Математический Анализ - 2 - Коллоквиум 1

Серёжа Рахманов | telegram, website

Версия от 05.10.2020 14:37

1. Дайте определения: числовой ряд, частичная сумма ряда, сумма ряда, сходящийся ряд, расходящийся ряд. Рассмотрим ряд с общим членом a_n. Докажите, что $a_n \to 0$.

   Определение 1. Пусть a_n – последовательность, т.е. $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Формальная бесконечная сумма: $a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется рядом. $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n$ – частичная сумма, сумма ряда: $S = \lim\limits_{N\to\infty} S_N$

   Возможны 3 случая:

   (a) $\exists S \in \mathbb{R}$
   (b) $\exists S = \infty$
   (c) $\nexists S$

   В первом случае говорят, что ряд сходится, иначе – что ряд расходится.

   Замечание. Если ряд сходится, то $a_n \to 0$

   Доказательство. $a_n = S_n - S_{n-1} \to 0$, т.к. $S_n \to S$ и $S_{n-1} \to S$ ■

2. Сформулируйте критерий Коши сходимости числовой последовательности. Сформулируйте и докажите критерий Коши сходимости числового ряда.

   Определение 2. a_n называется фундаментальной, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > m > N, |S_n - S_m| < \varepsilon$

   Теорема 0.1. *S_n – сходится $\Leftrightarrow$ S_n – фундаментальная*

   Доказательство. $S_n - S_m = \sum\limits_{k=m+1}^{n} a_k$ Тогда $\sum a_n$ – сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > m > N\ |a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n| < \varepsilon$ ■

3. Сформулируйте и докажите признак сравнения положительных числовых рядов, основанный на неравенстве $a_n \leqslant b_n$.

   $a_n \leqslant b_n$ при всех $n \geqslant n_0$

   Ряд $\sum b_n$ сходится $\implies$ ряд $\sum a_n$ сходится

   Ряд $\sum a_n$ расходится $\implies$ ряд $\sum b_n$ расходится

4. Сформулируйте и докажите признак сравнения положительных числовых рядов, основанный на неравенстве $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$.

   Ряд $\sum b_n$ сходится $\implies$ ряд $\sum a_n$ сходится

   Ряд $\sum a_n$ расходится $\implies$ ряд $\sum b_n$ расходится

   Доказательство.

   $a_{n_0+1} \leqslant \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+1}$

   $a_{n_0+2} \leqslant \frac{a_{n_0+1}}{b_{n_0+1}} \cdot b_{n_0+2} \leqslant \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+2}$

   $\vdots$

   $a_{n_0+k} \leqslant \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+k} \implies \sum\limits_{n=n_0}^{N} a_n \leqslant \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot \sum\limits_{n=n_0}^{N} b_n$ ■

5. Сформулируйте и докажите признак сравнения положительных числовых рядов, основанный на пределе $\lim \frac{a_n}{b_n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0; +\infty) \implies \text{сходимость} \sum a_n \iff \text{сходимость} \sum b_n$$

Доказательство.

$c = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$

$\forall \varepsilon\ \exists n_0 :\ c - \varepsilon \leqslant \frac{a_n}{b_n} \leqslant c + \varepsilon$, при $n \geqslant n_0$

Возьмём $c - \varepsilon > 0 \implies (c-\varepsilon)\cdot b_n \leqslant a_n \leqslant (c+\varepsilon)\cdot b_n$

Сходимость следует из правой части неравенства, а расходимость из левой. ■

6. Пусть последовательности $\{a_n\}$, $\{A_n\}$ таковы, что $a_n - (A_n - A_{n-1}) = c_n$ и ряд $\sum c_n$ сходится. Докажите, что существует C такое, что $a_1 + a_2 + \dots + a_n = A_n + C + o(1)$.

7. Сформулируйте и докажите признак Лобачевского-Коши.

Предложение. Пусть $a_n > 0$ и $a_n \downarrow$

Тогда ряды $\sum a_n$ и $\sum 2^n \cdot a_{2^n}$ ведут себя одинаково

Доказательство. $a_1 + (a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + \dots + a_8) + \dots$

$a_2 \leqslant a_1$

$a_2 \leqslant a_2$

$a_3 + a_4 \leqslant 2a_2$

$a_3 + a_4 \geqslant 2a_4$

$a_5 + \dots + a_8 \leqslant 4a_4$

$a_5 + \dots + a_8 \geqslant 4a_8$

$\dots$

$$a_1 + \sum_{n=0}^{m-1} 2^n a_{2n} \leqslant \sum_{n=1}^{2^m} a_n \leqslant a_1 + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{m} 2^n a_{2n}$$

■

8. Примените признак Лобачевского-Коши к ряду $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln^p(\ln n)}$, $p > 0$

Рассмотрим данный нам ряд. Заметим, что $\frac{1}{n \ln n \ln^p(\ln n)}$ убывает, поскольку $n \ln n \ln^p(\ln n)$ является возрастающей функцией ($n, \ln n$ и $\ln^p(\ln n)$ сами по себе возрастают). Кроме того, $\forall n, n \geqslant 2, a_n > 0$, поскольку $1 > 0$ и $n \ln n \ln^p(\ln n) > 0$. В таком случае, аналогично данному ряду будет вести себя ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{2^n \ln 2^n \ln^p(\ln 2^n)} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln 2^n \ln^p(\ln 2^n)}, p > 0$.

9. Сформулируйте теорему Штольца о пределе последовательности $\frac{p_n}{q_n}$, p_n, $q_n \to 0$.

Теорема 0.2. *(Штольца.) Если $p_n, q_n \to 0, q_n \downarrow$ и $\exists lim \frac{p_{n+1} - p_n}{q_{n+1} - q_n}$, то* $\lim \frac{p_n}{q_n} = \lim \frac{p_{n+1} - p_n}{q_{n+1} - q_n}$

10. Покажите на примере, как с помощью теоремы Штольца можно уточнить асимптотическую оценку для частичной суммы ряда.

11. Пусть $\sum a_n$, $\sum a'_n$ - сходящиеся положительные ряды. Говорят, что ряд $\sum a'_n$ сходится быстрее ряда $\sum a_n$, если $a'_n = o(a_n)$. Докажите, что в этом случае также $r'_n = o(r_n)$, где r_n, r'_n - остатки соответствующих рядов.

Рассмотрим остатки каждого из рядов. $r_n = S - S_N$, где S_N - частичная сумма ряда $\sum a_n$ и $S_N \to S$ при $N \to \infty$. Для $\sum a'_n$ аналогично $r'_n = S' - S'_N$, где S'_N - частичная сумма ряда $\sum a'_n$ и $S'_N \to S'$ при $N \to \infty$. Идёт речь о том, что ряд a'_n сходится быстрее ряда a_n, т.е. оба ряда сходятся и $S = S'$. Но, поскольку члены рядов находятся в отношении $a'_n = o(a_n)$, то мы можем сделать выводы о частичных суммах S_N и S'_N. $\forall N, S'_N = o(S_N)$, что указывает нам в результате на отношение между остатками $r'_n = o(r_n)$.

12. -

13. -

14. -

15. Сформулируйте признак Даламбера для положительного ряда

    Теорема 0.3. *Признак Даламбера. Пусть* $a_n > 0$.
    $\overline{\lim}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies$ *ряд* $\sum a_n$ *сходится.*
    $\underline{\lim}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies$ *ряд* $\sum a_n$ *расходится.*

16. Сформулируйте радикальный признак Коши для положительного ряда.

    Теорема 0.4. *Радикальный признак Коши. Пусть* $a_n \geqslant 0$.
    $\overline{\lim}\sqrt[n]{a_n} < 1 \implies$ *ряд* $\sum a_n$ *сходится.*
    $\underline{\lim}\sqrt[n]{a_n} > 1 \implies$ *ряд* $\sum a_n$ *расходится.*

17. Докажите, что всякий раз, когда признак Даламбера даёт ответ на вопрос о сходимости ряда, то радикальный признак Коши даёт тот же ответ на этот вопрос.

    Пусть $a_n > 0$. Тогда:

    $$\underline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \underline{\lim}\sqrt[n]{a_n} \leqslant \overline{\lim}\sqrt[n]{a_n} \leqslant \overline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

    Если $\overline{\lim}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \overline{\lim}\sqrt[n]{a_n} < 1$
    Если $\underline{\lim}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies \underline{\lim}\sqrt[n]{a_n} > 1$
    Если $\exists \lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, то $\overline{\lim}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \underline{\lim}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow \exists \lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

18. -

19. -

20. -

21. Сформулируйте признак Гаусса для положительного ряда. Приведите пример применения признака Гаусса.

    Если $\exists \delta > 0$, p: $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \dfrac{p}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^{1+\delta}}\right)$ то:
    $p > 1 \implies$ ряд $\sum a_n$ сходится.
    $p \leqslant 1 \implies$ ряд $\sum a_n$ расходится.

22. -

23. -

24. Что такое улучшение сходимости положительного ряда? Покажите на примере как можно улучшить сходимость ряда.

    Пусть у нас есть некоторый ряд $\sum a_n$ и он сходится медленно. В таких случаях для расчёта суммы ряда с необходимой точностью потребуется взять больше членов, что неудобно. Мы можем преобразовать наш ряд для улучшения сходимости, т.е. получить некоторый ряд $\sum a'_n$, который будет сходиться быстрее, чем исходный $\sum a_n$.

    Пример. Пусть у нас есть ряд $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+2} \approx \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$. Воспользуемся методом Куммера. Для улучшения сходимости будем брать ряды вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = 1, \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{4}, \ldots$.

    В данном случае нам подойдёт первый ряд в этом списке, поскольку $\dfrac{1}{n^2} \sim \dfrac{1}{n(n+1)}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2+2}-\frac{1}{n(n+1)}\right)=S-1 \implies S=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2+2}-\frac{1}{n(n+1)}\right).$$

$$\frac{1}{n^2+2}-\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n^2}\cdot\left(\frac{1}{\frac{2}{n^2}}-\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)=\frac{1}{n^2}\cdot\left(1-\frac{2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)-1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}-o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Получили ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$, который сходится быстрее, $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\approx\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2}$.