

Математический Анализ - 2

Серёжа Рахманов | [telegram](#), [website](#)

Максим Николаев | [telegram](#)

Версия от 06.10.2020 11:50

Содержание

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Лекция 1 - 01.09.2020 - Ряды | 2 |
| 1.1 | Определение ряда | 2 |
| 1.2 | Необходимое условие сходимости | 2 |
| 1.3 | Критерий Коши | 2 |
| 1.4 | Положительные ряды | 3 |
| 1.5 | Признаки сравнения | 3 |
| 1.6 | Отсутствие универсального ряда сравнения | 4 |
| 2 | Лекция 2 - 08.09.2020 - Положительные ряды | 5 |
| 2.1 | Признак Лобачевского-Коши | 5 |
| 2.2 | Теорема Штольца и оценка частичных сумм гармонического ряда | 5 |
| 2.3 | Признак Даламбера и радикальный признак Коши | 6 |
| 2.4 | Радикальный признак сильнее признака Даламбера | 6 |
| 2.5 | Признак Гаусса | 6 |
| 2.6 | Сравнение с интегралом | 7 |
| 2.7 | Улучшение сходимости ряда | 7 |
| 3 | Лекция 3 - 15.09.2020 - Знакопеременные ряды | 8 |
| 3.1 | Абсолютная и условная сходимость | 8 |
| 3.2 | Мажорантный признак Вейерштрасса | 8 |
| 3.3 | Группировка членов ряда | 8 |
| 3.4 | Знакопередающиеся ряды, пр-к Лейбница | 9 |
| 3.5 | О неприменимости эквивалентности | 9 |
| 3.6 | Признаки Дирихле и Абеля | 9 |
| 3.7 | Влияние перестановки членов ряда на его сумму | 10 |
| 4 | Лекция 5 - 29.09.2020 - Исследование сходимости функциональных рядов | 11 |
| 4.1 | Свойства равномерно сходящейся последовательности | 11 |
| 4.2 | Равномерная сходимость функционального ряда | 11 |
| 4.3 | Необходимое условие равномерной сходимости | 11 |
| 4.4 | Критерий Коши равномерной сходимости | 11 |
| 4.5 | Признаки Вейерштрасса и Даламбера | 12 |
| 4.6 | Признак Лейбница | 12 |
| 4.7 | Признаки Дирихле и Абеля | 12 |
| 4.8 | Свойства равномерно сходящегося ряда | 12 |
| 5 | Лекция 6 - 6.10.2020 - Степенные ряды | 14 |
| 5.1 | Основные понятия | 14 |
| 5.2 | Теорема Абеля, радиус и интервал последовательности | 14 |
| 5.3 | Равномерная сходимость степенного ряда | 14 |
| 5.4 | Сходимость ряда в граничных точках интервала сходимости | 14 |
| 5.5 | Дифференцирование и интегрирование степенного ряда | 15 |
| 5.6 | Бесконечное дифференцирование | 15 |
| 5.7 | Ряд Тейлора | 15 |
| 5.7.1 | Ряды Тейлора основных элементарных функций | 15 |

1 Лекция 1 - 01.09.2020 - Ряды

1.1 Определение ряда

Определение 1. Пусть a_n – последовательность, т.е. $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Формальная бесконечная сумма: $a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

называется рядом. $S_N = \sum_{n=1}^N a_n$ – частичная сумма, сумма ряда: $S = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N$

Возможны 3 случая:

1. $\exists S \in \mathbb{R}$
2. $\exists S = \infty$
3. $\nexists S$

В первом случае говорят, что ряд сходится, иначе – что ряд расходится.

Пример.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0 + 0 + \dots + 0 = 0$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + \dots + 1 = \infty$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - \dots$ не существует

Определение 2. Если ряд сходится, т.е. $S_N \rightarrow S$ при $N \rightarrow \infty$, то $S - S_N = r_N$ – остаток ряда

$$r_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n, r_N \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty$$

1.2 Необходимое условие сходимости

Замечание. Если ряд сходится, то $a_n \rightarrow 0$

Доказательство. $a_n = S_n - S_{n-1} \rightarrow 0$, т.к. $S_n \rightarrow S$ и $S_{n-1} \rightarrow S$ ■

1.3 Критерий Коши

Определение 3. a_n называется фундаментальной, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > m > N \implies |S_n - S_m| < \varepsilon$

Теорема 1.1. S_n – сходится $\Leftrightarrow S_n$ – фундаментальная

Доказательство. $S_n - S_m = \sum_{k=m+1}^n a_k$ Тогда $\sum a_n$ – сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > m > N |a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n| < \varepsilon$ ■

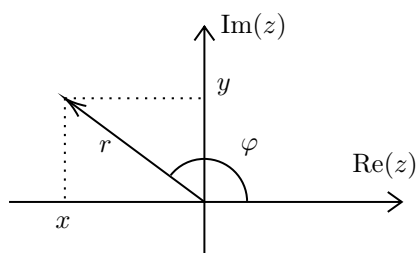
Пример.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\text{Заметим, что } S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} \right) = 1 - \frac{1}{N+1} \rightarrow 1$$

$$\text{Этот ряд сходится при } N \rightarrow \infty: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

$$2. z \in \mathbb{C}, z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$



Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots$

$$S_N = 1 + z + z^2 + \dots + z^N = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z}$$

Ряд сходится $\Leftrightarrow |z| < 1$

$$|z| < 1 \Rightarrow z^n \rightarrow 0, S_N = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z} \rightarrow \frac{1}{1 - z}$$

1.4 Положительные ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \geq 0, S_n \uparrow, \text{ т.к. } S_{n+1} \geq S_n$$

Возможны 2 случая:

$$1. \exists S \in \mathbb{R}$$

$$2. \exists S = \infty$$

Обозначение 1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ – ряд сходится, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ – ряд расходится.

1.5 Признаки сравнения

1. Сравнение с помощью неравенства.

$$a_n \leq b_n \text{ при всех } n \geq n_0$$

$$\text{Ряд } \sum b_n \text{ сходится} \Rightarrow \text{ряд } \sum a_n \text{ сходится}$$

$$\text{Ряд } \sum a_n \text{ расходится} \Rightarrow \text{ряд } \sum b_n \text{ расходится}$$

2. Сравнение отношений.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \text{ при всех } n \geq n_0$$

$$\text{Ряд } \sum b_n \text{ сходится} \Rightarrow \text{ряд } \sum a_n \text{ сходится}$$

$$\text{Ряд } \sum a_n \text{ расходится} \Rightarrow \text{ряд } \sum b_n \text{ расходится}$$

Доказательство.

$$a_{n_0+1} \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+1}$$

$$a_{n_0+2} \leq \frac{a_{n_0+1}}{b_{n_0+1}} \cdot b_{n_0+2} \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+2}$$

\vdots

$$a_{n_0+k} \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+k} \Rightarrow \sum_{n=n_0}^N a_n \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot \sum_{n=n_0}^N b_n$$

■

3. Сравнение с помощью предела.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0; +\infty) \Rightarrow \text{сходимость } \sum a_n \Leftrightarrow \text{сходимость } \sum b_n$$

Доказательство.

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$$

$$\forall \varepsilon \exists n_0 : c - \varepsilon \leq \frac{a_n}{b_n} \leq c + \varepsilon, \forall n \geq n_0$$

$$\text{Возьмём } \varepsilon : c - \varepsilon > 0 \Rightarrow (c - \varepsilon) \cdot b_n \leq a_n \leq (c + \varepsilon) \cdot b_n$$

Сходимость следует из правой части неравенства, а расходимость из левой.

■

1.6 Отсутствие универсального ряда сравнения

Предложение. Не существует ряда $\sum c_n$, $c_n > 0$:

- 1) $\frac{a_n}{c_n} \rightarrow 0 \implies$ ряд $\sum a_n$ сходится.
- 2) $\frac{b_n}{c_n} \rightarrow \infty \implies$ ряд $\sum b_n$ расходится.

Доказательство.

1. Если ряд $\sum c_n$ расходится, то пусть $S_N = \sum_{n=1}^N c_n \rightarrow \infty, S_0 = 0$, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}})}_{a_n}$ расходится так как:

$$(a) \sum_{n=1}^N (\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}}) = \sqrt{S_1} - \sqrt{S_0} + \sqrt{S_2} - \sqrt{S_1} + \dots + \sqrt{S_N} - \sqrt{S_{N-1}} = \sqrt{S_N} - \sqrt{S_0} = \sqrt{S_N} \rightarrow \sqrt{S}$$

$$(b) \frac{\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}}}{c_n} = \frac{\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}}}{S_n - S_{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}}} \implies \frac{a_n}{c_n} \rightarrow 0$$

Ряд расходится, но по предположению сходится, получили противоречие.

2. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, то рассмотрим r_n - его n -ый остаток, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n})}_{b_n}, r_0 = S = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, так как:

$$(a) \sum_{n=1}^N (\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}) = \sqrt{r_0} - \sqrt{r_1} + \sqrt{r_1} - \sqrt{r_2} + \dots + \sqrt{r_{N-1}} - \sqrt{r_N} = \sqrt{r_0} - \sqrt{r_N} = \sqrt{S} - \sqrt{r_N} \rightarrow \sqrt{S}, \text{ т.к. } r_N \rightarrow 0$$

$$(b) \frac{\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}}{c_n} = \frac{\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}}{r_{n-1} - r_n} = \frac{1}{\sqrt{r_{n-1}} + \sqrt{r_n}} \rightarrow \infty, \text{ т.к. } \sqrt{r_{n-1}} \rightarrow 0 \text{ и } \sqrt{r_n} \rightarrow 0$$

Ряд сходится, но по предположению расходится, получили противоречие.

■

2 Лекция 2 - 08.09.2020 - Положительные ряды

2.1 Признак Лобачевского-Коши

Предложение. Пусть $a_n > 0$ и $a_n \downarrow$

Тогда ряды $\sum a_n$ и $\sum 2^n \cdot a_{2^n}$ ведут себя одинаково

Доказательство. $a_1 + (a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + \dots + a_8) + \dots$

$$a_1 \geq a_2 \geq a_2$$

$$2a_2 \geq a_3 + a_4 \geq 2a_4$$

$$4a_4 \geq a_5 + \dots + a_8 \geq 4a_8$$

\vdots

$$a_1 + \sum_{n=0}^{m-1} 2^n a_{2^n} \geq \sum_{n=1}^{2^m} a_n \geq a_1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^m 2^n a_{2^n}$$

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ – обобщённый гармонический ряд, $p > 0$

$$a_n = \frac{1}{n^p} \downarrow \quad a_{2^n} = \frac{1}{(2^n)^p}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2^n)^{p-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}} \right)^n$$

Это сумма геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{2^{p-1}}$

$q < 1 \iff p > 1$ – ряды сходятся, например: $\sum \frac{1}{n^{1,001}}, \sum \frac{1}{n^2}$

$q \geq 1 \iff p \leq 1$ – ряды расходятся, например: $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}, \sum \frac{1}{n}$

Пример. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^p n}, p > 0$

$$\frac{1}{n \cdot \ln^p n} \downarrow, a_{2^n} = \frac{1}{2^n \cdot \ln^p 2^n} = \frac{1}{2^n \cdot n^p \cdot \ln^p 2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \cdot n^p \cdot \ln^p 2} = \frac{1}{\ln^p 2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

2.2 Теорема Штольца и оценка частичных сумм гармонического ряда

Гармонический ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$

$$A_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} - \ln n$$

$$B_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$$

$$A_n \uparrow, B_n \downarrow$$

$$B_n > A_n$$

$$B_1 > \dots > B_{n-1} > B_n > A_n > A_{n-1} > \dots > A_1, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$B_n - A_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

Значит, $\exists \lim A_n = \lim B_n = \gamma \approx 0.5772 \dots$ – число Эйлера-Маскерони

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N} = \ln N + \gamma + o(1)$$

Теорема 2.1. (Штольца.) Если $p_n, q_n \rightarrow 0, q_n \downarrow$ и $\exists \lim \frac{p_{n+1} - p_n}{q_{n+1} - q_n}$, то $\lim \frac{p_n}{q_n} = \lim \frac{p_{n+1} - p_n}{q_{n+1} - q_n}$

Теперь с помощью теоремы Штольца уточним остаточный член у гармонического ряда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n - \gamma}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right)} \stackrel{\circ}{=}$$

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Получаем, что $\varlimsup \frac{1}{-\frac{2n^2}{1}} = \frac{1}{2}$

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + \underbrace{\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}_{o(1)}$$

Так как

$$\frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n - \gamma - \frac{1}{2n}}{\frac{1}{n}} \rightarrow 0$$

2.3 Признак Даламбера и радикальный признак Коши

Теорема 2.2. *Признак Даламбера. Пусть $a_n > 0$.*

$$\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \text{ряд } \sum a_n \text{ сходится.}$$

$$\underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies \text{ряд } \sum a_n \text{ расходится.}$$

Теорема 2.3. *Радикальный признак Коши. Пусть $a_n \geq 0$.*

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} < 1 \implies \text{ряд } \sum a_n \text{ сходится.}$$

$$\underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} > 1 \implies \text{ряд } \sum a_n \text{ расходится.}$$

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{n!}, \quad p > 0$

$$a_n = \frac{p^n}{n!}, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{p^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{p^n} = \frac{p}{n+1} \rightarrow 0 < 1 \implies \text{ряд сходится по признаку Даламбера.}$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{p^n}{n!}} = \frac{p}{\sqrt[n]{n!}} \rightarrow 0 < 1 \implies \text{ряд сходится по радикальному признаку Коши. } (\sqrt[n]{n!} \rightarrow \infty)$$

2.4 Радикальный признак сильнее признака Даламбера

Пусть $a_n > 0$. Тогда:

$$\underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$\text{Если } \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} < 1$$

$$\text{Если } \underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies \underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} > 1$$

$$\text{Если } \exists \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}, \text{ то } \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow \exists \lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

2.5 Признак Гаусса

$$(\text{Сравнение с } \sum \frac{1}{n^p})$$

$$\text{Если } \exists \delta > 0, p: \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right) \text{ то:}$$

$$p > 1 \implies \text{ряд } \sum a_n \text{ сходится.}$$

$$p \leq 1 \implies \text{ряд } \sum a_n \text{ расходится.}$$

2.6 Сравнение с интегралом

Рассмотрим $f(x) \downarrow$ при $x \geq n_0 - 1$ и ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$, где $a_n = f(n)$

$$f(n+t) \leq a_n \leq f(n-1+t), t \in [0; 1]$$

$$\int_0^1 dt : \int_n^{n+1} f(x) dx \leq a_n \leq \int_{n-1}^n f(x) dx$$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} : \int_{n_0}^{N+1} f(x) dx \leq \sum_{n=n_0}^N a_n \leq \int_{n_0-1}^N f(x) dx$$

$$\Rightarrow \sum a_n \text{ ведёт себя так же как несобственный интеграл } \int^{\infty} f(x) dx$$

2.7 Улучшение сходимости ряда

Пример. $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Для улучшения сходимости будем пользоваться рядами такого типа:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}, \quad \dots$$

Такие ряды достаточно легко считаются, в нашем примере воспользуемся первым т.к. $\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2+2} - \frac{1}{n(n+1)} \right) &= S - 1 \Rightarrow S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2+2} - \frac{1}{n(n+1)} \right) \\ \frac{1}{n^2+2} - \frac{1}{n(n+1)} &= \frac{1}{n^2} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{2}{n^2}} - \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \right) = \frac{1}{n^2} \cdot \left(1 - \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \right) = \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned}$$

Слагаемые убывают быстрее, чтобы получить число с определённой точностью потребуется значительно меньше сложений.

Получили, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2} \approx 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

3 Лекция 3 - 15.09.2020 - Знакопеременные ряды

3.1 Абсолютная и условная сходимость

Определение 4. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \in \mathbb{R}$

Если $a_n \cdot a_{n+1} < 0$, то ряд называется знакопеременным.

Пусть $\sum a_n$ сходится

Определение 5. Рассмотрим дополнительный ряд $\sum |a_n|$ (*)

Если (*) сходится, то $\sum a_n$ называется сходящимся абсолютно

Если (*) расходится, то $\sum a_n$ называется сходящимся условно

Определение 6. Введём $a_n^+ = \begin{cases} a_n, & a_n > 0 \\ 0 & a_n < 0 \end{cases}$ $a_n^- = \begin{cases} |a_n|, & a_n < 0 \\ 0 & a_n > 0 \end{cases}$

Ряды $\sum a_n^+, \sum a_n^-$ называются положительной и отрицательной частью исходного ряда $\sum a_n$

$$S_N^+ = \sum_{n=1}^N a_n^+, S_N^- = \sum_{n=1}^N a_n^-$$

$$a_n = a_n^+ - a_n^-, |a_n| = a_n^+ + a_n^-$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_N^+ - S_N^-, \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_N^+ + S_N^-$$

Замечание. Ряд $\sum a_n$ сходится абсолютно \iff оба ряда $\sum a_n^+, \sum a_n^-$ сходятся Ряд $\sum a_n$ сходится условно \implies оба ряда $\sum a_n^+, \sum a_n^-$ расходятся

3.2 Мажорантный признак Вейерштрасса

Теорема 3.1. Если $|a_n| \leq b_n$ при $n > n_0$ и положительный ряд $\sum b_n$ сходится, то $\sum a_n$ сходится, причём абсолютно.

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^p}, p > 0$

$$|\sin(nx)| \leq 1 \implies \left| \frac{\sin(nx)}{n^p} \right| \leq \frac{1}{n^p}$$

$$\sum \frac{1}{n^p} \text{ сходится } (p > 1) \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^p} \text{ сходится абсолютно.}$$

3.3 Группировка членов ряда

Говорят, что ряд $\sum b_k$ получен из $\sum a_n$ группировкой членов, если $\exists n_1 < n_2 < \dots$:

$$b_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1}$$

$$b_2 = a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \dots + a_{n_2}$$

...

Замечание. Если $\sum a_n$ сходится, то ряд $\sum b_k$ сходится к той же сумме.

Доказательство. $\sum_{k=1}^m b_k = \sum_{n=1}^{n_m} a_n$

■

Обратное утверждение неверно: $(1-1) + (1-1) + \dots$

Знакопеременный ряд при помощи группировки сводится к знакопеременному:

$$a_1 \leq 0, \dots, a_{n_1} \leq 0; b_1 = \sum_{i=1}^{n_1} a_i \leq 0$$

$$a_{n_1+1} \geq 0, \dots, a_{n_2} \geq 0; b_2 = \sum_{i=n_1+1}^{n_2} a_i \leq 0$$

При такой группировке сходимость исходного ряда \iff сходимость $\sum b_n$

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k, \text{ где } b_k = (-1)^k$$

$$|b_k| = \sum_{n=[e^k]+1}^{[e^{k+1}]} \frac{1}{n} \leq \frac{1}{[e^k]+1} \cdot ([e^{k+1}] - [e^k]) \approx \frac{e^{k+1} - e^k}{e^k} \rightarrow e - 1 > 0$$

3.4 Знакопередающие ряды, пр-к Лейбница

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \text{ где } a_n = (-1)^n \cdot u_n, u_n > 0$$

Теорема 3.2. Признак Лейбница. Если $u_n \downarrow 0$, то ряд сходится, причём $|r_n| \leq u_{n+1}$

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}, p > 0$

$$\frac{1}{n^p} \downarrow 0 \implies \text{ряд сходится (при } \forall p > 0)$$

При этом $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^p} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ – сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}: p \in (0; 1] - \text{сходится условно, } p \in (1; +\infty) - \text{абсолютно}$$

3.5 О неприменимости эквивалентности

Рассмотрим 2 ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} \approx \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

При этом правый ряд сходится по признаку Лейбница, а левый – расходится:

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n} - (-1)^n)} \approx \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n} - (-1)^n)} \rightarrow \infty$$

3.6 Признаки Дирихле и Абеля

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$$

Теорема 3.3. Признак Дирихле. Если $a_n \downarrow 0$, а частичные суммы $\left| \sum_{n=1}^N b_n \right| \leq C$ ограничены, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ сходится.

Теорема 3.4. Признак Абеля. Если a_n монотонна и ограничена, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ сходится.

$$a_n \rightarrow a, a_n = a + \alpha_n, \alpha_n \downarrow 0; \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n = a \sum_{n=1}^{\infty} b_n + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot b_n$$

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^p}, p > 0$

$$a_n = \frac{1}{n^p} \downarrow 0, b_n = \sin nx$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_N = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin Nx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos((N+1/2)x)}{2 \sin \frac{x}{2}}; \left| \sum_{n=1}^N b_n \right| \leq \frac{2}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin \frac{x}{2}}$$

Ряд сходится по признаку Дирихле

3.7 Влияние перестановки членов ряда на его сумму

Пусть $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ – биекция

Говорят, что ряд $\sum b_n$ получен из $\sum a_n$ перестановкой членов, если $b_n = a_{f(n)}$

Если ряд $\sum a_n$ сходится абсолютно, то \forall ряд, полученный из него перестановкой членов, сходится абсолютно к той же сумме.

Теорема 3.5. (Римана) Если ряд $\sum a_n$ сходится условно, то для $\forall S \in [-\infty; +\infty]$ то \exists перестановка f такая, что $\sum a_{f(n)} = S$

4 Лекция 5 - 29.09.2020 - Исследование сходимости функциональных рядов

4.1 Свойства равномерно сходящейся последовательности

1. $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, рассмотрим $D = (a; b)$, $D = [a; b]$

Пусть $f_n \rightarrow f$, $x \in D$, $y_n = \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$, $\{y_n\}$ – сходящ., $y_n \rightarrow y$

Тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$, т.е. $\lim_{x \rightarrow x_0} (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x))$

Доказательство. $|y - f(x)| \leq |y - y_n| + |y_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|$

Пусть n такое, что $|y - y_n| < \frac{\varepsilon}{3}$, $|f_n - f| < \frac{\varepsilon}{3}$, $|x - x_0| < \delta$, $|f(x) - y| < \frac{\varepsilon}{3}$

Тогда $|y - f(x)| \leq |y - y_n| + |y_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ ■

2. $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, рассмотрим $D = (a; b)$, $D = [a; b]$

Пусть f_n дифференцируемы на D , $f'_n \xrightarrow{D} g$, $\exists c \in D : \{f_n(c)\}$ сходящ.

Тогда $\exists f : f_n \rightarrow f$ (причем, если D огр., то сходимость равномерная)

f – дифференцируема, $f' = g$.

$$(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x))' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$$

3. $-\infty < a < b < +\infty$, $D = [a; b]$

Пусть f_n непрерывны на D , $f_n \xrightarrow{D} f$ ($\implies f$ непрерывна на D)

$$\text{Тогда } \int_a^x f_n(t) dt \xrightarrow{D} \int_a^x f(t) dt$$

4.2 Равномерная сходимость функционального ряда

$$D \subseteq \mathbb{R}, a_n : D \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{Функциональный ряд: } \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$$

$$\text{Частичные суммы: } S_N(x) = \sum_{n=1}^N a_n(x)$$

Множество абсолютной сходимости – множество всех тех значений x , при которых ряд сходится абсолютно.

4.3 Необходимое условие равномерной сходимости

$$\text{Если } \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \text{ равномерно сходится к сумме } S(x), \text{ то } a_n \xrightarrow{D} 0$$

Доказательство. $S_n(x) = a_1(x) + \dots + a_n(x)$, $a_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x)$

$$S_n \xrightarrow{D} S \implies a_n \xrightarrow{D} (S - S) = 0$$
 ■

Пример. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $D = \mathbb{R}$ – не является сходящейся равномерно, т.к. $\frac{x^n}{n!} \rightarrow^{\mathbb{R}} 0$

4.4 Критерий Коши равномерной сходимости

Теорема 4.1. Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на $D \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon), \forall n \geq N, \forall m:$

$$|a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+m}| < \varepsilon$$

Т.е. $|a_n(x) + a_{n+1}(x) + \dots + a_{n+m}(x)| < \varepsilon \forall x \in D$.

Отрицание: если $\exists \{x_n\} \subset D$, $\exists \{m_n\} \in \mathbb{N}$, $\exists \varepsilon_0$:

$$|a_n(x_n) + a_{n+1}(x_n) + \dots + a_{m_n}(x_n)| > \varepsilon_0$$

То ряд не является сходящимся равномерно.

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}$, $D = \mathbb{R}$ – сходится, т.к. $\approx \sum \frac{1}{n^2}$. Докажем, что сходится неравномерно. Возьмём $x_n = n$, $m_n = 2n$:

$$\frac{n}{n^2 + n^2} + \frac{n}{n^2 + (n+1)^2} + \dots + \frac{n}{n^2 + (2n)^2} > \frac{n}{5n^2} \cdot n = \frac{1}{5}$$

4.5 Признаки Вейерштрасса и Даламбера

Теорема 4.2. (Признак Вейерштрасса) Если $|a_n(x)| \leq b_n$ при $\forall n \geq n_0$, $\forall x \in D$, а ряд $\sum b_n$ сходится, то $\sum a_n(x)$ сходится на D абсолютно и равномерно.

Доказательство. $|a_n(x) + a_{n+1}(x) + \dots + a_{n+m}(x)| \leq b_n + b_{n+1} + \dots + b_{n+m} < \varepsilon$ ■

Теорема 4.3. (Признак Даламбера) Если $\exists q < 1$: $|a_{n+1}(x)| \leq q \cdot |a_n(x)|$ при $\forall n \geq n_0$, $\forall x \in D$, причём $a_{n_0}(x)$ – ограничена на D , то $\sum a_n(x)$ сходится на D абсолютно и равномерно.

Пример. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $D = [-r; r]$, $r > 0$

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq q \cdot \left| \frac{x^n}{n!} \right|$$

$$\left| \frac{x}{n+1} \right| \leq q. \text{ Пусть } n_0 : \frac{r}{n_0+1} < 1, \text{ берём } q = \frac{r}{n_0+1}. \text{ Значит, ряд абсолютно и равномерно сходится.}$$

4.6 Признак Лейбница

Знакопередающийся функциональный ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot u_n(x)$, $u_n(x) \geq 0$ на D .

Теорема 4.4. (Признак Лейбница) Если $u_n(x) \downarrow_{(n)}$ и $u_n \xrightarrow{D} 0$, то ряд сходится равномерно.

Пример. $\sum \frac{(-1)^n}{(n+x)^p} \downarrow_{(n)}$, $|u_n(x)| \leq \frac{1}{n^p} \rightarrow 0 \Rightarrow u_n \rightarrow^0 0$

4.7 Признаки Дирихле и Абеля

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \cdot b_n(x)$

Теорема 4.5. (Признак Дирихле) Если $a_n(x) \downarrow_{(n)}$ и $a_n \xrightarrow{D} 0$, а $\|b_1 + \dots + b_n\| \leq C \forall n$, то ряд равномерно сходится на D .

Теорема 4.6. (Признак Абеля) Если $a_n(x)$ монотонна по n (при $\forall x \in D$), и $\|a_n\| \leq C$ при всех n , а ряд $\sum b_n(x)$ сходится равномерно, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \cdot b_n(x)$ сходится равномерно.

4.8 Свойства равномерно сходящегося ряда

1. $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $D = (a; b)$, $D = [a; b]$

Пусть функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x)$ сходится равномерно на D , $x_0 \in D$, $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} c_n(x) = y_n$ и $\exists \sum_{n=1}^{\infty} y_n = y$.

$$\text{Тогда } \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} c_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n = y$$

2. $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $D = (a; b)$, $D = [a; b]$

Пусть $c_n(x)$ дифференцируемы на D и $\sum_{n=1}^{\infty} c'_n(x)$ сходится равномерно на D .

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x)$ сходится на D (а если D огр, то сходится равномерно), а его сумма будет дифференцируемой

$$\text{функцией на } D \text{ и } \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} c'_n(x)$$

3. $-\infty < a < b < +\infty$, $D = (a; b)$, $D = [a; b]$

$$\int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x c_n(t) dt - \text{сходится равномерно на } D.$$

5 Лекция 6 - 6.10.2020 - Степенные ряды

5.1 Основные понятия

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x - x_0)^n$$

$\{c_n\}$ – числовая последовательность (коэффициенты), $x_0 \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^N c_n \cdot (x - x_0)^n - \text{многочлен.}$$

5.2 Теорема Абеля, радиус и интервал последовательности

Теорема 5.1. (Абеля)

1. Если степенной ряд сходится в точке $x_1 \neq x_0$, то он сходится при всех $x : |x - x_0| < |x_1 - x_0|$
2. Если степенной ряд расходится в точке $x_2 \neq x_0$, то он расходится при всех $x : |x - x_0| > |x_2 - x_0|$

Доказательство. 1. $\left| \sum_{n=m}^N c_n (x - x_0)^n \right| = \left| \sum_{n=m}^N c_n \cdot (x_1 - x_0)^n \cdot \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right)^n \right| \leq \sum_{n=m}^N |c_n \cdot (x_1 - x_0)^n| \cdot \left| \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right)^n \right| \leq \varepsilon (q^m + \dots + q^N) \leq \varepsilon \cdot q^m \cdot \frac{1}{1 - q} \rightarrow 0$

■

Пусть:

$$R_{cv} = \sup\{|x - x_0| : \text{ряд сходится}\}$$

$$R_{dv} = \inf\{|x - x_0| : \text{ряд расходится}\} \text{ или } +\infty, \text{ если ряд сходится всюду}$$

$$\exists R = R_{cv} = R_{dv} - \text{радиус сходимости.}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x - x_0)^n$$

Применим радикальный признак Коши:

$$\sqrt[n]{|a_n(x)|} = \sqrt[n]{|c_n|} \cdot |x - x_0|$$

$$\lim \sqrt[n]{|a_n(x)|} = |x - x_0| \cdot \lim \sqrt[n]{|c_n|}$$

Если $|x - x_0| \cdot \lim \sqrt[n]{|c_n|} < 1$, то ряд сходится

Если $|x - x_0| \cdot \lim \sqrt[n]{|c_n|} \geq 1$, то ряд расходится

$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|c_n|}} - \text{формула Коши-Адамара}$$

$$\text{Pro tip: если } \exists \lim \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|, \text{ то } \lim \sqrt[n]{|c_n|} = \lim \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$$

5.3 Равномерная сходимость степенного ряда

Если $R > 0$, то степенной ряд сходится равномерно при $|x - x_0| \leq r$, где $r < R$ (доказательство через признак Вейерштрасса).

5.4 Сходимость ряда в граничных точках интервала сходимости

Пусть $\sum c_n R^n$ сходится. Тогда степенной ряд $\sum c_n (x - x_0)^n$ сходится равномерно на $[x_0; x_0 + R]$.

Доказательство. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n \cdot R^n) \cdot \left(\frac{x - x_0}{R} \right)^n$

$$b_n = c_n \cdot R^n, a_n = \left(\frac{x - x_0}{R} \right)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ сходится} \implies \text{сходится равномерно.}$$

$$a_n(x) \downarrow_{(n)}$$

Значит, ряд сходится равномерно по признаку Абеля.

■

5.5 Дифференцирование и интегрирование степенного ряда

$\sum c_n(x-x_0)^n$, $R > 0$ – его радиус сходимости.

1. Дифференцирование

При почленном дифференцировании получаем $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot n \cdot (x-x_0)^{n-1}$ Его радиус сходимости равен радиусу исходного ряда \Rightarrow он сходится равномерно при $|x-x_0| \leq r < R$ Значит по теореме о почленном дифференцировании функционального ряда: $\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x-x_0)^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot n \cdot (x-x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)(x-x_0)^n$

2. Интегрирование

$$\int_{x_0}^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(t-x_0)^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1}$$

5.6 Бесконечное дифференцирование

Функция называется бесконечно дифференцируемой в точке a , если $\forall n$ она n раз дифференцируема в точке a . Сумма степенного ряда с $R > 0$ является бесконечно дифференцируемой функцией.

5.7 Ряд Тейлора

Если функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в точке x_0 , то функции $f(x)$ можно сопоставить её ряд Тейлора:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

При этом $f(x) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + r_N(x)$

$$r_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(x_0 + \theta)(x-x_0)}{(N+1)!} (x-x_0)^{N+1}, \theta \in (0; 1) \text{ – формула Лагранжа}$$

$$r_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(x_0 + \theta)(x-x_0)}{N!} (1-\theta)^N (x-x_0)^{N+1}, \theta \in (0; 1) \text{ – формула Коши}$$

Определение 7. Функция называется аналитической в т. x_0 , если она представима в окрестности этой точки в виде степенного ряда.

Не всякая бесконечно дифференцируемая функция будет аналитической:

Пример. $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = 0, \text{ ряд Тейлора при } x_0 = 0 \text{ равен } 0$$

5.7.1 Ряды Тейлора основных элементарных функций

1. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, R = \infty$

2. $(1+x)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(p)_n}{n!} x^n$, где $(p)_n = p(p-1)\dots(p-n+1)$, $R = 1$

3. $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)} x^n}{n!}$