  $V$ , тогда  $U$  тоже конечномерно, причем  $\dim U \leq \dim V$ .

Кроме того,  $\dim U = \dim V \iff U = V$ .

*Доказательство.* Пусть  $n = \dim V$ .

Построим в  $U$  конечный базис.

Если  $U = \{\vec{0}\}$ , то в качестве базиса берем  $\emptyset$ .

Далее считаем, что  $U \neq \{\vec{0}\}$ .

Выберем  $v_1 \in U \setminus \{\vec{0}\}$ . Если  $\langle v_1 \rangle = U$ , то конец. Иначе, выберем  $v_2 \in U \setminus \langle v_1 \rangle$ .

Если  $\langle v_1, v_2 \rangle = U$ , то конец.

Иначе, выберем  $v_3 \in U \setminus \langle v_1, v_2 \rangle$ , и так далее.

Получаем систему векторов  $v_1, v_2, \dots$ . Она линейно независима по [лемме](#).

По [основной лемме о линейной зависимости](#) процесс закончится не позднее шага  $n$ , значит  $U$  конечномерно и  $\dim U \leq \dim V$ .

Если  $\dim U = n$ , то  $v_1, \dots, v_n$  – базис  $U$ . По следствию, если  $v_1, \dots, v_n$  – базис  $U$ , то  $U = V$ . ■

### 13.2 Ранг системы векторов

Пусть  $\dim V < \infty$  и  $S \subseteq V$  – система векторов.

**Определение 52.** Рангом системы векторов  $S$  называется число  $\text{rk } S$ , равное наибольшему числу векторов в линейно независимой подсистеме из  $S$ .

$$\text{rk } S = \max\{|S'| \mid S' \subseteq S - \text{линейно независимая подсистема}\}.$$

### 13.3 Связь ранга системы векторов с размерностью её линейной оболочки

**Предложение.**  $\text{rk } S = \dim \langle S \rangle$ .

*Доказательство.* Пусть  $\text{rk } S = r$ .

Тогда существует линейно независимая подсистема  $S' = \{v_1, \dots, v_r\}$ .

По определению ранга и лемме получаем  $S \subseteq \langle v_1, \dots, v_r \rangle$ .

Значит,  $\langle S \rangle = \langle v_1, \dots, v_r \rangle$  (так как  $v_1, \dots, v_r \in S$ ).

Следовательно  $\dim S = r$ . ■

### 13.4 Ранг матрицы: столбцовый и строковый

Пусть  $A \in \text{Mat}_{m \times n}(F)$ .

**Определение 53.** Столбцовым рангом (или просто рангом) матрицы  $A$  называется ранг системы её столбцов

$$A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \subseteq F^n.$$

Обозначение:  $\text{rk } A = \text{rk}\{A^{(1)}, \dots, A^{(n)}\}$ .

**Определение 54.** Строковым рангом матрицы  $A$  называется число  $\text{rk } A^T$ , то есть ранг системы строк

$$A_{(1)}, \dots, A_{(n)} \in F^n.$$

*Пример.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Любые два столбца линейно независимы (не пропорциональны), то есть  $\text{rk } A \geq 2$ .

Но,  $A^{(2)} = \frac{1}{2}(A^{(1)} + A^{(3)})$ , значит  $A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}$  линейно зависимы  $\implies \text{rk } A = 2$ .

### 13.5 Сохранение линейных зависимостей между столбцами матрицы при элементарных преобразованиях строк

**Предложение.** Элементарные преобразования строк сохраняют линейные зависимости между столбцами матрицы.

Если  $A \rightsquigarrow B$  элементарным преобразованиями строк, то

$$\alpha_1 A^{(1)} + \cdots + \alpha_n A^{(n)} = \vec{0} \iff \alpha_1 B^{(1)} + \cdots + \alpha_n B^{(n)} = \vec{0}.$$

В частности, при  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$

$$A^{(i_1)}, \dots, A^{(i_k)} \text{ линейно независимы} \iff B^{(i_1)}, \dots, B^{(i_k)} \text{ линейно независимы.}$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \alpha_1 A^{(1)} + \dots + \alpha_n A^{(n)} = \vec{0} &\iff A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \vec{0} \\ &\iff \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} - \text{решение ОСЛУ } Ax = \vec{0} \\ &\iff \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} - \text{решение ОСЛУ } Bx = \vec{0} \\ &\iff B \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \vec{0} \iff \alpha_1 B^{(1)} + \dots + \alpha_n B^{(n)} = \vec{0}. \end{aligned}$$

### 13.6 Инвариантность столбцового и строкового рангов матрицы при элементарных преобразованиях строк и столбцов

**Следствие.** При элементарных преобразованиях строк (столбцовый) ранг матрицы сохраняется.

**Предложение.** При элементарных преобразованиях столбцов линейная оболочка  $\langle A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \rangle$  сохраняется.

*Доказательство.* Пусть  $A \rightsquigarrow B$  элементарными преобразованиями столбцов.

Тогда,

$$B^{(1)}, \dots, B^{(n)} \in \langle A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \rangle.$$

Значит,

$$\langle B^{(1)}, \dots, B^{(n)} \rangle \subseteq \langle A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \rangle.$$

Так как элементарные преобразования обратимы, то включение верно и в другую сторону.

**Следствие.** При элементарных преобразованиях столбцов (столбцовый) ранг матрицы сохраняется.

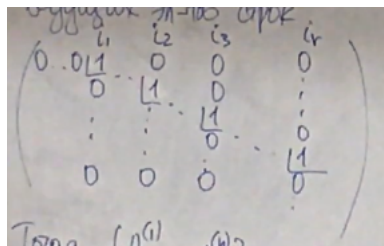
**Следствие.** Строковый ранг матрицы сохраняется при элементарных преобразованиях строк и столбцов.

### 13.7 Столбцовый и строковый ранги матрицы, имеющей улучшенный ступенчатый вид

**Предложение.** Если  $A$  имеет улучшенный ступенчатый вид, то оба числа  $\text{rk } A$  и  $\text{rk } A^T$  равны числу ненулевых строк в  $A$ .

*Доказательство.* Пусть  $r$  – число ненулевых строк в  $A$  и пусть  $i_1 < \dots < i_r$  – номера ведущих элементов строк.

$$\begin{pmatrix} & i_1 & i_2 & i_3 & i_r \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & \dots & 1 & 0 & & \vdots \\ & \vdots & & 0 & \dots & 1 & 0 \\ & \vdots & & \vdots & & 0 & \dots & 1 \\ & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$



ЖАЛКАЯ ПОПЫТКА ПОВТОРИТЬ ШЕДЕВР

Тогда,  $\{A^{(1)}, \dots, A^{(n)}\} \ni e_1, \dots, e_r$ , где

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i.$$

Значит,  $\langle A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \rangle \supseteq \langle e_1, \dots, e_r \rangle$ .

Заметим, что  $A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \in \langle e_1, \dots, e_r \rangle$ , то есть  $\langle A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \rangle \subseteq \langle e_1, \dots, e_r \rangle$ .

Теперь покажем, что строки  $A_{(1)}, \dots, A_{(r)}$  линейно независимы.

Пусть  $\alpha_1 A_{(1)} + \dots + \alpha_r A_{(r)} = \vec{0}(\star)$ .

$\forall k = 1, \dots, r$  на месте  $i_k$  в левой части  $(\star)$  стоит  $\alpha_k$ , значит  $\alpha_k = 0$ .

То есть  $\alpha_i = 0 \forall i$ , следовательно  $A_{(1)}, \dots, A_{(r)}$  линейно независимы.

$\implies \text{rk } A^T = r$ . ■

### 13.8 Равенство столбцового и строкового рангов матрицы

**Теорема 13.1.** Пусть  $A \in \text{Mat}_{m \times n}(F)$ , тогда  $\text{rk } A = \text{rk } A^T$ , причем оба числа равны количеству строк в ступенчатом виде матрицы  $A$ .

*Доказательство.*  $\text{rk } A = \text{rk } A^T$  следует из следствий, предыдущего предложения и теоремы о приведении матрицы к улучшенному ступенчатому виду.

Остальное вытекает из предложения и того, что при переходе от ступенчатого виду к улучшенному ступенчатому виду число ненулевых строк сохраняется. ■

### 13.9 Связь ранга квадратной матрицы с её определителем

**Следствие.** Пусть  $A \in M_n(F)$  – квадратная матрица. Тогда,

$$\text{rk } A = n \iff \det A \neq 0,$$

$$\text{rk } A < n \iff \det A = 0.$$

*Доказательство.* При элементарных преобразованиях строк  $\text{rk } A$  сохраняется, условия  $\det A \neq 0$  и  $\det A = 0$  тоже.

Следовательно, достаточно доказать для ступенчатых матриц. В этом случае

$$\text{rk } A = n \iff n \text{ ненулевых строк} \iff \det A \neq 0,$$

$$\text{rk } A < n \iff \text{есть нулевые строки} \iff \det A = 0. \quad \blacksquare$$

### 13.10 Подматрицы

**Определение 55.** Подматрицей матрицы  $A$  называется всякая матрица, получающаяся из  $A$  вычёркиванием каких-то строк и каких-то столбцов.

### 13.11 Связь рангов матрицы и её подматрицы

**Предложение.**  $S$  подматрица  $\implies \text{rk } S \leq \text{rk } A$ .

*Доказательство.* Пусть  $\text{rk } S = r$ , значит в  $S$  есть линейно независимая система из  $r$  столбцов. Но тогда соответствующие  $r$  столбцов в матрице  $A$  будут и подавно линейно независимы. ■

## 14 Лекция 12.12.2019

### 14.1 Миноры

Пусть  $A \in \text{Mat}_{m \times n}(F)$ .

**Определение 56.** Минором матрицы  $A$  называется определитель всякой квадратной подматрицы в  $A$ .

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

- 6 миноров порядка 1,
- 3 минора порядка 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

### 14.2 Теорема о ранге матрицы

**Теорема 14.1.** Для любой  $A \in \text{Mat}_{m \times n}(F)$  следующие 3 числа равны:

- (1)  $\text{rk } A$  (столбцовый ранг),
- (2)  $\text{rk } A$  (строковый ранг),
- (3) наибольший порядок ненулевого минора в  $A$ .

*Доказательство.* (1) = (2) – уже знаем.

Пусть  $S$  – квадратная подматрица в  $A$  порядка  $r$  и  $\det S \neq 0$ . Тогда  $r = \text{rk } S \leq \text{rk } A$ . Отсюда, (3)  $\leq$  (1).

Пусть теперь  $\text{rk } A = r$ . Найдем в  $A$  ненулевой минор порядка  $r$ .

Так как  $\text{rk } A = r$ , в  $A$  есть  $r$  линейно независимых столбцов  $A^{(i_1)}, \dots, A^{(i_r)}$ .

Составим из них матрицу  $B$ . Тогда  $\text{rk } B = r$ .

Так как (1) = (2) для  $B$ , то в  $B$  можно найти  $r$  линейно независимых строк.

Пусть  $S$  – подматрица в  $B$ , составленная из этих строк.

$S$  – квадратная подматрица порядка  $r$  и  $\text{rk } S = r \implies \det S \neq 0 \implies$  нашли. Значит, (3)  $\geq$  (1).

Итог: (3) = (1). ■

### 14.3 Приложения ранга матрицы к исследованию СЛУ

Пусть  $A \in \text{Mat}_{m \times n}(F)$ ,  $b \in F^m$ ,  $x \in F^n$  – столбец неизвестных.

$$Ax = b. \tag{*}$$

$(A \mid b)$  – расширенная матрица.

#### 14.3.1 Теорема Кронекера-Капелли

**Теорема 14.2** (Кронекера-Капелли). СЛУ (\*) совместна  $\iff \text{rk}(A \mid b) = \text{rk } A$ .

*Доказательство.* При элементарных преобразованиях строк

- сохраняется множество решений,
- сохраняются числа  $\text{rk}(A \mid b)$  и  $\text{rk } A$ .

Следовательно, вопрос сводится к ситуации когда  $A$  имеет ступенчатый вид.

В ступенчатом виде СЛУ совместна тогда и только тогда, когда нет строк вида  $(0, \dots, 0 \mid \underbrace{\star}_{\neq 0})$ .

То есть матрицы  $(A \mid b)$  и  $A$  имеют одно и то же число ненулевых строк.

Значит,  $\text{rk}(A \mid b) = \text{rk } A$ . ■

#### 14.3.2 Критерий существования единственного решения у совместной системы линейных уравнений в терминах ранга её матрицы коэффициентов

**Теорема 14.3.** Пусть СЛУ (\*) совместна. Тогда, она имеет единственное решение тогда и только тогда, когда  $\text{rk } A = n$ , где  $n$  – число неизвестных.

*Доказательство.* Снова все сводится к ситуации, когда  $(A \mid b)$  имеет ступенчатый вид.

Тогда, единственное решение  $\iff$  нет свободных неизвестных  $\iff$  ступенек ровно  $n \iff \text{rk } A = n$ . ■

### 14.3.3 Критерий существования единственного решения у системы линейных уравнений с квадратной матрицей коэффициентов в терминах её определителя

**Следствие.** Пусть  $A$  квадратна (то есть  $m = n$ ). Тогда СЛУ  $(\star)$  имеет единственное решение  $\iff \det A \neq 0$ .

*Доказательство.* Единственное решение  $\iff \operatorname{rk} A = n \iff \det A \neq 0$ . ■

**Замечание.** Это единственное решение равно  $x = A^{-1}b$ .

### 14.3.4 Размерность пространства решений однородной системы линейных уравнений в терминах ранга её матрицы коэффициентов

Пусть теперь СЛУ однородна, то есть  $b = 0$ .

$$Ax = 0. \quad (\star)$$

Пусть  $S \subseteq F^n$  – множество её решений. Значит, что  $S$  – подпространство в  $F^n$ .

**Предложение.**  $\dim S = n - \operatorname{rk} A$ .

*Доказательство.* Пусть  $r$  – число ненулевых строк в ступенчатом виде матрицы  $A$ . Тогда  $r = \operatorname{rk} A$ .

Мы уже строили ФСР для  $(\star)$  из  $n - r$  векторов.

Значит,  $\dim S = n - r = n - \operatorname{rk} A$ . ■

### 14.3.5 Реализация подпространства в $F^n$ в качестве множества решений однородной системы линейных уравнений

Пусть  $b_1, \dots, b_p \in F^n$ ,

$$B := (b_1, \dots, b_p) \in \operatorname{Mat}_{n \times p}(F).$$

Пусть  $a_1, \dots, a_q \in F^n$  – ФСР для ОСЛУ  $B^T x = 0$ .

$$A := (a_1, \dots, a_q) \in \operatorname{Mat}_{n \times q}(F).$$

**Предложение.**  $\langle b_1, \dots, b_p \rangle$  есть множество решений ОСЛУ  $A^T x = 0$ .

*Доказательство.* Пусть  $S = \{x \in F^n \mid A^T x = 0\}$ .

$$\begin{aligned} \forall i = 1, \dots, q \quad B^T a_i = 0 &\implies B^T A = 0 \\ &\implies A^T B = 0 \implies A^T b_j = 0 \quad \forall j = 1, \dots, p. \end{aligned}$$

Значит,  $b_j \in S \quad \forall j = 1, \dots, p$ .

Но тогда,  $\langle b_1, \dots, b_p \rangle \subseteq S$ .

Пусть  $r = \operatorname{rk}\{b_1, \dots, b_p\} = \dim\langle b_1, \dots, b_p \rangle = \operatorname{rk} B$ .

При этом,  $\operatorname{rk} A = q = n - r$ .

Тогда,  $\dim S = n - \operatorname{rk} A = n - (n - r) = r$ .

Следовательно,  $\langle b_1, \dots, b_p \rangle = S$ . ■

**Следствие.** Всякое подпространство в  $F^n$  является решением некоторой ОСЛУ.

## 14.4 Координаты вектора по отношению к фиксированному базису векторного пространства

Пусть  $V$  – векторное пространство,  $\dim V = n$ ,  $e_1, \dots, e_n$  – базис.

Знаем, что  $\forall v \in V \exists! \alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ , такие что,  $v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ .

**Определение 57.** Скаляры  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  называются координатами вектора  $v$  в базисе  $e_1, \dots, e_n$ .

*Пример.*  $V = F^n$ .

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Тогда,  $x_1, \dots, x_n$  – координаты вектора  $v$  в стандартном базисе пространства  $F^n$ .

## 14.5 Описание всех базисов конечномерного векторного пространства в терминах одного базиса и матриц координат

Пусть теперь  $e'_1, \dots, e'_n$  – какой то другой набор векторов в  $V$ . Тогда,

$$e'_1 = c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + \dots + c_{n1}e_n$$

$$e'_2 = c_{21}e_1 + c_{22}e_2 + \dots + c_{n2}e_n$$

...

$$e'_n = c_{n1}e_1 + c_{n2}e_2 + \dots + c_{nn}e_n.$$

$$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C, \text{ где } C = (c_{ij}).$$

в  $j$ -м столбце матрицы  $C$  стоят координаты вектора  $e'_j$  в базисе  $e_1, \dots, e_n$ .

**Предложение.**  $(e'_1, \dots, e'_n)$  – базис в  $V \iff \det C \neq 0$ .

*Доказательство.*

$$\implies e'_1, \dots, e'_n \text{ – базис, значит } (e_1, \dots, e_n) = (e'_1, \dots, e'_n) \cdot C' = (e_1, \dots, e_n) \cdot C \cdot C'.$$

Так как  $e_1, \dots, e_n$  линейно независимы, то  $C \cdot C' = E \implies \det C \neq 0$ .

$$\Leftarrow \det C \neq 0 \implies \exists C^{-1}.$$

Достаточно доказать, что  $e'_1, \dots, e'_n$  линейно независимы.

Пусть

$$\alpha_1 e'_1 + \dots + \alpha_n e'_n = 0.$$

Тогда,

$$(e'_1, \dots, e'_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0 \implies (e_1, \dots, e_n) \cdot C \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0.$$

Так как  $e_1, \dots, e_n$  линейно независимы, то

$$C \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0.$$

Домножаем слева на  $C^{-1}$ , получаем

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

## 14.6 Матрица перехода от одного базиса конечномерного векторного пространства к другому

Пусть  $(e_1, \dots, e_n)$  и  $(e'_1, \dots, e'_n)$  — два базиса в  $V$ ,

$$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C,$$

при этом  $\det C \neq 0$ .

**Определение 58.** Матрица  $C$  называется *матрицей перехода* от базиса  $(e_1, \dots, e_n)$  к базису  $(e'_1, \dots, e'_n)$ .

**Замечание.** Матрица перехода от  $(e'_1, \dots, e'_n)$  к  $(e_1, \dots, e_n)$  — это  $C^{-1}$ .

## 14.7 Формула преобразования координат вектора при замене базиса

Пусть  $v \in V$ , тогда

$$v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

$$v = x'_1 e'_1 + \dots + x'_n e'_n.$$

**Предложение.**

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$



*Доказательство.* Имеем

$$v = (e_1, \dots, e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

С другой стороны,

$$v = (e'_1, \dots, e'_n) \begin{pmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix} = (e_1, \dots, e_n) \cdot C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Так как  $e_1, \dots, e_n$  линейно независимы, то

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

■

## 15 Лекция 9.01.2020

### 15.1 Сумма двух подпространств векторного пространства

Пусть  $V$  – векторное пространство над  $F$ .

$U, W \subseteq V$  – подпространства.

Тогда,  $U \cap W$  – тоже подпространство. (можно проверить по определению)

**Определение 59.** Суммой подпространств  $U, W$  называется множество

$$U + W := \{u + w \mid u \in U, w \in W\}.$$

**Упражнение.**  $U + W$  – подпространство.

**Замечание.** Имеем  $U \cap W \subseteq U = U + 0 \subseteq U + W$ .

Значит,  $\dim(U \cap W) \leq \dim U \leq \dim(U + W)$ .

### 15.2 Связь размерностей двух подпространств с размерностями их суммы и пересечения

**Теорема 15.1.**  $\dim(U \cap W) + \dim(U + W) = \dim U + \dim W$ .

*Пример.* Всякие две плоскости в  $\mathbb{R}^3$  (содержащие 0) имеют общую прямую.

Здесь  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $\dim U = 2$ ,  $\dim W = 2$ .

При этом  $\dim(U + W) \leq 3$ .

Тогда,  $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) \geq 2 + 2 - 3 = 1$ .

*Доказательство.* Пусть  $\dim(U \cap W) = p$ ,  $\dim U = q$ ,  $\dim W = r$ .

Пусть  $a = \{a_1, \dots, a_p\}$  – базис в  $U \cap W$ .

Тогда,  $a$  можно дополнить до базиса в  $U$  и в  $W$ :

$b = \{b_1, \dots, b_{q-p}\}$  – такая система, что  $a \cup b$  – базис в  $U$ .

$c = \{c_1, \dots, c_{r-p}\}$  – такая система, что  $a \cup c$  – базис в  $W$ .

Докажем, что  $a \cup b \cup c$  – базис в  $U + W$ .

1.  $\langle a \cup b \cup c \rangle = U + W$ :

$v \in U + W \implies \exists u \in U, w \in W$ , такие что  $v = u + w$ .

$u \in U = \langle a \cup b \rangle \subseteq \langle a \cup b \cup c \rangle$ .

$w \in W = \langle a \cup c \rangle \subseteq \langle a \cup b \cup c \rangle$ .

Значит,  $v \in \langle a \cup b \cup c \rangle$ .

2.  $a \cup b \cup c$  линейно независимо.

Пусть  $\underbrace{\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_p a_p}_x + \underbrace{\beta_1 b_1 + \dots + \beta_{q-p} b_{q-p}}_y + \underbrace{\gamma_1 c_1 + \dots + \gamma_{r-p} c_{r-p}}_z = 0$ , где  $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k \in F$ .

Тогда,  $z = -\underbrace{x}_{\in U} - \underbrace{y}_{\in U} \in U$ .

Но,  $z \in W$ , значит  $z \in U \cap W$ .

То есть  $z = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p$ ,  $\lambda_i \in F$ .

Тогда,  $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p - \gamma_1 c_1 - \dots - \gamma_{r-p} c_{r-p} = 0$

Так как  $a \cup c$  линейно независимо, то  $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = \gamma_1 = \dots = \gamma_{r-p} = 0$  и  $z = 0$ .

Следовательно,  $x + y = 0$ , то есть  $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_p a_p + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_{q-p} b_{q-p} = 0$ .

Так как  $a \cup b$  линейно независимо, то  $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = \beta_1 = \dots = \beta_{q-p} = 0$ .

Получаем, что  $a \cup b \cup c$  линейно независимо.

Итог:  $a \cup b \cup c$  – базис в  $U + W$ .

$$\begin{aligned} \dim(U + W) &= |a| + |b| + |c| \\ &= p + q - p + r - p \\ &= q + r - p \\ &= \dim U + \dim W - \dim(U \cap W). \end{aligned}$$

■

### 15.3 Сумма нескольких подпространств векторного пространства

Пусть  $U_1, \dots, U_k \subseteq V$  – подпространства.

**Определение 60.** Суммой подпространств  $U_1, \dots, U_k$  называется множество

$$U_1 + \dots + U_k = \{u_1 + \dots + u_k \mid u_i \in U_i\}.$$

**Упражнение.** Доказать, что  $U_1 + \dots + U_k$  – подпространство.

**Замечание.**  $\dim(U_1 + \dots + U_k) \leq \dim U_1 + \dots + \dim U_k$ .

### 15.4 Линейно независимые подпространства, пять эквивалентных условий

**Определение 61.** Подпространства  $U_1, \dots, U_k$  называются *линейно независимыми*, если  $\forall u_1 \in U_1, \dots, u_k \in U_k$  из условия  $u_1 + \dots + u_k = 0$  следует  $u_1 = \dots = u_k = 0$ .

*Пример.* Если  $\dim U_i = 1$  и  $U_i = \langle u_i \rangle \forall i$ , то  $U_1, \dots, U_k$  линейно независимы  $\iff u_1, \dots, u_k$  линейно независимы.

**Теорема 15.2.** Следующие условия эквивалентны:

- (1)  $U_1, \dots, U_k$  линейно независимы.
- (2) всякий  $u \in U_1 + \dots + U_k$  единственным образом представим в виде  $u = u_1 + \dots + u_k$ , где  $u_i \in U_i$ .
- (3) Если  $e_i$  – базис в  $U_i \forall i$ , то  $\underbrace{e_1 \sqcup e_2 \sqcup \dots \sqcup e_k}_{\text{объединение мультимножеств}}$  – базис в  $U_1 + \dots + U_k$ .
- (4)  $\dim(U_1 + \dots + U_k) = \dim U_1 + \dots + \dim U_k$ .
- (5)  $\forall i = 1, \dots, k \quad U_i \cap (U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_k) = 0$ .

*Пример.* Если  $e_1 = \{e_1, e_2\}, e_2 = \{e_2, e_3\}$ , то

- $e_1 \cup e_2 = \{e_1, e_2, e_3\}$  – 2 элемента,
- $e_1 \sqcup e_2 = \{e_1, e_2, e_2, e_3\}$  – 4 элемента.

*Доказательство.* Пусть  $\widehat{U}_i = U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_k$ .

(1)  $\implies$  (2) Пусть  $u_1 + \dots + u_k = u'_1 + \dots + u'_k$ , где  $u_i, u'_i \in U_i$ .

$$\text{Тогда, } \underbrace{(u_1 - u'_1)}_{\in U_1} + \underbrace{(u_2 - u'_2)}_{\in U_2} + \dots + \underbrace{(u_k - u'_k)}_{\in U_k} = 0 \implies u_i - u'_i = \dots = u_k - u'_k = 0.$$

То есть,  $u_1 = u'_1, \dots, u_k = u'_k$ .

(2)  $\implies$  (3) Пусть  $u \in U_1 + \dots + U_k$  – произвольный.

$u$  единственным образом представим в виде  $u = u_1 + \dots + u_k$ , где  $u_i \in U_i$ ,

$u_i$  единственным образом представим в виде линейной комбинации векторов из  $e_i$ .

Следовательно,  $u$  единственным образом представим в виде линейной комбинации векторов из  $e_1 \sqcup \dots \sqcup e_k$ .

То есть,  $e_1 \sqcup \dots \sqcup e_k$  – базис в  $U_1 + \dots + U_k$ .

(3)  $\implies$  (4) Очевидно.

(4)  $\implies$  (5)

$$\begin{aligned} \dim(U_i \cap \widehat{U}_i) &= \dim U_i + \dim \widehat{U}_i - \dim(U_1 + \dots + U_k) \\ &\leq \dim U_i + (\dim U_1 + \dots + \dim U_{i-1} + \dim U_{i+1} + \dots + \dim U_k) - (\dim U_1 + \dots + \dim U_k) \\ &= 0. \end{aligned}$$

(5)  $\implies$  (1)  $u_1 + \dots + u_k = 0$ , где  $u_i \in U_i$ .

$$\text{Тогда, } \underbrace{u_i}_{\in U_i} = \underbrace{-u_1 - \dots - u_{i-1} - u_{i+1} - \dots - u_k}_{\in \widehat{U}_i}$$

Следовательно,  $u_i \in U_i \cap \widehat{U}_i = 0 \implies u_i = 0$ . ■

**Следствие.** Пусть  $k = 2$ , тогда

$$U_1, U_2 \text{ линейно независимы} \iff U_1 \cap U_2 = 0.$$

## 15.5 Разложение векторного пространства в прямую сумму нескольких подпространств

**Определение 62.** Говорят, что векторное пространство  $V$  разлагается в *прямую сумму*  $U_1, \dots, U_k$ , если

1.  $V = U_1 + \dots + U_k$ ,
2.  $U_1, \dots, U_k$  линейно независимы.

Обозначение:  $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k$ .

*Пример.* Если  $e_1, \dots, e_n$  – базис  $V$ , то  $V = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle e_n \rangle$

## 15.6 Проекция вектора на подпространство вдоль дополнительного подпространства

**Замечание.** При  $k = 2$ :

$$1. V = U_1 \oplus U_2 \iff \begin{cases} V = U_1 + U_2, \\ U_1 \cap U_2 = 0, \end{cases}$$

2.  $V = U_1 \oplus U_2 \implies \forall v \in V \exists! u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$ , такие что  $v = u_1 + u_2$ .

Тогда,  $u_1$  называется проекцией вектора  $v$  на  $U_1$  вдоль  $U_2$ .

Так же,  $u_2$  называется проекцией вектора  $v$  на  $U_2$  вдоль  $U_1$ .

## 16 Лекция 16.01.2020

### 16.1 Линейные отображения векторных пространств

Пусть  $V, W$  — векторные пространства над  $F$ .

**Определение 63.** Отображение  $\varphi: V \rightarrow W$  называется *линейным*, если

1.  $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$ ,

2.  $\varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v)$ .

$$\forall v_1, v_2, v \in V, \forall \lambda \in F.$$

**Упражнение. 1 и 2** эквивалентны тому, что

$$\varphi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 \varphi(v_1) + \lambda_2 \varphi(v_2).$$

$$\forall v_1, v_2 \in V, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in F.$$

### 16.2 Примеры линейных отображений

[Презентация](#) (продублирована ниже)

#### 16.2.1 Пример 0

$\varphi: V \rightarrow W$  — нулевое отображение,

$$\varphi(v) := \vec{0} \quad \forall v \in V$$

1)  $\varphi(v_1 + v_2) = \vec{0} = \vec{0} + \vec{0} = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$ ,

2)  $\varphi(\lambda \cdot v) = \vec{0} = \lambda \vec{0} = \lambda \cdot \varphi(v)$ .

#### 16.2.2 Пример 1

$\varphi: V \rightarrow W$  — тождественное отображение,

$$\varphi(v) := v \quad \forall v \in V.$$

Обозначение:  $\varphi =: \text{Id}$ .

1)  $\varphi(v_1 + v_2) = v_1 + v_2 = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$ ,

2)  $\varphi(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot v = \lambda \cdot \varphi(v)$ .

#### 16.2.3 Пример 2

$\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  — поворот на угол  $\alpha$  вокруг начала координат.

Два красных вектора  $v_1, v_2$  и их сумму  $v_1 + v_2$  повернули на угол  $\alpha$ , получив  $\varphi(v_1), \varphi(v_2)$  а так же точку  $A$ . Свойство 1 говорит нам, что точка  $A$  это не просто сумма образов, она так же является образом суммы  $v_1 + v_2$ . То есть точку  $A$  можно получить двумя разными способами: сложить  $\varphi(v_1)$  и  $\varphi(v_2)$  или повернуть  $v_1 + v_2$ .

Вторая картинка показывает свойство 2: точка  $B$  это с одной стороны  $\varphi(v) \cdot \lambda$ , а с другой — образ  $\lambda \cdot v$ .



1)  $\varphi(v_1) + \varphi(v_2) = A = \varphi(v_1 + v_2)$ ,

2)  $\varphi(\lambda \cdot v) = B = \lambda \cdot \varphi(v)$ .

### 16.2.4 Пример 3

$\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  — ортогональная проекция на плоскость  $Oxy$ .

⟨ Конкурс на лучшую картинку ⟩

### 16.2.5 Пример 4

$\mathbb{R}[x]_{\leq n}$  — пространство многочленов от  $x$  степени  $\leq n$  с коэффициентами из  $\mathbb{R}$ .

$\Delta: f(x) \mapsto f'(x)$  — отображение дифференцирования.

- 1)  $(f + g)' = f' + g'$ ,
- 2)  $(\lambda \cdot f)' = \lambda \cdot f' \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ .

1) и 2)  $\implies \Delta$  — линейное отображение  $\mathbb{R}[x]_{\leq n} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq n-1}$ .

### 16.2.6 Пример 5

$V$  — векторное пространство над  $F$ ,  $\dim V = n$ .

$(e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ .

$\varphi: V \rightarrow F^n$

$$v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \implies \varphi(v) := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Покажем, что оно линейно:

Пусть

$$v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \implies \varphi(v) := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

$$w = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n \implies \varphi(w) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Тогда,

$$1) \quad v + w = (x_1 + y_1)e_1 + \dots + (x_n + y_n)e_n \implies \varphi(v + w) = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \varphi(v) + \varphi(w),$$

$$2) \quad \lambda \cdot v = (\lambda x_1)e_1 + \dots + (\lambda x_n)e_n \implies \varphi(\lambda \cdot v) = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \varphi(v).$$

## 16.3 Простейшие свойства линейных отображений

Здесь  $\vec{0}_V$  — нулевой вектор в векторном пространстве  $V$ .

$$1. \quad \varphi(\vec{0}_V) = \vec{0}_W.$$

Доказательство:  $\varphi(\vec{0}_V) = \varphi(0 \cdot \vec{0}_V) = 0 \cdot \varphi(\vec{0}_V) = \varphi(\vec{0}_W)$ .

$$2. \quad \varphi(-v) = -\varphi(v).$$

Доказательство:  $\varphi(-v) + \varphi(v) = \varphi(-v + v) = \varphi(0) = \varphi(\vec{0}_V) = \vec{0}_W \implies \varphi(-v) = -\varphi(v)$ .

## 16.4 Изоморфизм векторных пространств

**Определение 64.** Отображение  $\varphi: V \rightarrow W$  называется *изоморфизмом* если оно линейно и биективно.

Обозначение:  $\varphi: V \xrightarrow{\sim} W$ .

В примерах выше:

$$0. \quad \varphi \text{ — изоморфизм} \iff \begin{cases} V = \{\vec{0}\}, \\ W = \{\vec{0}\} \end{cases}$$

1. да
2. да
3. нет
4.  $\varphi$  — изоморфизм  $\iff n = 0$
5. да!

## 16.5 Отображение, обратное к изоморфизму

**Предложение.** Если  $\varphi: V \rightarrow W$  — изоморфизм, то  $\varphi^{-1}$  — тоже изоморфизм.

*Доказательство.* Биактивность есть, так как  $\varphi^{-1}$  — обратное отображение.

Проверим линейность

$$1) \quad w_1, w_2 \in W \implies w_1 = \varphi(\varphi^{-1}(w_1)), w_2 = \varphi(\varphi^{-1}(w_2))$$

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(w_1 + w_2) &= \varphi^{-1}\left(\underbrace{\varphi(\varphi^{-1}(w_1))}_{w_1} + \underbrace{\varphi(\varphi^{-1}(w_2))}_{w_2}\right) \\ &= \underbrace{\varphi^{-1}}_{Id}(\varphi(\varphi^{-1}(w_1) + \varphi^{-1}(w_2))) \\ &= \varphi^{-1}(w_1) + \varphi^{-1}(w_2). \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(\lambda \cdot w_1) &= \varphi^{-1}(\lambda \cdot \varphi(\varphi^{-1}(w_1))) \\ &= \underbrace{\varphi^{-1}}_{Id}(\varphi(\lambda \cdot \varphi^{-1}(w_1))) \\ &= \lambda \varphi^{-1}(w_1). \end{aligned}$$

■

## 16.6 Композиция двух линейных отображений, композиция двух изоморфизмов

Пусть  $U \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{\varphi} W$ , тогда  $\varphi \circ \psi: U \rightarrow W$  — композиция.

**Предложение.**

1. Если  $\varphi, \psi$  линейны, то  $\varphi \circ \psi$  тоже линейна.
2. Если  $\varphi, \psi$  — изоморфизмы, то  $\varphi \circ \psi$  — тоже изоморфизм.

*Доказательство.*

1. (1)  $(\varphi \circ \psi)(u_1 + u_2) = \varphi(\psi(u_1 + u_2)) = \varphi(\psi(u_1) + \psi(u_2)) = \varphi(\psi(u_1)) + \varphi(\psi(u_2)) = (\varphi \circ \psi)(u_1) + (\varphi \circ \psi)(u_2).$
- (2)  $(\varphi \circ \psi)(\varphi u) = \varphi(\psi(\lambda u)) = \varphi(\lambda \psi(u)) = \lambda \varphi(\psi(u)) = \lambda(\varphi \circ \psi)(u).$

2. из 1 следует, что  $(\varphi \circ \psi)$  линейно, но при этом биактивно как композиция двух биекций.

■

## 16.7 Изоморфные векторные пространства

**Определение 65.** Два векторных пространства  $V, W$  называются *изоморфными*, если существует изоморфизм  $\varphi: V \xrightarrow{\sim} W$ .

Обозначается:  $V \simeq W$  (либо  $V \cong W$ ).

## 16.8 Отношение изоморфности на множестве всех векторных пространств

**Теорема 16.1.** Отношение изоморфности является отношением эквивалентности на множестве всех векторных пространств над фиксированным полем  $F$ .

*Доказательство.*

1. Рефлексивность:  $Id: V \xrightarrow{\sim} V$ .
2. Симметричность:  $V \simeq W \implies W \simeq V$  следует из [Предложения 1](#).
3. Транзитивность:  $U \simeq V, V \simeq W \implies U \simeq W$  следует из [Предложения 2](#).

■

## 16.9 Классы изоморфизма векторных пространств

**Определение 66.** Классы эквивалентности называются *классами изоморфизма*.

*Пример.*  $F[x]_{\leq n} \simeq F^{n+1}$ :

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

## 16.10 Критерий изоморфности двух конечномерных векторных пространств

**Теорема 16.2.** Пусть  $V, W$  — два конечномерных векторных пространства над  $F$ .

Тогда,  $V \simeq W \iff \dim V = \dim W$ .

**Лемма 16.3.**  $\dim V = n \implies V \simeq F^n$ .

*Доказательство.* Фиксируем базис  $(e_1, \dots, e_n)$  в  $V$ .

Тогда, отображение  $\varphi: V \rightarrow F^n$  из [Примера 5](#) — изоморфизм. ■

**Лемма 16.4.** Пусть  $\varphi: V \xrightarrow{\sim} W$  и  $e_1, \dots, e_n$  — базис  $V$ , тогда  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$  — базис  $W$ .

*Доказательство.* Пусть  $w \in W$ . Тогда  $\exists x_1, \dots, x_n \in F$ , такие что  $\varphi^{-1}(w) = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ .

Тогда,  $w = \varphi(\varphi^{-1}(w)) = \varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n) \implies W = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \rangle$ .

Теперь докажем линейную независимость:

Пусть  $\alpha_1 \varphi(e_1) + \dots + \alpha_n \varphi(e_n) = \vec{0}$ .

Тогда,  $\varphi(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) = \vec{0}$ .

Применяя  $\varphi^{-1}$  получаем,  $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = \varphi^{-1}(\vec{0}) = \vec{0}$ . Значит,  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ .

Итог:  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$  — базис в  $W$ . ■

*Доказательство теоремы.*

$\Leftarrow$  Пусть  $\dim V = \dim W = n$ . Тогда по [лемме 1](#)  $V \simeq F^n, W \simeq F^n$ , значит  $V \simeq W$ .

$\Rightarrow$  Пусть  $V \simeq W$ . Фиксируем изоморфизм  $\varphi: V \xrightarrow{\sim} W$ .

Тогда по [лемме 2](#) получаем, что  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$  — базис  $W$ , а значит  $\dim V = n = \dim W$ . ■

**Упражнение.** Если  $\dim V = n$ , то все изоморфизмы  $V \xrightarrow{\sim} F^n$  находятся в биекции с базисами пространства  $V$ .

## 16.11 Задание линейного отображения путём задания образов векторов фиксированного базиса

Пусть  $V, W$  — векторные пространства над  $F$  и  $(e_1, \dots, e_n)$  — фиксированный базис в  $V$ .

**Предложение.**

1. Если  $\varphi: V \rightarrow W$  — линейное отображение, то  $\varphi$  однозначно определяется векторами  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ ,
2.  $\forall w_1, \dots, w_n \in W \exists!$  линейное отображение  $\varphi$ , такое что,  $\varphi(e_1) = w_1, \dots, \varphi(e_n) = w_n$ .

*Доказательство.*

1.  $v \in V \implies v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \implies \varphi(v) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n)$ .

2. Зададим  $\varphi: V \rightarrow W$  формулой  $\varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 w_1 + \dots + x_n w_n$ .

Тогда  $\varphi$  — линейное отображение из  $V$  в  $W$  (упражнение).

Единственность следует из [1](#) ■



## 17 Лекция 23.01.2020

### 17.1 Матрица линейного отображения

Пусть  $V, W$  — векторные пространства над  $F$ .

$\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ ,

$\mathfrak{f} = (f_1, \dots, f_m)$  — базис  $W$ .

Пусть  $\varphi: V \rightarrow W$  — линейное отображение.

$\forall j = 1, \dots, n$

$$\varphi(e_j) = a_{1j}f_1 + a_{2j}f_2 + \dots + a_{mj}f_m = (f_1, \dots, f_m) \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

Тогда,  $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = (f_1, \dots, f_m) \cdot A$ , где  $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{m \times n}(F)$ .

**Определение 67.**  $A$  называется матрицей линейного отображения  $\varphi$  в базисах  $\mathfrak{e}$  и  $\mathfrak{f}$ .

Обозначение:  $A = A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f})$ .

В  $j$ -м столбце матрицы  $A$  стоят координаты вектора  $\varphi(e_j)$  в базисе  $\mathfrak{f}$ .

**Обозначение 1.**  $\text{Hom}(V, W) :=$  множество всех линейных отображений из  $V$  в  $W$ .

**Следствие** (из предложения 16.11). При фиксированных базисах  $\mathfrak{e}$  и  $\mathfrak{f}$  отображение  $\varphi \mapsto A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f})$  является биекцией между  $\text{Hom}(V, W)$  и  $\text{Mat}_{m \times n}(F)$ .

### 17.2 Примеры

$$0. \varphi(v) = 0 \ \forall v \implies \forall \mathfrak{e}, \mathfrak{f} \ A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

3.  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  — проекция на  $Oxy$ .

$$\left. \begin{array}{l} \mathfrak{e} \text{ — стандартный базис в } \mathbb{R}^3 \\ \mathfrak{f} \text{ — стандартный базис в } \mathbb{R}^2 \end{array} \right\} \implies A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.  $\Delta: \mathbb{R}[x]_{\leq n} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq n-1}, f \mapsto f'$ .

$\mathfrak{e} = (1, x, \dots, x^n), \mathfrak{f} = (1, x, \dots, x^{n-1})$ .

$$A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix}$$

$$5. x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n) \\ \mathfrak{f} = \text{стандартный базис} \end{array} \right\} \implies A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}) = E.$$

6.  $\varphi: F^n \rightarrow F^m$ .

$\varphi(x) = A \cdot x, A \in \text{Mat}_{m \times n}(F)$ .

$\mathfrak{e}$  — стандартный базис,

$\mathfrak{f}$  — стандартный базис.

$A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}) = A$ .

### 17.3 Связь координат вектора и его образа при линейном отображении

**Предложение.** Пусть  $\varphi: V \rightarrow W$  — линейное отображение,

$\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ ,

$\mathfrak{f} = (f_1, \dots, f_m)$  — базис  $W$ ,

$A = A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f})$ .

$v \in V \implies v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ ,

$\varphi(v) = y_1 f_1 + \dots + y_m f_m$ .

Тогда,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

*Доказательство.*  $v = (e_1, \dots, e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ .

Значит,

$$\varphi(v) = (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (f_1, \dots, f_m) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

При этом,

$$\varphi(v) = (f_1, \dots, f_m) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Так как  $f_1, \dots, f_m$  линейно независимы, то

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

■

### 17.4 Формула изменения матрицы линейного отображения между векторными пространствами $V$ и $W$ при замене их базисов

Пусть теперь  $\mathfrak{e}'$  — другой базис в  $V$ ,  $\mathfrak{f}'$  — другой базис в  $W$ .

$\mathfrak{e}' = \mathfrak{e} \cdot C_{\in M_n}$ ,

$\mathfrak{f}' = \mathfrak{f} \cdot D_{\in M_m}$ .

$A = A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f})$ ,

$A' = A(\varphi, \mathfrak{e}', \mathfrak{f}')$ .

**Предложение.**  $A' = D^{-1} A C$ .

*Доказательство.*

$$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C.$$

Применим  $\varphi$ ,

$$(\varphi(e'_1), \dots, \varphi(e'_n)) = (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) \cdot C = (f_1, \dots, f_m) \cdot A \cdot C$$

При этом,

$$(\varphi(e'_1), \dots, \varphi(e'_n)) = (f'_1, \dots, f'_m) \cdot A' = (f_1, \dots, f_m) \cdot D \cdot A'.$$

Отсюда,

$$A \cdot C = D \cdot A' \implies A' = D^{-1} \cdot A \cdot C.$$

■

## 17.5 Операции сложения и умножения на скаляр на множестве всех линейных отображений между двумя векторными пространствами

Пусть  $\varphi, \psi \in \text{Hom}(V, W)$ ,  $\lambda \in F$ .

**Определение 68.**

1. Суммой линейных отображений  $\varphi$  и  $\psi$  называется линейное отображение  $\varphi + \psi \in \text{Hom}(V, W)$ , такое что  $(\varphi + \psi)(v) := \varphi(v) + \psi(v)$ .
2. Произведение  $\varphi$  на  $\lambda$  — это линейное отображение  $\lambda\varphi \in \text{Hom}(V, W)$ , такое что  $(\lambda\varphi)(v) := \lambda\varphi(v)$ .

**Упражнение.**  $\varphi + \psi$  и  $\lambda\varphi$  — действительно линейные отображения.

**Упражнение.**  $\text{Hom}(V, W)$  с этими операциями является векторным пространством над  $F$ .

## 17.6 Матрица суммы двух линейных отображений и произведения линейного отображения на скаляр

Зафиксируем базисы  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  в  $V$  и  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$  в  $W$ .

**Предложение.**

1.  $\varphi, \psi \in \text{Hom}(V, W)$ ,  $A_\varphi = A(\varphi, \mathbf{e}, \mathbf{f})$   
 $A_\psi = A(\psi, \mathbf{e}, \mathbf{f})$   
 $A_{\varphi+\psi} = A(\varphi + \psi, \mathbf{e}, \mathbf{f}) \implies A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$
2.  $\lambda \in F, \varphi \in \text{Hom}(V, W)$ ,  $A_\varphi = A(\varphi, \mathbf{e}, \mathbf{f})$   
 $A_{\lambda\varphi} = A(\lambda\varphi, \mathbf{e}, \mathbf{f}) \implies A_{\lambda\varphi} = \lambda A_\varphi$

*Доказательство.*

1.

$$\begin{aligned} (f_1, \dots, f_m) \cdot A_{\varphi+\psi} &= ((\varphi + \psi)(e_1), \dots, (\varphi + \psi)(e_n)) \\ &= (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) + (\psi(e_1), \dots, \psi(e_n)) \\ &= (f_1, \dots, f_m)A_\varphi + (f_1, \dots, f_m)A_\psi \\ &= (f_1, \dots, f_m)(A_\varphi + A_\psi). \end{aligned}$$

Следовательно,  $A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$ .

2. Аналогично. ■

## 17.7 Изоморфизм между пространством $\text{Hom}(V, W)$ и пространством $(m \times n)$ -матриц, где $n = \dim V$ , $m = \dim W$

**Следствие.** При фиксированном  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{f}$  отображение  $\varphi \mapsto A(\varphi, \mathbf{e}, \mathbf{f})$  является изоморфизмом между  $\text{Hom}(V, W)$  и  $\text{Mat}_{m \times n}(F)$ .

*Доказательство.* Биективность была выше. Линейность — из предыдущего предложения. ■

**Следствие.**  $\dim \text{Hom}(V, W) = m \cdot n$ .

## 17.8 Матрица композиции двух линейных отображений

Пусть  $U \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{\varphi} W$  — цепочка линейных отображений, а  $\varphi \circ \psi : U \rightarrow W$  — их композиция,

$\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ ,

$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$  — базис  $W$ ,

$\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_k)$  — базис  $U$ .

$A_\varphi = A(\varphi, \mathbf{e}, \mathbf{f})$ ,

$A_\psi = A(\psi, \mathbf{g}, \mathbf{e})$ ,

$A_{\varphi \circ \psi} = A(\varphi \circ \psi, \mathbf{g}, \mathbf{f})$ .

Тогда,  $A_{\varphi \circ \psi} = A_\varphi \cdot A_\psi$ .

*Доказательство.*  $(\psi(g_1), \dots, \psi(g_k)) = (e_1, \dots, e_n)A_\psi$ . Тогда применяя  $\varphi$ ,

$$(\varphi(\psi(g_1)), \dots, \varphi(\psi(g_k))) = (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))A_\psi = (f_1, \dots, f_m)A_\varphi A_\psi.$$

С другой стороны,

$$(\varphi(\psi(g_1)), \dots, \varphi(\psi(g_k))) = (f_1, \dots, f_m)A_{\varphi \circ \psi}.$$

Значит,  $A_\varphi \cdot A_\psi = A_{\varphi \circ \psi}$ . ■

## 17.9 Ядро и образ линейного отображения; утверждение о том, что они являются подпространствами в соответствующих векторных пространствах

Пусть  $\varphi: V \rightarrow W$ .

**Определение 69.** Ядро линейной оболочки  $\varphi$  — это  $\ker \varphi := \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\} \subseteq V$ .

Образ линейного отображения  $\varphi$  — это  $\operatorname{Im} \varphi := \varphi(V) \subseteq W$ .

*Пример.*  $\Delta: \mathbb{R}[x]_{\leq n} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq n}, f \mapsto f'$ ,

$$\ker \Delta = \{f \mid f = \text{const}\},$$

$$\operatorname{Im} \Delta = \mathbb{R}[x]_{\leq n-1}.$$

**Предложение.**

1. Ядро — подпространство в  $V$ .
2. Образ — подпространство в  $W$ .

*Доказательство.*

1. (a)  $\varphi(0_V) = 0_W$ ,  
(b)  $v_1, v_2 \in \ker \varphi \implies \varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = 0 + 0 = 0 \implies v_1 + v_2 \in \ker \varphi$ ,  
(c)  $\lambda \in F, v \in V \implies \varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v) = \lambda 0 = 0 \implies \lambda v \in \ker \varphi$ .
2. (a)  $0_W = \varphi(W) \in \operatorname{Im} \varphi$ ,  
(b)  $w_1, w_2 \in \operatorname{Im} \varphi \implies \exists v_1, v_2 : w_1 = \varphi(v_1), w_2 = \varphi(v_2) \implies w_1 + w_2 = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \varphi(v_1 + v_2) \in \operatorname{Im} \varphi$ ,  
(c)  $\varphi \in F, w \in \operatorname{Im} \varphi \implies \exists v \in V : w = \varphi(v) \implies \varphi(w) = \lambda \varphi(v) = \varphi(\lambda v) \in \operatorname{Im} \varphi$ . ■

## 18 Лекция 25.01.2020

### 18.1 Критерий инъективности линейного отображения в терминах его ядра

Пусть  $V, W$  — векторные пространства над  $F$ ,

$\varphi: V \rightarrow W$  — линейное отображение.

Ядро:  $\ker \varphi := \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\} \subseteq V$ .

Образ:  $\operatorname{Im} \varphi := \varphi(V) \subseteq W$ .

**Предложение.**

(a)  $\varphi$  инъективно  $\iff \ker \varphi = \{0\}$ ,

(b)  $\varphi$  сюръективно  $\iff \operatorname{Im} \varphi = W$ .

*Доказательство.*

(a)  $\implies$  очевидно

$\impliedby$  Пусть  $v_1, v_2 \in V$  таковы, что  $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$ . Тогда  $\varphi(v_1 - v_2) = 0$ , а значит  $v_1 - v_2 \in \ker \varphi$ .

Но тогда,  $v_1 - v_2 = 0$ , то есть  $v_1 = v_2$ .

(b) очевидно. ■

**Следствие.**  $\varphi$  изоморфизм  $\iff \begin{cases} \ker \varphi = \{0\}, \\ \operatorname{Im} \varphi = W. \end{cases}$

### 18.2 Характеризация изоморфизмов в терминах их ядер и образов

Пусть  $U \subseteq V$  — подпространство,  $u_1, \dots, u_k$  — базис в  $U$ .

**Лемма 18.1.** Тогда,  $\varphi(U) = \langle \varphi(u_1), \dots, \varphi(u_k) \rangle$ . В частности,  $\dim \varphi(U) \leq \dim U$  и  $\dim \operatorname{Im} \varphi \leq \dim V$ .

*Доказательство.*  $u \in U \implies u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k, \alpha_i \in F$ , тогда

$$\varphi(u) = \alpha_1 \varphi(u_1) + \dots + \alpha_k \varphi(u_k) \in \langle \varphi(u_1), \dots, \varphi(u_k) \rangle. \quad \blacksquare$$

### 18.3 Связь размерности образа линейного отображения с рангом его матрицы

Пусть  $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ ,

$\mathfrak{f} = (f_1, \dots, f_m)$  — базис  $W$ ,

$A = A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f})$ .

**Теорема 18.2.**  $\operatorname{rk} A = \dim \operatorname{Im} \varphi$ .

*Доказательство.* По лемме,  $\operatorname{Im} \varphi = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \rangle$ . Поэтому,  $\dim \operatorname{Im} \varphi = \operatorname{rk} \{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\}$ .

Так как  $j$ -й столбец матрицы  $A$  составлен из координат вектора  $\varphi(e_j)$  в базисе  $\mathfrak{f}$ , то

$$\alpha_1 \varphi(e_1) + \dots + \alpha_n \varphi(e_n) = 0 \iff \alpha_1 A^{(1)} + \dots + \alpha_n A^{(n)} = 0.$$

Значит,  $\dim \operatorname{Im} \varphi = \operatorname{rk} \{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\} = \operatorname{rk} \{A^{(1)}, \dots, A^{(n)}\} = \operatorname{rk} A. \quad \blacksquare$

**Замечание.** Число  $\dim \operatorname{Im} \varphi$  называется *рангом* линейного отображения  $\varphi$ , обозначается  $\operatorname{rk} \varphi$ .

**Следствие.**  $\operatorname{rk} A$  не зависит от выбора пары базисов  $\mathfrak{e}$  и  $\mathfrak{f}$ .

### 18.4 Инвариантность ранга матрицы относительно умножения на квадратную невырожденную матрицу слева или справа

**Обозначение 2.**  $M_n^0(F) := \{C \in M_n(F) \mid \det C \neq 0\}$ .

**Следствие.** Ранг матрицы не меняется при умножении слева и/или справа на невырожденную матрицу.

*Доказательство.* Если  $A \in \operatorname{Mat}_{m \times n}$ ,  $C \in M_n^0$ ,  $D \in M_m^0$ , то  $A$  и  $D^{-1}AC$  — это матрицы одного и того же линейного отображения в разных парах базисов. По теореме,  $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} (D^{-1}AC). \quad \blacksquare$

## 18.5 Свойство образов векторов, дополняющих базис ядра до базиса всего пространства

**Предложение.** Пусть  $e_1, \dots, e_k$  — базис  $\ker \varphi$  и векторы  $e_{k+1}, \dots, e_n$  дополняют его до базиса всего  $V$ . Тогда,  $\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)$  образуют базис в  $\operatorname{Im} \varphi$ .

*Доказательство.*  $\operatorname{Im} \varphi = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_k), \varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n) \rangle = \langle \varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n) \rangle$ . (так как  $\varphi(e_1) = \dots = \varphi(e_k) = 0$ ). Осталось показать, что  $\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)$  линейно независимы.

Пусть  $\alpha_{k+1}\varphi(e_{k+1}) + \dots + \alpha_n\varphi(e_n) = 0$ , где  $\alpha_i \in F$ .

Тогда  $\varphi(\alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n) = 0 \implies \alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n \in \ker \varphi$ .

Но тогда  $\alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_k e_k$ , где  $\beta_j \in F$ .

Так как  $(e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ , то  $\alpha_i = \beta_j = 0 \ \forall i, j$ . ■

## 18.6 Теорема о связи размерностей ядра и образа линейного отображения

**Теорема 18.3.**  $\dim \operatorname{Im} \varphi + \dim \ker \varphi = \dim V$ .

*Доказательство.* Вытекает из предыдущего предложения так как в его доказательстве:

$$\dim V = n,$$

$$\dim \ker \varphi = k,$$

$$\dim \operatorname{Im} \varphi = n - k. \quad \blacksquare$$

## 18.7 Приведение матрицы линейного отображения к диагональному виду с единицами и нулями на диагонали

**Предложение.** Пусть  $\operatorname{rk} \varphi = r$ . Тогда существует базис  $\mathfrak{e}$  в  $V$  и базис  $\mathfrak{f}$  в  $W$ , такие что

$$A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}) = \left( \begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) = \begin{matrix} & \begin{matrix} r & n-r \end{matrix} \\ \begin{matrix} r \\ m-r \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

*Доказательство.* Пусть  $e_{r+1}, \dots, e_n$  — базис  $\ker \varphi$ . Дополним его векторами  $e_1, \dots, e_r$  до базиса всего  $V$ .

Положим  $f_1 = \varphi(e_1), \dots, f_r = \varphi(e_r)$ , тогда  $(f_1, \dots, f_r)$  — базис  $\operatorname{Im} \varphi$ .

Дополним  $f_1, \dots, f_r$  до базиса  $f_1, \dots, f_m$  всего  $W$ .

Тогда,  $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$  и  $\mathfrak{f} = (f_1, \dots, f_m)$  — искомые базисы. ■

**Следствие.** Если  $A \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(F)$ ,  $\operatorname{rk} A = r$ , то  $\exists C \in M_n^0(F)$  и  $D \in M_m^0(F)$ , такие что

$$D^{-1}AC = \left( \begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) = B.$$

$$(\iff A = DBC^{-1}).$$

*Доказательство.* Реализуем  $A$  как матрицу линейного отображения  $\varphi: F^n \rightarrow F^m$  в некоторой паре базисов, тогда утверждение вытекает из предложения и формулы изменения матрицы линейного отображения при замене базисов. ■

## 18.8 Линейные функции на векторном пространстве

**Определение 70.** *Линейной функцией* (или *линейной формой*, или *линейным функционалом*) на  $V$  называется всякое линейное отображение  $\alpha: V \rightarrow F$ .

**Обозначение 3.**  $V^* := \operatorname{Hom}(V, F)$  — множество всех линейных функций на  $V$ .

## 18.9 Примеры

1.  $\alpha: F^n \rightarrow F$ .

$$\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = (a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n, \text{ где } a_i \in F \text{ — фиксированные скаляры.}$$

2.  $F(X, \mathbb{R})$  — все функции из линейного пространства  $X$  в  $\mathbb{R}$ ,  $x_0 \in X$ ,  
 $\alpha: F(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  
 $\alpha(f) := f(x_0)$ .
3.  $\alpha: C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$   
 $\alpha(f) := \int_0^1 f(x) dx$
4.  $\alpha: M_n(F) \rightarrow F$   
 $\alpha(X) := \text{tr } X$

## 18.10 Двойственное (сопряжённое) векторное пространство, его размерность в конечномерном случае

Из общей теории линейных отображений:

1.  $V^*$  — векторное пространство (оно называется *сопряжённым* или *двойственным*).
2. Если  $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$  — фиксированный базис в  $V$ , то есть изоморфизм  $V^* \simeq \text{Mat}_{1 \times n}(F)$  (а это ни что иное, как строки длины  $n$ ).  
 $\alpha \rightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$   
 $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$   
 $\alpha(v) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n.$   
 $\alpha_i = \alpha(e_i)$  — коэффициенты линейной функции  $\alpha$  в базисе  $\mathfrak{e}$ .

**Следствие.**  $\dim V^* = \dim V$  ( $\implies V^* \simeq V$ ).

## 18.11 Двойственный базис

При  $i = 1, \dots, n$  рассмотрим линейную функцию  $\varepsilon_i \in V^*$ , соответствующую строке  $(0 \dots 1 \dots 0)$ . Тогда  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  — базис  $V^*$ , он однозначно определяется условием  $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$  ( $\delta_{ij}$  — символ Кронекера)

**Определение 71.** Базис  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  пространства  $V^*$ , определенный условием выше, называется базисом, *двойственным* (сопряженным) к базису  $\mathfrak{e}$ .

Удобная запись условия:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} (e_1, \dots, e_n) = E.$$

## 19 Лекция 6.02.2020

### 19.1 Утверждение о том, что всякий базис сопряжённого пространства двойствен некоторому базису исходного пространства

$\varepsilon_i(x_1e_1 + \dots + x_ne_n) = x_i$ , поэтому  $\varepsilon_i$  называется  $i$ -й координатной функцией в базисе  $e$ .

**Предложение.** Всякий базис пространства  $V^*$  двойствен некоторому базису пространства  $V$ .

*Доказательство.* Пусть  $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$  — базис пространства  $V^*$ . Фиксируем какой-то базис  $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$  пространства

$V$ , и пусть  $\varepsilon' = \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \dots \\ \varepsilon'_n \end{pmatrix}$  — соответствующий ему двойственный базис  $V^*$ .

Тогда,  $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \dots \\ \varepsilon'_n \end{pmatrix}$  для некоторой матрицы  $C \in M_n^0(F)$ .

Положим  $(e_1, \dots, e_n) = (e'_1, \dots, e'_n) \cdot C^{-1}$ .

Тогда,

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} (e_1, \dots, e_n) = C \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \dots \\ \varepsilon'_n \end{pmatrix} (e'_1, \dots, e'_n) C^{-1} = C E C^{-1} = E.$$

Значит,  $\varepsilon$  двойствен к  $e$ . ■

**Упражнение.**  $e$  определён однозначно.

### 19.2 Билинейные формы на векторном пространстве

Пусть  $V$  — векторное пространство над  $F$ .

**Определение 72.** Билинейная форма на  $V$  — это отображение  $\beta: V \times V \rightarrow F$ , линейное по каждому аргументу.

**Линейность по 1-му аргументу**

- $\beta(x_1 + x_2, y) = \beta(x_1, y) + \beta(x_2, y) \quad \forall x_1, x_2, y \in V$ ,
- $\beta(\lambda x, y) = \lambda \beta(x, y) \quad \forall x, y \in V, \lambda \in F$ .

**Линейность по 2-му аргументу**

- $\beta(x, y_1 + y_2) = \beta(x, y_1) + \beta(x, y_2) \quad \forall x, y_1, y_2 \in V$ ,
- $\beta(x, \lambda y) = \lambda \beta(x, y) \quad \forall x, y \in V, \lambda \in F$ .

### 19.3 Примеры

#### 19.3.1

$$V = F^n, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix};$$

$$\beta(x, y) := x_1y_1 + \dots + x_ny_n = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = x^T y.$$

#### 19.3.2

$$V = F^2, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix};$$
$$\beta(x, y) := \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}.$$

#### 19.3.3

$$V = C[a, b];$$

$$\beta(f, g) := \int_a^b f(x)g(x) dx.$$



## 19.4 Матрица билинейной формы по отношению к фиксированному базису

Далее считаем, что  $\dim V = n < \infty$ .

Пусть  $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ .

**Определение 73.** Матрицей билинейной формы  $\beta$  в базисе  $\mathfrak{e}$  называется такая матрица  $B \in M_n$ , что  $b_{ij} = \beta(e_i, e_j)$ .  
Обозначение:  $B(\beta, \mathfrak{e})$ .

**Примеры** Матрицы билинейных форм из примеров выше:

1. Пусть  $\mathfrak{e}$  — стандартный базис, тогда  $B(\beta, \mathfrak{e}) = E$ .
2. Пусть  $\mathfrak{e}$  — стандартный базис, тогда  $B(\beta, \mathfrak{e}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Формула вычисления значений билинейной формы в координатах**

Пусть  $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ ,

$y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$ .

Тогда,

$$\begin{aligned} \beta(x, y) &= \beta \left( \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \beta \left( e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \underbrace{\beta(e_i, e_j)}_{\beta_{ij}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \beta_{ij} y_j \\ &= (x_1, \dots, x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

## 19.5 Существование и единственность билинейной формы с заданной матрицей

**Предложение.** Пусть  $\mathfrak{e}$  — фиксированный базис  $V$ .

1. Всякая билинейная форма  $\beta$  на  $V$  однозначно определяется матрицей  $B(\beta, \mathfrak{e})$ .
2.  $\forall B \in M_n(F) \exists!$  билинейная форма  $\beta$  на  $V$ , такая что  $B(\beta, \mathfrak{e}) = B$ .

*Доказательство.*

1. Следует из формулы выше.
2. Единственность следует из формулы выше. Докажем существование:

Определим  $\beta$  по формуле выше.

Тогда  $\beta$  — билинейная форма на  $V$  (упражнение).

$$\beta(e_i, e_j) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot B \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad j = \beta_{ij}.$$

Действительно,  $B(\beta, \mathfrak{e}) = B$ . ■

## 19.6 Формула изменения матрицы билинейной формы при переходе к другому базису

$B = B(\beta, \mathfrak{e})$ .

Пусть  $\mathfrak{e}' = (e'_1, \dots, e'_n)$  — другой базис  $V$ .

$\mathfrak{e}' = \mathfrak{e} \cdot C$ .

$B' := B(\beta, \mathfrak{e}')$ .

**Предложение.**  $B' = C^T B C$ .

Доказательство.

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = x'_1 e'_1 + \dots + x'_n e'_n,$$

$$y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n = y'_1 e'_1 + \dots + y'_n e'_n,$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} y'_1 \\ \dots \\ y'_n \end{pmatrix}.$$

Тогда,

$$\begin{aligned} \beta(x, y) &= (x_1 \dots x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = (x'_1 \dots x'_n) C^T B C \begin{pmatrix} y'_1 \\ \dots \\ y'_n \end{pmatrix} \\ \beta(x, y) &= (x'_1 \dots x'_n) B' \begin{pmatrix} y'_1 \\ \dots \\ y'_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Получаем, что  $B' = C^T B C$ . ■

**Следствие.** Величина  $\text{rk } B$  не зависит от выбора базисов.

## 19.7 Ранг билинейной формы

**Определение 74.** Число  $\text{rk } B := \text{rk } B(\beta, \mathfrak{e})$  называется *рангом* билинейной формы  $\beta$ .

## 19.8 Симметричные билинейные формы

**Определение 75.** Билинейная форма  $\beta$  называется *симметричной*, если  $\beta(x, y) = \beta(y, x) \quad \forall x, y \in V$ .

## 19.9 Критерий симметричности билинейной формы в терминах её матрицы в каком-либо базисе

Пусть  $\mathfrak{e}$  — произвольный базис  $V$ .

**Предложение.**  $\beta$  симметрична  $\iff B = B^T$ .

Доказательство.

$$\implies b_{ji} = \beta(e_j, e_i) = \beta(e_i, e_j) = b_{ij},$$

$$\iff x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n,$$

$$y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n,$$

Тогда,

$$\beta(y, x) = (y_1 \dots y_n) B \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1 \dots x_n) B^T \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1 \dots x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \beta(x, y).$$
■

## 19.10 Квадратичные формы на векторном пространстве

Пусть  $\beta: V \times V \rightarrow F$  — билинейная форма на  $V$ .

**Определение 76.** Отображение  $Q_\beta: V \rightarrow F$ ,  $Q_\beta(x) = \beta(x, x)$ , называется *квадратичной формой*, ассоциированной с билинейной формой  $\beta$ .

Пусть  $\mathfrak{e}$  — базис  $V$ ,  $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ ,  $B = B(\beta, \mathfrak{e})$ .

Тогда,

$$Q_\beta(x) = (x_1 \dots x_n) B \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (b_{ij} + b_{ji}) x_i x_j.$$

## 19.11 Примеры

### 19.11.1

$$V = F^n, \beta(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \implies Q_\beta(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2.$$

### 19.11.2

$$V = F^2, \beta(x, y) = 2x_1y_2 \implies Q_\beta(x) = 2x_1x_2.$$

Если  $\epsilon$  — стандартный базис, то  $B(\beta, \epsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

### 19.11.3

$$V = F^2, \beta(x, y) = x_1y_2 + x_2y_1 \implies Q_\beta(x) = 2x_1x_2.$$

Если  $\epsilon$  — стандартный базис, то  $B(\beta, \epsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

## 19.12 Соответствие между симметричными билинейными формами и квадратичными формами

**Предложение.** Пусть в поле  $F$  выполнено условие  $1 + 1 \neq 0$  (то есть  $2 \neq 0$ ). Тогда отображение  $\beta \mapsto Q_\beta$  является биекцией между симметричными билинейными формами на  $V$  и квадратичными формами на  $V$ .

*Доказательство.*

**Сюръективность**  $Q$  — квадратичная форма  $\implies Q = Q_\beta$  для некоторой билинейной формы на  $V$ .

То есть  $Q(x) = \beta(x, x) \forall x \in V$ .

Положим  $\sigma(x, y) = \frac{1}{2} [\beta(x, y) + \beta(y, x)]$ , тогда  $\sigma$  — симметричная билинейная форма.

$$\sigma(x, x) = \frac{1}{2} [\beta(x, x) + \beta(x, x)] = \beta(x, x).$$

**Инъективность**  $\beta$  — симметричная билинейная форма на  $V$ .

$$Q_\beta(x + y) = \beta(x + y, x + y) = \underbrace{\beta(x, x)}_{Q_\beta(x)} + \underbrace{\beta(x, y) + \beta(y, x)}_{\text{равны между собой}} + \underbrace{\beta(y, y)}_{Q_\beta(y)} \implies \beta(x, y) = \frac{1}{2} [Q_\beta(x + y) - Q_\beta(x) - Q_\beta(y)].$$

■

## 20 Лекция 13.02.2020

### 20.1 Симметризация билинейной формы и поляризация квадратичной формы

**Замечание.**

1. Билинейная форма  $\sigma(x, y) = \frac{1}{2}(\beta(x, y) + \beta(y, x))$  называется *симметризацией* билинейной формы  $\beta$ .  
Если  $B$  и  $S$  — матрицы билинейных форм  $\beta$  и  $\sigma$  в некотором базисе, то  $S = \frac{1}{2}(B + B^T)$ .
2. Симметричная билинейная форма  $\beta(x, y) = \frac{1}{2}[Q(x+y) - Q(x) - Q(y)]$  называется *поляризацией* квадратичной формы  $Q$ .

**Определение 77.** Матрицей квадратной формы  $Q$  в базисе  $e$  называется матрица соответствующей симметричной билинейной формы (поляризации) в базисе  $e$ .

Обозначение:  $B(Q, e)$ .

*Пример.* Пусть  $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ .

Если  $e$  — стандартный базис, то  $B(Q, e) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ .

### 20.2 Канонический вид квадратичной формы

**Определение 78.** Квадратичная форма  $Q$  имеет в базисе  $e$  *канонический вид*, если  $B(Q, e)$  диагональна.

Если  $B(Q, e) = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n)$ , то  $Q(x_1, \dots, x_n) = b_1x_1^2 + b_2x_2^2 + \dots + b_nx_n^2$ .

### 20.3 Теорема о приведении квадратичной формы к каноническому виду. Метод Лагранжа

**Теорема 20.1.** *Всякую квадратичную форму путём замены базиса можно привести к каноническому виду.*

*Доказательство (метод Лагранжа).* Индукция по  $n$ :

**База**  $n = 1 \implies Q(x) = bx_1^2$  — канонический вид.

**Шаг** Пусть утверждение доказано для  $< n$ , докажем для  $n$ .

Пусть  $B = B(Q, e)$  — матрица квадратичной формы в исходном базисе  $e$ .

$$Q(x) = \sum_{i=1}^n b_{ii}x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2b_{ij}x_ix_j.$$

Случай 0.  $b_{ij} = 0 \ \forall i, j$  — доказывать нечего.

Случай 1.  $\exists i : b_{ii} \neq 0$ . Сделав перенумерацию, считаем  $b_{11} \neq 0$ .

Тогда,

$$\begin{aligned} Q(x_1, \dots, x_n) &= b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + \dots + 2b_{1n}x_1x_n + Q_1(x_2, \dots, x_n) \\ &= b_{11} \left( x_1^2 + 2\frac{b_{12}}{b_{11}}x_1x_2 + \dots + 2\frac{b_{1n}}{b_{11}}x_1x_n \right) + Q_1(x_2, \dots, x_n) \\ &= b_{11} \underbrace{\left( x_1 + \frac{b_{12}}{b_{11}}x_2 + \dots + \frac{b_{1n}}{b_{11}}x_n \right)^2}_{x'_1} - \underbrace{b_{11} \left( \frac{b_{12}}{b_{11}}x_2 + \dots + \frac{b_{1n}}{b_{11}}x_n \right)^2}_{Q_2(x_2, \dots, x_n)} + Q_1(x_2, \dots, x_n) \\ &= b_{11}(x'_1)^2 + Q_2(x'_2, \dots, x'_n), \end{aligned}$$

где

$$\begin{cases} x'_1 &= x_1 + \frac{b_{12}}{b_{11}}x_2 + \dots + \frac{b_{1n}}{b_{11}}x_n, \\ x'_2 &= x_2, \\ &\vdots \\ x'_n &= x_n. \end{cases}$$

Здесь важно проследить, что замена действительно соответствует замене базисов (то есть является невырожденной).

Вспомним как происходит замена базиса:

$$\begin{aligned} \mathfrak{e}' &= \mathfrak{e} \cdot C \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} &= C \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Выразим  $x$  через  $x'$  и запишем матрицу перехода:

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 - \frac{b_{12}}{b_{11}}x'_2 - \dots - \frac{b_{1n}}{b_{11}}x'_n, \\ x_2 = x'_2, \\ \vdots \\ x_n = x'_n. \end{cases} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{b_{12}}{b_{11}} & \dots & -\frac{b_{1n}}{b_{11}} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

По предположению индукции,  $Q_2$  можно привести к каноническому виду.

Случай 2.  $b_{ii} = 0 \ \forall i$ , но  $\exists i, j, i \neq j$ , такие что  $b_{ij} \neq 0$ .

Выполнив перенумерацию считаем, что  $b_{12} \neq 0$ .

Сделаем замену и выпишем матрицу перехода:

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 + x'_2, \\ x_2 = x'_1 - x'_2, \\ x_3 = x'_3, \\ \vdots \\ x_n = x'_n. \end{cases} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Получаем  $Q(x) = b_{12}x_1^2 - b_{12}x_2^2 + \underbrace{\dots}_{\text{нет квадратов}}$ , мы попали в случай 1. ■

**Замечание.** Базис, в котором  $Q$  имеет канонический вид, а так же сам этот вид, определены, вообще говоря, неоднозначно.

*Пример.*  $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ .

Замена  $\mathfrak{e}' = (2e_1, 2e_2) \ [x_1 = 2'x_1, x_2 = x'_2]$ ,

Тогда,  $Q(x'_1, x'_2) = 4x_1'^2 + 4x_2'^2$ .

## 20.4 Угловые миноры матрицы квадратичной формы

Пусть  $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$  — базис пространства  $V$ .

Рассмотрим систему векторов  $e'_1, \dots, e'_n$  следующего вида:

$$e'_1 = e_1,$$

$$e'_2 \in e_2 + \langle e_1 \rangle,$$

$$e'_3 \in e_3 + \langle e_1, e_2 \rangle,$$

...

$$e'_n \in e_n + \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle.$$

Для любого  $k = 1 \dots n$  имеем  $(e'_1, \dots, e'_k) = (e_1, \dots, e_k) \cdot C_k$ , где

$$C_k = \begin{pmatrix} 1 & \star & \dots & \star & \star \\ 0 & 1 & \ddots & \star & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \star \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_k(F).$$

Так как  $\det C = 1 \neq 0$ , то  $e'_1, \dots, e'_k$  линейно независимы и  $\langle e_1, \dots, e_k \rangle = \langle e'_1, \dots, e'_k \rangle$ .

В частности,  $e'_1, \dots, e'_n$  — базис  $V$ .

Заметим, что  $C_k$  — левый верхний  $k \times k$  блок в  $C_n$ .

Пусть  $Q: V \rightarrow F$  — квадратичная форма,  $\beta$  — соответствующая симметричная билинейная форма.

$$B := B(Q, \mathfrak{e}).$$

$B_k$  — левый верхний  $k \times k$  блок в  $B$ .

$$\delta_k := \delta_k(Q, \mathfrak{e}) := \det B_k(Q, \mathfrak{e}) \text{ — } k\text{-й угловой минор матрицы } B.$$

Для удобства,  $\delta_0 := 1$ .

**Лемма 20.2.** Пусть  $(e'_1, \dots, e'_n) = \mathfrak{e}'$  — базис  $V$  описанного выше вида и  $\delta'_k = \delta_k(Q, \mathfrak{e}')$ . Тогда,  $\delta'_k = \delta_k \ \forall k$ .

*Доказательство.* Пусть  $B' = B(Q, \mathfrak{e})$  и  $B'_k = B_k(Q, \mathfrak{e}')$ .

Так как  $\langle e'_1, \dots, e'_k \rangle = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$ , то  $B'_k = C_k^T B_k C_k$ . Отсюда,  $\delta'_k = \det B'_k = \underbrace{\det C_k^T}_1 \det B_k \underbrace{\det C_k}_1 = \det B_k = \delta_k$ . ■

## 20.5 Метод Якоби приведения квадратичной формы к каноническому виду

**Теорема 20.3.** Пусть  $\delta_k \neq 0 \forall k = 1, \dots, n$ .

Тогда,  $\exists!$  базис  $\mathfrak{e}' = (e'_1, \dots, e'_n)$  в  $V$ , такой что

1.  $\mathfrak{e}'$  имеет описанный выше вид;
2. В базисе  $\mathfrak{e}'$   $Q$  принимает канонический вид  

$$Q(x'_1, \dots, x'_n) = \delta_1 x'^2_1 + \frac{\delta_2}{\delta_1} x'^2_2 + \dots + \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} x'^2_n.$$

То есть  $B(Q, \mathfrak{e}') = \text{diag} \left( \delta_1, \frac{\delta_2}{\delta_1}, \dots, \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} \right)$

*Доказательство.* Индукция по  $n$ .

**База**  $n = 1 \implies$  верно.

**Шаг** Пусть доказано для  $< n$ , докажем для  $n$ .

Применяя предположение индукции к ограничению квадратичной формы на подпространство  $\langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle$  получаем, что  $\exists$  требуемый базис  $e'_1, \dots, e'_{n-1}$  в  $\langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle$  нужного вида.

Тогда,  $B(Q, (e'_1, \dots, e'_{n-1}, e_n))$  имеет вид

$$\left( \begin{array}{cccc|c} \delta_1 & 0 & \dots & 0 & \star \\ 0 & \frac{\delta_2}{\delta_1} & \dots & 0 & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\delta_{n-1}}{\delta_{n-2}} & \star \\ \hline \star & \star & \dots & \star & \star \end{array} \right).$$

Ищем  $e'_n$  в виде

$$e'_n = e_n + \lambda_1 e'_1 + \dots + \lambda_{n-1} e'_{n-1}.$$

Для любого  $k = 1, \dots, n-1$

$$\begin{aligned} \beta(e'_n, e'_k) &= \beta(e_n + \lambda_1 e'_1 + \dots + \lambda_{n-1} e'_{n-1}, e'_k) \\ &= \beta(e_n, e'_k) + \lambda_1 \beta(e'_1, e'_k) + \dots + \lambda_{n-1} \beta(e'_{n-1}, e'_k) \\ &= \beta(e_n, e'_k) + \lambda_k \beta(e'_k, e'_k) \\ &= \beta(e_n, e'_k) + \lambda_k \frac{\delta_k}{\delta_{k-1}}. \end{aligned}$$

Хотим,  $\beta(e'_n, e'_k) = 0 \forall k = 1, \dots, n-1 \iff \lambda_k = -\beta(e_n, e'_k) \frac{\delta_{k-1}}{\delta_k}$ .

Тогда в базисе  $\mathfrak{e}' = (e'_1, \dots, e'_n)$  матрица  $Q$  равна

$$\left( \begin{array}{ccccc} \delta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\delta_2}{\delta_1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\delta_{n-1}}{\delta_{n-2}} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & ? \end{array} \right).$$

По лемме,  $\delta_n = \delta'_n = \delta_1 \cdot \frac{\delta_2}{\delta_1} \cdot \dots \cdot \frac{\delta_{n-1}}{\delta_{n-2}} \cdot ? = \delta_{n-1} \cdot ? \implies ? = \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}}$ .

Единственность следует из явной формулы для  $\lambda_k$ . ■



## 20.6 Нормальный вид квадратичной формы над полем $\mathbb{R}$

**Определение 79.** Квадратичная форма над  $\mathbb{R}$  имеет *нормальный вид* в базисе  $e$ , если в этом базисе

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \varepsilon x_1^2 + \dots + \varepsilon_n x_n^2,$$

где  $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$ .

## 20.7 Приведение квадратичной формы над $\mathbb{R}$ к нормальному виду

**Следствие** (из метода Лагранжа). Для всякой квадратичной формы  $Q$  над  $\mathbb{R}$  существует базис, в котором  $Q$  имеет нормальный вид.

*Доказательство.* Из теоремы знаем, что существует базис  $e$ , в котором  $Q$  имеет канонический вид

$$Q(x_1, \dots, x_n) = b_1 x_1^2 + \dots + b_n x_n^2.$$

Делаем замену

$$x_i = \begin{cases} \frac{x'_i}{\sqrt{|b_i|}}, & b_i \neq 0 \\ x_i, & b_i = 0 \end{cases}.$$

Тогда в новых координатах  $Q(x'_1, \dots, x'_n) = \varepsilon_1 x'^2_1 + \dots + \varepsilon_n x'^2_n$ ,

$$\varepsilon_i = \operatorname{sgn} b_i = \begin{cases} 1, & b_i > 0 \\ 0, & b_i = 0 \\ -1, & b_i < 0 \end{cases}.$$

■

## 21 Лекция 20.02.2020

**Замечание.** Для  $F = \mathbb{C}$  всякую квадратичную форму можно привести к виду (2), где  $k = \text{rk } Q$ .

$$Q = x_1^2 + \dots + x_k^2. \quad (2)$$

### 21.1 Положительный и отрицательный индексы инерции квадратичной формы над $\mathbb{R}$

Пусть  $F = \mathbb{R}$ .

Пусть  $Q: V \rightarrow \mathbb{R}$  — квадратичная форма.

Можно привести к нормальному виду

$$Q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_{s+t}^2.$$

Здесь  $i_+ := s$  — положительный индекс инерции квадратичной формы  $Q$ ,

$i_- := t$  — отрицательный индекс инерции квадратичной формы  $Q$ .

### 21.2 Закон инерции

**Теорема 21.1.** Числа  $i_+$  и  $i_-$  не зависят от базиса в котором  $Q$  принимает нормальный вид.

*Доказательство.*  $s + t = \text{rk } Q$ , то есть не зависит от выбора базиса. Следовательно, достаточно показать, что число  $s$  определено однозначно.

Пусть  $e = (e_1, \dots, e_n)$  — базис, в котором  $Q$  принимает нормальный вид

$$Q = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_{s+t}^2.$$

Пусть  $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$  — другой базис, в котором  $Q$  принимает нормальный вид

$$Q = x_1'^2 + \dots + x_s'^2 - x_{s+1}'^2 - \dots - x_{s+t}'^2.$$

Предположим, что  $s \neq s'$ , можно считать что  $s > s'$ .

Положим  $L := \langle e_1, \dots, e_s \rangle$ ,  $\dim L = s$ ,

$$L' := \langle e'_{s+1}, \dots, e'_{s+t} \rangle, \dim L' = n - s'.$$

Так как  $L + L' \subseteq V$ , то  $\dim(L + L') \leq n$ .

Тогда,  $\dim(L \cap L') \geq s + (n - s') - n = s - s' > 0$ .

Значит,  $\exists$  вектор  $v \in L \cap L'$ , такой что  $v \neq 0$ .

Теперь:

1. Так как  $v \in L$ , то  $Q(v) > 0$ ,

2. Так как  $v \in L'$ , то  $Q(v) \leq 0$ .

Противоречие. ■

### 21.3 Следствие метода Якоби о вычислении индексов инерции квадратичной формы над $\mathbb{R}$

Пусть  $Q: V \rightarrow \mathbb{R}$  — квадратичная форма,

$e = (e_1, \dots, e_n)$  — базис,

$B = B(Q, e)$ ,

$\delta_k$  —  $k$ -й угловой минор матрицы  $B$ .

**Следствие** (из метода Якоби). Пусть  $\delta_k \neq 0 \forall k$ . Тогда:

Число  $i_+$  равно количеству сохранений знака в последовательности  $1, \delta_1, \dots, \delta_n$ .

Число  $i_-$  равно количеству перемен знака в последовательности  $1, \delta_1, \dots, \delta_n$ .

*Доказательство.* Метод Якоби  $\implies \exists$  базис, в котором  $Q$  принимает канонический вид

$$Q = \delta_1 x_1^2 + \frac{\delta_2}{\delta_1} x_2^2 + \dots + \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} x_n^2.$$

Здесь, знак отношения  $\frac{\delta_i}{\delta_{i-1}}$  соответствует смене либо сохранению знака в рассматриваемой последовательности.

По закону инерции, количества знаков  $+$  и  $-$  не изменяются от выбора базиса. ■



## 21.4 Положительно определённые, отрицательно определённые, неотрицательно определённые, неположительно определённые, неопределённые квадратичные формы над $\mathbb{R}$

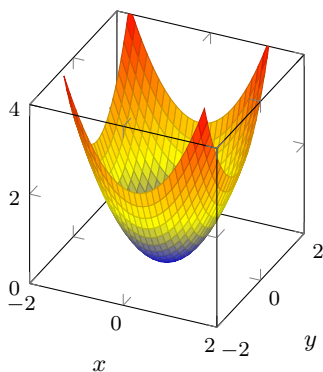
**Определение 80.** Квадратичная форма  $Q$  над  $\mathbb{R}$  называется

| Термин                      | Обозначение | Условие  | Нормальный вид   | Индексы инерции    |
|-----------------------------|-------------|--|--|--------------------|
| Положительно определённой   | $Q > 0$     | $Q(x) > 0 \ \forall x \neq 0$                    | $x_1^2 + \dots + x_n^2$  | $i_+ = n, i_- = 0$ |
| Отрицательно определённой   | $Q < 0$     | $Q(x) < 0 \ \forall x \neq 0$                    | $-x_1^2 - \dots - x_n^2$   | $i_+ = 0, i_- = n$ |
| Неотрицательно определённой | $Q \geq 0$  | $Q(x) \geq 0 \ \forall x$                        | $x_1^2 + \dots + x_k^2, \ k \leq n$                                      | $i_+ = k, i_- = 0$ |
| Неположительно определённой | $Q \leq 0$  | $Q(x) \leq 0 \ \forall x$                        | $-x_1^2 - \dots - x_k^2, \ k \leq n$                                     | $i_+ = 0, i_- = k$ |
| Неопределённой              | —           | $\exists x : Q(x) > 0$<br>$\exists y : Q(y) < 0$ | $x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_{s+t}^2$<br>$s, t \geq 1$ | $i_+ = s, i_- = t$ |

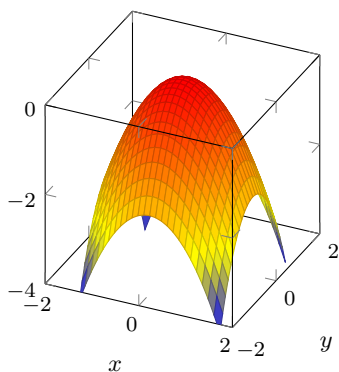
## 21.5 Примеры

$V = \mathbb{R}^2$ .

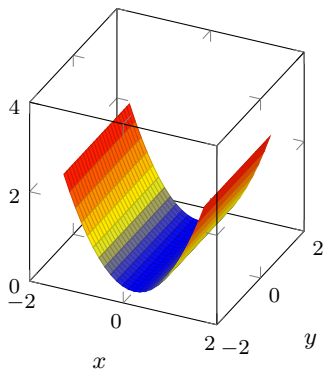
1.  $Q(x, y) = x^2 + y^2, \ Q > 0$ .



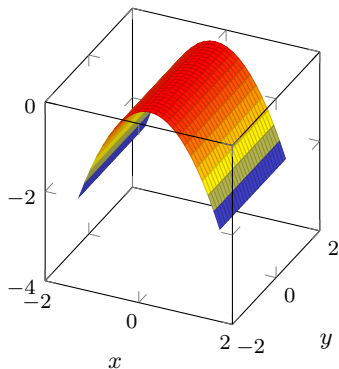
2.  $Q(x, y) = -x^2 - y^2, \ Q < 0$ .



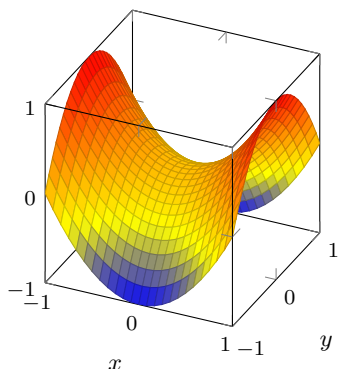
3.  $Q(x, y) = x^2, \ Q \geq 0$ .



4.  $Q(x, y) = -x^2$ ,  $Q \leq 0$ .



5.  $Q(x, y) = x^2 - y^2$ .



## 21.6 Одно применение квадратичных форм над $\mathbb{R}$

[Презентация](#) (продублирована ниже)

### 21.6.1 Знаем из курса математического анализа

Пусть  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — некоторая функция,  $x_0 \in \mathbb{R}$  — некоторая точка.

Если  $f$  дважды дифференцируема в точке  $x_0$ , то для малого приращения  $y$  имеем

$$f(x_0 + y) = f(x_0) + ay + by^2 + o(y^2),$$

где  $a = f'(x_0)$ ,  $b = f''(x_0)/2$ .

**Предложение** (необходимое условие локального экстремума). Если  $f$  в точке  $x_0$  имеет локальный экстремум, то  $f'(x_0) = 0$ .

**Предложение** (достаточные условия локального экстремума). Пусть  $f'(x_0) = 0$ . Тогда

- если  $f''(x_0) > 0$ , то  $f$  в точке  $x_0$  имеет локальный минимум;
- если  $f''(x_0) < 0$ , то  $f$  в точке  $x_0$  имеет локальный максимум.

### 21.6.2 Применение квадратичных форм

Пусть  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  — некоторая функция,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  — некоторая точка.

Если  $f$  «дважды дифференцируема» в точке  $x_0$ , то для малого приращения  $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  имеем

$$f(x_0 + y) = f(x_0) + \underbrace{a_1 y_1 + \dots + a_n y_n}_{l(y)} + \underbrace{\sum_{i=1}^n b_{ii} y_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2b_{ij} y_i y_j}_{Q(y)} + o(|y|^2).$$

$l(y)$  — линейная форма, (называется «дифференциал»)

$Q(y)$  — квадратичная форма.

**Предложение** (необходимое условие локального экстремума). Если  $f$  в точке  $x_0$  имеет локальный экстремум, то  $l(y) \equiv 0$  (то есть  $a_1 = \dots = a_n = 0$ ).

**Предложение** (достаточные условия локального экстремума или его отсутствия). Пусть  $l(y) \equiv 0$ . Тогда:

- если  $Q > 0$ , то  $f$  в точке  $x_0$  имеет локальный минимум;
- если  $Q < 0$ , то  $f$  в точке  $x_0$  имеет локальный максимум;
- если  $Q$  неопределённая, то  $f$  в точке  $x_0$  не имеет локального экстремума.

## 21.7 Критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы

Пусть  $V$  — векторное пространство над  $\mathbb{R}$ ,  $\dim V = n$ ,

$\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ ,

$B = B(Q, \mathfrak{e})$ ,

$B_k$  — левый верхний  $k \times k$  блок,

$\delta_k = \det B_k$ .

**Теорема 21.2** (Критерий Сильвестра положительной определённости).

$$Q > 0 \iff \delta_k > 0 \quad \forall k = 1 \dots n.$$

*Доказательство.*

$\Leftarrow$  По следствию из метода Якоби,  $i_+ = n$ , то есть  $Q > 0$ .

$\Rightarrow$   $Q > 0 \implies \exists C \in M_n^0(\mathbb{R})$ , такая что  $C^T B C = E$ .

Тогда,  $\det C^T \cdot \det B \cdot \det C = 1$ . Отсюда,  $\delta_n = \frac{1}{(\det C)^2} > 0$ .

Теперь, для любого  $k$  ограничение  $Q$  на  $\langle e_1, \dots, e_k \rangle$  тоже положительно определено, а его матрица в базисе  $e_1, \dots, e_k$  равна  $B_k$ . Следовательно,  $\det B_k > 0$ . ■

## 21.8 Критерий отрицательной определённости квадратичной формы

**Следствие.**

$$Q < 0 \iff \delta_k \begin{cases} > 0 & \text{при } k \not\equiv 2, \\ < 0 & \text{при } k \equiv 2. \end{cases}$$

*Доказательство.*  $Q < 0 \iff -Q > 0$

$$\iff \det(-B_k) > 0 \quad \forall k$$

$$\iff (-1)^k \delta_k > 0 \quad \forall k$$

## 21.9 Евклидово пространство и скалярное произведение

**Определение 81.** *Евклидово пространство* — это векторное пространство  $\mathbb{E}$  над  $\mathbb{R}$ , на котором задано *скалярное произведение*, то есть такое отображение  $(\cdot, \cdot): \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ , что

1.  $(\cdot, \cdot)$  — симметричная билинейная форма,
2. Квадратичная форма  $(x, x)$  положительно определённая.

### 21.10 Примеры

$$1. \mathbb{E} = \mathbb{R}^n, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

$(x, y) := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \leftarrow$  стандартное скалярное произведение в  $\mathbb{R}^n$ .

$$(x, x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 > 0.$$

$$2. \mathbb{E} = \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R}),$$

$$(A, B) := \text{tr}(A^T B),$$

$$(A, A) = \text{tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2.$$

$$3. \mathbb{E} = C[a, b],$$

$$(f, g) := \int_a^b f(x)g(x) dx,$$

$$(f, f) = \int_a^b f^2(x) dx > 0.$$

## 22 Лекция 20.02.2020

**Замечание.** Всякое подпространство  $U \subseteq E$  тоже является евклидовым пространством со скалярным произведением  $(\cdot, \cdot)|_U \leftarrow$  ограничение на  $U$ .

### 22.1 Длина вектора евклидова пространства

**Определение 82.** Длина вектора  $x \in \mathbb{E}$  — это  $|x| := \sqrt{(x, x)}$ .

Свойство:  $|x| \geq 0$ , причем  $|x| = 0 \iff x = 0$ .

*Пример.* Если  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$  со стандартным скалярным произведением, то  $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ .

**Замечание.** Если  $\mathbb{E} = \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ ,  $(A, B) = \text{tr}(A^T B)$

Тогда,  $|A| = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2} \leftarrow$  это обозначается как  $\|A\|_F$  и называется *нормой Фробениуса, фробениусовой нормой*.

### 22.2 Неравенство Коши–Буняковского

**Предложение** (неравенство Коши–Буняковского).  $\forall x, y \in \mathbb{E}$  верно  $|(x, y)| \leq |x| \cdot |y|$ , причём равенство  $\iff x, y$  пропорциональны.

*Доказательство.* Случай:

1.  $x, y$  пропорциональны. Тогда, можно считать, что  $y = \lambda x$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$|(x, y)| = |(x, \lambda x)| = |\lambda| |(x, x)| = |\lambda| |x|^2 = |x| \cdot |\lambda x| = |x| \cdot |y|.$$

2.  $x, y$  не пропорциональны. Тогда  $x, y$  линейно независимы.

Значит они образуют базис в  $\langle x, y \rangle$ .

Получаем

$$\begin{vmatrix} (x, x) & (x, y) \\ (y, x) & (y, y) \end{vmatrix} > 0 \quad (\text{критерий Сильвестра}).$$

$$\text{Отсюда, } (x, x) \cdot (y, y) - (x, y)^2 > 0 \implies (x, y)^2 < |x|^2 \cdot |y|^2.$$

■

*Пример.* Пусть  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$  со стандартным скалярным произведением, тогда

$$|x_1 y_1 + \dots + x_n y_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}.$$

### 22.3 Угол между ненулевыми векторами евклидова пространства

Пусть  $x, y \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$ , тогда  $-1 \leq \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|} \leq 1$ .

**Определение 83.** Угол между ненулевыми векторами  $x, y \in \mathbb{E}$ , это такой  $\alpha \in [0, \pi]$ , что  $\cos \alpha = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}$ .

Тогда  $(x, y) = |x| |y| \cos \alpha$ .

### 22.4 Матрица Грама системы векторов евклидова пространства

Пусть  $v_1, \dots, v_k$  — произвольная система векторов.

**Определение 84.** Матрица Грама этой системы — это

$$G(v_1, \dots, v_k) = \begin{pmatrix} (v_1, v_1) & (v_1, v_2) & \dots & (v_1, v_k) \\ (v_2, v_1) & (v_2, v_2) & \dots & (v_2, v_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (v_k, v_1) & (v_k, v_2) & \dots & (v_k, v_k) \end{pmatrix}.$$

*Пример.*  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$  со стандартным скалярным произведением.

$a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n \rightsquigarrow A := (a_1, \dots, a_k) \in \text{Mat}_{n \times k}(\mathbb{R})$ .

Тогда,  $G(a_1, \dots, a_k) = A^T \cdot A$ .

## 22.5 Определитель матрицы Грама: неотрицательность, критерий положительности

**Предложение.**  $\forall v_1, \dots, v_k \in \mathbb{E} \implies \det G(v_1, \dots, v_k) \geq 0$ .

Более того,  $\det G(v_1, \dots, v_k) > 0 \iff v_1, \dots, v_k$  линейно независимы.

*Доказательство.* Пусть  $G := G(v_1, \dots, v_k)$ . Случаи:

1.  $v_1, \dots, v_k$  линейно независимы. Тогда,  $G$  — матрица билинейной формы  $(\cdot, \cdot) \Big|_{\langle v_1, \dots, v_k \rangle}$  в базисе  $v_1, \dots, v_k$  подпространства  $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ , а значит  $\det G > 0$  по критерию Сильвестра.
2.  $v_1, \dots, v_k$  линейно зависимы. Тогда,  $\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ , такие что  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$ .  
А значит,  $\forall i = 1, \dots, k \implies \alpha_1 (v_1, v_i) + \dots + \alpha_k (v_k, v_i) = 0$ .  
Отсюда,  $\alpha_1 G_{(1)} + \dots + \alpha_k G_{(k)} = 0 \implies$  строки в  $G$  линейно зависимы  $\implies \det G = 0$ . ■

## 22.6 Ортогональные векторы

**Определение 85.** Векторы  $x, y \in \mathbb{E}$  называются *ортогональными*, если  $(x, y) = 0$ .

## 22.7 Ортогональное дополнение подмножества евклидова пространства

**Определение 86.** *Ортогональное дополнение* множества  $S \subseteq \mathbb{E}$  — это множество  $S^\perp := \{x \in \mathbb{E} \mid (x, y) = 0 \forall y \in S\}$ .

**Упражнение.**

1.  $S^\perp$  — подпространство в  $\mathbb{E}$ .
2.  $S^\perp = \langle S \rangle^\perp$ .

## 22.8 Размерность ортогонального дополнения подпространства, ортогональное дополнение к ортогональному дополнению подпространства

## 22.9 Разложение евклидова пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения

Далее считаем, что  $\dim \mathbb{E} = n < \infty$ .

**Предложение.** Пусть  $S \subseteq \mathbb{E}$  — подпространство. Тогда:

1.  $\dim S^\perp = n - \dim S$ .
2.  $\mathbb{E} = S \oplus S^\perp$ .
3.  $(S^\perp)^\perp = S$ .

*Доказательство.*

1. Пусть  $\dim S = k$  и  $e_1, \dots, e_k$  — базис  $S$ .

Дополним  $e_1, \dots, e_k$  до базиса  $e_1, \dots, e_n$  всего  $\mathbb{E}$ .

Тогда,  $\forall x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in \mathbb{E}$ .

$$\begin{aligned} x \in S^\perp &\iff (x, e_i) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k \\ &\iff \begin{cases} (e_1, e_1)x_1 + \dots + (e_n, e_1)x_n = 0 \\ (e_1, e_2)x_1 + \dots + (e_n, e_2)x_n = 0 \\ \dots \\ (e_1, e_k)x_1 + \dots + (e_n, e_k)x_n = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Это ОСЛУ с матрицей  $G \in \text{Mat}_{k \times n}(\mathbb{R})$ , причём любой  $k \times k$  блок в  $G$  — это  $\underbrace{G(e_1, \dots, e_k)}_{\det \neq 0}$ .

Это означает, что  $\text{rk } G = k$ .

Следовательно, пространство решений этой ОСЛУ имеет размерность  $n - k$ .

Отсюда,  $\dim S^\perp = n - k = n - \dim S$ .

2. (а)  $\dim S + \dim S^\perp = k + (n - k) = n = \dim E$ .

$$(b) \ v \in S \cap S^\perp \implies (v, v) = 0 \implies v = 0 \implies S \cap S^\perp = \{0\}.$$

А значит,  $E = S \oplus S^\perp$ .

3. Заметим, что  $S \subseteq (S^\perp)^\perp$  (по определению).

$$\dim(S^\perp)^\perp = n - \dim S^\perp = n - (n - \dim S) = \dim S.$$

Следовательно,  $S = (S^\perp)^\perp$ . ■

## 22.10 Ортогональная проекция вектора на подпространство, ортогональная составляющая вектора относительно подпространства

$S$  — подпространство  $\implies \mathbb{E} = S \oplus S^\perp$

$\forall v \in \mathbb{E} \exists! x \in S, y \in S^\perp$ , такие что  $x + y = v$ .

**Определение 87.**

1.  $x$  называется *ортогональной проекцией* вектора  $v$  на подпространство  $S$ .

Обозначение:  $x = \text{pr}_S v$ .

2.  $y$  называется *ортогональной составляющей* вектора  $v$  относительно подпространства  $S$ .

Обозначение:  $y = \text{ort}_S v$ .

## 22.11 Явная формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в $\mathbb{R}^n$ , заданное своим базисом

Пусть  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$  со стандартным скалярным произведением.

$S \subseteq \mathbb{E}$  — подпространство,  $a_1, \dots, a_k$  — базис  $S$ .

Пусть  $A := (a_1, \dots, a_k) \in \text{Mat}_{n \times k}(\mathbb{R})$ ,  $A^{(i)} = a_i$ .

**Предложение.**  $\forall v \in \mathbb{R}^n \quad \text{pr}_S v = A(A^T A)^{-1} A^T v$ .

*Доказательство.* Корректность:  $A^T A = G(a_1, \dots, a_k) \in M_k^0(\mathbb{R})$ .

Положим  $x := \text{pr}_S v$ ,  $y := \text{ort}_S v$ .

Так как  $x \in S$ ,  $x = A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_k \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ .

$y \in S^\perp \implies A^T y = 0$ .

$$\begin{aligned} A(A^T A)^{-1} A^T v &= A(A^T A)^{-1} A^T (x + y) \\ &= \underbrace{A(A^T A)^{-1} A^T A}_{E} \overbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_k \end{pmatrix}}^x + A(A^T A)^{-1} \underbrace{A^T y}_0 \\ &= A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = x = \text{pr}_S v. \end{aligned}$$

## 22.12 Ортогональные и ортонормированные системы векторов

**Определение 88.** Система ненулевых векторов  $v_1, \dots, v_k$  называется

1. *ортогональной*, если  $(v_i, v_j) = 0 \ \forall i \neq j$  (то есть  $G(v_1, \dots, v_k)$  диагональна),

2. *ортонормированной*, если  $(v_i, v_j) = 0 \ \forall i \neq j$  и  $(v_i, v_i) = 1$  ( $\iff |v_i| = 1$ ). То есть  $G(v_1, \dots, v_k) = E$ .

**Замечание.** Всякая ортогональная (и в частности ортонормированная) система векторов автоматически линейно независима.

$$\det G(v_1, \dots, v_k) = |v_1|^2 \dots |v_k|^2 \neq 0.$$

## 22.13 Ортогональный и ортонормированный базис

**Определение 89.** Базис пространства называется *ортогональным* (соответственно *ортонормированным*), если он является ортогональной (ортонормированной) системой векторов.