

# Математический Анализ - 2

Серёжа Рахманов | [telegram](#), [website](#)

Максим Николаев | [telegram](#)

Версия от 18.09.2020 20:29

## Содержание

<b>1</b>	<b>Лекция 1 - 01.09.2020 - Ряды</b>	<b>2</b>
1.1	Определение ряда	2
1.2	Необходимое условие сходимости	2
1.3	Критерий Коши	2
1.4	Положительные ряды	3
1.5	Признаки сравнения	3
1.6	Отсутствие универсального ряда сравнения	4
<b>2</b>	<b>Лекция 2 - 08.09.2020 - Положительные ряды</b>	<b>5</b>
2.1	Признак Лобачевского-Коши	5
2.2	Теорема Штольца и оценка частичных сумм гармонического ряда	5
2.3	Признак Даламбера и радикальный признак Коши	6
2.4	Радикальный признак сильнее признака Даламбера	6
2.5	Признак Гаусса	6
2.6	Сравнение с интегралом	7
2.7	Улучшение сходимости ряда	7
<b>3</b>	<b>Лекция 3 - 15.09.2020 - Знакопеременные ряды</b>	<b>8</b>
3.1	Абсолютная и условная сходимость	8
3.2	Мажорантный признак Вейерштрасса	8
3.3	Группировка членов ряда	8
3.4	Знакопередающиеся ряды, пр-к Лейбница	9
3.5	О неприменимости эквивалентности	9
3.6	Признаки Дирихле и Абеля	9
3.7	Влияние перестановки членов ряда на его сумму	10

# 1 Лекция 1 - 01.09.2020 - Ряды

## 1.1 Определение ряда

**Определение 1.** Пусть  $a_n$  – последовательность, т.е.  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . Формальная бесконечная сумма:  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

называется рядом.  $S_N = \sum_{n=1}^N a_n$  – частичная сумма, сумма ряда:  $S = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N$

Возможны 3 случая:

1.  $\exists S \in \mathbb{R}$
2.  $\exists S = \infty$
3.  $\nexists S$

В первом случае говорят, что ряд сходится, иначе – что ряд расходится.

*Пример.*

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0 + 0 + \dots + 0 = 0$
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + \dots + 1 = \infty$
3.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - \dots$  не существует

**Определение 2.** Если ряд сходится, т.е.  $S_N \rightarrow S$  при  $N \rightarrow \infty$ , то  $S - S_N = r_N$  – остаток ряда

$$r_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n, r_N \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty$$

## 1.2 Необходимое условие сходимости

**Замечание.** Если ряд сходится, то  $a_n \rightarrow 0$

*Доказательство.*  $a_n = S_n - S_{n-1} \rightarrow 0$ , т.к.  $S_n \rightarrow S$  и  $S_{n-1} \rightarrow S$  ■

## 1.3 Критерий Коши

**Определение 3.**  $a_n$  называется фундаментальной, если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > m > N \implies |S_n - S_m| < \varepsilon$

**Теорема 1.1.**  $S_n$  – сходится  $\Leftrightarrow S_n$  – фундаментальная

*Доказательство.*  $S_n - S_m = \sum_{k=m+1}^n a_k$  Тогда  $\sum a_n$  – сходится  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > m > N |a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n| < \varepsilon$  ■

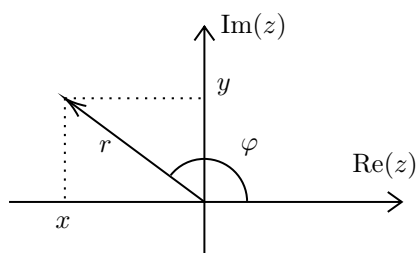
*Пример.*

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\text{Заметим, что } S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \left( 1 - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left( \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} \right) = 1 - \frac{1}{N+1} \rightarrow 1$$

$$\text{Этот ряд сходится при } N \rightarrow \infty: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

$$2. z \in \mathbb{C}, z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$



Рассмотрим ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots$

$$S_N = 1 + z + z^2 + \dots + z^N = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z}$$

Ряд сходится  $\Leftrightarrow |z| < 1$

$$|z| < 1 \Rightarrow z^n \rightarrow 0, S_N = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z} \rightarrow \frac{1}{1 - z}$$

## 1.4 Положительные ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \geq 0, S_n \uparrow, \text{ т.к. } S_{n+1} \geq S_n$$

Возможны 2 случая:

$$1. \exists S \in \mathbb{R}$$

$$2. \exists S = \infty$$

**Обозначение 1.**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$  – ряд сходится,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$  – ряд расходится.

## 1.5 Признаки сравнения

1. Сравнение с помощью неравенства.

$$a_n \leq b_n \text{ при всех } n \geq n_0$$

$$\text{Ряд } \sum b_n \text{ сходится} \Rightarrow \text{ряд } \sum a_n \text{ сходится}$$

$$\text{Ряд } \sum a_n \text{ расходится} \Rightarrow \text{ряд } \sum b_n \text{ расходится}$$

2. Сравнение отношений.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \text{ при всех } n \geq n_0$$

$$\text{Ряд } \sum b_n \text{ сходится} \Rightarrow \text{ряд } \sum a_n \text{ сходится}$$

$$\text{Ряд } \sum a_n \text{ расходится} \Rightarrow \text{ряд } \sum b_n \text{ расходится}$$

*Доказательство.*

$$a_{n_0+1} \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+1}$$

$$a_{n_0+2} \leq \frac{a_{n_0+1}}{b_{n_0+1}} \cdot b_{n_0+2} \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+2}$$

$\vdots$

$$a_{n_0+k} \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+k} \Rightarrow \sum_{n=n_0}^N a_n \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot \sum_{n=n_0}^N b_n$$

■

3. Сравнение с помощью предела.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0; +\infty) \Rightarrow \text{сходимость } \sum a_n \Leftrightarrow \text{сходимость } \sum b_n$$

*Доказательство.*

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$$

$$\forall \varepsilon \exists n_0 : c - \varepsilon \leq \frac{a_n}{b_n} \leq c + \varepsilon, \forall n \geq n_0$$

$$\text{Возьмём } \varepsilon : c - \varepsilon > 0 \Rightarrow (c - \varepsilon) \cdot b_n \leq a_n \leq (c + \varepsilon) \cdot b_n$$

Сходимость следует из правой части неравенства, а расходимость из левой.

■

## 1.6 Отсутствие универсального ряда сравнения

**Предложение.** Не существует ряда  $\sum c_n$ ,  $c_n > 0$  :

- 1)  $\frac{a_n}{c_n} \rightarrow 0 \implies$  ряд  $\sum a_n$  сходится.
- 2)  $\frac{b_n}{c_n} \rightarrow \infty \implies$  ряд  $\sum b_n$  расходится.

*Доказательство.*

1. Если ряд  $\sum c_n$  расходится, то пусть  $S_N = \sum_{n=1}^N c_n \rightarrow \infty, S_0 = 0$ , тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}})}_{a_n}$  расходится так как:

$$(a) \sum_{n=1}^N (\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}}) = \sqrt{S_1} - \sqrt{S_0} + \sqrt{S_2} - \sqrt{S_1} + \dots + \sqrt{S_N} - \sqrt{S_{N-1}} = \sqrt{S_N} - \sqrt{S_0} = \sqrt{S_N} \rightarrow \sqrt{S}$$

$$(b) \frac{\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}}}{c_n} = \frac{\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}}}{S_n - S_{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}}} \implies \frac{a_n}{c_n} \rightarrow 0$$

Ряд расходится, но по предположению сходится, получили противоречие.

2. Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  сходится, то рассмотрим  $r_n$  - его  $n$ -ый остаток, тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n})}_{b_n}, r_0 = S = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$  сходится, так как:

$$(a) \sum_{n=1}^N (\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}) = \sqrt{r_0} - \sqrt{r_1} + \sqrt{r_1} - \sqrt{r_2} + \dots + \sqrt{r_{N-1}} - \sqrt{r_N} = \sqrt{r_0} - \sqrt{r_N} = \sqrt{S} - \sqrt{r_N} \rightarrow \sqrt{S}, \text{ т.к. } r_N \rightarrow 0$$

$$(b) \frac{\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}}{c_n} = \frac{\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}}{r_{n-1} - r_n} = \frac{1}{\sqrt{r_{n-1}} + \sqrt{r_n}} \rightarrow \infty, \text{ т.к. } \sqrt{r_{n-1}} \rightarrow 0 \text{ и } \sqrt{r_n} \rightarrow 0$$

Ряд сходится, но по предположению расходится, получили противоречие.

■

## 2 Лекция 2 - 08.09.2020 - Положительные ряды

### 2.1 Признак Лобачевского-Коши

**Предложение.** Пусть  $a_n > 0$  и  $a_n \downarrow$

Тогда ряды  $\sum a_n$  и  $\sum 2^n \cdot a_{2^n}$  ведут себя одинаково

*Доказательство.*  $a_1 + (a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + \dots + a_8) + \dots$

$$a_1 \geq a_2 \geq a_2$$

$$2a_2 \geq a_3 + a_4 \geq 2a_4$$

$$4a_4 \geq a_5 + \dots + a_8 \geq 4a_8$$

$\vdots$

$$a_1 + \sum_{n=0}^{m-1} 2^n a_{2^n} \geq \sum_{n=1}^{2^m} a_n \geq a_1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^m 2^n a_{2^n}$$

*Пример.*  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  – обобщённый гармонический ряд,  $p > 0$

$$a_n = \frac{1}{n^p} \downarrow \quad a_{2^n} = \frac{1}{(2^n)^p}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2^n)^{p-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2^{p-1}} \right)^n$$

Это сумма геометрической прогрессии со знаменателем  $q = \frac{1}{2^{p-1}}$

$q < 1 \iff p > 1$  – ряды сходятся, например:  $\sum \frac{1}{n^{1,001}}, \sum \frac{1}{n^2}$

$q \geq 1 \iff p \leq 1$  – ряды расходятся, например:  $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}, \sum \frac{1}{n}$

*Пример.*  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^p n}, p > 0$

$$\frac{1}{n \cdot \ln^p n} \downarrow, a_{2^n} = \frac{1}{2^n \cdot \ln^p 2^n} = \frac{1}{2^n \cdot n^p \cdot \ln^p 2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \cdot n^p \cdot \ln^p 2} = \frac{1}{\ln^p 2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

### 2.2 Теорема Штольца и оценка частичных сумм гармонического ряда

Гармонический ряд:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$

$$A_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} - \ln n$$

$$B_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$$

$$A_n \uparrow, B_n \downarrow$$

$$B_n > A_n$$

$$B_1 > \dots > B_{n-1} > B_n > A_n > A_{n-1} > \dots > A_1, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$B_n - A_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

Значит,  $\exists \lim A_n = \lim B_n = \gamma \approx 0.5772 \dots$  – число Эйлера-Маскерони

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N} = \ln N + \gamma + o(1)$$

**Теорема 2.1.** (Штольца.) Если  $p_n, q_n \rightarrow 0, q_n \downarrow$  и  $\exists \lim \frac{p_{n+1} - p_n}{q_{n+1} - q_n}$ , то  $\lim \frac{p_n}{q_n} = \lim \frac{p_{n+1} - p_n}{q_{n+1} - q_n}$

Теперь с помощью теоремы Штольца уточним остаточный член у гармонического ряда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n - \gamma}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} - \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)}{\frac{1}{n} \cdot \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right)} \stackrel{\infty}{=}$$

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Получаем, что  $\varlimsup \frac{1}{-\frac{2n^2}{1}} = \frac{1}{2}$

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + \underbrace{\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}_{o(1)}$$

Так как

$$\frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n - \gamma - \frac{1}{2n}}{\frac{1}{n}} \rightarrow 0$$

### 2.3 Признак Даламбера и радикальный признак Коши

**Теорема 2.2.** *Признак Даламбера. Пусть  $a_n > 0$ .*

$$\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \text{ряд } \sum a_n \text{ сходится.}$$

$$\underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies \text{ряд } \sum a_n \text{ расходится.}$$

**Теорема 2.3.** *Радикальный признак Коши. Пусть  $a_n \geq 0$ .*

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} < 1 \implies \text{ряд } \sum a_n \text{ сходится.}$$

$$\underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} > 1 \implies \text{ряд } \sum a_n \text{ расходится.}$$

Пример.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{n!}, \quad p > 0$

$$a_n = \frac{p^n}{n!}, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{p^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{p^n} = \frac{p}{n+1} \rightarrow 0 < 1 \implies \text{ряд сходится по признаку Даламбера.}$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{p^n}{n!}} = \frac{p}{\sqrt[n]{n!}} \rightarrow 0 < 1 \implies \text{ряд сходится по радикальному признаку Коши. } (\sqrt[n]{n!} \rightarrow \infty)$$

### 2.4 Радикальный признак сильнее признака Даламбера

Пусть  $a_n > 0$ . Тогда:

$$\underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$\text{Если } \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} < 1$$

$$\text{Если } \underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies \underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} > 1$$

$$\text{Если } \exists \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}, \text{ то } \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow \exists \lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

### 2.5 Признак Гаусса

$$(\text{Сравнение с } \sum \frac{1}{n^p})$$

$$\text{Если } \exists \delta > 0, p: \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right) \text{ то:}$$

$$p > 1 \implies \text{ряд } \sum a_n \text{ сходится.}$$

$$p \leq 1 \implies \text{ряд } \sum a_n \text{ расходится.}$$

## 2.6 Сравнение с интегралом

Рассмотрим  $f(x) \downarrow$  при  $x \geq n_0 - 1$  и ряд  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ , где  $a_n = f(n)$

$$f(n+t) \leq a_n \leq f(n-1+t), t \in [0; 1]$$

$$\int_0^1 dt : \int_n^{n+1} f(x) dx \leq a_n \leq \int_{n-1}^n f(x) dx$$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} : \int_{n_0}^{N+1} f(x) dx \leq \sum_{n=n_0}^N a_n \leq \int_{n_0-1}^N f(x) dx$$

$$\Rightarrow \sum a_n \text{ ведёт себя так же как несобственный интеграл } \int^{\infty} f(x) dx$$

## 2.7 Улучшение сходимости ряда

*Пример.*  $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Для улучшения сходимости будем пользоваться рядами такого типа:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}, \quad \dots$$

Такие ряды достаточно легко считаются, в нашем примере воспользуемся первым т.к.  $\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2+2} - \frac{1}{n(n+1)} \right) &= S - 1 \Rightarrow S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2+2} - \frac{1}{n(n+1)} \right) \\ \frac{1}{n^2+2} - \frac{1}{n(n+1)} &= \frac{1}{n^2} \cdot \left( \frac{1}{1+\frac{2}{n^2}} - \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \right) = \frac{1}{n^2} \cdot \left( 1 - \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left( 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \right) = \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned}$$

Слагаемые убывают быстрее, чтобы получить число с определённой точностью потребуется значительно меньше сложений.

Получили, что  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2} \approx 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

### 3 Лекция 3 - 15.09.2020 - Знакопеременные ряды

#### 3.1 Абсолютная и условная сходимость

Определение 4.  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \in \mathbb{R}$

Если  $a_n \cdot a_{n+1} < 0$ , то ряд называется знакопеременным.

Пусть  $\sum a_n$  сходится

Определение 5. Рассмотрим дополнительный ряд  $\sum |a_n|$  (\*)

Если (\*) сходится, то  $\sum a_n$  называется сходящимся абсолютно

Если (\*) расходится, то  $\sum a_n$  называется сходящимся условно

Определение 6. Введём  $a_n^+ = \begin{cases} a_n, & a_n > 0 \\ 0 & a_n < 0 \end{cases}$   $a_n^- = \begin{cases} |a_n|, & a_n < 0 \\ 0 & a_n > 0 \end{cases}$

Ряды  $\sum a_n^+, \sum a_n^-$  называются положительной и отрицательной частью исходного ряда  $\sum a_n$

$$S_N^+ = \sum_{n=1}^N a_n^+, S_N^- = \sum_{n=1}^N a_n^-$$

$$a_n = a_n^+ - a_n^-, |a_n| = a_n^+ + a_n^-$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_N^+ - S_N^-, \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_N^+ + S_N^-$$

Замечание. Ряд  $\sum a_n$  сходится абсолютно  $\iff$  оба ряда  $\sum a_n^+, \sum a_n^-$  сходятся Ряд  $\sum a_n$  сходится условно  $\implies$  оба ряда  $\sum a_n^+, \sum a_n^-$  расходятся

#### 3.2 Мажорантный признак Вейерштрасса

Теорема 3.1. Если  $|a_n| \leq b_n$  при  $n > n_0$  и положительный ряд  $\sum b_n$  сходится, то  $\sum a_n$  сходится, причём абсолютно.

Пример.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^p}, p > 0$

$$|\sin(nx)| \leq 1 \implies \left| \frac{\sin(nx)}{n^p} \right| \leq \frac{1}{n^p}$$

$$\sum \frac{1}{n^p} \text{ сходится } (p > 1) \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^p} \text{ сходится абсолютно.}$$

#### 3.3 Группировка членов ряда

Говорят, что ряд  $\sum b_k$  получен из  $\sum a_n$  группировкой членов, если  $\exists n_1 < n_2 < \dots$ :

$$b_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1}$$

$$b_2 = a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \dots + a_{n_2}$$

...

Замечание. Если  $\sum a_n$  сходится, то ряд  $\sum b_k$  сходится к той же сумме.

Доказательство.  $\sum_{k=1}^m b_k = \sum_{n=1}^{n_m} a_n$

■

Обратное утверждение неверно:  $(1-1) + (1-1) + \dots$

Знакопеременный ряд при помощи группировки сводится к знакопеременному:

$$a_1 \leq 0, \dots, a_{n_1} \leq 0; b_1 = \sum_{i=1}^{n_1} a_i \leq 0$$

$$a_{n_1+1} \geq 0, \dots, a_{n_2} \geq 0; b_2 = \sum_{i=n_1+1}^{n_2} a_i \leq 0$$

При такой группировке сходимость исходного ряда  $\iff$  сходимость  $\sum b_n$



Пример.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k, \text{ где } b_k = (-1)^k$$

$$|b_k| = \sum_{n=[e^k]+1}^{[e^{k+1}]} \frac{1}{n} \leq \frac{1}{[e^k]+1} \cdot ([e^{k+1}] - [e^k]) \approx \frac{e^{k+1} - e^k}{e^k} \rightarrow e - 1 > 0$$

### 3.4 Знакопередающие ряды, пр-к Лейбница

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \text{ где } a_n = (-1)^n \cdot u_n, u_n > 0$$

Теорема 3.2. Признак Лейбница. Если  $u_n \downarrow 0$ , то ряд сходится, причём  $|r_n| \leq u_{n+1}$

Пример.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}, p > 0$

$$\frac{1}{n^p} \downarrow 0 \implies \text{ряд сходится (при } \forall p > 0)$$

При этом  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^p} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  – сходится при  $p > 1$  и расходится при  $p \leq 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}: p \in (0; 1] - \text{сходится условно, } p \in (1; +\infty) - \text{абсолютно}$$

### 3.5 О неприменимости эквивалентности

Рассмотрим 2 ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} \approx \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

При этом правый ряд сходится по признаку Лейбница, а левый – расходится:

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n} - (-1)^n)} \approx \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n} - (-1)^n)} \rightarrow \infty$$

### 3.6 Признаки Дирихле и Абеля

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$$

Теорема 3.3. Признак Дирихле. Если  $a_n \downarrow 0$ , а частичные суммы  $\left| \sum_{n=1}^N b_n \right| \leq C$  ограничены, то  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$  сходится.

Теорема 3.4. Признак Абеля. Если  $a_n$  монотонна и ограничена, а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  сходится, то  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$  сходится.

$$a_n \rightarrow a, a_n = a + \alpha_n, \alpha_n \downarrow 0; \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n = a \sum_{n=1}^{\infty} b_n + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot b_n$$

Пример.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^p}, p > 0$

$$a_n = \frac{1}{n^p} \downarrow 0, b_n = \sin nx$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_N = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin Nx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos((N+1/2)x)}{2 \sin \frac{x}{2}}; \left| \sum_{n=1}^N b_n \right| \leq \frac{2}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin \frac{x}{2}}$$

Ряд сходится по признаку Дирихле

### 3.7 Влияние перестановки членов ряда на его сумму

Пусть  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  – биекция

Говорят, что ряд  $\sum b_n$  получен из  $\sum a_n$  перестановкой членов, если  $b_n = a_{f(n)}$

Если ряд  $\sum a_n$  сходится абсолютно, то  $\forall$  ряд, полученный из него перестановкой членов, сходится абсолютно к той же сумме.

*Теорема 3.5. (Римана) Если ряд  $\sum a_n$  сходится условно, то для  $\forall S \in [-\infty; +\infty]$  то  $\exists$  перестановка  $f$  такая, что  $\sum a_{f(n)} = S$*