Математический Анализ 2, Коллоквиум III

Версия от 18.03.2021 08:22

Содержание

1. Собственный интеграл, зависящий от параметра. Теорема о непрерывности по параметру. Теорема о дифференцировании по параметру под знаком интеграла. Теорема об интегрировании по параметру под знаком интеграла.

1.1. Собственный интеграл, зависящий от параметра.

Определение. Собственным интегралом, зависящем от параметра, будем называть интеграл вида

$$F(y) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\mathrm{d}x,$$

где α и β это некие функции, определенные для y из некоторого отрезка $[c;d]$.
Часто α и β являются константами и интеграл принимает следующий вид:

$$F(y) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

1.2. Теорема о непрерывности по параметру

Теорема. Рассмотрим $G = [a;b] \times [c;d]$ и пусть функция $f\colon G \to \mathbb{R}$ — непрерывна на ограниченном замкнутом множестве, откуда следует, что она равномерно непрерывна.
Пусть α, β непрерывны на отрезке $[c;d]$, тогда функция

$$F(y) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$$

равномерно непрерывна на $[c;d]$.

Доказательство. Докажем непрерывность.
Пусть функция f ограничена каким-то числом M.
В силу непрерывности α и β для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что из условия $|y - y_0| < \delta$ следует $|\alpha(y) - \alpha(y_0)| < \varepsilon$ и $|\beta(y) - \beta(y_0)| < \varepsilon$.
В силу равномерной непрерывности f для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что из условия $|y - y_0| < \delta$ следует $|f(x,y) - f(x,y_0)| < \varepsilon$.
Воспользуемся этим:

$$\begin{aligned}
|F(y) - F(y_0)| &= \Big| \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\mathrm{d}x - \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y_0)\mathrm{d}x \Big| \\
&\left[\text{— прибавим и вычтем член } \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)\mathrm{d}x \right] \\
&= \Big| \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\mathrm{d}x - \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)\mathrm{d}x + \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)\mathrm{d}x - \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y_0)\mathrm{d}x \Big| \\
&\leqslant \Big| \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\mathrm{d}x - \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)\mathrm{d}x \Big| + \Big| \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)\mathrm{d}x - \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y_0)\mathrm{d}x \Big| \\
&[\text{ — оценим слагаемое с модулем интеграла как интеграл модуля }] \\
&\leqslant \Big| \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\mathrm{d}x - \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)\mathrm{d}x \Big| + \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \Big| f(x,y) - f(x,y_0) \Big| \mathrm{d}x \\
&[\text{ — раскроем первое слагаемое; для понимания представьте, что } \alpha(y) < \alpha(y_0) < \beta(y_0) < \beta(y) \text{ }]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big| \int\limits_{\alpha(y)}^{\alpha(y_0)} f(x,y)\mathrm{d}x + \int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)\mathrm{d}x \Big| + \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \Big| f(x,y) - f(x,y_0) \Big| \mathrm{d}x \\
&\leqslant \int\limits_{\alpha(y)}^{\alpha(y_0)} \underbrace{|f(x,y)|}_{\leqslant M} \mathrm{d}x + \int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} \underbrace{|f(x,y)|}_{\leqslant M} \mathrm{d}x + \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \underbrace{\Big| f(x,y) - f(x,y_0) \Big|}_{\leqslant \varepsilon} \mathrm{d}x \\
&\leqslant (\alpha(y_0) - \alpha(y)) \cdot M + (\beta(y) - \beta(y_0)) \cdot M + (\beta(y_0) - \alpha(y_0)) \cdot \varepsilon \\
&= 2 \cdot \varepsilon \cdot M + (\beta(y) - \alpha(y)) \cdot \varepsilon = \varepsilon',
\end{aligned}
$$

то есть выбирая $\delta > 0$ мы можем сделать так, что $|F(y) - F(y_0)| < \varepsilon'$ для любого $\varepsilon' > 0$. ■

Теперь немного о том, зачем нам эта теорема. Если вместо отрезка $[c; d]$ рассмотреть $[c; +\infty)$, то утверждение из теоремы остается верным и из равномерной непрерывности $f(x,y)$ на $[a; b] \times [c; +\infty)$ следует

$$
\exists \lim_{y \to +\infty} F(y) = \lim_{y \to +\infty} \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\mathrm{d}x = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \lim_{y \to +\infty} f(x,y)\mathrm{d}x.
$$

1.3. Теорема о дифференцировании по параметру под знаком интеграла.

Для простоты изложения будем рассматривать $a = \alpha(y)$ и $b = \beta(y)$. Тогда

$$
F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\mathrm{d}x.
$$

Теорема. Если f непрерывна на $G = [a; b] \times [c; d]$, а также производная $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ существует и непрерывна на G, то F непрерывно дифференцируема на $[c; d]$.
Причем эта производная может быть вычислена:

$$
F'(y) = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}x.
$$

Доказательство. Необходимо доказать, что отношение стремится в пределе к интегралу:

$$
D = \frac{F(y) - F(y_0)}{y - y_0} - \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \frac{f(x,y) - f(x,y_0)}{y - y_0}\mathrm{d}x - \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\mathrm{d}x.
$$

По теореме о среднем (теорема Лагранжа, 1 курс) на отрезке $[y_0; y]$ найдется точка y^* такая, что

$$
f(x,y) - f(x,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y^*) \cdot (y - y_0).
$$

Подставим в нашу разность:

$$
\begin{aligned}
|D| = \ldots &= \Big| \int\limits_a^b \frac{f(x,y) - f(x,y_0)}{y - y_0}\mathrm{d}x - \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\mathrm{d}x \Big| = \Big| \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y^*)\mathrm{d}x - \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\mathrm{d}x \Big| \\
&= \Big| \int\limits_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y^*) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0) \right) \mathrm{d}x \Big| \leqslant \int\limits_a^b \underbrace{\Big| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y^*) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0) \Big|}_{\leqslant \varepsilon} \mathrm{d}x \leqslant (b - a) \cdot \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Последний переход получается в силу равномерной непрерывности $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ на G и того, что $|y^* - y^*| \leqslant |y - y_0| < \varepsilon$.

То есть мы доказали, что $\dfrac{F(y) - F(y_0)}{y - y_0}$ равномерно стремится к числу $\displaystyle\int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\mathrm{d}x$, то есть существует предел, который мы и называем производной $F'(y)$.
Непрерывность производной получается как следствие предыдущей теоремы (о непрерывности по параметру), где в роли непрерывной функции выступает $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. ■

Иногда мы не можем взять какой-то интеграл, но с помощью этой теоремы мы можем взять производную интеграла, а зная производную потом найти сам интеграл.

1.4. Теорема об интегрировании по параметру под знаком интеграла.

Пусть $F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$. Мы хотим эту функцию проинтегрировать, то есть найти $\int\limits_c^d F(y)\mathrm{d}y$. Возникает вопрос, можно ли переставить интегралы.

Теорема. Если f непрерывна на множестве $G = [a;b] \times [c;d]$ (то есть она интегрируема на G), и выполняются следующие два пункта:

- при любом значении $y \in [c;d]$ функция $f(x,y)$ интегрируема по x, то есть существует $\int\limits_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$;
- при любом значении $x \in [a;b]$ функция $f(x,y)$ интегрируема по y, то есть существует $\int\limits_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$;

то эти интегралы равны друг другу.

Доказательство. Доказательство следует из теоремы Фубини о том, что повторные интегралы равны двойном интегралу по прямоугольнику:

$$\int\limits_a^b f(x,y)\mathrm{d}x = \iint\limits_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_c^d f(x,y)\mathrm{d}y.$$

■

Интегрирование по параметру также иногда позволяет вычислить интеграл, который по-другому вычислить невозможно.

2. Равномерная сходимость семейства функций. Определение. Критерий Коши равномерной сходимости.

2.1. TDB

3. Свойства равномерно сходящегося семейства функций. Теорема о предельном переходе. Теорема о непрерывности по параметру. Теорема об интегрировании по параметру. Теорема о дифференцировании по параметру.

3.1. Теорема о пределльном переходе

Теорема (Теорем о предельном переходе).
Пусть:

- $f(x,y) \overset{y\in H}{\underset{x\to a}{\rightrightarrows}} g(y)$
- $\forall x \in D : f(x,y) \underset{y\to b}{\to} h(x)$
- $h(x) \underset{x\to a}{\to} c$

Тогда $\lim\limits_{y\to b} g(y) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = c$

Доказательство теоремы о предельном переходе. Необходимо доказать, что $|g(y) - c|$ мала.
$|g(y) - c| \leqslant |g(y) - f(x,y)| + |f(x+y) - h(x)| + |h(x) - c|$

- $|g(y) - f(x,y)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$, при $0 < |x-a| < \delta_1,\ \forall y \in H$
- $|h(x) - c| < \dfrac{\varepsilon}{3}$, при $0 < |x-a| < \delta_2$
- $|f(x,y) - h(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ при фиксированном x и $0 < |y-b| < \delta_3$

Для $\delta = min(\delta_1, \delta_2, \delta_3) : |g(y) - c| < \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ ■

3.2. Теорема о непрерывности по параметру

Теорема (Теорема о непрерывности по параметру)**.** Пусть

- $f(x,y) \underset{x\to a}{\overset{y\in H}{\rightrightarrows}} g(y)$
- $f(x,y), \forall x \in D$ – непрерывна как функция от y в точке $y = b$

Тогда $g(y)$ – непрерывна в точке $y = b$

Доказательство теоремы о непрерывности по парметру. Необходимо доказать, что предел разности $|g(y) - g(b)|$ равен нулю.
$|g(y) - g(b)| \leqslant |g(y) - f(x,y)| + |f(x,y) - f(x,b)| + |f(x,b) - g(b)|$

- $|g(y) - f(x,y)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$, при $0 < |x-a| < \delta_1, \forall y \in H$ (в силу условий равномерной сходимости)
- $|f(x,b) - g(b)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ – это частный случай предыдущего пункта (так как $b \in H$ по условию теоремы)
- $|f(x,y) - f(x,b)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ при фиксированном x и, в виду непрерывности $f(x,y)$ по y в точки $y = b$ (условие теоремы), $|y-b| < \delta_2$

Для $\delta = min(\delta_1, \delta_2) : |g(y) - g(b)| < \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ ■

3.3. Теорема об интегрировании по параметру

Теорема (Теорема об интегрировании по параметру)**.** Пусть

- Пусть H – жорданово множество
- $f(x,y)$ – ограничена на $D \times H$
- $\forall x \in D : f(x,y)$ – интегрируема по y
- $f(x,y) \underset{x\to a}{\overset{y\in H}{\rightrightarrows}} g(y)$

Тогда функция $g(y)$ интегрируема и $\displaystyle\int\limits_H g(y)dy = \lim_{x\to a} \int\limits_H f(x,y)dy$

Доказательство теоремы об интегрировании по параметру. Сначала докажем, что функция $g(y)$ – интегрируема.
Случай, когда $\mu(H) = 0$ – тривиален: любая функция интегрируема на этом множестве и интеграл равен нулю. Поэтому далее рассматриваем случай $\mu(H) \neq 0$.
Для этого воспользуемся критерием Дарбу.
Пусть $\{H_i\}$ – разбиение множества H. Тогда необходимо доказать:
$\displaystyle\sum_i \sup_{y_1,y_2\in H_i} |g(y_1) - g(y_2)|\mu(H_i) = \sum_i \omega_g(H_i)\mu(H_i) < \varepsilon$, где $\mu(H_i)$ – мера множества H_i.
$|g(y_1) - g(y_2)| \leqslant |g(y_1) - f(x,y_1)| + |f(x,y_1) - f(x,y_2)| + |f(x,y_2) - g(y_2)|$

- $|g(y_1) - f(x,y_1)| < \dfrac{\varepsilon}{3\mu(H)}$, при $0 < |x-a| < \delta_1,\ \forall y_1 \in H$
- $|f(x,y_2) - g(y_2)| < \dfrac{\varepsilon}{3\mu(H)}$, при $0 < |x-a| < \delta_2,\ \forall y_2 \in H$

Теперь перепишем сумму с учётом оценок выше для $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$:
$$\sum_i \sup_{y_1,y_2\in H_i} |g(y_1) - g(y_2)|\mu(H_i) \leqslant \sum_i \frac{\varepsilon}{3\mu(H)}\mu(H_i) + \sum_i \sup_{y_1,y_2\in H} |f(x, y_1) - f(x, y_2)|\mu(H_i) + \sum_i \frac{\varepsilon}{3\mu(H)}\mu(H_i)$$

- $\sum_i \sup_{y_1,y_2\in H} |f(x, y_1) - f(x, y_2)|\mu(H_i) < \frac{\varepsilon}{3}$ по критерию Дарбу, так как $f(x, y)$ интегрируема по y при фиксированном x (условие теоремы)

Таким образом, $\sum_i \sup_{y_1,y_2\in H_i} |g(y_1) - g(y_2)|\mu(H_i) \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \Rightarrow g$ – интегрируема по критерию Дарбу

Теперь докажем вторую часть утверждения – научимся брать интеграл от функции g.
$$\left|\int\limits_H (g(y) - f(x, y))dy\right| \leqslant \int\limits_H |(g(y) - f(x, y)|dy$$

- $|(g(y) - f(x, y)| < \varepsilon$ при $0 < |x - a| < \delta$ и $\forall y \in H$

Следовательно, $\left|\int\limits_H (g(y) - f(x, y))dy\right| < \varepsilon\mu(H)$

$\Rightarrow \int\limits_H ((g(y) - f(x, y))dy \underset{x\to a}{\to} 0$

$\int\limits_H f(x,y)dy = \int\limits_H g(y)dy + \int\limits_H ((g(y) - f(x, y))dy \to \int\limits_H g(y)dy$ ■

3.4. Теорема о дифференцировании по параметру

Теорема (Теорема о дифференцировании по параметру)**.** Пусть

- H – выпуклое ограниченное множество (например: отрезок $[c, d]$)
- $\forall x \in D : f(x, y)$ – дифференцируема по $y \in H$
- $f(x, y) \overset{y\in H}{\underset{x\to a}{\to}} g(y), a \in \overline{D}$
- $f'_y(x, y) \overset{y\in H}{\underset{x\to a}{\rightrightarrows}} h(y)$

Тогда $g(y)$ – дифференцируема на множестве H и $g'(y) = h(y)$

Доказательство теоремы о дифференцировании по параметру. Сначала докажем, что $f(x, y) \overset{y\in H}{\underset{x\to a}{\rightrightarrows}} g(y)$. Для этого воспользуемся критерием Коши: хотим доказать, что $|f(x_1, y) - f(x_2, y)| < \varepsilon$ равномерно по всем y, если только x_1 и x_2 достаточно близко к точке a лежат. Тогда будет выполнено условие Коши, а значит, что семейство $f(x, y)$ равномерно сходится к своей предельной функции g.
Возьмём какое-нибудь $y_0 \in H$, тогда:
$|f(x_1, y) - f(x_2, y)| = |(f(x_1, y) - f(x_2, y)) - (f(x_1, y_0) - f(x_2, y_0))| + |(f(x_1, y_0) - f(x_2, y_0))|$
Теперь зафиксируем x_1 и x_2, тогда можем рассматривать функцию $q(y) = (f(x_1, y) - f(x_2, y))$. Так как мы из условия теоремы знаем, что $f(x,y)$ дифференцируема по $y \in H$, то и функции $q(y)$ дифференцируема по $y \in H$. Теперь необходимо применить теорему Лагранжа для функции $q(y)$. Модифицируем равенство дальше:
$|f(x_1, y)-f(x_2, y)| = |q(y)-q(y_0)|+|q(y_0)| =$ [Теорема Лагранжа] $= |q'(y*)|\cdot|y-y_0|+|q(y_0)|$, где $y* \in [min(y_0, y), max(y_0, y)]$
Вернёмся к записи через функцию f:
$|f(x_1, y) - f(x_2, y)| = |f'_y(x_1, y*) - f'_y(x_2, y*)| \cdot |y - y_0| + |(f(x_1, y_0) - f(x_2, y_0))|$

- По условию теоремы $f'_y(x, y) \overset{y\in H}{\underset{x\to a}{\rightrightarrows}} h(y) \Rightarrow$, применив критерий Коши для производной можем сказать, что $|f'_y(x_1, y*) - f'_y(x_2, y*)| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot diam(H)}$

- $|y - y_0| < diam(H)$
- $|(f(x_1, y_0) - f(x_2, y_0))| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, так как $f(x, y_0) \to g(y_0)$

Итого: $|f(x_1, y) - f(x_2, y)| < \varepsilon$

Теперь хотим доказать $\dfrac{f(x,y) - f(x,b)}{y-b} \rightrightarrows \dfrac{g(y) - g(b)}{y-b}$, $b \in H, y \neq b$

Для этого давайте снова воспользуемся критерием Коши:

$|\dfrac{f(x_1,y) - f(x_1,b)}{y-b} - \dfrac{f(x_2,y) - f(x_2,b)}{y-b}|$

Снова введём функцию $F(y) = f(x_1, y) - f(x_2, y)$ как в первой части доказательства и снова воспользуемся для неё формулой Лагранжа. Перепишем равенство:

$|\dfrac{f(x_1,y) - f(x_1,b)}{y-b} - \dfrac{f(x_2,y) - f(x_2,b)}{y-b}| = |\dfrac{F'(y*) \cdot (y-b)}{y-b}| = |F'(y*)|$, где $y* \in [b, y]$

Тогда, вернувшись к записи с f получаем:

$|\dfrac{f(x_1,y) - f(x_1,b)}{y-b} - \dfrac{f(x_2,y) - f(x_2,b)}{y-b}| = |f'_y(x_1, y*) - f'_y(x_2, y*)| < \varepsilon$, так как по условию теоремы $f'_y(x,y) \underset{x \to a}{\overset{y \in H}{\rightrightarrows}} h(y)$

Теперь осталось воспользоваться теоремой о внесении предела под знак равномерной сходимости:

$\lim\limits_{y \to b} \dfrac{g(y) - g(b)}{y-b} =$ [см. пункт 3.1 лекций] $= \lim\limits_{x \to a} \lim\limits_{y \to b} \dfrac{f(x,y) - f(x,b)}{y-b} = \lim\limits_{x \to a} f'_y(x, b) = h(b) \Rightarrow g'(y) = h(y)$, что и требовалось доказать. ■

4. Равномерная сходимость несобственного интеграла. Определение. Критерий Коши равномерной сходимости несобственного интеграла. Мажорантный признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственного интеграла. Вторая интегральная теорема о среднем (для собственного интеграла). Признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости несобственного интеграла.

4.1. TBD

5. Свойства равномерно сходящегося несобственного интеграла. Теорема о предельном переходе под знаком несобственного интеграла. Монотонный предельный переход и теорема Дини и равномерной сходимости семейства функций. Следствие из теоремы Дини о монотонном предельном переходе под знаком несобственного интеграла. Теорема о непрерывности несобственного интеграла по параметру.

5.1. TBD

6. Свойства равномерно сходящегося несобственного интеграла. Теорема о дифференцировании по параметру под знаком несобственного интеграла. Теорема о собственном интегрировании по параметру под знаком несобственного интеграла. Теорема о несобственном интегрировании по параметру под знаком несобственного интеграла.

6.1. TBD

7. Эйлеровы В- и Г- функции. Определение В-функции, ее область определения и свойства: симметричность, формула понижения, случайно натурально-значных аргументов. Формула Эйлера – Гаусса. Формула дополнения (с использованием разложения $\sin$ в бесконечное произведение без доказательства). Связь между В- и Г-функциями.

7.1. TBD

8. Абстрактные ряды Фурье. Пространство квадратично-интегрируемых функций $\mathcal{R}_2$ (определение). Скалярное произведение и норма в этом пространстве (определение). Ортогональная и ортонормированная система элементов (определение). Стандартная тригонометрическая система на $[-\pi;\pi]$, ее ортогональность и нормы элементов. Ряд в пространстве квадратично-интегрируемых функций и его сходимость (определение). Непрерывность скалярного произведения. Равенство Парсеваля.

8.1. TBD

9. Абстрактные ряды фурье. Коэффициенты и ряды Фурье (определение). Коэффициенты и ряд Фурье по стандартной тригонометрической системе на $[-\pi;\pi]$. Лемма о перпендикуляре. Неравенство Бесселя. Из полноты пространства следует сходимость ряда Фурье. Ряд и частичная сумма ряда Фурье как наилучшее приближение. Полная ортогональная система (определение). Критерии полноты ортогональной системы (представимость любого элемента его рядом Фурье; равенство Парсеваля; отсутствие ненулевого элемента, ортогонального всем элементам системы).

9.1. TBD

10. Тригонометрический ряд Фурье. Теорема о сходимости тригонометрического ряда Фурье в средне-квадратичном (без доказательства полноты тригонометрической системы). Представление частичной суммы ряда Фурье через ядро Дирихле. Лемма Римана. Условие Дини и теорема о поточечной сходимости ряда Фурье. Разло-