Математический Анализ 2, Коллоквиум III

Версия от 17.03.2021 20:40

Содержание

1. Собственный интеграл, зависящий от параметра. Теорема о непрерывности по параметру. Теорема о дифференцировании по параметру под знаком интеграла. Теорема об интегрировании по параметру под знаком интеграла.

1.1. Собственный интеграл, зависящий от параметра.

Определение. Собственным интегралом, зависящем от параметра, будем называть интеграл вида

$$F(y) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\mathrm{d}x,$$

где α и β это некие функции, определенные для y из некоторого отрезка $[c; d]$.
Часто α и β являются константами и интеграл принимает следующий вид:

$$F(y) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x, y)\mathrm{d}x.$$

1.2. Теорема о непрерывности по параметру

Теорема. Рассмотрим $G = [a; b] \times [c; d]$ и пусть функция $f\colon G \to \mathbb{R}$ — непрерывна на ограниченном замкнутом множестве, откуда следует, что она равномерно непрерывна.
Пусть α, β непрерывны на отрезке $[c; d]$, тогда функция

$$F(y) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\mathrm{d}x$$

равномерно непрерывна на $[c; d]$.

Доказательство. Докажем непрерывность.
Пусть функция f ограничена каким-то числом M.
В силу непрерывности α и β для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что из условия $|y - y_0| < \delta$ следует $|\alpha(y) - \alpha(y_0)| < \varepsilon$ и $|\beta(y) - \beta(y_0)| < \varepsilon$.
В силу равномерной непрерывности f для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что из условия $|y - y_0| < \delta$ следует $|f(x, y) - f(x, y_0)| < \varepsilon$.
Воспользуемся этим:

$$\begin{aligned}
|F(y) - F(y_0)| &= \Big| \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\mathrm{d}x - \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y_0)\mathrm{d}x \Big| \\
&\left[\text{— прибавим и вычтем член } \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y)\mathrm{d}x \right] \\
&= \Big| \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\mathrm{d}x - \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y)\mathrm{d}x + \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y)\mathrm{d}x - \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y_0)\mathrm{d}x \Big| \\
&\leqslant \Big| \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\mathrm{d}x - \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y)\mathrm{d}x \Big| + \Big| \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y)\mathrm{d}x - \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y_0)\mathrm{d}x \Big| \\
&[\text{ — оценим слагаемое с модулем интеграла как интеграл модуля }] \\
&\leqslant \Big| \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\mathrm{d}x - \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y)\mathrm{d}x \Big| + \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \Big| f(x, y) - f(x, y_0) \Big| \mathrm{d}x \\
&[\text{ — раскроем первое слагаемое; для понимания представьте, что } \alpha(y) < \alpha(y_0) < \beta(y_0) < \beta(y) \text{ }]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big| \int\limits_{\alpha(y)}^{\alpha(y_0)} f(x,y)\mathrm{d}x + \int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)\mathrm{d}x \Big| + \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \Big| f(x,y) - f(x,y_0) \Big| \mathrm{d}x \\
&\leqslant \int\limits_{\alpha(y)}^{\alpha(y_0)} \underbrace{|f(x,y)|}_{\leqslant M} \mathrm{d}x + \int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} \underbrace{|f(x,y)|}_{\leqslant M} \mathrm{d}x + \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \underbrace{\Big| f(x,y) - f(x,y_0) \Big|}_{\leqslant \varepsilon} \mathrm{d}x \\
&\leqslant (\alpha(y_0) - \alpha(y)) \cdot M + (\beta(y) - \beta(y_0)) \cdot M + (\beta(y_0) - \alpha(y_0)) \cdot \varepsilon \\
&= 2 \cdot \varepsilon \cdot M + (\beta(y) - \alpha(y)) \cdot \varepsilon = \varepsilon',
\end{aligned}
$$

то есть выбирая $\delta > 0$ мы можем сделать так, что $|F(y) - F(y_0)| < \varepsilon'$ для любого $\varepsilon' > 0$. ■

Теперь немного о том, зачем нам эта теорема. Если вместо отрезка $[c;d]$ рассмотреть $[c;+\infty)$, то утверждение из теоремы остается верным и из равномерной непрерывности $f(x,y)$ на $[a;b] \times [c;+\infty)$ следует

$$
\exists \lim_{y \to +\infty} F(y) = \lim_{y \to +\infty} \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\mathrm{d}x = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \lim_{y \to +\infty} f(x,y)\mathrm{d}x.
$$

1.3. Теорема о дифференцировании по параметру под знаком интеграла.

Для простоты изложения будем рассматривать $a = \alpha(y)$ и $b = \beta(y)$. Тогда

$$
F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\mathrm{d}x.
$$

Теорема. Если f непрерывна на $G = [a;b] \times [c;d]$, а также производная $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ существует и непрерывна на G, то F непрерывно дифференцируема на $[c;d]$.
Причем эта производная может быть вычислена:

$$
F'(y) = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}x.
$$

Доказательство. Необходимо доказать, что отношение стремится в пределе к интегралу:

$$
D = \frac{F(y) - F(y_0)}{y - y_0} - \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \frac{f(x,y) - f(x,y_0)}{y - y_0}\mathrm{d}x - \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\mathrm{d}x.
$$

По теореме о среднем (теорема Лагранжа, 1 курс) на отрезке $[y_0;y]$ найдется точка y^* такая, что

$$
f(x,y) - f(x,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y^*) \cdot (y - y_0).
$$

Подставим в нашу разность:

$$
\begin{aligned}
|D| = \ldots = \Big| \int\limits_a^b \frac{f(x,y) - f(x,y_0)}{y - y_0}\mathrm{d}x - \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\mathrm{d}x \Big| = \Big| \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y^*)\mathrm{d}x - \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\mathrm{d}x \Big| \\
= \Big| \int\limits_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y^*) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0) \right) \mathrm{d}x \Big| \leqslant \int\limits_a^b \underbrace{\Big| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y^*) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0) \Big|}_{\leqslant \varepsilon} \mathrm{d}x \leqslant (b - a) \cdot \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Последний переход получается в силу равномерной непрерывности $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ на G и того, что $|y^* - y^*| \leqslant |y - y_0| < \varepsilon$.

То есть мы доказали, что $\dfrac{F(y) - F(y_0)}{y - y_0}$ равномерно стремится к числу $\displaystyle\int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\mathrm{d}x$, то есть существует предел, который мы и называем производной $F'(y)$.
Непрерывность производной получается как следствие предыдущей теоремы (о непрерывности по параметру), где в роли непрерывной функции выступает $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. ■

Иногда мы не можем взять какой-то интеграл, но с помощью этой теоремы мы можем взять производную интеграла, а зная производную потом найти сам интеграл.

1.4. Теорема об интегрировании по параметру под знаком интеграла.

Пусть $F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$. Мы хотим эту функцию проинтегрировать, то есть найти $\int\limits_c^d F(y)\mathrm{d}y$. Возникает вопрос, можно ли переставить интегралы.

Теорема. Если f непрерывна на множестве $G = [a;b] \times [c;d]$ (то есть она интегрируема на G), и выполняются следующие два пункта:

- при любом значении $y \in [c;d]$ функция $f(x,y)$ интегрируема по x, то есть существует $\int\limits_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$;
- при любом значении $x \in [a;b]$ функция $f(x,y)$ интегрируема по y, то есть существует $\int\limits_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$;

то эти интегралы равны друг другу.

Доказательство. Доказательство следует из теоремы Фубини о том, что повторные интегралы равны двойном интегралу по прямоугольнику:

$$\int\limits_a^b f(x,y)\mathrm{d}x = \iint\limits_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_c^d f(x,y)\mathrm{d}y.$$

■

Интегрирование по параметру также иногда позволяет вычислить интеграл, который по-другому вычислить невозможно.

2. Равномерная сходимость семейства функций. Определение. Критерий Коши равномерной сходимости.

2.1. TDB

3. Свойства равномерно сходящегося семейства функций. Теорема о предельном переходе. Теорема о непрерывности по параметру. Теорема об интегрировании по параметру. Теорема о дифференцировании по параметру.

3.1. TBD

4. Равномерная сходимость несобственного интеграла. Определение. Критерий Коши равномерной сходимости несобственного интеграла. Мажорантный признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственного интеграла. Вторая интегральная теорема о среднем (для собственного интеграла). Признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости несобственного интеграла.

4.1. TBD

5. Свойства равномерно сходящегося несобственного интеграла. Теорема о предельном переходе под знаком несобственного интеграла. Монотонный предельный переход и теорема Дини и равномерной сходимости семейства функций. Следствие из теоремы Дини о монотонном предельном переходе под знаком несобственного интеграла. Теорема о непрерывности несобственного интеграла по параметру.

5.1. TBD

6. Свойства равномерно сходящегося несобственного интеграла. Теорема о дифференцировании по параметру под знаком несобственного интеграла. Теорема о собственном интегрировании по параметру под знаком несобственного интеграла. Теорема о несобственном интегрировании по параметру под знаком несобственного интеграла.

6.1. TBD

7. Эйлеровы B- и Γ- функции. Определение B-функции, ее область определения и свойства: симметричность, формула понижения, случайно натурально-значных аргументов. Формула Эйлера – Гаусса. Формула дополнения (с использованием разложения $\sin$ в бесконечное произведение без доказательства). Связь между B- и Γ-функциями.

7.1. TBD

8. Абстрактные ряды Фурье. Пространство квадратично-интегрируемых функций $\mathcal{R}_2$ (определение). Скалярное произведение и норма в этом пространстве (определение). Ортогональная и ортонормированная система элементов (определение). Стандартная тригонометрическая система на $[-\pi;\pi]$, ее ортогональность и нормы элементов. Ряд в пространстве квадратично-интегрируемых функций и его сходимость (определение). Непрерывность скалярного произведения. Равенство Парсеваля.

8.1. TBD

9. Абстрактные ряды фурье. Коэффициенты и ряды Фурье (определение). Коэффициенты и ряд Фурье по стандартной тригонометрической системе на $[-\pi;\pi]$. Лемма о перпендикуляре. Неравенство Бесселя. Из полноты пространства следует сходимость ряда Фурье. Ряд и частичная сумма ряда Фурье как наилучшее приближение.