

# Линейная алгебра, Коллоквиум II

Бобень Вячеслав

@darkkeks, GitHub

Благодарность выражается Левину Александру (@azerty1234567890)

и Милько Андрею (@andrew\_milko) за видеозаписи лекций.

2019 — 2020

“К коллоку можете даже не готовиться”.

— Роман Сергеевич Авдеев

## Содержание

<b>1</b>	<b>Определения и формулировки</b>	<b>5</b>
1.1	Сумма двух подпространств векторного пространства	5
1.2	Теорема о связи размерности суммы двух подпространств с размерностью их пересечения	5
1.3	Сумма нескольких подпространств векторного пространства	5
1.4	Линейная независимость нескольких подпространств векторного пространства	5
1.5	Разложение векторного пространства в прямую сумму подпространств	5
1.6	При каких условиях на подпространства $U_1, U_2$ векторного пространства $V$ имеет место разложение $V = U_1 \oplus U_2$ ?	5
1.7	Проекция вектора на подпространство вдоль дополнительного подпространства	5
1.8	Матрица перехода от одного базиса векторного пространства к другому	5
1.9	Формула преобразования координат вектора при замене базиса	6
1.10	Линейное отображение векторных пространств, его простейшие свойства	6
1.11	Изоморфизм векторных пространств, изоморфные векторные пространства	6
1.12	Какими свойствами обладает отношение изоморфности на множестве всех векторных пространств?	6
1.13	Критерий изоморфности двух конечномерных векторных пространств	6
1.14	Матрица линейного отображения	6
1.15	Связь между координатами вектора и его образа при линейном отображении	7
1.16	Формула изменения матрицы линейного отображения при замене базисов	7
1.17	Сумма двух линейных отображений и её матрица. Произведение линейного отображения на скаляр и его матрица	7
1.18	Композиция двух линейных отображений и её матрица	7
1.19	Ядро и образ линейного отображения. Являются ли они подпространствами в соответствующих векторных пространствах?	7
1.20	Критерий инъективности линейного отображения в терминах его ядра	8
1.21	Связь между рангом матрицы линейного отображения и размерностью его образа	8
1.22	Каким свойством обладает набор векторов, дополняющих базис ядра линейного отображения до базиса всего пространства?	8
1.23	Теорема о связи размерностей ядра и образа линейного отображения	8
1.24	К какому простейшему виду можно привести матрицу линейного отображения путём замены базисов?	8
1.25	Линейная функция на векторном пространстве	8
1.26	Сопряжённое (двойственное) векторное пространство и его размерность	8
1.27	Базис сопряжённого пространства, двойственный к данному базису исходного векторного пространства	9
1.28	Билинейная форма на векторном пространстве	9
1.29	Матрица билинейной формы	9
1.30	Формула для вычисления значений билинейной формы в координатах	9
1.31	Формула изменения матрицы билинейной формы при замене базисов	9
1.32	Симметричная билинейная форма. Критерий симметричности билинейной формы в терминах её матрицы	9
1.33	Квадратичная форма	10
1.34	Соответствие между симметричными билинейными формами и квадратичными формами	10

1.35	Симметризация билинейной формы . . . . .	10
1.36	Поляризация квадратичной формы . . . . .	10
1.37	Матрица квадратичной формы . . . . .	10
1.38	Канонический вид квадратичной формы . . . . .	10
1.39	Нормальный вид квадратичной формы над $\mathbb{R}$ . . . . .	10
1.40	Индексы инерции квадратичной формы над $\mathbb{R}$ . . . . .	10
1.41	Закон инерции для квадратичной формы над $\mathbb{R}$ . . . . .	10
1.42	Положительно/неотрицательно определённая квадратичная форма над $\mathbb{R}$ . . . . .	10
1.43	Отрицательно/неположительно определённая квадратичная форма над $\mathbb{R}$ . . . . .	10
1.44	Неопределённая квадратичная форма над $\mathbb{R}$ . . . . .	11
1.45	Способ нахождения индексов инерции квадратичной формы над $\mathbb{R}$ , вытекающий из метода Якоби . . . . .	11
1.46	Критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы над $\mathbb{R}$ . . . . .	11
1.47	Критерий отрицательной определённости квадратичной формы над $\mathbb{R}$ . . . . .	11
1.48	Евклидово пространство . . . . .	11
1.49	Длина вектора в евклидовом пространстве . . . . .	11
1.50	Неравенство Коши–Буняковского . . . . .	11
1.51	Угол между ненулевыми векторами евклидова пространства . . . . .	12
1.52	Матрица Грама системы векторов евклидова пространства . . . . .	12
1.53	Свойства определителя матрицы Грама . . . . .	12
1.54	Ортогональное дополнение подмножества евклидова пространства . . . . .	12
1.55	Чему равна размерность ортогонального дополнения к подпространству евклидова пространства? . . . . .	12
1.56	Каким свойством обладают подпространства евклидова пространства и его ортогональное дополнение? . . . . .	12
1.57	Ортогональная проекция вектора на подпространство . . . . .	12
1.58	Ортогональная составляющая вектора относительно подпространства . . . . .	12
1.59	Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в $\mathbb{R}^n$ , заданное своим базисом . . . . .	13
1.60	Ортогональная система векторов евклидова пространства. Ортогональный базис . . . . .	13
1.61	Ортонормированная система векторов евклидова пространства. Ортонормированный базис . . . . .	13
1.62	Описание всех ортонормированных базисов евклидова пространства в терминах одного такого базиса и матриц перехода . . . . .	13
1.63	Ортогональная матрица . . . . .	13
1.64	Формула для координат вектора в ортогональном и ортонормированном базисах евклидова пространства . . . . .	13
1.65	Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в терминах его ортогонального базиса . . . . .	13
1.66	Метод ортогонализации Грама–Шмидта . . . . .	14
1.67	Теорема Пифагора в евклидовом пространстве . . . . .	14
1.68	Расстояние между векторами евклидова пространства . . . . .	14
1.69	Неравенство треугольника в евклидовом пространстве . . . . .	14
1.70	Теорема о расстоянии между вектором и подпространством в терминах ортогональной составляющей . . . . .	14
1.71	Псевдорешение несовместной системы линейных уравнений . . . . .	14
1.72	Формула для расстояния от вектора до подпространства в терминах матриц Грама . . . . .	15
1.73	$k$ -мерный параллелепипед и его объём . . . . .	15
1.74	Формула для объёма $k$ -мерного параллелепипеда в $n$ -мерном евклидовом пространстве . . . . .	15
1.75	Формула для объёма $n$ -мерного параллелепипеда в $n$ -мерном евклидовом пространстве в терминах координат в ортонормированном базисе . . . . .	15
1.76	В каком случае два базиса евклидова пространства называются одинаково ориентированными? . . . . .	15
1.77	Ориентированный объём $n$ -мерного параллелепипеда в $n$ -мерном евклидовом пространстве . . . . .	15
1.78	Свойства ориентированного объёма $n$ -мерного параллелепипеда в $n$ -мерном евклидовом пространстве . . . . .	15
1.79	Связь векторного произведения со скалярным и ориентированным объёмом . . . . .	15
1.80	Формула для вычисления векторного произведения в терминах координат в положительно ориентированном ортонормированном базисе . . . . .	16
1.81	Смешанное произведение векторов трёхмерного евклидова пространства . . . . .	16
1.82	Формула для вычисления смешанного произведения в терминах координат в положительно ориентированном ортонормированном базисе . . . . .	16
1.83	Критерий компланарности трёх векторов трёхмерного евклидова пространства . . . . .	16
1.84	Критерий коллинеарности двух векторов трёхмерного евклидова пространства . . . . .	16
1.85	Геометрические свойства векторного произведения . . . . .	16
1.86	Линейное многообразие. Характеризация линейных многообразий как сдвигов подпространств . . . . .	16
1.87	Критерий равенства двух линейных многообразий. Направляющее подпространство и размерность линейного многообразия . . . . .	16
1.88	Теорема о плоскости, проходящей через $k + 1$ точку в $\mathbb{R}^n$ . . . . .	16
1.89	Три способа задания прямой в $\mathbb{R}^2$ . Уравнение прямой в $\mathbb{R}^2$ , проходящей через две различные точки . . . . .	17
1.90	Три способа задания плоскости в $\mathbb{R}^3$ . . . . .	17
1.91	Уравнение плоскости в $\mathbb{R}^3$ , проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой . . . . .	17
1.92	Три способа задания прямой в $\mathbb{R}^3$ . . . . .	17

1.93	Уравнения прямой в $\mathbb{R}^3$ , проходящей через две различные точки	17
1.94	Случаи взаимного расположения двух прямых в $\mathbb{R}^3$	17
1.95	Формула для расстояния от точки до прямой в $\mathbb{R}^3$	17
1.96	Формула для расстояния от точки до плоскости в $\mathbb{R}^3$	17
1.97	Формула для расстояния между двумя скрещивающимися прямыми в $\mathbb{R}^3$	17
<b>2</b>	<b>Вопросы на доказательство</b>	<b>17</b>
2.1	Подпространства	17
2.1.1	Теорема о связи размерности суммы двух подпространств с размерностью их пересечения	17
2.1.2	Теорема о пяти эквивалентных условиях, определяющих линейно независимый набор подпространств векторного пространства	18
2.2	Линейные отображения	19
2.2.1	Свойства отношения изоморфности на множестве всех векторных пространств	19
2.2.2	Критерий изоморфности двух конечномерных векторных пространств	19
2.2.3	Существование и единственность линейного отображения с заданными образами базисных векторов	19
2.2.4	Связь между координатами вектора и его образа при линейном отображении	20
2.2.5	Формула изменения матрицы линейного отображения при замене базисов	20
2.2.6	Изоморфизм $\text{Hom}(V, W) \xrightarrow{\sim} \text{Mat}_{m \times n}(F)$ при фиксированных базисах $V$ и $W$	20
2.2.7	Матрица композиции двух линейных отображений	21
2.2.8	Утверждение о том, что ядро и образ подпространства в соответствующих векторных пространствах	21
2.2.9	Связь между рангом матрицы линейного отображения и размерностью его образа	22
2.2.10	Лемма о дополнении базиса ядра линейного отображения до базиса всего пространства	22
2.2.11	Теорема о связи размерностей ядра и образа линейного отображения, приведение матрицы линейного отображения к диагональному виду с единицами и нулями на диагонали	22
2.3	Линейные, билинейные и квадратичные формы	23
2.3.1	Свойство базиса сопряжённого векторного пространства	23
2.3.2	Формула для вычисления значений билинейной формы в координатах	23
2.3.3	Существование и единственность билинейной формы с заданной матрицей	23
2.3.4	Формула изменения матрицы билинейной формы при переходе к другому базису	24
2.3.5	Критерий симметричности билинейной формы в терминах её матрицы в каком-либо базисе	24
2.3.6	Соответствие между симметричными билинейными формами и квадратичными формами	24
2.3.7	Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду	25
2.3.8	Метод Якоби приведения квадратичной формы к каноническому виду	25
2.3.9	Существование нормального вида для квадратичной формы над $\mathbb{R}$	25
2.3.10	Закон инерции	25
2.3.11	Следствие метода Якоби о нахождении индексов инерции квадратичной формы над $\mathbb{R}$	26
2.3.12	Критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы, критерий отрицательной определённости квадратичной формы	26
2.4	Евклидовы пространства	26
2.4.1	Неравенство Коши–Буняковского	26
2.4.2	Свойства определителя матрицы Грама системы векторов евклидова пространства	27
2.4.3	Свойства ортогонального дополнения к подпространству в евклидовом пространстве: размерность, разложение в прямую сумму, ортогональное дополнение к ортогональному дополнению	27
2.4.4	Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в $\mathbb{R}^n$ в терминах его произвольного базиса	27
2.4.5	Существование ортонормированного базиса в евклидовом пространстве, дополнение ортогональной (ортонормированной) системы векторов до ортогонального (ортонормированного) базиса	28
2.4.6	Описание всех ортонормированных базисов в терминах одного и матриц перехода	28
2.4.7	Формула для координат вектора в ортогональном (ортонормированном) базисе. Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в терминах его ортогонального (ортонормированного) базиса	28
2.4.8	Теорема Пифагора и неравенство треугольника в евклидовом пространстве	29
2.4.9	Теорема о расстоянии между вектором и подпространством в терминах ортогональной составляющей	29
2.4.10	Метод наименьших квадратов для несовместных систем линейных уравнений: постановка задачи и её решение. Единственность псевдорешения и явная формула для него в случае линейной независимости столбцов матрицы коэффициентов	29
2.4.11	Формула для расстояния между вектором и подпространством в терминах матриц Грама	29
2.4.12	Две формулы для объёма $k$ -мерного параллелепипеда в евклидовом пространстве	30
2.5	Элементы аналитической геометрии и линейные многообразия	30
2.5.1	Теорема о векторном произведении и формуле для него в координатах в положительно ориентированном ортонормированном базисе	30

2.5.2	Критерий коллинеарности двух векторов трёхмерного евклидова пространства . . . . .	31
2.5.3	Геометрические свойства векторного произведения . . . . .	31
2.5.4	Антикоммутативность и билинейность векторного произведения . . . . .	31
2.5.5	Линейные многообразия как сдвиги подпространств . . . . .	31
2.5.6	Критерий равенства двух линейных многообразий . . . . .	32
2.5.7	Теорема о плоскости, проходящей через $k + 1$ точку в $\mathbb{R}^n$ . . . . .	32

# 1 Определения и формулировки

## 1. Сумма двух подпространств векторного пространства

Пусть  $V$  – векторное пространство над  $F$ .

$U, W \subseteq V$  – подпространства.

**Определение.** Суммой подпространств  $U, W$  называется множество

$$U + W := \{u + w \mid u \in U, w \in W\}.$$

## 2. Теорема о связи размерности суммы двух подпространств с размерностью их пересечения

**Теорема.**  $\dim(U \cap W) + \dim(U + W) = \dim U + \dim W$ .

*Пример.* Всякие две плоскости в  $\mathbb{R}^3$  (содержащие 0) имеют общую прямую.

Здесь  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $\dim U = 2$ ,  $\dim W = 2$ .

При этом  $\dim(U + W) \leq 3$ .

Тогда,  $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) \geq 2 + 2 - 3 = 1$ .

## 3. Сумма нескольких подпространств векторного пространства

Пусть  $U_1, \dots, U_k \subseteq V$  – подпространства.

**Определение.** Суммой подпространств  $U_1, \dots, U_k$  называется множество

$$U_1 + \dots + U_k = \{u_1 + \dots + u_k \mid u_i \in U_i\}.$$

**Замечание.**  $\dim(U_1 + \dots + U_k) \leq \dim U_1 + \dots + \dim U_k$ .

## 4. Линейная независимость нескольких подпространств векторного пространства

**Определение.** Подпространства  $U_1, \dots, U_k$  называются *линейно независимыми*, если  $\forall u_1 \in U_1, \dots, u_k \in U_k$  из условия  $u_1 + \dots + u_k = 0$  следует  $u_1 = \dots = u_k = 0$ .

*Пример.* Если  $\dim U_i = 1$  и  $U_i = \langle u_i \rangle \forall i$ , то  $U_1, \dots, U_k$  линейно независимы  $\iff u_1, \dots, u_k$  линейно независимы.

## 5. Разложение векторного пространства в прямую сумму подпространств

**Определение.** Говорят, что векторное пространство  $V$  разлагается в *прямую сумму*  $U_1, \dots, U_k$ , если

1.  $V = U_1 + \dots + U_k$ ,
2.  $U_1, \dots, U_k$  линейно независимы.

Обозначение:  $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k$ .

*Пример.* Если  $e_1, \dots, e_n$  – базис  $V$ , то  $V = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle e_n \rangle$

## 6. При каких условиях на подпространства $U_1, U_2$ векторного пространства $V$ имеет место разложение $V = U_1 \oplus U_2$ ?

$$V = U_1 \oplus U_2 \iff \begin{cases} V = U_1 + U_2, \\ U_1 \cap U_2 = 0, \end{cases}$$

## 7. Проекция вектора на подпространство вдоль дополнительного подпространства

**Замечание.**  $V = U_1 \oplus U_2 \implies \forall v \in V \exists! u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$ , такие что  $v = u_1 + u_2$ .

Тогда,  $u_1$  называется проекцией вектора  $v$  на  $U_1$  вдоль  $U_2$ .

Так же,  $u_2$  называется проекцией вектора  $v$  на  $U_2$  вдоль  $U_1$ .

## 8. Матрица перехода от одного базиса векторного пространства к другому

Пусть  $(e_1, \dots, e_n)$  и  $(e'_1, \dots, e'_n)$  – два базиса в  $V$ ,

$$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C,$$

при этом  $\det C \neq 0$ .

**Определение.** Матрица  $C$  называется *матрицей перехода* от базиса  $(e_1, \dots, e_n)$  к базису  $(e'_1, \dots, e'_n)$ .

**Замечание.** Матрица перехода от  $(e'_1, \dots, e'_n)$  к  $(e_1, \dots, e_n)$  – это  $C^{-1}$ .

## 9. Формула преобразования координат вектора при замене базиса

Пусть  $C$  — матрица перехода от базиса  $e = (e_1, \dots, e_n)$  к базису  $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ ,  $v \in V$ , тогда

$$\begin{aligned}v &= x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \\v &= x'_1 e'_1 + \dots + x'_n e'_n.\end{aligned}$$

**Предложение.**

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

## 10. Линейное отображение векторных пространств, его простейшие свойства

Пусть  $V, W$  — векторные пространства над  $F$ .

**Определение.** Отображение  $\varphi: V \rightarrow W$  называется *линейным*, если

1.  $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$ ,
2.  $\varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v)$ .

$\forall v_1, v_2, v \in V, \forall \lambda \in F$ .

**Простейшие свойства**

1.  $\varphi(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$ .
2.  $\varphi(-v) = -\varphi(v)$ .

## 11. Изоморфизм векторных пространств, изоморфные векторные пространства

**Определение.** Отображение  $\varphi: V \rightarrow W$  называется *изоморфизмом* если оно линейно и биективно.

Обозначение:  $\varphi: V \xrightarrow{\sim} W$ .

**Определение.** Два векторных пространства  $V, W$  называются *изоморфными*, если существует изоморфизм  $\varphi: V \xrightarrow{\sim} W$ .

Обозначается:  $V \simeq W$  (либо  $V \cong W$ ).

## 12. Какими свойствами обладает отношение изоморфности на множестве всех векторных пространств?

**Теорема.** Отношение изоморфности является отношением эквивалентности на множестве всех векторных пространств над фиксированным полем  $F$ .

## 13. Критерий изоморфности двух конечномерных векторных пространств

**Теорема.** Пусть  $V, W$  — два конечномерных векторных пространства над  $F$ .

Тогда,  $V \simeq W \iff \dim V = \dim W$ .

## 14. Матрица линейного отображения

Пусть  $V, W$  — векторные пространства над  $F$ .

$e = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ ,

$f = (f_1, \dots, f_m)$  — базис  $W$ .

Пусть  $\varphi: V \rightarrow W$  — линейное отображение.

$\forall j = 1, \dots, n$

$$\varphi(e_j) = a_{1j}f_1 + a_{2j}f_2 + \dots + a_{mj}f_m = (f_1, \dots, f_m) \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

Тогда,  $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = (f_1, \dots, f_m) \cdot A$ , где  $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{m \times n}(F)$ .

**Определение.**  $A$  называется матрицей линейного отображения  $\varphi$  в базисах  $e$  и  $f$ .

Обозначение:  $A = A(\varphi, e, f)$ .

В  $j$ -м столбце матрицы  $A$  стоят координаты вектора  $\varphi(e_j)$  в базисе  $f$ .

### 15. Связь между координатами вектора и его образа при линейном отображении

**Предложение.** Пусть  $\varphi: V \rightarrow W$  — линейное отображение,

$\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ ,

$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$  — базис  $W$ ,

$A = A(\varphi, \mathbf{e}, \mathbf{f})$ .

$v \in V \implies v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ ,

$$\varphi(v) = y_1 f_1 + \dots + y_m f_m.$$

Тогда,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

### 16. Формула изменения матрицы линейного отображения при замене базисов

Пусть  $\mathbf{e}'$  — другой базис в  $V$ ,  $\mathbf{f}'$  — другой базис в  $W$ .

$$\mathbf{e}' = \mathbf{e} \cdot C_{\in M_n},$$

$$\mathbf{f}' = \mathbf{f} \cdot D_{\in M_m}.$$

$$A = A(\varphi, \mathbf{e}, \mathbf{f}),$$

$$A' = A(\varphi, \mathbf{e}', \mathbf{f}').$$

**Предложение.**  $A' = D^{-1}AC$ .

### 17. Сумма двух линейных отображений и её матрица. Произведение линейного отображения на скаляр и его матрица

Пусть  $\varphi, \psi \in \text{Hom}(V, W)$ ,  $\lambda \in F$ .

**Определение.**

1. Суммой линейных отображений  $\varphi$  и  $\psi$  называется линейное отображение  $\varphi + \psi \in \text{Hom}(V, W)$ , такое что  $(\varphi + \psi)(v) := \varphi(v) + \psi(v)$ .

2. Произведение  $\varphi$  на  $\lambda$  — это линейное отображение  $\lambda\varphi \in \text{Hom}(V, W)$ , такое что  $(\lambda\varphi)(v) := \lambda\varphi(v)$ .

Зафиксируем базисы  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  в  $V$  и  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$  в  $W$ .

**Предложение.**

1.  $\varphi, \psi \in \text{Hom}(V, W)$ ,  $A_\varphi = A(\varphi, \mathbf{e}, \mathbf{f})$

$$A_\psi = A(\psi, \mathbf{e}, \mathbf{f})$$

$$A_{\varphi+\psi} = A(\varphi + \psi, \mathbf{e}, \mathbf{f}) \implies A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$$

2.  $\lambda \in F, \varphi \in \text{Hom}(V, W)$ ,  $A_\varphi = A(\varphi, \mathbf{e}, \mathbf{f})$

$$A_{\lambda\varphi} = A(\lambda\varphi, \mathbf{e}, \mathbf{f}) \implies A_{\lambda\varphi} = \lambda A_\varphi$$

### 18. Композиция двух линейных отображений и её матрица

Пусть  $U \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{\varphi} W$  — цепочка линейных отображений, а  $\varphi \circ \psi: U \rightarrow W$  — их композиция,

$\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ ,

$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$  — базис  $W$ ,

$\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_k)$  — базис  $U$ .

$$A_\varphi = A(\varphi, \mathbf{e}, \mathbf{f}),$$

$$A_\psi = A(\psi, \mathbf{g}, \mathbf{e}),$$

$$A_{\varphi \circ \psi} = A(\varphi \circ \psi, \mathbf{g}, \mathbf{f}).$$

Тогда,  $A_{\varphi \circ \psi} = A_\varphi \cdot A_\psi$ .

### 19. Ядро и образ линейного отображения. Являются ли они подпространствами в соответствующих векторных пространствах?

Пусть  $\varphi: V \rightarrow W$ .

**Определение.** Ядро линейной оболочки  $\varphi$  — это  $\ker \varphi := \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\} \subseteq V$ .

Образ линейного отображения  $\varphi$  — это  $\text{Im } \varphi := \varphi(V) \subseteq W$ .

**Предложение.**

1. Ядро — подпространство в  $V$ .
2. Образ — подпространство в  $W$ .

## 20. Критерий инъективности линейного отображения в терминах его ядра

Пусть  $V, W$  — векторные пространства над  $F$ ,

$\varphi: V \rightarrow W$  — линейное отображение.

**Предложение.**

- (a)  $\varphi$  инъективно  $\iff \ker \varphi = \{0\}$ ,
- (b)  $\varphi$  сюръективно  $\iff \operatorname{Im} \varphi = W$ .

## 21. Связь между рангом матрицы линейного отображения и размерностью его образа

Пусть  $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ ,

$\mathfrak{f} = (f_1, \dots, f_m)$  — базис  $W$ ,

$A = A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f})$ .

**Теорема.**  $\operatorname{rk} A = \dim \operatorname{Im} \varphi$ .

**Замечание.** Число  $\dim \operatorname{Im} \varphi$  называется *рангом* линейного отображения  $\varphi$ , обозначается  $\operatorname{rk} \varphi$ .

**Следствие.**  $\operatorname{rk} A$  не зависит от выбора пары базисов  $\mathfrak{e}$  и  $\mathfrak{f}$ .

## 22. Каким свойством обладает набор векторов, дополняющих базис ядра линейного отображения до базиса всего пространства?

**Предложение.** Пусть  $e_1, \dots, e_k$  — базис  $\ker \varphi$  и векторы  $e_{k+1}, \dots, e_n$  дополняют его до базиса всего  $V$ .

Тогда,  $\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)$  образуют базис в  $\operatorname{Im} \varphi$ .

## 23. Теорема о связи размерностей ядра и образа линейного отображения

**Теорема.**  $\dim \operatorname{Im} \varphi + \dim \ker \varphi = \dim V$ .

## 24. К какому простейшему виду можно привести матрицу линейного отображения путём замены базисов?

**Предложение.** Пусть  $\operatorname{rk} \varphi = r$ . Тогда существует базис  $\mathfrak{e}$  в  $V$  и базис  $\mathfrak{f}$  в  $W$ , такие что

$$A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}) = \left( \begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) = \begin{matrix} & \begin{matrix} r & & n-r \end{matrix} \\ \begin{matrix} r \\ m-r \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

## 25. Линейная функция на векторном пространстве

**Определение.** *Линейной функцией* (или *линейной формой*, или *линейным функционалом*) на  $V$  называется всякое линейное отображение  $\alpha: V \rightarrow F$ .

**Обозначение.**  $V^* := \operatorname{Hom}(V, F)$  — множество всех линейных функций на  $V$ .

## 26. Сопряжённое (двойственное) векторное пространство и его размерность

Из общей теории линейных отображений:

1.  $V^*$  — векторное пространство (оно называется *сопряжённым* или *двойственным*).
2. Если  $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$  — фиксированный базис в  $V$ , то есть изоморфизм  $V^* \simeq \operatorname{Mat}_{1 \times n}(F)$  (а это ни что иное, как строки длины  $n$ ).

$$\alpha \rightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

$$v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

$$\alpha(v) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n.$$

$\alpha_i = \alpha(e_i)$  — коэффициенты линейной функции  $\alpha$  в базисе  $\mathfrak{e}$ .



**Следствие.**  $\dim V^* = \dim V \implies V^* \simeq V$ .

## 27. Базис сопряжённого пространства, двойственный к данному базису исходного векторного пространства

При  $i = 1, \dots, n$  рассмотрим линейную функцию  $\varepsilon_i \in V^*$ , соответствующую строке  $(0 \dots 1 \dots 0)$ . Тогда  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  — базис  $V^*$ , он однозначно определяется условием  $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$  ( $\delta_{ij}$  — символ Кронекера)

**Определение.** Базис  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  пространства  $V^*$ , определенный условием выше, называется базисом, *двойственным* (сопряженным) к базису  $e$ .

Удобная запись условия:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} (e_1, \dots, e_n) = E.$$

## 28. Билинейная форма на векторном пространстве

Пусть  $V$  — векторное пространство над  $F$ .

**Определение.** *Билинейная форма* на  $V$  — это отображение  $\beta: V \times V \rightarrow F$ , линейное по каждому аргументу.

### Линейность по 1-му аргументу

- $\beta(x_1 + x_2, y) = \beta(x_1, y) + \beta(x_2, y) \quad \forall x_1, x_2, y \in V,$
- $\beta(\lambda x, y) = \lambda \beta(x, y) \quad \forall x, y \in V, \lambda \in F.$

### Линейность по 2-му аргументу

- $\beta(x, y_1 + y_2) = \beta(x, y_1) + \beta(x, y_2) \quad \forall x, y_1, y_2 \in V,$
- $\beta(x, \lambda y) = \lambda \beta(x, y) \quad \forall x, y \in V, \lambda \in F.$

## 29. Матрица билинейной формы

Считаем, что  $\dim V = n < \infty$ .

Пусть  $e = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ .

**Определение.** Матрицей билинейной формы  $\beta$  в базисе  $e$  называется такая матрица  $B \in M_n$ , что  $b_{ij} = \beta(e_i, e_j)$ .

Обозначение:  $B(\beta, e)$ .

## 30. Формула для вычисления значений билинейной формы в координатах

Пусть  $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n,$

$y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n.$

Тогда,

$$\beta(x, y) = (x_1, \dots, x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

## 31. Формула изменения матрицы билинейной формы при замене базисов

$B = B(\beta, e).$

Пусть  $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$  — другой базис  $V$ .

$e' = e \cdot C.$

$B' := B(\beta, e').$

**Предложение.**  $B' = C^T B C.$

## 32. Симметричная билинейная форма. Критерий симметричности билинейной формы в терминах её матрицы

**Определение.** Билинейная форма  $\beta$  называется *симметричной*, если  $\beta(x, y) = \beta(y, x) \quad \forall x, y \in V.$

Пусть  $e$  — произвольный базис  $V$ .

**Предложение.**  $\beta$  симметрична  $\iff B = B^T.$

### 33. Квадратичная форма

Пусть  $\beta: V \times V \rightarrow F$  — билинейная форма на  $V$ .

**Определение.** Отображение  $Q_\beta: V \rightarrow F$ ,  $Q_\beta(x) = \beta(x, x)$ , называется *квадратичной формой*, ассоциированной с билинейной формой  $\beta$ .

Пусть  $e$  — базис  $V$ ,  $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ ,  $B = B(\beta, e)$ .

Тогда,

$$Q_\beta(x) = (x_1 \dots x_n) B \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (b_{ij} + b_{ji}) x_i x_j.$$

### 34. Соответствие между симметричными билинейными формами и квадратичными формами

**Предложение.** Пусть в поле  $F$  выполнено условие  $1 + 1 \neq 0$  (то есть  $2 \neq 0$ ). Тогда отображение  $\beta \mapsto Q_\beta$  является биекцией между симметричными билинейными формами на  $V$  и квадратичными формами на  $V$ .

### 35. Симметризация билинейной формы

Билинейная форма  $\sigma(x, y) = \frac{1}{2} (\beta(x, y) + \beta(y, x))$  называется *симметризацией* билинейной формы  $\beta$ .

Если  $B$  и  $S$  — матрицы билинейных форм  $\beta$  и  $\sigma$  в некотором базисе, то  $S = \frac{1}{2}(B + B^T)$ .

### 36. Поляризация квадратичной формы

Симметричная билинейная форма  $\beta(x, y) = \frac{1}{2} [Q(x + y) - Q(x) - Q(y)]$  называется *поляризацией* квадратичной формы  $Q$ .

### 37. Матрица квадратичной формы

**Определение.** Матрицей квадратичной формы  $Q$  в базисе  $e$  называется матрица соответствующей симметричной билинейной формы (поляризации) в базисе  $e$ .

Обозначение:  $B(Q, e)$ .

*Пример.* Пусть  $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$ .

Если  $e$  — стандартный базис, то  $B(Q, e) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ .

### 38. Канонический вид квадратичной формы

**Определение.** Квадратичная форма  $Q$  имеет в базисе  $e$  *канонический вид*, если  $B(Q, e)$  диагональна.

Если  $B(Q, e) = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n)$ , то  $Q(x_1, \dots, x_n) = b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + \dots + b_n x_n^2$ .

### 39. Нормальный вид квадратичной формы над $\mathbb{R}$

**Определение.** Квадратичная форма над  $\mathbb{R}$  имеет *нормальный вид* в базисе  $e$ , если в этом базисе

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \varepsilon_1 x_1^2 + \dots + \varepsilon_n x_n^2,$$

где  $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$ .

### 40. Индексы инерции квадратичной формы над $\mathbb{R}$

Пусть  $F = \mathbb{R}$ .

Пусть  $Q: V \rightarrow \mathbb{R}$  — квадратичная форма.

Можно привести к нормальному виду

$$Q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_{s+t}^2.$$

Здесь  $i_+ := s$  — положительный индекс инерции квадратичной формы  $Q$ ,

$i_- := t$  — отрицательный индекс инерции квадратичной формы  $Q$ .

### 41. Закон инерции для квадратичной формы над $\mathbb{R}$

**Теорема.** Числа  $i_+$  и  $i_-$  не зависят от базиса в котором  $Q$  принимает нормальный вид.

### 42. Положительно/неотрицательно определённая квадратичная форма над $\mathbb{R}$

### 43. Отрицательно/неположительно определённая квадратичная форма над $\mathbb{R}$

#### 44. Неопределённая квадратичная форма над $\mathbb{R}$

**Определение.** Квадратичная форма  $Q$  над  $\mathbb{R}$  называется

Термин	Обозначение	Условие	Нормальный вид	Индексы инерции
Положительно определённой	$Q > 0$	$Q(x) > 0 \ \forall x \neq 0$	$x_1^2 + \dots + x_n^2$	$i_+ = n, i_- = 0$
Отрицательно определённой	$Q < 0$	$Q(x) < 0 \ \forall x \neq 0$	$-x_1^2 - \dots - x_n^2$	$i_+ = 0, i_- = n$
Неотрицательно определённой	$Q \geq 0$	$Q(x) \geq 0 \ \forall x$	$x_1^2 + \dots + x_k^2, \ k \leq n$	$i_+ = k, i_- = 0$
Неположительно определённой	$Q \leq 0$	$Q(x) \leq 0 \ \forall x$	$-x_1^2 - \dots - x_k^2, \ k \leq n$	$i_+ = 0, i_- = k$
Неопределённой	—	$\exists x : Q(x) > 0$ $\exists y : Q(y) < 0$	$x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_{s+t}^2$ $s, t \geq 1$	$i_+ = s, i_- = t$

#### 45. Способ нахождения индексов инерции квадратичной формы над $\mathbb{R}$ , вытекающий из метода Якоби

Пусть  $Q: V \rightarrow \mathbb{R}$  — квадратичная форма,

$e = (e_1, \dots, e_n)$  — базис,

$B = B(Q, e)$ ,

$\delta_k$  —  $k$ -й угловой минор матрицы  $B$ .

**Следствие** (из метода Якоби). Пусть  $\delta_k \neq 0 \ \forall k$ . Тогда:

Число  $i_+$  равно количеству сохранений знака в последовательности  $1, \delta_1, \dots, \delta_n$ .

Число  $i_-$  равно количеству перемен знака в последовательности  $1, \delta_1, \dots, \delta_n$ .

#### 46. Критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы над $\mathbb{R}$

Пусть  $V$  — векторное пространство над  $\mathbb{R}$ ,  $\dim V = n$ ,

$e = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ ,

$B = B(Q, e)$ ,

$B_k$  — левый верхний  $k \times k$  блок,

$\delta_k = \det B_k$ .

**Теорема** (Критерий Сильвестра положительной определённости).

$$Q > 0 \iff \delta_k > 0 \ \forall k = 1 \dots n.$$

#### 47. Критерий отрицательной определённости квадратичной формы над $\mathbb{R}$

**Следствие.**

$$Q < 0 \iff \delta_k \begin{cases} > 0 & \text{при } k : 2, \\ < 0 & \text{при } k \not: 2. \end{cases}$$

#### 48. Евклидово пространство

**Определение.** *Евклидово пространство* — это векторное пространство  $\mathbb{E}$  над  $\mathbb{R}$ , на котором задано *скалярное произведение*, то есть такое отображение  $(\cdot, \cdot): \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ , что

1.  $(\cdot, \cdot)$  — симметричная билинейная форма,
2. Квадратичная форма  $(x, x)$  положительно определённая.

#### 49. Длина вектора в евклидовом пространстве

**Определение.** *Длина* вектора  $x \in \mathbb{E}$  — это  $|x| := \sqrt{(x, x)}$ .

Свойство:  $|x| \geq 0$ , причем  $|x| = 0 \iff x = 0$ .

*Пример.* Если  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$  со стандартным скалярным произведением, то  $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ .

#### 50. Неравенство Коши–Буняковского

**Предложение** (неравенство Коши–Буняковского).  $\forall x, y \in \mathbb{E}$  верно  $|(x, y)| \leq |x| \cdot |y|$ , причём равенство  $\iff x, y$  пропорциональны.

*Пример.* Пусть  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$  со стандартным скалярным произведением, тогда

$$|x_1 y_1 + \dots + x_n y_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}.$$

### 51. Угол между ненулевыми векторами евклидова пространства

Пусть  $x, y \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$ , тогда  $-1 \leq \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|} \leq 1$ .

**Определение.** Угол между ненулевыми векторами  $x, y \in \mathbb{E}$ , это такой  $\alpha \in [0, \pi]$ , что  $\cos \alpha = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}$ .

Тогда  $(x, y) = |x| |y| \cos \alpha$ .

### 52. Матрица Грама системы векторов евклидова пространства

Пусть  $v_1, \dots, v_k$  — произвольная система векторов.

**Определение.** Матрица Грама этой системы — это

$$G(v_1, \dots, v_k) = \begin{pmatrix} (v_1, v_1) & (v_1, v_2) & \dots & (v_1, v_k) \\ (v_2, v_1) & (v_2, v_2) & \dots & (v_2, v_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (v_k, v_1) & (v_k, v_2) & \dots & (v_k, v_k) \end{pmatrix}.$$

*Пример.*  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$  со стандартным скалярным произведением.

$a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n \rightsquigarrow A := (a_1, \dots, a_k) \in \text{Mat}_{n \times k}(\mathbb{R})$ .

Тогда,  $G(a_1, \dots, a_k) = A^T \cdot A$ .

### 53. Свойства определителя матрицы Грама

**Предложение.**  $\forall v_1, \dots, v_k \in \mathbb{E} \implies \det G(v_1, \dots, v_k) \geq 0$ .

Более того,  $\det G(v_1, \dots, v_k) > 0 \iff v_1, \dots, v_k$  линейно независимы.

### 54. Ортогональное дополнение подмножества евклидова пространства

**Определение.** Ортогональное дополнение множества  $S \subseteq \mathbb{E}$  — это множество  $S^\perp := \{x \in \mathbb{E} \mid (x, y) = 0 \ \forall y \in S\}$ .

### 55. Чему равна размерность ортогонального дополнения к подпространству евклидова пространства?

Пусть  $\dim \mathbb{E} = n$ ,  $S \subseteq \mathbb{E}$  — подпространство.

Тогда,  $\dim S^\perp = n - \dim S$ .

### 56. Каким свойством обладают подпространство евклидова пространства и его ортогональное дополнение?

Считаем, что  $\dim \mathbb{E} = n < \infty$ .

**Предложение.** Пусть  $S \subseteq \mathbb{E}$  — подпространство. Тогда:

1.  $\dim S^\perp = n - \dim S$ .
2.  $\mathbb{E} = S \oplus S^\perp$ .
3.  $(S^\perp)^\perp = S$ .

### 57. Ортогональная проекция вектора на подпространство

$\Downarrow$

### 58. Ортогональная составляющая вектора относительно подпространства

$S$  — подпространство  $\implies \mathbb{E} = S \oplus S^\perp$

$\forall v \in \mathbb{E} \exists! x \in S, y \in S^\perp$ , такие что  $x + y = v$ .

**Определение.**

1.  $x$  называется ортогональной проекцией вектора  $v$  на подпространство  $S$ .  
Обозначение:  $x = \text{pr}_S v$ .
2.  $y$  называется ортогональной составляющей вектора  $v$  относительно подпространства  $S$ .  
Обозначение:  $y = \text{ort}_S v$ .

**59. Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в  $\mathbb{R}^n$ , заданное своим базисом**

Пусть  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$  со стандартным скалярным произведением.

$S \subseteq \mathbb{E}$  — подпространство,  $a_1, \dots, a_k$  — базис  $S$ .

Пусть  $A := (a_1, \dots, a_k) \in \text{Mat}_{n \times k}(\mathbb{R})$ ,  $A^{(i)} = a_i$ .

**Предложение.**  $\forall v \in \mathbb{R}^n \quad \text{pr}_S v = A(A^T A)^{-1} A^T v$ .

**60. Ортогональная система векторов евклидова пространства. Ортогональный базис**

$\Downarrow$

**61. Ортонормированная система векторов евклидова пространства. Ортонормированный базис**

**Определение.** Система ненулевых векторов  $v_1, \dots, v_k$  называется

1. *ортогональной*, если  $(v_i, v_j) = 0 \quad \forall i \neq j$  (то есть  $G(v_1, \dots, v_k)$  диагональна),
2. *ортонормированной*, если  $(v_i, v_j) = 0 \quad \forall i \neq j$  и  $(v_i, v_i) = 1$  ( $\iff |v_i| = 1$ ). То есть  $G(v_1, \dots, v_k) = E$ .

**Замечание.** Всякая ортогональная (и в частности ортонормированная) система векторов автоматически линейно независима.

$$\det G(v_1, \dots, v_k) = |v_1|^2 \dots |v_k|^2 \neq 0.$$

**Определение.** Базис пространства называется *ортогональным* (соответственно *ортонормированным*), если он является ортогональной (ортонормированной) системой векторов.

**62. Описание всех ортонормированных базисов евклидова пространства в терминах одного такого базиса и матриц перехода**

Пусть  $e = (e_1, \dots, e_n)$  — ортонормированный базис в  $E$ .

Пусть  $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$  — какой-то другой базис.

$$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C, \quad C \in M_n^0(\mathbb{R}).$$

**Предложение.**  $e'$  — ортонормированный базис  $\iff C^T \cdot C = E$ .

**63. Ортогональная матрица**

**Определение.** Матрица  $C \in M_n(\mathbb{R})$  называется *ортогональной* если  $C^T C = E$ .

**Замечание.**  $C^T C = E \iff C C^T = E \iff C^{-1} = C^T$ .

**Свойства.**

1.  $C^T C = E \implies$  система столбцов  $C^{(1)}, \dots, C^{(n)}$  — это ортонормированный базис в  $\mathbb{R}^n$ ,
2.  $C C^T = E \implies$  система строк  $C_{(1)}, \dots, C_{(n)}$  — это тоже ортонормированный базис в  $\mathbb{R}^n$ ,

В частности,  $|c_{ij}| \leq 1$ .

3.  $\det C = \pm 1$ .

*Пример.*  $n = 2$ . Ортогональные матрицы:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}.$$

$$\det = 1 \quad \det = -1$$

**64. Формула для координат вектора в ортогональном и ортонормированном базисах евклидова пространства**

Пусть  $\mathbb{E}$  — евклидово пространство,  $(e_1, \dots, e_n)$  — ортогональный базис.

$v \in \mathbb{E}$ .

**Предложение.**  $v = \frac{(v, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 + \frac{(v, e_2)}{(e_2, e_2)} e_2 + \dots + \frac{(v, e_n)}{(e_n, e_n)} e_n$ .

В частности, если  $e_1, \dots, e_n$  ортонормирован, то  $v = (v, e_1) e_1 + \dots + (v, e_n) e_n$ .

**65. Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в терминах его ортогонального базиса**

Пусть  $S \subseteq \mathbb{E}$  — подпространство.

$e_1, \dots, e_k$  — ортогональный базис в  $S$ .

**Предложение.**  $\forall v \in \mathbb{E} \quad \text{pr}_S v = \sum_{i=1}^k \frac{(v, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i$ .

В частности, если  $e_1, \dots, e_k$  ортонормирован, то  $\text{pr}_S v = \sum_{i=1}^k (v, e_i) e_i$ .

## 66. Метод ортогонализации Грама–Шмидта

Как построить ортогональный (ортонормированный) базис в  $\mathbb{E}$ ?

Если  $f_1, \dots, f_n$  — ортогональный базис, то  $\left(\frac{f_1}{|f_1|}, \dots, \frac{f_n}{|f_n|}\right)$  — ортонормированный базис.

Тогда, достаточно построить ортогональный базис.

Пусть  $e_1, \dots, e_k$  — линейно независимая система векторов.

$i$ -й угловой минор в  $G(e_1, \dots, e_k)$  — это  $\det G(e_1, \dots, e_k) > 0$ .

Следовательно, применим метод Якоби:

∃! система векторов  $f_1, \dots, f_k$ , такая что

$$\begin{aligned} f_1 &= e_1, \\ f_2 &\in e_2 + \langle e_1 \rangle, \\ f_3 &\in e_3 + \langle e_1, e_2 \rangle, \\ &\dots, \\ f_k &\in e_k + \langle e_1, \dots, e_{k-1} \rangle \end{aligned}$$

И выполнены следующие свойства  $\forall i = 1, \dots, k$ :

0.  $f_1, \dots, f_k$  ортогональны.
1.  $\langle e_1, \dots, e_i \rangle = \langle f_1, \dots, f_i \rangle$ .
2.  $f_i = e_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{(e_i, f_j)}{(f_j, f_j)} f_j$  (\*).
3.  $\det G(e_1, \dots, e_i) = \det G(f_1, \dots, f_i)$  (♥).

Построение базиса  $f_1, \dots, f_k$  по формулам (\*) называется методом (процессом) ортогонализации Грама–Шмидта.

## 67. Теорема Пифагора в евклидовом пространстве

**Теорема.** Пусть  $x, y \in \mathbb{E}$ ,  $(x, y) = 0$ . Тогда  $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$ .

## 68. Расстояние между векторами евклидова пространства

**Определение.** Расстояние между векторами  $x, y \in \mathbb{E}$  — это  $\rho(x, y) = |x - y|$ .

## 69. Неравенство треугольника в евклидовом пространстве

**Предложение.**  $\forall a, b, c \in \mathbb{E} \implies \rho(a, b) + \rho(b, c) \geq \rho(a, c)$ .

## 70. Теорема о расстоянии между вектором и подпространством в терминах ортогональной составляющей

**Теорема.** Пусть  $x \in \mathbb{E}$ ,  $S \subseteq \mathbb{E}$  — подпространство. Тогда,  $\rho(x, S) = |\text{ort}_S x|$ , причем  $\text{pr}_S x$  — это ближайший к  $x$  вектор из  $S$ .

## 71. Псевдорешение несовместной системы линейных уравнений

СЛУ  $Ax = b$ ,  $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ .

$$x_0 \text{ — решение системы} \iff Ax_0 = b \iff Ax_0 - b = 0 \iff |Ax_0 - b| = 0 \iff \rho(Ax_0, b) = 0.$$

Если СЛУ несовместна, то  $x_0$  называется псевдорешением, если  $\rho(Ax_0, b)$  минимально.

$$\rho(Ax_0, b) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \rho(Ax, b).$$

$x_0$  — решение задачи оптимизации  $\rho(Ax, b) \xrightarrow{x \in \mathbb{R}^n} \min$ .

Если столбцы  $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$  линейно независимы, то псевдорешение единственно и может быть найдено по формуле  $x_0 = (A^T A)^{-1} A^T b$ .

**72. Формула для расстояния от вектора до подпространства в терминах матриц Грама**

Пусть  $\mathbb{E}$  — евклидово пространство,  $\dim \mathbb{E} = n < \infty$ .

$S \subseteq \mathbb{E}$  — подпространство,  $e_1, \dots, e_k$  — базис в  $S$ .

**Теорема.**  $\forall x \in \mathbb{E} \quad \rho(x, S)^2 = \frac{\det G(e_1, \dots, e_k, x)}{\det G(e_1, \dots, e_k)}$ .

**73.  $k$ -мерный параллелепипед и его объём**

**Определение.**  $k$ -мерный параллелепипед, натянутый на векторы  $a_1, \dots, a_k$ , это множество

$$P(a_1, \dots, a_k) := \left\{ \sum_{i=1}^k x_i a_i \mid 0 \leq x_i < 1 \right\}.$$

Основание:  $P(a_1, \dots, a_{k-1})$ .

Высота:  $h := |\text{ort}_{\langle a_1, \dots, a_{k-1} \rangle} a_k|$ .

**Определение.**  $k$ -мерный объём  $k$ -мерного параллелепипеда  $P(a_1, \dots, a_k)$  — это величина  $\text{vol } P(a_1, \dots, a_k)$ , определяемая индуктивно:

$$k = 1 \implies \text{vol } P(a_1) := |a_1|.$$

$$k > 1 \implies \text{vol } P(a_1, \dots, a_k) := \text{vol } P(a_1, \dots, a_{k-1}) \cdot h.$$

**74. Формула для объёма  $k$ -мерного параллелепипеда в  $n$ -мерном евклидовом пространстве**

**Теорема.**  $\text{vol } P(a_1, \dots, a_k)^2 = \det G(a_1, \dots, a_k)$ .

**75. Формула для объёма  $n$ -мерного параллелепипеда в  $n$ -мерном евклидовом пространстве в терминах координат в ортонормированном базисе**

Пусть  $(e_1, \dots, e_n)$  — ортонормированный базис в  $\mathbb{E}$ ,

$$(a_1, \dots, a_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot A, \quad A \in M_n(\mathbb{R}).$$

**Предложение.**  $\text{vol } P(a_1, \dots, a_n) = |\det A|$ .

**76. В каком случае два базиса евклидова пространства называются одинаково ориентированными?**

Пусть  $e = (e_1, \dots, e_n)$  и  $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$  — два базиса в  $\mathbb{E}$ .

$$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C, \quad C \in M_n^0(\mathbb{R}).$$

**Определение.** Говорят, что  $e$  и  $e'$  одинаково ориентированы, если  $\det C > 0$ .

**77. Ориентированный объём  $n$ -мерного параллелепипеда в  $n$ -мерном евклидовом пространстве**

Фиксируем ориентацию в  $\mathbb{E}$ .

Фиксируем положительно ориентированный ортонормированный базис  $e = (e_1, \dots, e_n)$  в  $\mathbb{E}$ .

Пусть  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{E}$ ,  $(a_1, \dots, a_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot A$ .

**Определение.** Ориентированным объёмом параллелепипеда  $P(a_1, \dots, a_n)$  называется величина

$$\text{Vol}(a_1, \dots, a_n) = \det A.$$

**78. Свойства ориентированного объёма  $n$ -мерного параллелепипеда в  $n$ -мерном евклидовом пространстве**

1.  $\text{Vol}(a_1, \dots, a_n)$  линеен по каждому аргументу.
2.  $\text{Vol}(a_1, \dots, a_n)$  кососимметрична (то есть меняет знак при перестановке любых двух аргументов).
3.  $\text{Vol}(a_1, \dots, a_n) > 0 \iff (a_1, \dots, a_n)$  — положительно ориентированный базис в  $\mathbb{E}$ .
4.  $\text{Vol}(a_1, \dots, a_n) < 0 \iff (a_1, \dots, a_n)$  — отрицательно ориентированный базис в  $\mathbb{E}$ .
5.  $\text{Vol}(a_1, \dots, a_n) = 0 \iff (a_1, \dots, a_n)$  линейно зависимы.

**79. Связь векторного произведения со скалярным и ориентированным объёмом**

**80. Формула для вычисления векторного произведения в терминах координат в положительно ориентированном ортонормированном базисе**

Если  $e = (e_1, e_2, e_3)$  — положительно ориентированный базис и  $a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$ , то

$$b = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$$

$$[a, b] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} := \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} e_3. \quad (*)$$

**81. Смешанное произведение векторов трёхмерного евклидова пространства**

**Определение.**  $\forall a, b, c \in \mathbb{E}$  число  $(a, b, c) := ([a, b], c)$  называется *смешанным произведением* векторов  $a, b, c$ .

**Замечание.**  $(a, b, c) = \text{Vol}(a, b, c)$ .

**82. Формула для вычисления смешанного произведения в терминах координат в положительно ориентированном ортонормированном базисе**

Если  $e_1, e_2, e_3$  — положительно ориентированный ортонормированный базис, то

$$\begin{cases} a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \\ b = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 \\ c = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3 \end{cases} \implies (a, b, c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

**83. Критерий компланарности трёх векторов трёхмерного евклидова пространства**

$a, b, c$  компланарны  $\iff (a, b, c) = 0$ .

**84. Критерий коллинеарности двух векторов трёхмерного евклидова пространства**

**Предложение.**  $a, b \in \mathbb{E}$  коллинеарны  $\iff [a, b] = 0$ .

**85. Геометрические свойства векторного произведения**

**Предложение.**

1.  $[a, b] \perp \langle a, b \rangle$ .
2.  $|[a, b]| = \text{vol } P(a, b)$ .
3.  $\text{Vol}(a, b, [a, b]) \geq 0$ .

**86. Линейное многообразие. Характеризация линейных многообразий как сдвигов подпространств**

**Определение.** *Линейное многообразие* в  $\mathbb{R}^n$  — это множество решений некоторой совместной СЛУ.

Пусть  $Ax = b$  — СЛУ,  $\emptyset \neq L \subseteq \mathbb{R}^n$  — множество решений,  $x_z \in L$  — частное решение.

Было: Лемма:  $L = x_z + S$ , где  $S$  — множество решений ОСЛУ  $Ax = 0$ .

**Предложение.** Множество  $L \subseteq \mathbb{R}^n$  является линейным многообразием  $\iff L = v_0 + S$  для некоторых  $v_0 \in \mathbb{R}^n$  и подпространства  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ .

**87. Критерий равенства двух линейных многообразий. Направляющее подпространство и размерность линейного многообразия**

**Предложение.** Пусть  $L_1 = v_1 + S_1$  и  $L_2 = v_2 + S_2$  — два линейных многообразия в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда,

$$L_1 = L_2 \iff \begin{cases} S_1 = S_2 (= S) \\ v_1 - v_2 \in S \end{cases}.$$

Если  $L$  — линейное многообразие, то  $L = v_0 + S$ , где  $S$  определено однозначно.

**Определение.**  $S$  называется *направляющим подпространством* линейного многообразия  $L$ .

**Определение.** *Размерностью* линейного многообразия называется размерность его направляющего подпространства.

**88. Теорема о плоскости, проходящей через  $k + 1$  точку в  $\mathbb{R}^n$**

**Теорема.**



- а) Через любые  $k + 1$  точек в  $\mathbb{R}^n$  проходит плоскость размерности  $\leq k$ .  
 б) Если эти точки не лежат в плоскости размерности  $< k$ , то через них проходит ровно одна плоскость размерности  $k$ .

**Следствие.**

1. Через любые две различные точки проходит ровно одна прямая.
2. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит ровно одна плоскость.

**89. Три способа задания прямой в  $\mathbb{R}^2$ . Уравнение прямой в  $\mathbb{R}^2$ , проходящей через две различные точки**

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix} = 0 \quad \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \quad \begin{matrix} x_1 = x_0 \implies x = x_0, \\ y_1 = y_0 \implies y = y_0. \end{matrix}$$

**90. Три способа задания плоскости в  $\mathbb{R}^3$**

**91. Уравнение плоскости в  $\mathbb{R}^3$ , проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой**

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

**92. Три способа задания прямой в  $\mathbb{R}^3$**

**93. Уравнения прямой в  $\mathbb{R}^3$ , проходящей через две различные точки**

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}.$$

**94. Случаи взаимного расположения двух прямых в  $\mathbb{R}^3$**

**95. Формула для расстояния от точки до прямой в  $\mathbb{R}^3$**

**96. Формула для расстояния от точки до плоскости в  $\mathbb{R}^3$**

**97. Формула для расстояния между двумя скрещивающимися прямыми в  $\mathbb{R}^3$**

## 2 Вопросы на доказательство

### 2.1 Подпространства

**1. Теорема о связи размерности суммы двух подпространств с размерностью их пересечения**

**Теорема.**  $\dim(U \cap W) + \dim(U + W) = \dim U + \dim W$ .

*Пример.* Всякие две плоскости в  $\mathbb{R}^3$  (содержащие 0) имеют общую прямую.

Здесь  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $\dim U = 2$ ,  $\dim W = 2$ .

При этом  $\dim(U + W) \leq 3$ .

Тогда,  $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) \geq 2 + 2 - 3 = 1$ .

*Доказательство.* Пусть  $\dim(U \cap W) = p$ ,  $\dim U = q$ ,  $\dim W = r$ .

Пусть  $a = \{a_1, \dots, a_p\}$  – базис в  $U \cap W$ .

Тогда,  $a$  можно дополнить до базиса в  $U$  и в  $W$ :

$b = \{b_1, \dots, b_{q-p}\}$  – такая система, что  $a \cup b$  – базис в  $U$ .

$c = \{c_1, \dots, c_{r-p}\}$  – такая система, что  $a \cup c$  – базис в  $W$ .

Докажем, что  $a \cup b \cup c$  – базис в  $U + W$ .

1.  $\langle a \cup b \cup c \rangle = U + W$ :

$v \in U + W \implies \exists u \in U, w \in W$ , такие что  $v = u + w$ .

$u \in U = \langle a \cup b \rangle \subseteq \langle a \cup b \cup c \rangle$ .

$w \in W = \langle a \cup c \rangle \subseteq \langle a \cup b \cup c \rangle$ .

Значит,  $v \in \langle a \cup b \cup c \rangle$ .

2.  $a \cup b \cup c$  линейно независимо.

Пусть  $\underbrace{\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_p a_p}_x + \underbrace{\beta_1 b_1 + \dots + \beta_{q-p} b_{q-p}}_y + \underbrace{\gamma_1 c_1 + \dots + \gamma_{r-p} c_{r-p}}_z = 0$ , где  $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k \in F$ .

Тогда,  $z = -\underbrace{x}_{\in U} - \underbrace{y}_{\in U} \in U$ .

Но,  $z \in W$ , значит  $z \in U \cap W$ .

То есть  $z = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p$ ,  $\lambda_i \in F$ .

Тогда,  $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p - \gamma_1 c_1 - \dots - \gamma_{r-p} c_{r-p} = 0$

Так как  $a \cup c$  линейно независимо, то  $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = \gamma_1 = \dots = \gamma_{r-p} = 0$  и  $z = 0$ .

Следовательно,  $x + y = 0$ , то есть  $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_p a_p + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_{q-p} b_{q-p} = 0$ .

Так как  $a \cup b$  линейно независимо, то  $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = \beta_1 = \dots = \beta_{q-p} = 0$ .

Получаем, что  $a \cup b \cup c$  линейно независимо.

Итого:  $a \cup b \cup c$  – базис в  $U + W$ .

$$\begin{aligned} \dim(U + W) &= |a| + |b| + |c| \\ &= p + q - p + r - p \\ &= q + r - p \\ &= \dim U + \dim W - \dim(U \cap W). \end{aligned}$$

■

## 2. Теорема о пяти эквивалентных условиях, определяющих линейно независимый набор подпространств векторного пространства

**Теорема.** Следующие условия эквивалентны:

- (1)  $U_1, \dots, U_k$  линейно независимы.
- (2) всякий  $u \in U_1 + \dots + U_k$  единственным образом представим в виде  $u = u_1 + \dots + u_k$ , где  $u_i \in U_i$ .
- (3) Если  $e_i$  – базис в  $U_i \forall i$ , то  $\underbrace{e_1 \sqcup e_2 \sqcup \dots \sqcup e_k}_{\text{объединение мультимножеств}}$  – базис в  $U_1 + \dots + U_k$ .
- (4)  $\dim(U_1 + \dots + U_k) = \dim U_1 + \dots + \dim U_k$ .
- (5)  $\forall i = 1, \dots, k \quad U_i \cap (U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_k) = 0$ .

*Пример.* Если  $e_1 = \{e_1, e_2\}$ ,  $e_2 = \{e_2, e_3\}$ , то

- $e_1 \cup e_2 = \{e_1, e_2, e_3\}$  – 3 элемента,
- $e_1 \sqcup e_2 = \{e_1, e_2, e_2, e_3\}$  – 4 элемента.

*Доказательство.* Пусть  $\widehat{U}_i = U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_k$ .

(1)  $\implies$  (2) Пусть  $u_1 + \dots + u_k = u'_1 + \dots + u'_k$ , где  $u_i, u'_i \in U_i$ .

Тогда,  $\underbrace{(u_1 - u'_1)}_{\in U_1} + \underbrace{(u_2 - u'_2)}_{\in U_2} + \dots + \underbrace{(u_k - u'_k)}_{\in U_k} = 0 \implies u_i - u'_i = \dots = u_k - u'_k = 0$ .

То есть,  $u_1 = u'_1, \dots, u_k = u'_k$ .

(2)  $\implies$  (3) Пусть  $u \in U_1 + \dots + U_k$  – произвольный.

$u$  единственным образом представим в виде  $u = u_1 + \dots + u_k$ , где  $u_i \in U_i$ ,

$u_i$  единственным образом представим в виде линейной комбинации векторов из  $e_i$ .

Следовательно,  $u$  единственным образом представим в виде линейной комбинации векторов из  $e_1 \sqcup \dots \sqcup e_k$ .

То есть,  $e_1 \sqcup \dots \sqcup e_k$  – базис в  $U_1 + \dots + U_k$ .

(3)  $\implies$  (4) Очевидно.

(4)  $\implies$  (5)

$$\begin{aligned} \dim(U_i \cap \widehat{U}_i) &= \dim U_i + \dim \widehat{U}_i - \dim(U_1 + \dots + U_k) \\ &\leq \dim U_i + (\dim U_1 + \dots + \dim U_{i-1} + \dim U_{i+1} + \dots + \dim U_k) - (\dim U_1 + \dots + \dim U_k) \\ &= 0. \end{aligned}$$

(5)  $\implies$  (1)  $u_1 + \dots + u_k = 0$ , где  $u_i \in U_i$ .

Тогда,  $\underbrace{u_i}_{\in U_i} = \underbrace{-u_1 - \dots - u_{i-1} - u_{i+1} - \dots - u_k}_{\in \widehat{U}_i}$

Следовательно,  $u_i \in U_i \cap \widehat{U}_i = 0 \implies u_i = 0$ .

■

**Следствие.** Пусть  $k = 2$ , тогда

$U_1, U_2$  линейно независимы  $\iff U_1 \cap U_2 = 0$ .

## 2.2 Линейные отображения

### 1. Свойства отношения изоморфности на множестве всех векторных пространств

**Теорема.** Отношение изоморфности является отношением эквивалентности на множестве всех векторных пространств над фиксированным полем  $F$ .

*Доказательство.*

1. Рефлексивность:  $Id : V \xrightarrow{\sim} V$ .
2. Симметричность:  $V \simeq W \implies W \simeq V$  следует из Предложения 1.
3. Транзитивность:  $U \simeq V, V \simeq W \implies U \simeq W$  следует из Предложения 2. ■

### 2. Критерий изоморфности двух конечномерных векторных пространств

**Теорема.** Пусть  $V, W$  — два конечномерных векторных пространства над  $F$ .

Тогда,  $V \simeq W \iff \dim V = \dim W$ .

**Лемма.**  $\dim V = n \implies V \simeq F^n$ .

*Доказательство.* Фиксируем базис  $(e_1, \dots, e_n)$  в  $V$ .

Тогда, отображение  $\varphi : V \rightarrow F^n$  — изоморфизм.

$$v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \implies \varphi(v) := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

**Лемма.** Пусть  $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$  и  $e_1, \dots, e_n$  — базис  $V$ , тогда  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$  — базис  $W$ .

*Доказательство.* Пусть  $w \in W$ . Тогда  $\exists x_1, \dots, x_n \in F$ , такие что  $\varphi^{-1}(w) = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ .

Тогда,  $w = \varphi(\varphi^{-1}(w)) = \varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n) \implies W = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \rangle$ .

Теперь докажем линейную независимость:

Пусть  $\alpha_1 \varphi(e_1) + \dots + \alpha_n \varphi(e_n) = \vec{0}$ .

Тогда,  $\varphi(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) = \vec{0}$ .

Применяя  $\varphi^{-1}$  получаем,  $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = \varphi^{-1}(\vec{0}) = \vec{0}$ . Значит,  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ .

Итог:  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$  — базис в  $W$ . ■

*Доказательство теоремы.*

$\Leftarrow$  Пусть  $\dim V = \dim W = n$ . Тогда по [лемме 1](#)  $V \simeq F^n, W \simeq F^n$ , значит  $V \simeq W$ .

$\implies$  Пусть  $V \simeq W$ . Фиксируем изоморфизм  $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$ .

Тогда по [лемме 2](#) получаем, что  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$  — базис  $W$ , а значит  $\dim V = n = \dim W$ . ■

### 3. Существование и единственность линейного отображения с заданными образами базисных векторов

Пусть  $V, W$  — векторные пространства над  $F$  и  $(e_1, \dots, e_n)$  — фиксированный базис в  $V$ .

**Предложение.**

1. Если  $\varphi : V \rightarrow W$  — линейное отображение, то  $\varphi$  однозначно определяется векторами  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ ,
2.  $\forall w_1, \dots, w_n \in W \exists!$  линейное отображение  $\varphi$ , такое что,  $\varphi(e_1) = w_1, \dots, \varphi(e_n) = w_n$ .

*Доказательство.*

1.  $v \in V \implies v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \implies \varphi(v) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n)$ .
2. Зададим  $\varphi : V \rightarrow W$  формулой  $\varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 w_1 + \dots + x_n w_n$ .  
Тогда  $\varphi$  — линейное отображение из  $V$  в  $W$  (упражнение).  
Единственность следует из [1](#). ■

#### 4. Связь между координатами вектора и его образа при линейном отображении

**Предложение.** Пусть  $\varphi: V \rightarrow W$  — линейное отображение,

$\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ ,

$\mathfrak{f} = (f_1, \dots, f_m)$  — базис  $W$ ,

$A = A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f})$ .

$v \in V \implies v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ ,

$\varphi(v) = y_1 f_1 + \dots + y_m f_m$ .

Тогда,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

*Доказательство.*  $v = (e_1, \dots, e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ .

Значит,

$$\varphi(v) = (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (f_1, \dots, f_m) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

При этом,

$$\varphi(v) = (f_1, \dots, f_m) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Так как  $f_1, \dots, f_m$  линейно независимы, то

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

■

#### 5. Формула изменения матрицы линейного отображения при замене базисов

Пусть теперь  $\mathfrak{e}'$  — другой базис в  $V$ ,  $\mathfrak{f}'$  — другой базис в  $W$ .

$\mathfrak{e}' = \mathfrak{e} \cdot C_{\in M_n}$ ,

$\mathfrak{f}' = \mathfrak{f} \cdot D_{\in M_m}$ .

$A = A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f})$ ,

$A' = A(\varphi, \mathfrak{e}', \mathfrak{f}')$ .

**Предложение.**  $A' = D^{-1} A C$ .

*Доказательство.*

$$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C.$$

Применим  $\varphi$ ,

$$(\varphi(e'_1), \dots, \varphi(e'_n)) = (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) \cdot C = (f_1, \dots, f_m) \cdot A \cdot C$$

При этом,

$$(\varphi(e'_1), \dots, \varphi(e'_n)) = (f'_1, \dots, f'_m) \cdot A' = (f_1, \dots, f_m) \cdot D \cdot A'.$$

Отсюда,

$$A \cdot C = D \cdot A' \implies A' = D^{-1} \cdot A \cdot C.$$

■

#### 6. Изоморфизм $\text{Hom}(V, W) \xrightarrow{\sim} \text{Mat}_{m \times n}(F)$ при фиксированных базисах $V$ и $W$

**Следствие.** При фиксированном  $\mathfrak{e}$  и  $\mathfrak{f}$  отображение  $\varphi \mapsto A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f})$  является изоморфизмом между  $\text{Hom}(V, W)$  и  $\text{Mat}_{m \times n}(F)$ .

Зафиксируем базисы  $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$  в  $V$  и  $\mathfrak{f} = (f_1, \dots, f_m)$  в  $W$ .

### Линейность.

1.  $\varphi, \psi \in \text{Hom}(V, W)$ ,  $A_\varphi = A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f})$   
 $A_\psi = A(\psi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f})$   
 $A_{\varphi+\psi} = A(\varphi + \psi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}) \implies A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$
2.  $\lambda \in F, \varphi \in \text{Hom}(V, W)$ ,  $A_\varphi = A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f})$   
 $A_{\lambda\varphi} = A(\lambda\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}) \implies A_{\lambda\varphi} = \lambda A_\varphi$

Доказательство.

1.

$$\begin{aligned}(f_1, \dots, f_m) \cdot A_{\varphi+\psi} &= ((\varphi + \psi)(e_1), \dots, (\varphi + \psi)(e_n)) \\ &= (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) + (\psi(e_1), \dots, \psi(e_n)) \\ &= (f_1, \dots, f_m)A_\varphi + (f_1, \dots, f_m)A_\psi \\ &= (f_1, \dots, f_m)(A_\varphi + A_\psi).\end{aligned}$$

Следовательно,  $A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$ .

2. Аналогично. ■

**Биективность.** Следует из пункта 3.

### 7. Матрица композиции двух линейных отображений

Пусть  $U \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{\varphi} W$  — цепочка линейных отображений, а  $\varphi \circ \psi : U \rightarrow W$  — их композиция,

$\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ ,

$\mathfrak{f} = (f_1, \dots, f_m)$  — базис  $W$ ,

$\mathfrak{g} = (g_1, \dots, g_k)$  — базис  $U$ .

$A_\varphi = A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f})$ ,

$A_\psi = A(\psi, \mathfrak{g}, \mathfrak{e})$ ,

$A_{\varphi \circ \psi} = A(\varphi \circ \psi, \mathfrak{g}, \mathfrak{f})$ .

Тогда,  $A_{\varphi \circ \psi} = A_\varphi \cdot A_\psi$ .

Доказательство.  $(\psi(g_1), \dots, \psi(g_k)) = (e_1, \dots, e_n)A_\psi$ . Тогда применяя  $\varphi$ ,

$$(\varphi(\psi(g_1)), \dots, \varphi(\psi(g_k))) = (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))A_\psi = (f_1, \dots, f_m)A_\varphi A_\psi.$$

С другой стороны,

$$(\varphi(\psi(g_1)), \dots, \varphi(\psi(g_k))) = (f_1, \dots, f_m)A_{\varphi \circ \psi}.$$

Значит,  $A_\varphi \cdot A_\psi = A_{\varphi \circ \psi}$ . ■

### 8. Утверждение о том, что ядро и образ подпространства в соответствующих векторных пространствах

**Предложение.**

1. Ядро — подпространство в  $V$ .
2. Образ — подпространство в  $W$ .

Доказательство.

1. (a)  $\varphi(0_V) = 0_W$ ,  
(b)  $v_1, v_2 \in \ker \varphi \implies \varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = 0 + 0 = 0 \implies v_1 + v_2 \in \ker \varphi$ ,  
(c)  $\lambda \in F, v \in V \implies \varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v) = \lambda 0 = 0 \implies \lambda v \in \ker \varphi$ .
2. (a)  $0_W = \varphi(W) \in \text{Im } \varphi$ ,  
(b)  $w_1, w_2 \in \text{Im } \varphi \implies \exists v_1, v_2 : w_1 = \varphi(v_1), w_2 = \varphi(v_2) \implies w_1 + w_2 = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \varphi(v_1 + v_2) \in \text{Im } \varphi$ ,  
(c)  $\varphi \in F, w \in \text{Im } \varphi \implies \exists v \in V : w = \varphi(v) \implies \lambda w = \lambda \varphi(v) = \varphi(\lambda v) \in \text{Im } \varphi$ . ■

## 9. Связь между рангом матрицы линейного отображения и размерностью его образа

Пусть  $U \subseteq V$  — подпространство,  $u_1, \dots, u_k$  — базис в  $U$ .

**Лемма.** Тогда,  $\varphi(U) = \langle \varphi(u_1), \dots, \varphi(u_k) \rangle$ . В частности,  $\dim \varphi(U) \leq \dim U$  и  $\dim \operatorname{Im} \varphi \leq \dim V$ .

*Доказательство.*  $u \in U \implies u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k$ ,  $\alpha_i \in F$ , тогда

$$\varphi(u) = \alpha_1 \varphi(u_1) + \dots + \alpha_k \varphi(u_k) \in \langle \varphi(u_1), \dots, \varphi(u_k) \rangle.$$

Пусть  $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ ,

$\mathfrak{f} = (f_1, \dots, f_m)$  — базис  $W$ ,

$A = A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f})$ .

**Теорема.**  $\operatorname{rk} A = \dim \operatorname{Im} \varphi$ .

*Доказательство.* По лемме,  $\operatorname{Im} \varphi = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \rangle$ . Поэтому,  $\dim \operatorname{Im} \varphi = \operatorname{rk} \{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\}$ .

Так как  $j$ -й столбец матрицы  $A$  составлен из координат вектора  $\varphi(e_j)$  в базисе  $\mathfrak{f}$ , то

$$\alpha_1 \varphi(e_1) + \dots + \alpha_n \varphi(e_n) = 0 \iff \alpha_1 A^{(1)} + \dots + \alpha_n A^{(n)} = 0.$$

Значит,  $\dim \operatorname{Im} \varphi = \operatorname{rk} \{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\} = \operatorname{rk} \{A^{(1)}, \dots, A^{(n)}\} = \operatorname{rk} A$ .

**Замечание.** Число  $\dim \operatorname{Im} \varphi$  называется *рангом* линейного отображения  $\varphi$ , обозначается  $\operatorname{rk} \varphi$ .

## 10. Лемма о дополнении базиса ядра линейного отображения до базиса всего пространства

**Предложение.** Пусть  $e_1, \dots, e_k$  — базис  $\ker \varphi$  и векторы  $e_{k+1}, \dots, e_n$  дополняют его до базиса всего  $V$ .

Тогда,  $\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)$  образуют базис в  $\operatorname{Im} \varphi$ .

*Доказательство.*  $\operatorname{Im} \varphi = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_k), \varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n) \rangle = \langle \varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n) \rangle$ . (так как  $\varphi(e_1) = \dots = \varphi(e_k) = 0$ ).

Осталось показать, что  $\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)$  линейно независимы.

Пусть  $\alpha_{k+1} \varphi(e_{k+1}) + \dots + \alpha_n \varphi(e_n) = 0$ , где  $\alpha_i \in F$ .

Тогда  $\varphi(\alpha_{k+1} e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n) = 0 \implies \alpha_{k+1} e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n \in \ker \varphi$ .

Но тогда  $\alpha_{k+1} e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_k e_k$ , где  $\beta_j \in F$ .

Так как  $(e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ , то  $\alpha_i = \beta_j = 0 \forall i, j$ .

## 11. Теорема о связи размерностей ядра и образа линейного отображения, приведение матрицы линейного отображения к диагональному виду с единицами и нулями на диагонали

**Теорема.**  $\dim \operatorname{Im} \varphi + \dim \ker \varphi = \dim V$ .

*Доказательство.* Вытекает из [предыдущего предложения](#) так как в его доказательстве:

$\dim V = n$ ,

$\dim \ker \varphi = k$ ,

$\dim \operatorname{Im} \varphi = n - k$ .

**Предложение.** Пусть  $\operatorname{rk} \varphi = r$ . Тогда существует базис  $\mathfrak{e}$  в  $V$  и базис  $\mathfrak{f}$  в  $W$ , такие что

$$A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}) = \left( \begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) = \begin{matrix} & \begin{matrix} r & n-r \end{matrix} \\ \begin{matrix} r \\ m-r \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

*Доказательство.* Пусть  $e_{r+1}, \dots, e_n$  — базис  $\ker \varphi$ . Дополним его векторами  $e_1, \dots, e_r$  до базиса всего  $V$ .

Положим  $f_1 = \varphi(e_1), \dots, f_r = \varphi(e_r)$ , тогда  $(f_1, \dots, f_r)$  — базис  $\operatorname{Im} \varphi$ .

Дополним  $f_1, \dots, f_r$  до базиса  $f_1, \dots, f_m$  всего  $W$ .

Тогда,  $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$  и  $\mathfrak{f} = (f_1, \dots, f_m)$  — искомые базисы.

## 2.3 Линейные, билинейные и квадратичные формы

### 1. Свойство базиса сопряжённого векторного пространства

$\varepsilon_i(x_1e_1 + \dots + x_ne_n) = x_i$ , поэтому  $\varepsilon_i$  называется  $i$ -й координатной функцией в базисе  $\mathfrak{e}$ .

**Предложение.** Всякий базис пространства  $V^*$  двойствен некоторому базису пространства  $V$ .

*Доказательство.* Пусть  $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$  — базис пространства  $V^*$ . Фиксируем какой-то базис  $\mathfrak{e}' = (e'_1, \dots, e'_n)$  пространства  $V$ , и пусть  $\varepsilon' = \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \dots \\ \varepsilon'_n \end{pmatrix}$  — соответствующий ему двойственный базис  $V^*$ .

Тогда,  $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \dots \\ \varepsilon'_n \end{pmatrix}$  для некоторой матрицы  $C \in M_n^0(F)$ .

Положим  $(e_1, \dots, e_n) = (e'_1, \dots, e'_n) \cdot C^{-1}$ .

Тогда,

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} (e_1, \dots, e_n) = C \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \dots \\ \varepsilon'_n \end{pmatrix} (e'_1, \dots, e'_n) C^{-1} = C E C^{-1} = E.$$

Значит,  $\varepsilon$  двойствен к  $\mathfrak{e}$ . ■

**Упражнение.**  $\mathfrak{e}$  определён однозначно.

### 2. Формула для вычисления значений билинейной формы в координатах

Пусть  $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$ ,

$y = y_1e_1 + \dots + y_ne_n$ .

Тогда,

$$\begin{aligned} \beta(x, y) &= \beta \left( \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \beta \left( e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \underbrace{\beta(e_i, e_j)}_{\beta_{ij}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \beta_{ij} y_j \\ &= (x_1, \dots, x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

### 3. Существование и единственность билинейной формы с заданной матрицей

**Предложение.** Пусть  $\mathfrak{e}$  — фиксированный базис  $V$ .

1. Всякая билинейная форма  $\beta$  на  $V$  однозначно определяется матрицей  $B(\beta, \mathfrak{e})$ .

2.  $\forall B \in M_n(F) \exists!$  билинейная форма  $\beta$  на  $V$ , такая что  $B(\beta, \mathfrak{e}) = B$ .

*Доказательство.*

1. Следует из формулы выше.

2. Единственность следует из формулы выше. Докажем существование:

Определим  $\beta$  по формуле выше.

Тогда  $\beta$  — билинейная форма на  $V$  (упражнение).

$$\beta(e_i, e_j) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot B \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad j = \beta_{ij}.$$

Действительно,  $B(\beta, \mathfrak{e}) = B$ . ■

#### 4. Формула изменения матрицы билинейной формы при переходе к другому базису

$$B = B(\beta, \mathfrak{e}).$$

Пусть  $\mathfrak{e}' = (e'_1, \dots, e'_n)$  — другой базис  $V$ .

$$\mathfrak{e}' = \mathfrak{e} \cdot C.$$

$$B' := B(\beta, \mathfrak{e}').$$

**Предложение.**  $B' = C^T B C$ .

*Доказательство.*

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = x'_1 e'_1 + \dots + x'_n e'_n,$$

$$y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n = y'_1 e'_1 + \dots + y'_n e'_n,$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} y'_1 \\ \dots \\ y'_n \end{pmatrix}.$$

Тогда,

$$\begin{aligned} \beta(x, y) &= (x_1 \dots x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = (x'_1 \dots x'_n) C^T B C \begin{pmatrix} y'_1 \\ \dots \\ y'_n \end{pmatrix} \\ \beta(x, y) &= (x'_1 \dots x'_n) B' \begin{pmatrix} y'_1 \\ \dots \\ y'_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Получаем, что  $B' = C^T B C$ . ■

#### 5. Критерий симметричности билинейной формы в терминах её матрицы в каком-либо базисе

Пусть  $\mathfrak{e}$  — произвольный базис  $V$ .

**Предложение.**  $\beta$  симметрична  $\iff B = B^T$ .

*Доказательство.*

$$\implies b_{ji} = \beta(e_j, e_i) = \beta(e_i, e_j) = b_{ij},$$

$$\iff x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n,$$

$$y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n,$$

Тогда,

$$\beta(y, x) = (y_1 \dots y_n) B \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1 \dots x_n) B^T \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1 \dots x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \beta(x, y). \quad \blacksquare$$

#### 6. Соответствие между симметричными билинейными формами и квадратичными формами

**Предложение.** Пусть в поле  $F$  выполнено условие  $1 + 1 \neq 0$  (то есть  $2 \neq 0$ ). Тогда отображение  $\beta \mapsto Q_\beta$  является биекцией между симметричными билинейными формами на  $V$  и квадратичными формами на  $V$ .

*Доказательство.*

**Сюръективность**  $Q$  — квадратичная форма  $\implies Q = Q_\beta$  для некоторой билинейной формы на  $V$ .

То есть  $Q(x) = \beta(x, x) \forall x \in V$ .

Положим  $\sigma(x, y) = \frac{1}{2} [\beta(x, y) + \beta(y, x)]$ , тогда  $\sigma$  — симметричная билинейная форма.

$$\sigma(x, x) = \frac{1}{2} [\beta(x, x) + \beta(x, x)] = \beta(x, x).$$

**Инъективность**  $\beta$  — симметричная билинейная форма на  $V$ .

$$Q_\beta(x + y) = \beta(x + y, x + y) = \underbrace{\beta(x, x)}_{Q_\beta(x)} + \underbrace{\beta(x, y) + \beta(y, x)}_{\text{равны между собой}} + \underbrace{\beta(y, y)}_{Q_\beta(y)} \implies \beta(x, y) = \frac{1}{2} [Q_\beta(x + y) - Q_\beta(x) - Q_\beta(y)].$$



## 7. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду

## 8. Метод Якоби приведения квадратичной формы к каноническому виду

## 9. Существование нормального вида для квадратичной формы над $\mathbb{R}$

**Следствие** (из метода Лагранжа). Для всякой квадратичной формы  $Q$  над  $\mathbb{R}$  существует базис, в котором  $Q$  имеет нормальный вид.

*Доказательство.* Из теоремы знаем, что существует базис  $e$ , в котором  $Q$  имеет канонический вид

$$Q(x_1, \dots, x_n) = b_1 x_1^2 + \dots + b_n x_n^2.$$

Делаем замену

$$x_i = \begin{cases} \frac{x'_i}{\sqrt{|b_i|}}, & b_i \neq 0 \\ x_i, & b_i = 0 \end{cases}.$$

Тогда в новых координатах  $Q(x'_1, \dots, x'_n) = \varepsilon_1 x'^2_1 + \dots + \varepsilon_n x'^2_n$ ,

$$\varepsilon_i = \operatorname{sgn} b_i = \begin{cases} 1, & b_i > 0 \\ 0, & b_i = 0 \\ -1, & b_i < 0 \end{cases}.$$

## 10. Закон инерции

Пусть  $F = \mathbb{R}$ .

Пусть  $Q: V \rightarrow \mathbb{R}$  — квадратичная форма.

Можно привести к нормальному виду

$$Q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_{s+t}^2.$$

**Теорема.** Числа  $i_+$  и  $i_-$  не зависят от базиса в котором  $Q$  принимает нормальный вид.

*Доказательство.*  $s + t = \operatorname{rk} Q$ , то есть не зависит от выбора базиса. Следовательно, достаточно показать, что число  $s$  определено однозначно.

Пусть  $e = (e_1, \dots, e_n)$  — базис, в котором  $Q$  принимает нормальный вид

$$Q = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_{s+t}^2.$$

Пусть  $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$  — другой базис, в котором  $Q$  принимает нормальный вид

$$Q = x'^2_1 + \dots + x'^2_{s'} - x'^2_{s'+1} - \dots - x'^2_{s'+t'}.$$

Предположим, что  $s \neq s'$ , можно считать что  $s > s'$ .

Положим  $L := \langle e_1, \dots, e_s \rangle$ ,  $\dim L = s$ ,

$$L' := \langle e'_{s'+1}, \dots, e'_n \rangle, \dim L' = n - s'.$$

Так как  $L + L' \subseteq V$ , то  $\dim(L + L') \leq n$ .

Тогда,  $\dim(L \cap L') \geq s + (n - s') - n = s - s' > 0$ .

Значит,  $\exists$  вектор  $v \in L \cap L'$ , такой что  $v \neq 0$ .

Теперь:

1. Так как  $v \in L$ , то  $Q(v) > 0$ ,
2. Так как  $v \in L'$ , то  $Q(v) \leq 0$ .

Противоречие.

## 11. Следствие метода Якоби о нахождении индексов инерции квадратичной формы над $\mathbb{R}$

Пусть  $Q: V \rightarrow \mathbb{R}$  — квадратичная форма,

$e = (e_1, \dots, e_n)$  — базис,

$B = B(Q, e)$ ,

$\delta_k$  —  $k$ -й угловой минор матрицы  $B$ .

**Следствие** (из метода Якоби). Пусть  $\delta_k \neq 0 \forall k$ . Тогда:

Число  $i_+$  равно количеству сохранений знака в последовательности  $1, \delta_1, \dots, \delta_n$ .

Число  $i_-$  равно количеству перемен знака в последовательности  $1, \delta_1, \dots, \delta_n$ .

*Доказательство.* Метод Якоби  $\implies \exists$  базис, в котором  $Q$  принимает канонический вид

$$Q = \delta_1 x_1^2 + \frac{\delta_2}{\delta_1} x_2^2 + \dots + \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} x_n^2.$$

Здесь, знак отношения  $\frac{\delta_i}{\delta_{i-1}}$  соответствует смене либо сохранению знака в рассматриваемой последовательности.

По закону инерции, количества знаков  $+$  и  $-$  не изменяются от выбора базиса. ■

## 12. Критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы, критерий отрицательной определённости квадратичной формы

Пусть  $V$  — векторное пространство над  $\mathbb{R}$ ,  $\dim V = n$ ,

$e = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ ,

$B = B(Q, e)$ ,

$B_k$  — левый верхний  $k \times k$  блок,

$\delta_k = \det B_k$ .

**Теорема** (Критерий Сильвестра положительной определённости).

$$Q > 0 \iff \delta_k > 0 \forall k = 1 \dots n.$$

*Доказательство.*

$\Leftarrow$  По следствию из метода Якоби,  $i_+ = n$ , то есть  $Q > 0$ .

$\implies Q > 0 \implies \exists C \in M_n^0(\mathbb{R})$ , такая что  $C^T B C = E$ .

Тогда,  $\det C^T \cdot \det B \cdot \det C = 1$ . Отсюда,  $\delta_n = \frac{1}{(\det C)^2} > 0$ .

Теперь, для любого  $k$  ограничение  $Q$  на  $\langle e_1, \dots, e_k \rangle$  тоже положительно определённо, а его матрица в базисе  $e_1, \dots, e_k$  равна  $B_k$ . Следовательно,  $\det B_k > 0$ . ■

## 2.4 Евклидовы пространства

### 1. Неравенство Коши–Буняковского

**Предложение** (неравенство Коши–Буняковского).  $\forall x, y \in \mathbb{E}$  верно  $|(x, y)| \leq |x| \cdot |y|$ , причём равенство  $\iff x, y$  пропорциональны.

*Доказательство.* Случаи:

1.  $x, y$  пропорциональны. Тогда, можно считать, что  $y = \lambda x$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$|(x, y)| = |(x, \lambda x)| = |\lambda| |(x, x)| = |\lambda| |x|^2 = |x| \cdot |\lambda x| = |x| \cdot |y|.$$

2.  $x, y$  не пропорциональны. Тогда  $x, y$  линейно независимы.

Значит они образуют базис в  $\langle x, y \rangle$ .

Получаем

$$\begin{vmatrix} (x, x) & (x, y) \\ (y, x) & (y, y) \end{vmatrix} > 0 \quad (\text{критерий Сильвестра}).$$

$$\text{Отсюда, } (x, x) \cdot (y, y) - (x, y)^2 > 0 \implies (x, y)^2 < |x|^2 \cdot |y|^2.$$

■

Пример. Пусть  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$  со стандартным скалярным произведением, тогда

$$|x_1 y_1 + \dots + x_n y_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}.$$

## 2. Свойства определителя матрицы Грама системы векторов евклидова пространства

**Предложение.**  $\forall v_1, \dots, v_k \in \mathbb{E} \implies \det G(v_1, \dots, v_k) \geq 0$ .

Более того,  $\det G(v_1, \dots, v_k) > 0 \iff v_1, \dots, v_k$  линейно независимы.

*Доказательство.* Пусть  $G := G(v_1, \dots, v_k)$ . Случаи:

1.  $v_1, \dots, v_k$  линейно независимы. Тогда,  $G$  — матрица билинейной формы  $(\cdot, \cdot)|_{\langle v_1, \dots, v_k \rangle}$  в базисе  $v_1, \dots, v_k$  подпространства  $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ , а значит  $\det G > 0$  по критерию Сильвестра.
2.  $v_1, \dots, v_k$  линейно зависимы. Тогда,  $\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ , такие что  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$ .  
А значит,  $\forall i = 1, \dots, k \implies \alpha_1(v_1, v_i) + \dots + \alpha_k(v_k, v_i) = 0$ .  
Отсюда,  $\alpha_1 G_{(1)} + \dots + \alpha_k G_{(k)} = 0 \implies$  строки в  $G$  линейно зависимы  $\implies \det G = 0$ . ■

## 3. Свойства ортогонального дополнения к подпространству в евклидовом пространстве: размерность, разложение в прямую сумму, ортогональное дополнение к ортогональному дополнению

Далее считаем, что  $\dim \mathbb{E} = n < \infty$ .

**Предложение.** Пусть  $S \subseteq \mathbb{E}$  — подпространство. Тогда:

1.  $\dim S^\perp = n - \dim S$ .
2.  $\mathbb{E} = S \oplus S^\perp$ .
3.  $(S^\perp)^\perp = S$ .

*Доказательство.*

1. Пусть  $\dim S = k$  и  $e_1, \dots, e_k$  — базис  $S$ .  
Дополним  $e_1, \dots, e_k$  до базиса  $e_1, \dots, e_n$  всего  $\mathbb{E}$ .  
Тогда,  $\forall x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in \mathbb{E}$ .

$$\begin{aligned} x \in S^\perp &\iff (x, e_i) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k \\ &\iff \begin{cases} (e_1, e_1)x_1 + \dots + (e_n, e_1)x_n = 0 \\ (e_1, e_2)x_1 + \dots + (e_n, e_2)x_n = 0 \\ \dots \\ (e_1, e_k)x_1 + \dots + (e_n, e_k)x_n = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Это ОСЛУ с матрицей  $G \in \text{Mat}_{k \times n}(\mathbb{R})$ , причём левый  $k \times k$  блок в  $G$  — это  $\underbrace{G(e_1, \dots, e_k)}_{\det \neq 0}$ .

Это означает, что  $\text{rk } G = k$ .

Следовательно, пространство решений этой ОСЛУ имеет размерность  $n - k$ .

Отсюда,  $\dim S^\perp = n - k = n - \dim S$ .

2. (a)  $\dim S + \dim S^\perp = k + (n - k) = n = \dim E$ .  
(b)  $v \in S \cap S^\perp \implies (v, v) = 0 \implies v = 0 \implies S \cap S^\perp = \{0\}$ .  
А значит,  $E = S \oplus S^\perp$ .
3. Заметим, что  $S \subseteq (S^\perp)^\perp$  (по определению).  
 $\dim(S^\perp)^\perp = n - \dim S^\perp = n - (n - \dim S) = \dim S$ .  
Следовательно,  $S = (S^\perp)^\perp$ . ■

## 4. Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в $\mathbb{R}^n$ в терминах его произвольного базиса

Пусть  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$  со стандартным скалярным произведением.

$S \subseteq \mathbb{E}$  — подпространство,  $a_1, \dots, a_k$  — базис  $S$ .

Пусть  $A := (a_1, \dots, a_k) \in \text{Mat}_{n \times k}(\mathbb{R})$ ,  $A^{(i)} = a_i$ .

**Предложение.**  $\forall v \in \mathbb{R}^n \quad \text{pr}_S v = A(A^T A)^{-1} A^T v.$

*Доказательство.* Корректность:  $A^T A = G(a_1, \dots, a_k) \in M_k^0(\mathbb{R}).$

Положим  $x := \text{pr}_S v, y := \text{ort}_S v.$

Так как  $x \in S, x = A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_k \end{pmatrix}, \alpha_i \in \mathbb{R}.$

$y \in S^\perp \implies A^T y = 0.$

$$\begin{aligned} A(A^T A)^{-1} A^T v &= A(A^T A)^{-1} A^T (x + y) \\ &= \underbrace{A(A^T A)^{-1} A^T A}_{E} \overbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_k \end{pmatrix}}^x + A(A^T A)^{-1} \underbrace{A^T y}_0 \\ &= A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = x = \text{pr}_S v. \end{aligned}$$

■

## 5. Существование ортонормированного базиса в евклидовом пространстве, дополнение ортогональной (ортонормированной) системы векторов до ортогонального (ортонормированного) базиса

**Теорема.** Во всяком конечномерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

*Доказательство.* Следует из теоремы о приведении квадратичной формы  $(x, x)$  к нормальному виду (который будет  $E$  в силу положительной определённости). ■

**Следствие.** Всякую ортогональную (ортонормированную) систему векторов можно дополнить до ортогонального (ортонормированного) базиса.

*Доказательство.* Пусть  $e_1, \dots, e_k$  — данная система.

Пусть  $e_{k+1}, \dots, e_n$  — это ортогональный (ортонормированный) базис в  $\langle e_1, \dots, e_k \rangle^\perp.$

Тогда  $e_1, \dots, e_n$  — искомый базис. ■

## 6. Описание всех ортонормированных базисов в терминах одного и матриц перехода

Пусть  $e = (e_1, \dots, e_n)$  — ортонормированный базис в  $E.$

Пусть  $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$  — какой-то другой базис.

$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C, C \in M_n^0(\mathbb{R}).$

**Предложение.**  $e'$  — ортонормированный базис  $\iff C^T \cdot C = E.$

*Доказательство.*  $G(e'_1, \dots, e'_n) = C^T \underbrace{G(e_1, \dots, e_n)}_E C = C^T C.$

$e'$  ортонормированный  $\iff G(e'_1, \dots, e'_n) = E \iff C^T C = E.$  ■

## 7. Формула для координат вектора в ортогональном (ортонормированном) базисе. Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в терминах его ортогонального (ортонормированного) базиса

Пусть  $E$  — евклидово пространство,  $(e_1, \dots, e_n)$  — ортогональный базис.

$v \in E.$

**Предложение.**  $v = \frac{(v, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 + \frac{(v, e_2)}{(e_2, e_2)} e_2 + \dots + \frac{(v, e_n)}{(e_n, e_n)} e_n.$

В частности, если  $e_1, \dots, e_n$  ортонормирован, то  $v = (v, e_1) e_1 + \dots + (v, e_n) e_n.$

*Доказательство.*  $v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n.$

$\forall i = 1, \dots, n \quad (v, e_i) = \lambda_1 (e_1, e_i) + \dots + \lambda_n (e_n, e_i).$

Так как базис ортогонален, то  $(v, e_i) = \lambda_i (e_i, e_i) \implies \lambda_i = \frac{(v, e_i)}{(e_i, e_i)}.$  ■

## 8. Теорема Пифагора и неравенство треугольника в евклидовом пространстве

**Теорема.** Пусть  $x, y \in \mathbb{E}$ ,  $(x, y) = 0$ . Тогда  $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$ .

*Доказательство.*

$$|x + y|^2 = (x + y, x + y) = \underbrace{(x, x)}_{|x|^2} + \underbrace{(x, y)}_0 + \underbrace{(y, x)}_0 + \underbrace{(y, y)}_{|y|^2} = |x|^2 + |y|^2. \quad \blacksquare$$

## 9. Теорема о расстоянии между вектором и подпространством в терминах ортогональной составляющей

**Теорема.** Пусть  $x \in \mathbb{E}$ ,  $S \subseteq \mathbb{E}$  — подпространство. Тогда,  $\rho(x, S) = |\text{ort}_S x|$ , причем  $\text{pr}_S x$  — это ближайший к  $x$  вектор из  $S$ .

*Доказательство.* Положим  $y = \text{pr}_S x$ ,  $z = \text{ort}_S x$ . Тогда,  $x = y + z$ . Для любого  $y' \in S$ ,  $y' \neq 0$  имеем

$$\rho(x, y + y')^2 = |x - y - y'|^2 = |z - y'|^2 = |z|^2 + |y'|^2 > |z|^2 = |x - y|^2 = \rho(x, y)^2. \quad \blacksquare$$

## 10. Метод наименьших квадратов для несовместных систем линейных уравнений: постановка задачи и её решение. Единственность псевдорешения и явная формула для него в случае линейной независимости столбцов матрицы коэффициентов

СЛУ  $Ax = b$ ,  $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ .

$$x_0 \text{ — решение системы} \iff Ax_0 = b \iff Ax_0 - b = 0 \iff |Ax_0 - b| = 0 \iff \rho(Ax_0, b) = 0.$$

Если СЛУ несовместна, то  $x_0$  называется *псевдорешением*, если  $\rho(Ax_0, b)$  минимально.

$$\rho(Ax_0, b) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \rho(Ax, b).$$

$x_0$  — решение задачи оптимизации  $\rho(Ax, b) \xrightarrow{x \in \mathbb{R}^n} \min$ .

Пусть  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  — подпространство натянутое на столбцы матрицы  $A$ .

$$S = \langle A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \rangle.$$

Положим  $c := \text{pr}_S b$ .

**Предложение.**

1.  $x_0$  — псевдорешение  $Ax = b \iff x_0$  — решение для  $Ax = c$ .
2. Если столбцы  $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$  линейно независимы, то псевдорешение единственно и может быть найдено по формуле  $x_0 = (A^T A)^{-1} A^T b$ .

*Доказательство.*

1.  $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad Ax = x_1 A^{(1)} + \dots + x_n A^{(n)} \implies \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\} = S \implies \min_{x \in \mathbb{R}^n} \rho(Ax, b) = \rho(S, b).$

По теореме о расстоянии от вектора до подпространства минимум достигается при  $Ax = c = \text{pr}_S b$ .

2. Так как  $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$  линейно независимы, то с единственным образом представим в виде линейной комбинации этих столбцов.

Следовательно,  $x_0$  единственно.

Знаем, что  $A \underbrace{(A^T A)^{-1} A^T}_{=: P} b = c$ . Значит,  $x_0 = (A^T A)^{-1} A^T b$ . \blacksquare

## 11. Формула для расстояния между вектором и подпространством в терминах матриц Грама

Пусть  $\mathbb{E}$  — евклидово пространство,  $\dim \mathbb{E} = n < \infty$ .

$S \subseteq \mathbb{E}$  — подпространство,  $e_1, \dots, e_k$  — базис в  $S$ .

**Теорема.**  $\forall x \in \mathbb{E} \quad \rho(x, S)^2 = \frac{\det G(e_1, \dots, e_k, x)}{\det G(e_1, \dots, e_k)}.$

*Доказательство.* Пусть  $z := \text{ort}_S x$ , тогда  $\rho(x, S)^2 = |z|^2$ .

1.  $x \in S \implies \rho(x, S) = 0$ :  
так как  $e_1, \dots, e_k$  линейно независимы, то  $\det G(e_1, \dots, e_k, x) = 0$ .
2.  $x \notin S$ .  
Ортогонализация Грама-Шмидта:  $e_1, \dots, e_k, x \rightsquigarrow f_1, \dots, f_k, z$ .  
По свойству (♥) получаем

$$\frac{\det G(e_1, \dots, e_k, x)}{\det G(e_1, \dots, e_k)} = \frac{\det G(f_1, \dots, f_k, z)}{\det G(f_1, \dots, f_k)} = \frac{|f_1|^2 \dots |f_k|^2 |z|^2}{|f_1|^2 \dots |f_k|^2} = |z|^2 = \rho(x, S)^2.$$

■

## 12. Две формулы для объёма $k$ -мерного параллелепипеда в евклидовом пространстве

**Теорема.**  $\text{vol } P(a_1, \dots, a_k)^2 = \det G(a_1, \dots, a_k)$ .

*Доказательство.* Индукция по  $k$ :

$k = 1$ :  $|a_1|^2 = (a_1, a_1)$  — верно.

$k > 1$ :  $\text{vol } P(a_1, \dots, a_k)^2 = \text{vol } P(a_1, \dots, a_{k-1})^2 \cdot h^2 = \det G(a_1, \dots, a_{k-1}) \cdot h^2 = (\star)$ .

Если  $a_1, \dots, a_{k-1}$  линейно независимы, то  $h^2 = \frac{\det G(a_1, \dots, a_k)}{\det G(a_1, \dots, a_{k-1})}$ . Тогда,  $(\star) = \det G(a_1, \dots, a_k)$ .

Если же  $a_1, \dots, a_{k-1}$  линейно зависимы, то  $\det G(a_1, \dots, a_{k-1}) = 0 \implies (\star) = 0$ . Но  $a_1, \dots, a_k$  тоже линейно зависимы, а значит  $\det G(a_1, \dots, a_k) = 0$ . ■

Пусть  $(e_1, \dots, e_n)$  — ортонормированный базис в  $\mathbb{E}$ ,

$(a_1, \dots, a_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot A$ ,  $A \in M_n(\mathbb{R})$ .

**Предложение.**  $\text{vol } P(a_1, \dots, a_n) = |\det A|$ .

*Доказательство.*

$$G(a_1, \dots, a_n) = A^T \cdot A \implies \text{vol } P(a_1, \dots, a_n)^2 = \det(A^T A) = (\det A)^2$$

■

## 2.5 Элементы аналитической геометрии и линейные многообразия

1. Теорема о векторном произведении и формуле для него в координатах в положительно ориентированном ортонормированном базисе

**Лемма.** Пусть  $v_1, v_2 \in \mathbb{E}$ . Тогда,  $(v_1, x) = (v_2, x) \ \forall x \in \mathbb{E} \implies v_1 = v_2$ .

*Доказательство.* Имеем  $(v_1 - v_2, x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{E}$ . Тогда,  $v_1 - v_2 \in \mathbb{E}^\perp = \{0\} \implies v_1 - v_2 = 0 \implies v_1 = v_2$ . ■

**Теорема.** Пусть  $a, b \in \mathbb{R}^3$ . Тогда

1.  $\exists! v \in \mathbb{E}$ , такой что  $(v, x) = \text{Vol}(a, b, x) \ \forall x \in \mathbb{R}^3$ .
2. Если  $e = (e_1, e_2, e_3)$  — положительно ориентированный ортонормированный базис и  $a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$ ,  
 $b = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$

то

$$v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} := \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} e_3. \quad (\star)$$

*Доказательство.*

**Единственность** если  $v'$  — другой такой вектор, то  $(v, x) = (v', x) \ \forall x \in \mathbb{R}^3$ , а значит  $v' = v$  по лемме.

**Существование** Покажем, что  $v$ , заданный формулой  $(\star)$  подойдёт.

$$\begin{aligned} x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \implies (v, x) &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} x_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} x_3 \\ &= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = \text{Vol}(a, b, x). \end{aligned}$$

## 2. Критерий коллинеарности двух векторов трёхмерного евклидова пространства

**Предложение.**  $a, b \in \mathbb{E}$  коллинеарны  $\iff [a, b] = 0$ .

*Доказательство.*

$\implies$

$$(a, b, x) = 0 \ \forall x \implies ([a, b], x) = 0 \ \forall x \implies [a, b] = 0.$$

$\impliedby$

$$[a, b] = 0 \implies ([a, b], x) = 0 \ \forall x \implies (a, b, x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Если  $a, b$  линейно независимы, то можно взять  $x$ , который дополняет их до базиса в  $\mathbb{R}^3$ .

Тогда,  $(a, b, x) \neq 0$  — противоречие. Значит  $a, b$  линейно зависимы  $\implies$  коллинеарны. ■

## 3. Геометрические свойства векторного произведения

**Предложение.**

1.  $[a, b] \perp \langle a, b \rangle$ .
2.  $|[a, b]| = \text{vol } P(a, b)$ .
3.  $\text{Vol}(a, b, [a, b]) \geq 0$ .

*Доказательство.*

1.  $([a, b], a) = (a, b, a) = 0 = (a, b, b) = ([a, b], b)$ .
2. Если  $a, b$  коллинеарны, то обе части равны 0.  
Пусть  $[a, b] \neq 0$ .

$$|[a, b]|^2 = ([a, b], [a, b]) = (a, b, [a, b]) = (\#) > 0.$$

$$[a, b] \perp \langle a, b \rangle \implies (\#) = \text{vol } P(a, b, [a, b]) = \text{Vol}(a, b, [a, b]) = \text{vol } P(a, b) \cdot |[a, b]|.$$

Сокращая на  $|[a, b]| \neq 0$ , получаем требуемое.

3.  $\text{Vol}(a, b, [a, b]) = ([a, b], [a, b]) \geq 0$ . ■

## 4. Антикоммутативность и билинейность векторного произведения

**Предложение.**

1.  $[a, b] = -[b, a] \ \forall a, b$  (антикоммутативность).
2.  $[\cdot, \cdot]$  билинейно (то есть линейно по каждому аргументу).

*Доказательство.*

1.  $([a, b], x) = (a, b, x) = -(b, a, x) = -([b, a], x) = (-[b, a], x) \ \forall x \in \mathbb{R}^3 \implies [a, b] = -[b, a]$
2. Пусть  $u = [\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, b]$ ,  $v = \lambda_1 [a_1, b] + \lambda_2 [a_2, b]$ . Тогда  $\forall x \in \mathbb{R}^3$ :

$$\begin{aligned} (u, x) &= (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, b, x) \\ &= \lambda_1 (a_1, b, x) + \lambda_2 (a_2, b, x) \\ &= \lambda_1 ([a_1, b], x) + \lambda_2 ([a_2, b], x) \\ &= (\lambda_1 [a_1, b] + \lambda_2 [a_2, b], x) = (v, x). \end{aligned}$$

Значит  $u = v$ . Аналогично линейность по второму аргументу. ■

## 5. Линейные многообразия как сдвиги подпространств

Пусть  $Ax = b$  — СЛУ,  $\emptyset \neq L \subseteq \mathbb{R}^n$  — множество решений,  $x_z \in L$  — частное решение.

Было: Лемма:  $L = x_z + S$ , где  $S$  — множество решений ОСЛУ  $Ax = 0$ .

**Предложение.** Множество  $L \subseteq \mathbb{R}^n$  является линейным многообразием  $\iff L = v_0 + S$  для некоторых  $v_0 \in \mathbb{R}^n$  и подпространства  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ .

*Доказательство.*

$\implies$  Из леммы.

$\Leftarrow$   $L = v_0 + S$ . Значит существует ОСЛУ  $Ax = 0$ , для которой  $S$  является множеством решений. Тогда,  $L$  — множество решений СЛУ  $Ax = Av_0$  (по лемме). ■

## 6. Критерий равенства двух линейных многообразий

**Предложение.** Пусть  $L_1 = v_1 + S_1$  и  $L_2 = v_2 + S_2$  — два линейных многообразия в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда,

$$L_1 = L_2 \iff \begin{cases} S_1 = S_2 (= S) \\ v_1 - v_2 \in S \end{cases}.$$

*Доказательство.*

$$\Leftarrow L_1 = v_1 + S_1 = v_1 + S_2 = v_2 + (v_1 - v_2) + S = v_2 + S = L_2.$$

$$\implies v_1 = v_1 + 0 \in L_1 = L_2 = v_2 + S_2 \implies v_1 - v_2 \in S_2,$$

$$v \in S_1 \implies v + v_1 \in L_1 = L_2 = v_2 + S_2 \implies v \in (v_2 - v_1) + S_2 = S_2 \implies S_1 \subseteq S_2.$$

Аналогично,  $v_1 - v_2 \in S_1$  и  $S_2 \subseteq S_1$ . ■

## 7. Теорема о плоскости, проходящей через $k + 1$ точку в $\mathbb{R}^n$

**Теорема.**

- a) Через любые  $k + 1$  точек в  $\mathbb{R}^n$  проходит плоскость размерности  $\leq k$ .
- b) Если эти точки не лежат в плоскости размерности  $< k$ , то через них проходит ровно одна плоскость размерности  $k$ .

*Доказательство.*

- a) Пусть  $v_0, v_1, \dots, v_k$  — данные точки. Тогда через них проходит плоскость  $P = v_0 + \langle v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0 \rangle$ . Ясно, что  $\dim P \leq k$ .

- b) Из условия следует, что  $\dim P = k \implies v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0$  линейно независимы.

Если  $P' = v_0 + S$  — другая плоскость размерности  $k$ , содержащая  $v_0, \dots, v_k$ , то  $v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0 \in S \implies S = \langle v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0 \rangle \implies P' = P$ . ■