Содержание

1 Лекция 1

1.1 Алгоритм и его неформальное определение

1. Алгоритмов счетно много;
2. Алгоритм исполняется по шагам;
3. Алгоритм работает конечно много шагов или зацикливается;
4. Алгоритм принимает вход и может выдавать что-то на выход[1];

Утверждение 1. *Слов конечного непустого алфавита лишь счетно много.*

Удобно считать, что на вход подаются конечные пары натуральных чисел. Алгоритм может вычислять частичные функции $f : \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$.

Определение 1. Алгоритм $\mathcal{F}$ вычисляет функцию $f : \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$, если для любого $x \in \mathbb{N}$

$x \in \operatorname{dom} f \implies$ алгоритм $\mathcal{F}$ на входе x останавливается за конечное число шагов и выводит $f(x)$.

$X \notin \operatorname{dom} f \implies$ алгоритм $\mathcal{F}$ на входе x не останавливается ни за какое конечное число шагов.

Определение 2. Функция f называется *вычислимой*, если существует алгоритм, который ее вычисляет.

Рассмотрим следующую тотальную функцию:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если бог есть,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Утверждается, что f — вычислима. Действительно, рассмотрим следующие два алгоритма:

```
int f(int x) {
    return 0;
}
```

```
int f(int x) {
    return 1;
}
```

Какой-то из них вычисляет f, однако мы точно не можем сказать какой.

Определение 3. Множество $A \subseteq \mathbb{N}$ называется *разрешимым*, если существует алгоритм $\mathcal{A}$ такой, что $\forall x \in \mathbb{N}$

$x \in A \implies \mathcal{A}$ выводит 1 и останавливается;

$x \notin A \implies \mathcal{A}$ выводит 0 и останавливается.

Утверждение 2. *A разрешимо $\iff$ вычислима характеристическая функция $\chi_A : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ множества A:*

$$\chi_A(n) = \begin{cases} 1, & n \in A; \\ 0, & n \notin A. \end{cases}$$

Характеристическая функция существует у любого подмножества натуральных чисел, но не для всякого подмножества она вычислима.

Утверждение 3. *Существует неразрешимое множество.*

Доказательство. Алгоритмов лишь счетно много, в то время как подмножеств $\mathbb{N}$ несчетно много. □

Следствие 1. *Существует невычислимая функция.*

Утверждение 4. *Если A конечно, то A разрешимо.*

Доказательство. Положим $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, тогда следующий алгоритм вычисляет χ_A:

```
int in_A(x) {
    return (x == a_1) || (x == a_2) || ... || (x == a_n);
}
```

□

Утверждение 5. *A, B — разрешимы $\implies$ разрешимы $A \cup B$, $A \cap B$, $A^{\complement}$, $A \times B$.*

[1] Вход и выход — слова конечного алфавита.

Доказательство.

$$\begin{aligned}\chi_{A\cap B}(n) &= \chi_A(n)\cdot\chi_B(n)\,;\\ \chi_{A\cup B}(n) &= \chi_A(n)+\chi_B(n)\,;\\ \chi_{A^{\complement}}(n) &= 1-\chi_A(n)\,;\\ \chi_{A\times B}(n) &= \chi_A(n)\cdot\chi_B(m)\,.\end{aligned}$$

□

Определение 4. Множество $A \subseteq \mathbb{N}$ называется *перечислимым*, если существует алгоритм $\mathcal{A}$ такой, что, работая на пустом входе, $\mathcal{A}$ никогда не останавливается, но в процессе работы выводит все элементы множества A и только их.

Утверждение 6. *Если A разрешимо, то оно перечислимо.*

Доказательство.

```
n = 0;
while (1) {
    if (in_A(n)) {
        print(n);
    }
    ++n;
}
```

□

Докажем, что из перечислимости не следует конечность. Рассмотрим $A = \mathbb{N}$ — бесконечное множество, $\chi_A(n) = \chi_{\mathbb{N}}(n) = 1$ — вычислима.

Теорема 1 (Поста)**.** *A разрешимо $\iff$ A и $A^{\complement}$ перечислимы.*

Доказательство.

- $\implies$ A — разрешимо $\implies$ $A^{\complement}$ разрешимо $\implies$ $A^{\complement}$ перечислимо, A — разрешимо $\implies$ A — перечислимо.
- $\impliedby$ Пусть $\mathcal{A}$ перечисляет A, и $\mathcal{B}$ перечисляет $A^{\complement}$. Мы хотим по данному n посчитать $\chi_A(n)$. Поочередно будем делать по шагу алгоритмов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Если на каком-то шаге $\mathcal{A}$ выведет n, то $n \in A \implies$ выведем 1 и остановимся. Если на каком-то шаге $\mathcal{B}$ выведет n, то $n \notin A \implies$ выведем 0 и остановимся. Поскольку $A \cup A^{\complement} = \mathbb{N}$, то одно из этих событий обязательно случится и алгоритм остановится.

□

Определение 5. Пусть $A \subseteq \mathbb{N}^k$, $(a_1,\ldots,a_k) \in A$. Проекцией множества A на координату i называется

$$\operatorname{pr}^i A = \{b \in \mathbb{N} \ : \ (a_1,\ldots,a_{i-1},b,a_{i+1},\ldots,a_k \in A)\}\,.$$

Утверждение 7. *A, B перечислимы $\implies$ $A\cup B$, $A\cap B$, $A\times B$, $\operatorname{pr}^i A$ перечислимы.*

Доказательство.

$\operatorname{pr}^i A$: Пусть $\mathcal{A}$ перечисляет A и $\mathcal{B}$ перечисляет B. Запустим $\mathcal{A}$, и для каждого напечатанного набора $(a_1,\ldots,a_k)$ будем брать a_i.

$A\cup B$: Будем поочередно делать шаги перечислителей $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Все напечатанные кем-то из них числа отправляем на вывод.

$A\cap B$: Будем поочередно делать шаги перечислителей $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Будем добавлять весь вывод $\mathcal{A}$ в буффер A'; аналогично для B'. Пусть A'_i — состояние буффера A' после i-ого шага $\mathcal{A}$. После того, как мы сделали i-ый шаг $\mathcal{A}$ и i-ый шаг $\mathcal{B}$, выведем элементы *конечного* множества $A'_i \cap B'_i$ и перейдем к $i+1$ шагу $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

$A\times B$: Аналогично $A\cap B$, только выводим $A'_i \times B'_i$.

□

Пусть есть функция $f : \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$. Определим для функции ее график:

$$\Gamma_f = \left\{(x,y)\in\mathbb{N}^2 \ : \ f(x) = y\right\}.$$

Теорема 2. *Пусть $f : \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$. Тогда f вычислима $\iff$ Γ_f перечислим.*

2 Лекция 2

2.1 Универсальный алгоритм

Определение 6. Универсальной вычислимой функцией (у. в. ф.) называется такая вычислимая $U : \mathbb{N}^2 \xrightarrow{p} \mathbb{N}$, что для любой вычислимой $f : \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$ существует $n \in \mathbb{N}$ («программа») такая, что

$$\forall x \in \mathbb{N} \quad U(n,x) \simeq f(x).$$

Пусть $\mathcal{U}$ — некоторый алгоритм, который вычисляет у. в. ф. U. Тогда, по существу, $\mathcal{U}$ — интерпретатор универсального языка программирования, где программами являются натуральные числа. Если имеется какая-то функция от двух аргументов $V : \mathbb{N}^2 \xrightarrow{p} \mathbb{N}$, то мы можем построить ее график (поверхность в $\mathbb{N}^3$). Зафиксируем ее первый аргумент, и получим функцию $V_n : \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$ такую, что для любых n, x $V_n(x) \simeq V(n,x)$. Функция V_n называется *n-ым сечением функции V по первому аргументу.* Например, если была $V(x,y) = x + y$, то зафиксировав первый аргумент мы получим функцию «прибавить x» от одного аргумента. В таком случае, можно переписать условие универсальности следующим образом:

Утверждение 8. *Функция U является универсальной в классе вычислимых функций $\iff$ для любой вычислимой $f : \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$ существует $n \in \mathbb{N} :\ U_n = f$.*

Тогда можно сформулировать следующее свойство:

Свойство 1 (алгоритмов)**.** *Существует универсальная вычислимая функция.*

Данное утверждение эквивалентно тому, что на Python можно написать интерпретатор Python.

Определение 7. Функция $W : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ называется универсальной вычислимой тотальной функцией, если

1. W вычислима.
2. Для любой вычислимой тотальной $g :\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ существует m такое, что $W_m = g$.

Утверждение 9. *Не существует универсальной вычислимой тотальной функции W.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $D : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $D(x) = W(x,x)$, она является вычислимой и тотальной. Рассмотрим теперь функцию g такую, что $g(x) = D(x) + 1$, она также будет вычислимой и тотальной. Раз W универсальна, то существует m такое, что $W_m = g$, то есть

$$\exists m :\ \forall x\ W(m,x) = g(m).$$

Положим $x = m$, тогда

$$W(m,m) = D(m) + 1 = W(m,m) + 1 \implies 0 = 1.$$

Получили противоречие, значит такой W не существует. □

В случае для частично определенной у. в. ф. равенство $U(m,m) \simeq U(m,m) + 1$ допустимо, так как означает, что на m функция U не определена.

Теорема 3. *Существует перечислимое неразрешимое множество.*

Доказательство. Пусть U — универсальная вычислимая функция (мы знаем, что такая существует). Рассмотрим $K_U = \{n \in \mathbb{N}\ :\ U(n,n)\ \text{определена}\} = \operatorname{dom} d_U$, где $d_U(x) \simeq U(x,x)$ — диагональ у. в. ф. U. Ясно, что d_U вычислима $\implies$ $K_U = \operatorname{dom} d_U$ перечислимо.

Допустим, что K_U разрешимо. Рассмотрим функцию $r :\ \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$ такую, что

$$r(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \notin K_U, \\ \text{undefined}, & \text{если } x \in K_U. \end{cases}$$

Функция r является полухарактеристической функцией $K_U^{\complement}$, $r = w_{K_U^{\complement}}$. K_U разрешимо $\implies$ $K_U^{\complement}$ разрешимо $\implies$ $K_U^{\complement}$ перечислимо $\implies$ $w_{K_U^{\complement}}$ вычислима.

Тогда существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall x\ U(n,x) \simeq r(x) \implies$ положим $x = n \implies U(n,n) = r(n)$. Рассмотрим несколько случаев:

1. $U(n,n)$ определена $\implies n \in K_U \implies r(n)$ не определено $\implies U(n,n)$ не определено.
2. $U(n,n)$ не определено $\implies n \in K_U \implies r(n) = 1 \implies U(n,n) = 1 \implies U(n,n)$ определено.

Ни один из случаев не приводит к чему-то разумному $\implies$ противоречие $\implies$ K_U не разрешимо. □

Определение K_U можно сформулировать следующим образом:

$$K_U = \{n \in \mathbb{N} \ : \ U \text{ останавливается на входе } (n, n)\},$$

или

$$K_U = \{n \in \mathbb{N} \ : \ \text{программа } n \text{ на входе } n \text{ останавливается}\}.$$

Поэтому вся эта теория называется «Проблемой самоприменимости»: остановится ли программа, если ей на вход передать ее же. Оказывается, что эта проблем не разрешима, что мы сейчас и доказали.

Рассмотрим $S_U = \left\{(n, x) \in \mathbb{N}^2 \ : \ U(n, x) \text{ определена}\right\} = \operatorname{dom} U$. Поскольку U вычислима, то S_U перечислимо. Заметим, что $n \in K_U \iff (n, n) \in S_U$, но тогда S_U разрешимо $\implies$ K_U разрешимо $\implies$ противоречие $\implies$ S_U не разрешимо. Это называется «Проблемой остановки»: остановка программы n на входе x.

2.2 Т-предикаты

Зафиксируем универсальную вычислимую функцию U и алгоритм $\mathcal{U}$, ее вычисляющий. Рассмотрим следующее множество:

$$T'_{(U)} = \{(n, x, y, k) \ : \ \text{алгоритм } \mathcal{U} \text{ на входе } (n, x) \text{ остановится за } k \text{ шагов и выведет } y\}.$$

То свойство, что алгоритм можно исполнить по шагам отражено в том, что T' разрешимо. Рассмотрим также множество

$$T = \left\{(n, x, k) \in \mathbb{N}^3 \ : \ \text{алгоритм } \mathcal{U} \text{ на входе } (n, x) \text{ остановится за } k \text{ шагов}\right\}.$$

Множество T также разрешимо.

2.3 Альтернативный взгляд на перечислимые неразрешимые множества

Пусть U — универсальная вычислимая функция, и $d(x) \simeq U(x, x)$.

Утверждение 10. *Для любой вычислимой* $f : \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$ *существует* n *такое, что* $f(n) \simeq d(n)$.

Доказательство. По свойству U универсальна, то существует n такое, что $\forall x \ U(n, x) \simeq f(x)$. Положим $n = x \implies U(n, n) \simeq f(n) \simeq d(n)$. ☐

Определение 8. Пусть дана $f : \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$. Будем говорить, что функция g *продолжает* f, если $\operatorname{dom} f \subseteq \operatorname{dom} g$ и для любого $x \in \operatorname{dom} f$ $f(x) = g(x)$.

Утверждение 11. *У функции* d *не существует вычислимого тотального продолжения.*

Доказательство. Пусть $g : \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$ — вычислимое тотальное продолжение d. То есть, для любого $x \in \operatorname{dom} d$ $d(x) = g(x)$. Рассмотрим $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $h(x) = g(x) + 1$; Ясно, что h вычислима и тотальна, однако h всюду отличается от d, поскольку

$x \in \operatorname{dom} d \implies h(x) = g(x) + 1 = d(x) + 1 \neq d(x)$;

$x \notin \operatorname{dom} d \implies h(x)$ определена $\not\simeq d(x)$ не определена.

Так как любая вычислимая функция где-то совпадает с d, то h не вычислима. ☐

Утверждение 12. *Если функция* f *вычислима, но не имеет вычислимого тотального продолжения, то* $\operatorname{dom} f$ *перечислимо, но не разрешимо.*

Доказательство. Если f вычислима, то $\operatorname{dom} f$ перечислимо. Рассмотрим функцию

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \operatorname{dom} f, \\ 2020, & x \notin \operatorname{dom} f. \end{cases}$$

Функция g является тотальной, и вычислима, если $\operatorname{dom} f$ разрешимо. С другой стороны, g — это вычислимое тотальное продолжение f, которого не существует. Альтернативно, $g(x)$ можно задать следующим образом: $g(x) = \chi_{\operatorname{dom} f}(x) \cdot f(x) + (1 - \chi_{\operatorname{dom} f}(x)) \cdot 2020$. ☐

Утверждение 13. *Существует вычислимая* $f : \mathbb{N} \xrightarrow{p} \{0, 1\}$ *такая, что у* f *нет вычислимого тотального продолжения.*

Доказательство. Определим f следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \operatorname{dom} d \text{ и } d(x) > 0, \\ 1, & x \in \operatorname{dom} d \text{ и } d(x) = 0, \\ \text{undefined}, & x \notin \operatorname{dom} d. \end{cases}$$

Такая f вычислима, поскольку $f \simeq h\left(d\left(x\right)\right)$, где

$$h\left(y\right) = \begin{cases} 0, & y > 0, \\ 1, & y = 0. \end{cases}$$

также является вычислимой функцией $\implies$ f вычислима как композиция вычислимых функций. Тогда для любого $x \in \operatorname{dom} d$ $f(x) \neq d(x) \implies$ у f нет вычислимого тотального продолжения (см. утверждение 10). $\square$

Определение 9. Пусть $A, B, C \subseteq \mathbb{N}$. Будем говорить, что C *отделяет* A от B, если $A \subseteq C$ и $B \subseteq C^{\complement}$.

Следствие 2. *Существуют перечислимые множества A и B такие, что $A \cap B = \varnothing$, но не существует разрешимого C такого, что C отделяет A от B.*

Отсюда следует, что A перечислимо, но не разрешимо, так как иначе разрешимое A отделяло бы A от B.

Доказательство. Пусть f — функция из предыдущего утверждения, то есть

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \operatorname{dom} d \text{ и } d(x) > 0, \\ 1, & x \in \operatorname{dom} d \text{ и } d(x) = 0, \\ \text{undefined}, & x \notin \operatorname{dom} d. \end{cases}$$

Положим $A = f^{-1}\left(\{1\}\right)$, $B = f^{-1}\left(\{0\}\right)$. Очевидно, что $A \cap B = \varnothing$. A и B перечислимы как прообразы перечислимых множеств $\{1\}$, $\{0\}$ под действием вычислимой функции f. Положим, что $\exists C$, отделяющее A от B. Рассмотрим характеристическую функцию множества C:

$x \in A \implies \chi_C\left(x\right) = 1 = f\left(x\right)$;

$x \in B \implies \chi_C\left(x\right) = 0 = f\left(x\right)$.

Но тогда для любого $x \in \operatorname{dom} f$ $f(x) = \chi_C\left(x\right)$, то есть χ_C — тотальное вычислимое продолжение $f \implies \chi_C$ не вычислима $\implies C$ не разрешимо. $\square$

2.4 Главные универсальные вычислимые функции

Определение 10. Функция $U : \mathbb{N}^2 \xrightarrow{p} \mathbb{N}$ называется главной универсальной вычислимой функцией, если

1. U вычислима;
2. Для любой вычислимой функции $V : \mathbb{N}^2 \xrightarrow{p} \mathbb{N}$ существует вычислимая тотальная функция $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такая, что
$$\forall x\ U\left(S\left(n\right), x\right) \simeq V\left(u,\ x\right) \iff \forall n\ U_{S(n)} = V_n.$$

Утверждение 14. *Если U — главная универсальная вычислимая функция, то U является у. в. ф.*

Доказательство. Мы хотим, чтобы для любой вычислимой $f : \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$ существовало $n \in \mathbb{N}$ такое, что $U_n = f$. Рассмотрим функцию V такую, что $\forall k, x\ V\left(k, x\right) \simeq f\left(x\right)$, и $\forall k\ V_k = f$. Тогда, по свойству (2) из определения главной у. в. ф., существует вычислимая тотальная функция S такая, что $\forall k\ U_{S(k)} = V_k$. Положив k равным любому числу (например, 2020), получим $U_{S(2020)} = V_{2020} = f \implies n = S(2020)$. $\square$

Утверждение 15. *Существует вычислимая биекция $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$.*

Введем обозначение для кода пары натуральных чисел $\langle n, m\rangle = h\left(n, m\right)$.

Утверждение 16. *Существует вычислимые тотальные функции π_1 и π_2 такие, что $\forall n\ \forall m\ \pi_1\left(\langle n, m\rangle\right) = n$ и $\pi_2\left(\langle n, m\rangle\right) = m$.*

Доказательство. Без ограничений общности предъявим алгоритм только для π_1.

1. Получаем на вход некоторое $z = \langle n, m\rangle$ — код некоторой пары;
2. Перечисляем все пары $(k, l) \in \mathbb{N}^2$ и для каждой проверяем равенство z и $\langle k, l\rangle$.
3. Если да, вернем k.

Такой алгоритм корректен, потому что любой код, который нам подают на вход корректен в силу сюръективности h, а в силу инъективности такая пара — единственная. $\square$

Теорема 4. *Если существует универсальная вычислимая функция U, то существует и главная универсальная вычислимая функция.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $W : \mathbb{N}^2 \xrightarrow{p} \mathbb{N}$ такую, что

$$\forall n \ \forall x \ W(n, x) \simeq U(\pi_1(n), \langle \pi_2(n), x \rangle).$$

Функция W вычислима как композиция вычислимых функций. Покажем, что W является искомой главной универсальной вычислимой функцией. Пусть дана вычислимая $V : \ \mathbb{N}^2 \xrightarrow{p} \mathbb{N}$. Рассмотрим $V' : \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$ таую, что $V' \simeq V(\pi_1(x), \pi_2(x))$. V' также вычислима, а значит $\exists m$ такое, что $U_m = V'$. Теперь для любого n положим $S(n) = \langle m, n \rangle$, она будет вычислимой и тотальной. Проверим, что она подходит:

$$\begin{aligned}\forall n \ \forall x \ W(S(n), x) \simeq W(\langle m, n \rangle, x) \simeq& \\ \simeq U(\pi_1(\langle m, n \rangle), \langle \pi_2(\langle m, n \rangle), x \rangle) \simeq U(m, \langle n, x \rangle) \simeq U_m(\langle n, x \rangle) \simeq& \\ \simeq V'(\langle n, x \rangle) \simeq V(\pi_1(\langle n, x \rangle), \pi_2(\langle n, x \rangle)) \simeq V(n, x).&\end{aligned}$$

Таким образом, $\forall n \ W_{S(n)} = V_n \implies W$ — главная у. в. ф. $\square$

3 Лекция 3

3.1 Отношение m-сводимости

Определение 11. Пусть $A, B \subseteq \mathbb{N}$. Говорят, что A m-сводится к B (обозн. $A \leqslant_m^f B$) тогда и только тогда, когда существует вычислимая тотальная $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такая, что

$$\forall n \; n \in A \iff f(n) \in B.$$

Лемма 1. *Для любых $A, B, C \subseteq \mathbb{N}$ справедливо следующее:*

1. $A \leqslant_m A$;
2. $A \leqslant_m^f B$ *и* $B \leqslant_m^g C \implies A \leqslant_m^{g \circ f} C$;
3. $A \leqslant_m^f B \implies A^{\complement} \leqslant_m^f B^{\complement}$.
4. $A \leqslant_m B$ *и* B *разрешимо* $\implies A$ *разрешимо.*
5. $A \leqslant_m B$ *и* B *перечислимо* $\implies A$ *перечислимо.*
6. *Для любого* $n \in \mathbb{N}$, $\omega_A(n) = 1 \iff \omega_B(f(n)) = 1$.

Следствие 3. *Если A неразрешимо (неперечислимо), и $A \leqslant_m B$, то B неразрешимо (неперечислимо).*

Доказательство. Записать контрапозицию для пунктов (4), (5) леммы 1. ☐

Утверждение 17. *Если A разрешимо и $B \neq \varnothing \neq \mathbb{N}$, то $A \leqslant_m B$.*

Доказательство. В силу ограничений на множество B, $\exists b \in B$ и $\exists a \in B^{\complement}$. Тогда определим f следующим образом:

$$f(n) = \begin{cases} b, & n \in A, \\ a, & n \notin A. \end{cases}$$

Функция f является вычислимой $\implies \forall n \; n \in A \iff f(n) \in B$. ☐

Следствие 4 (Отсутствие антисимметричности у отношения m-сводимости). *Пусть A — множество всех четных чисел, B — множество всех нечетных чисел. Тогда $A \leqslant_m B$, $B \leqslant_m A$, однако $A \neq B$.*

Следствие 5 (Несводимость к дополнению). *Существует множество A такое, что $A \not\leqslant_m A^{\complement}$.*

Доказательство. Рассмотрим множество K — перечислимое и неразрешимое. Тогда $K^{\complement}$ неперечислимо (иначе по теореме Поста K разрешимо). Если $K \leqslant_m K^{\complement}$, то $K^{\complement} \leqslant_m K^{\complement\complement} \implies K^{\complement} \leqslant_m K$, то есть неперечислимое множество m-сводится к перечислимому, противоречие. ☐

Утверждение 18 (отсутствие универсального множества сводимости). *$\nexists A$ такое что, $\forall B \; B \leqslant_m A$.*

Доказательство. $B \leqslant_m A \iff$ существует тотальная вычислимая f такая, что $\forall n \in \mathbb{N} \; n \in B \iff f(n) \in A$. Тогда всякое множество B однозначно определяется сводящей функцией:

$$B = \{n \in B \;:\; f(n) \in A\}.$$

Поэтому, таких множеств B не больше, чем сводящих функций, но, поскольку все сводящие функции вычислимы, то их не более чем счетно, а подмножеств $\mathbb{N}$ континуум. ☐

Лемма 2. *Пусть U — главная универсальная вычислимая функция, и*

$$K_U = \{n \in \mathbb{N} \;:\; U(n, n) \; \textit{определено}\}.$$

Тогда любое перечислимое множество A m-сводится к K_U.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$V(n, x) \simeq \begin{cases} 1, & n \in A, \\ \text{undefined}, & n \notin A. \end{cases}$$

То есть, $V(n, x) \simeq \omega_A(n) \implies V$ вычислима. Так как U главная, существует вычислимая тотальная $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такая, что

$$\forall n \; U_{S(n)} = V_n \iff \forall n \; \forall x \; U(S(n), x) \simeq V(n, x).$$

Если $n \in A$, то V_n всюду определена $\implies U_{S(n)}$ всюду определена $\implies$ определено $U_{S(n)}(S(n)) \implies$ определено $U(S(n), S(n)) \implies S(n) \in K_U$.

Если $n \notin A$, то V_n нигде не определена $\implies U_{S(n)}$ нигде не определена $\implies$ не определено $U_{S(n)}(S(n)) \implies S(n) \notin K_U$.

Таким образом, существует вычислимая тотальная S такая, что $\forall n \; n \in A \iff S(n) \in K \iff A \leqslant_m^S K_U$. ☐

Пример 1. Существует неперечислимое множество такое, что все его элементы четные.

Доказательство. Рассмотрим множество $X = \left\{2n \ : \ n \in K^{\complement}\right\}$. Заметим, что $\forall n \ n \in K^{\complement} \iff 2n \in X$, что равносильно $K^{\complement} \leqslant_m X$. С другой стороны, все элементы X четны, и, поскольку $K^{\complement}$ не перечислимо, то и X не перечислимо. $\square$

Пример 2. Пусть U — главная у. в. ф. и пусть $Z = \{n \in \mathbb{N} \ : \ U_n \text{ нигде не определена}\}$. Рассмотрим функцию

$$V(n, x) = \begin{cases} 1, & n \in K, \\ \text{undefined}, & n \notin K; \end{cases}$$

Поскольку K перечислимо, то ω_K вычислима, но так как $V(n,x) \simeq \omega_K(n)$, то V вычислима.

Так как U — главная, то существует вычислимая тотальная S такая, что

$$\forall n \ U_{S(n)} = V_n.$$

Мы видим, что если $n \in K \implies V_n$ всюду определено. Иначе V_n нигде не определено. То есть $n \in K^{\complement} \iff V_n$ нигде не определено $\iff U_{S(n)}$ нигде не определена $\iff S(n) \in Z$. Тогда $\forall n \ n \in K^{\complement} \iff S(n) \in Z$. Отсюда $K^{\complement} \leqslant_m^S Z$, но поскольку $K^{\complement}$ не перечислимо, то и Z не перечислимо.

По определению, $Z^{\complement} = \{n \in \mathbb{N} \ : \ U_n \text{ где-то определена}\} = \{n \in \mathbb{N} \ : \ \exists x \ U(n,x) \text{ определена}\}$. Вспомним про T-предикат $T(n,x,k) \iff \mathcal{U}$ останавливается на входе (n,x) за k шагов. Но такое мгножество T разрешимо, а $Z^{\complement} = \{n \in \mathbb{N} \ : \ \exists x \ \exists k \ T(n,x,k)\} \implies Z^{\complement}$ перечислимо.

Пример 3. Рассмотрим перечислимое множество $Z^{\complement} = \{n \in \mathbb{N} \ : \ U_n \text{ где-то определена}\} \neq \varnothing$. Тогда существует вычислимая тотальная $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такая, что $Z^{\complement} = \operatorname{range} f = \{f(0), f(1), \ldots\}$. Рассмотрим $W : \mathbb{N}^2 \xrightarrow{p} \mathbb{N}$ такую, что

$$W(m, x) = \begin{cases} \text{undefined}, & m = 0, \\ U(f(m-1), x), & m \geqslant 1. \end{cases}$$

W, очевидно, является вычислимой. Докажем, что она универсальна. Рассмотрим произвольную вычислимую функцию $g : \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$. Рассмотрим несколько случаев:

1. g нигде не определена $\implies g = W_0$.
2. g где-то определена $\implies \exists k$ такое, что $U_k = g$ (в силу универсальности U) $\implies \exists k \in Z' : \ U_k = g \implies \exists m \in \mathbb{N} : \ U_{f(m)} = g$. Тогда $g = U_{f(m)} = W_{m+1}$.

Получается, что W является универсальной вычислимой функцией. Введем множество $Z' = \{m \in \mathbb{N} \ : \ W_m$ нигде не опред
Поскольку $\forall m \ W_{m+1} = U_{f(m)}$, где f — где-то определенная функция, поскольку $\operatorname{range} f = Z^{\complement} \neq \varnothing$, а $f(m)$ — индексы относительно U где-то определенных функций $\implies$ единственным номером нигде не определенной функции является $0 \implies Z' = \{0\}$. Поскольку $Z^{\complement}$ конечно, то оно разрешимо $\implies$ перечислимо, но Z не перечислимо $\implies W$ не является главной универсальной вычислимой функцией.

Следствие 6. *Существуют не главные у. в. ф.*

3.2 Рекурсия

Теорема 5 (Клини)**.** *Пусть U — главная универсальная вычислимая функция. Тогда для любой вычислимой тотальной функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $U_{f(n)} = U_n$. То есть,*

$$\forall x \ U(f(n), x) \simeq U(n, x).$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $V : \ \mathbb{N}^2 \xrightarrow{p} \mathbb{N}$ такую, что

$$\forall k \ \forall x \ V(k, x) \simeq U(U(k,k), x).$$

Такая функция вычислима. Поскольку U — главная, то существует вычислимая тотальная функция $S : \ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такая, что

$$\forall k \ U_{S(k)} = V_k \iff \forall k \ \forall x \ U(S(k), x) \simeq V(k, x) \simeq U(U(k,k), x) \tag{1}$$

Рассмотрим функцию $f \circ S$. Она вычислима и тотальная как композиция вычислимых тотальных функций. Поскольку U — у. в. ф. $\implies \exists t$ такое, что $U_t = f \circ S$. Тогда

$$\forall x \ U(t, x) \simeq f(s(x)). \tag{2}$$

По формуле (1),

$$\forall x \ U(S(t), x) \simeq U(U(t,t), x) \underset{(2)}{\simeq} U(f(S(t)), x).$$

Получилось, что

$$\forall x \ U(S(t), x) \simeq U(f(S(t)), x).$$

Положим $n = S(t)$, тогда $\forall x \ U(n,x) \simeq U(f(n), x) \iff U_n = U_{S(n)}$. $\square$

4 Лекция 4

Теорема 6 (Клини о неподвижной точке)**.** *Пусть U — главная универсальная вычислимая функция, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — произвольная вычислимая тотальная функция. Тогда существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $U_{f(n)} = U_n$, то есть*

$$\exists n \quad \forall x \quad U(n, x) \simeq U(f(n), x).$$

На прошлой лекции мы доказали теорему Клини. С одной стороны, вы можете возразить, что же такого потрясающего в этом результате, бред же какой-то. На самом деле, если мы вспомним нашу содержательную интерпертацию символов, которые здесь есть, то оказывается, что это все не является бредом. U — функция, которую вычисляет некоторый универсальный алгоритм $\mathcal{U}$, то есть интерпретатор какого-то языка программирования. Первые аргументы функции U, то есть n и $f(n)$ — это какие-то программы, а значение функции $U(n, x)$ — это то, что вычисляет программа n на входе x. Тогда f можно рассматривать как некоторое алгоритмическое преобразование программ. И оказывается, что в главном языке программирования для любого алгоритмического преобразования программ найдется такая программа, чей смысл не меняется. Этот же факт означает, что ни одно алгоритмическое преобразование не может поменять смысл всех программ.

4.1 Теорема о рекурсии

Следствием теоремы Клини является факт, который мы будем называть теоремой о рекурсии.

Следствие 7 (Теорема о рекурсии)**.** *Пусть U — главная универсальная вычислимая функция, и $V : \mathbb{N}^2 \xrightarrow{p} \mathbb{N}$ — произвольная вычислимая функция*[2] *двух аргументов. Тогда $\exists n \in \mathbb{N}$ такое, что*

$$U_n = V_n.$$

Последнее равенство равносильно

$$\exists n \quad \forall x \quad U(n, x) \simeq V(n, x).$$

То есть, у нас существует такая программа, которая имеет на главном языке такой же смысл, что и на языке V. Вы спросите, а как вообще так? А вдруг один язык таков, что ни одна корректная программа не является корректной для другого? Тогда это утверждение не является верным, однако мы договорились, что все натуральные числа являются корректными программами, а в таком случае все хорошо.

Доказательство. И так, определение главной универсальной вычислимой функции гарантирует нам существование какой-то вычислимой тотальной функции. В тоже время, теорема Клини принимает какую-то вычислимую тотальную функцию на вход. Применим эти два факта и все получится.

Формально, так как U — главная, то существует вычислимая тотальная S такая, что $\forall k\ U_{S(k)} = V_k$. Но, по теореме Клини, существует неподвижная точка n для S, то есть $\exists n : U_{S(n)} = U_n$. Тогда

$$\exists n : \quad U_n = U_{S(n)} = V_n,$$

что и требовалось показать. □

Причем тут вообще рекурсия? А при том, что функция V может сама по себе вызывать функцию U.

Пример 4. Существует такая программа n, которая на любом входе выводит саму себя. То есть,

$$\exists n : \quad \forall x \quad U(n, x) = n.$$

Доказательство. Рассмотрим $V(k, x) = k$, она вычислима. Тогда, по теореме о рекурсии, $\exists n$ такое, что $\forall x$ $U(n, x) \simeq V(n, x) \implies \exists n\ \forall x\ U(n, x) = n.$ □

Пример 5. Существует такая программа n, которая на любом входе x возвращает то же, что и программа x на входе n. То есть, $\exists n : \forall x\ U(n, x) \simeq U(x, n)$.

Доказательство последнего примера полностью аналогично примеру 1. Таких примеров можно привести бесконечное количество, поэтому надо просто усвоить один важный факт: *в главных языках программирования программа может иметь доступ к своему коду.*

Как с этим всем связана рекурсия? Приходилось ли вам писать рекурсивные алгоритмы на каком-нибудь языке программирования (например, C). Наверное, приходилось. А как устроен рекурсивный алгоритм? На каком-то этапе вычисления функции f, она использует свой собственный код, то есть вызывает функцию f.

С другой стороны, на этот факт можно посмотреть как на уравнение.

[2] мы можем рассматривать ее как какой-то язык программирования, где первый аргумент — программы, а второй аргумент — их входной набор данных

Утверждение 19. $\exists$ *вычислимая функция f такая, что*

$$\begin{cases} f(0) = 1, & x = 0, \\ f(x) = x \cdot f(x-1), & x > 0. \end{cases}$$

Заметим, что выражение выше является *системой из уравнений* на функцию f. Поэтому можно задать два вопроса:

1. существует ли такая f?

2. единственна ли такая f?

Оказывается, теорема Клини легко нам показывает, что такая функция существует. То есть, по некоторым условиям на функцию f нам гарантировано существование алгоритма, который эту функцию вычисляет.

Доказательство. Рассмотрим

$$V(k, x) \simeq \begin{cases} 1, & x = 0, \\ U(k, x-1) \cdot x, & x > 0. \end{cases}$$

По теореме о рекурсии, $\exists n$ такое, что $\forall x\ U(n, x) \simeq V(n, x)$, то есть

$$\exists n \quad \forall x \quad U(n, x) \simeq \begin{cases} 1, & x = 0, \\ U(n, x-1) \cdot x, & x > 0. \end{cases}$$

Нам хочется, чтобы $f = U_n$, однако в формулировке теоремы о рекурсии нам не гарантируется, что U_n всюду определено, в то время как f должна быть всюду определена. Заметим, что в нуле функция $U(n, 0)$ определена, а в остальных точках ее определенность можно доказать индукцией по x. Получается, что U_n тотальна. Таким образом, мы получили функцию с желаемыми свойствами ($f = U_n$). $\square$

В чем преимущество такого подхода? Мы описали наши пожелания относительно какой-то функции f, а теорема о рекурсии гарантирует нам существование алгоритма, вычисляющего f.

Утверждение 20. *Существует вычислимая функция f такая, что $\forall x\ f(x) \simeq 1 + f(x+1)$.*

Странная функция, она в точке x на единицу больше, чем в точке $x + 1$. Что можно сказать про такую функцию? Она монотонно убывает, потому что $f(x)$ на единицу больше, чем $f(x + 1)$. Какое же значение у нее в нуле? Да никакого, ведь функция из натуральных чисел в натуральные. Может ли такая функция быть определена в каком-то натуральном числе? Нет, потому что иначе она бы представляла собой бесконечно убывающую последовательность натуральных чисел, которой существовать не может. Но вместе с тем, такая вычислимая функция подходит, и это очень просто понять:

Доказательство. Рассмотрим вычислимую функцию $V(k, x) \simeq U(k, x+1) + 1$. Правая часть вычислима, а по теореме о рекурсии существует n такое, что для любого x $U(n, x) \simeq V(n, x) \simeq U(n, x+1) + 1 \implies f = U_n$. $\square$

То есть, такая функция все же существует. Но что же это за функция? Ясно, что такая функция $f = \zeta$ — нигде не определенная функция. Поэтому, любое уравнение вида $U(n, x) \simeq V(n, x)$ с вычислимой правой частью имеет программу n_0 — свое решение. Но никто не гарантирует, чтобы это решение было номером всюду определенной функции, и так далее. То есть, понятие рекурсия в этой всей теории используется в самом широком смысле: рекурсивная функция не обязана останавливаться. Она может нам дать нигде не определенную функцию, ведь, если передать такую функцию какому-нибудь компилятору вроде компилятора языка Си, то произойдет stack overflow ввиду конечности памяти в реальном мире. В нашей модели памяти бесконечно много, поэтому наша программа бы просто зациклилась, как, например, зацикливается программа, вычисляющая функцию ζ.

4.2 Теорема о совместной рекурсии

Оказывается, с помощью конструкций вида

$$U(n, x) \simeq V(n, x)$$

с вычислимой правой частью, можно решать не только уравнения на вычислимую функцию, но и системы уравнений.

Пример 6. Существуют такие программы a и b, что для любого x

$$U(a, x) = b,$$
$$U(b, x) = a + 1.$$

Такая концепция в программировании называется *совместной рекурсией*: когда мы определяем одну функцию через другую, а эту функцию через первую. Совместная рекурсия встречается и в реальной жизни, например можно определить функции для проверки числа на четность:

$$\begin{aligned} even(0) &= 1, \\ even(n+1) &= odd(n), \\ odd(0) &= 0, \\ odd(n+1) &= even(n). \end{aligned}$$

Теорема 7 (о совместной рекурсии)**.** *Пусть U — главная универсальная вычислимая функция, а V_1, V_2 — произвольные вычислимые функции с нужным числом аргументов. Тогда $\exists a, b$ такие, что $\forall x$*

$$\begin{cases} U(a,x) \simeq V_1\left(a,b,x\right), \\ U(b,x) \simeq V_2\left(a,b,x\right). \end{cases}$$

Мы можем решить систему уравнений: существуют два таких алгоритма, которые используют код друг-друга. Все такие переходы от одномерного случая к двумерному делаются с помощью кодирования пар. С другой стороны, у нас на семинаре было доказано следующее утверждение:

Утверждение 21. *Если U — главная универсальная вычислимая функция, то существует такая вычислимая тотальная функция c, что*

$$\forall p, q \quad U_{c(p,q)} = U_p \circ U_q.$$

Или, если записать это в кванторах,

$$\forall x \quad U\left(c(p,q), x\right) \simeq U(p, U(q,x)).$$

Содержательно, идея этого утверждения следующая: имея текст программы p и текст программы q, мы можем автоматически сгенерировать текст программы, которая вычисляет $p \circ q$. Для Си, например, это вообще тривиальное утверждение: надо просто вызвать одну функцию из другой. Но это имеет место и в абстрактном случае. Само доказательство этого утверждения сильно зависит от наличия так называемого кодирования пар. Напомню, что это такое.

Определение 12. Пусть у нас существует вычислимая тотальная биекция $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$. Тогда $\langle\cdot,\cdot\rangle$ называется *кодированием пары.*

Таких биекций много, кроме того, для такой биекции существуют вычислимые тотальные функции-проекторы π_1 и π_2 такие, что

$$\begin{aligned} \pi_1\left(\langle n,m\rangle\right) &= n, \\ \pi_2\left(\langle n,m\rangle\right) &= m. \end{aligned}$$

Если π_1 и π_2 — вычислимые тотальные функции, то, поскольку U является у. в. ф., то у них есть какие-то индексы[3] $p_1, p_2 \in \mathbb{N}$ такие, что

$$\pi_1 = U_{p_1} \qquad \pi_2 = U_{p_2}.$$

Рассмотрим теперь функцию $V\left(k,x\right) \simeq \langle V_1\left(c(p_1,k), c\left(p_2,k\right), x\right), V_2\left(c(p_1,k), c\left(p_2,k\right), x\right)\rangle$. Такая функция V вычислима, потому что представляет собой композицию вычислимых функций. Почему она такая? Потому что нам так захотелось. По теореме о рекурсии, $\exists n \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall x \in \mathbb{N}$

$$U(n,x) \simeq V(n,x) \simeq \left\langle V_1\left(c(p_1,n), c\left(p_2,n\right), x\right), V_2\left(c(p_1,n), c\left(p_2,n\right), x\right)\right\rangle.$$

Положим $a = c(p_1,n)$, $b = c(p_2,n)$, тогда

$$U\left(a,x\right) \simeq U\left(c\left(p_1,n\right), x\right) \simeq U\left(p_1, U\left(n,x\right)\right) \simeq \pi_1\left(U\left(n,x\right)\right) \simeq V_1\left(c\left(p_1,n\right), c\left(p_2,n\right), x\right) \simeq V_1\left(a,b,x\right).$$

Кроме кодирования пар, можно использовать кодирование троек, и, с помощью такого кодирования, доказать это утверждение для трех программ. Аналогично можно сделать для любого конечного числа программ.

Итак, теорема Клини позволяет решать системы уравнений на вычислимые функции.

[3]программы, которые их считают

4.3 Теорема Райса-Успенского

Здесь и далее U — главная универсальная вычислимая функция. Теорему Райса-Успенского можно рассматривать как следствие теоремы Клини. Если вы ходили на семинары, или, хотя бы, на прошлую лекцию, то вы, наверное, помните, что у нас были такие множества:

$$\{n \in \mathbb{N} \mid U_n \text{ где-то определена}\},$$
$$\{n \in \mathbb{N} \mid U_n \text{ монотонно возрастает на } \operatorname{dom} U_n\}.$$

Что это такое? Это множество программ, которые вычисляют функцию с каким-то нетривиальным свойством. Это вопрос, который, вообще говоря, мог бы быть интересен и на практике. И мы с вами во всех конкретных случаях видели, что все эти множества являются неразрешимыми. Первое множество перечислимо, второе — нет, но никакое из них не является разрешимым. То есть вопрос о том, можем ли мы алгоритмически узнать, обладает ли вычислимая функция U_n каким-то конкретным свойством, решался для U отрицательно. Оказывается, что это — общий факт, то есть нельзя алгоритмически по программе узнать, обладает ли вычисляемая ею функция какими-то свойствами[4]. Это и есть теорема Райса-Успенского.

Теорема 8 (Райса-Успенского)**.** *Пусть U — главная универсальная вычислимая функция, а $\mathcal{F}$ — нетривиальное[5] подмножество множества всех вычислимых функций $f : \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$. Тогда множество*

$$F = \{n \in \mathbb{N} \mid U_n \in \mathcal{F}\}$$

неразрешимо. Множество F называется индексным множеством.

Доказательство (Есенин-Вольпин). Сведем доказательство исходного утверждения к теореме Клини. Зафиксируем вычислимую функцию $f \in \mathcal{F}$, и вычислимую функцию $g \notin \mathcal{F}$. В силу универсальности U существуют индексы $n, m \in \mathbb{N}$ такие, что $f = U_n$ и $g = U_m$. Рассмотрим тотальную функцию $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такую, что

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad h(k) = \begin{cases} m, & k \in F, \\ n, & k \notin F. \end{cases}$$

Если F — разрешимое множество, то h вычислима, потому что $h(k) = m \cdot \chi_F(k) + n \cdot (1 - \chi_F(k))$. Итак, h вычислима и тотальна, тогда, по теореме Клини, $\exists n$ такое, что

$$U_n = U_{h(n)}.$$

Рассмотрим теперь, куда попадает число n. Оно либо попадает в F, либо нет. Предположим, что $k \in F$, тогда $U_k \in \mathcal{F}$ с одной стороны. С другой стороны, поскольку $k \in F$, то $U_{h(k)} \in \mathcal{F} \implies h(k) = m \implies U_m \in \mathcal{F} \implies g \in \mathcal{F} \implies$ противоречие. Совершенно аналогично рассматривается случай, когда $k \notin F$. Тогда $U_k \notin \mathcal{F} \implies U_{h(k)} \notin \mathcal{F} \implies U_n \notin \mathcal{F} \implies f \notin \mathcal{F} \implies$ противоречие.

Итак, если бы множество F было бы разрешимым, мы бы с вами изготовили такую функцию, которая использует свойство принадлежности множеству F и делает все наоборот: если принадлежит, то выдает номер функции, которая не принадлежит, а если не принадлежит, то выдает номер функции, которая принадлежит этому множеству. А дальше мы пользуемся теоремой Клини: должна быть программа, чей смысл не меняется, однако в таком случае получается, что смысл любой программы меняется, отсюда и противоречие. $\square$

Дадим также альтернативное доказательство этой теоремы, которое изначально предложил Райс.

Доказательство (Райс). Зафиксируем функцию ζ, которая нигде не определена. Попадает ли эта функция $\mathcal{F}$ или нет? Рассмотрим два случая:

$\zeta \in \mathcal{F} \implies$ проведем тоже рассуждение для $\overline{\mathcal{F}}$, этого достаточно, поскольку разрешимость любого множества эквивалентно разрешимости его дополнения.

$\zeta \notin \mathcal{F} \implies$ мы знаем, что $\mathcal{F} \neq \varnothing$, значит существует вычислимая $f \in \mathcal{F}$. Зафиксируем также K — какое-то перечислимое неразрешимое множество. Рассмотрим функцию $V : \mathbb{N}^2 \xrightarrow{p} \mathbb{N}$, которая устроена следующим образом:

$$\forall n, x \in \mathbb{N} \quad V(n, x) \simeq \begin{cases} f(x), & n \in K, \\ \zeta(x), & n \notin K. \end{cases}$$

Покажем, что функция V вычислима. На входе (n, x) запускаем перечислитель множества K, если $n \notin K$, то алгоритм зациклится, что равносильно вычислению ζ. Иначе, передаем управление вычислителю функции f. Ну или, если расписать формальнее, то $V(n, x) \simeq f(x) \cdot \omega_K(n)$, где ω_K вычислима как полухарактеристическая функция перечислимого множества. U — главная $\implies$ существует вычислимая тотальная S такая, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{S(n)} = V_n.$$

Для любого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим два случая:

[4] все равно, что сказать, что нетривиальные свойства функции не распознаются по номерам программ

[5] это значит, что $\exists f \in \mathcal{F}$, и $\exists g \notin \mathcal{F}$

$n \in K \implies V_n = f \in \mathcal{F} \implies U_{S(n)} \in \mathcal{F} \implies S(n) \in F.$

$n \notin K \implies V_n = \zeta \notin \mathcal{F} \implies U_{S(n)} \notin \mathcal{F} \implies S(n) \notin F.$

Получается, что $\forall n \; n \in K \iff S(n) \in F$ — картина m-сводимости. Тогда неразрешимое множество $K \leqslant_m F$, но тогда F неразрешимо, что и требовалось доказать. Заметим, что, по свойству m-сводимости, $\overline{K} \leqslant_m \overline{F}$, то есть $\overline{F}$ не перечислимо, поскольку $\overline{K}$ не перечислимо.

$\square$