

Математический Анализ - 2

Серёжа Рахманов | [telegram](#), [website](#)

Максим Николаев | [telegram](#)

Версия от 10.10.2020 17:14

Содержание

1	Лекция 1 - 01.09.2020 - Ряды	3
1.1	Определение ряда	3
1.2	Необходимое условие сходимости	3
1.3	Критерий Коши	3
1.4	Положительные ряды	4
1.5	Признаки сравнения	4
1.6	Отсутствие универсального ряда сравнения	5
2	Лекция 2 - 08.09.2020 - Положительные ряды	6
2.1	Признак Лобачевского-Коши	6
2.2	Теорема Штольца и оценка частичных сумм гармонического ряда	6
2.3	Признак Даламбера и радикальный признак Коши	7
2.4	Радикальный признак сильнее признака Даламбера	7
2.5	Признак Гаусса	7
2.6	Сравнение с интегралом	8
2.7	Улучшение сходимости ряда	8
3	Лекция 3 - 15.09.2020 - Знакопеременные ряды	9
3.1	Абсолютная и условная сходимость	9
3.2	Мажорантный признак Вейерштрасса	9
3.3	Группировка членов ряда	9
3.4	Знакопередающиеся ряды, пр-к Лейбница	10
3.5	О неприменимости эквивалентности	10
3.6	Признаки Дирихле и Абеля	10
3.7	Влияние перестановки членов ряда на его сумму	11
4	Лекция 4 - 22.09.2020	12
4.1	Умножение рядов	12
4.2	Бесконечное произведение	12
4.2.1	Основные понятия	12
4.2.2	Сходимость бесконечного произведения	12
4.2.3	Абсолютная сходимость бесконечного произведения	12
4.3	Функциональные последовательности	13
4.3.1	Поточечная и равномерная сходимость	13
4.3.2	Равномерная норма. Критерий Коши	13
4.3.3	Теорема Дини	13
5	Лекция 5 - 29.09.2020 - Исследование сходимости функциональных рядов	14
5.1	Свойства равномерно сходящейся последовательности	14
5.2	Равномерная сходимость функционального ряда	14
5.3	Необходимое условие равномерной сходимости	14
5.4	Критерий Коши равномерной сходимости	14
5.5	Признаки Вейерштрасса и Даламбера	15
5.6	Признак Лейбница	15
5.7	Признаки Дирихле и Абеля	15
5.8	Свойства равномерно сходящегося ряда	15

6	Лекция 6 - 6.10.2020 - Степенные ряды	17
6.1	Основные понятия	17
6.2	Теорема Абеля, радиус и интервал последовательности	17
6.3	Равномерная сходимость степенного ряда	17
6.4	Сходимость ряда в граничных точках интервала сходимости	17
6.5	Дифференцирование и интегрирование степенного ряда	18
6.6	Бесконечное дифференцирование	18
6.7	Ряд Тейлора	18
6.7.1	Ряды Тейлора основных элементарных функций	18

1 Лекция 1 - 01.09.2020 - Ряды

1.1 Определение ряда

Определение 1. Пусть a_n – последовательность, т.е. $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Формальная бесконечная сумма: $a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

называется рядом. $S_N = \sum_{n=1}^N a_n$ – частичная сумма, сумма ряда: $S = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N$

Возможны 3 случая:

1. $\exists S \in \mathbb{R}$

2. $\exists S = \infty$

3. $\nexists S$

В первом случае говорят, что ряд сходится, иначе – что ряд расходится.

Пример.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0 + 0 + \dots + 0 = 0$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + \dots + 1 = \infty$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - \dots$ не существует

Определение 2. Если ряд сходится, т.е. $S_N \rightarrow S$ при $N \rightarrow \infty$, то $S - S_N = r_N$ – остаток ряда

$$r_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n, r_N \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty$$

1.2 Необходимое условие сходимости

Замечание. Если ряд сходится, то $a_n \rightarrow 0$

Доказательство. $a_n = S_n - S_{n-1} \rightarrow 0$, т.к. $S_n \rightarrow S$ и $S_{n-1} \rightarrow S$ ■

1.3 Критерий Коши

Определение 3. a_n называется фундаментальной, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > m > N \implies |S_n - S_m| < \varepsilon$

Теорема 1.1. S_n – сходится $\Leftrightarrow S_n$ – фундаментальная

Доказательство. $S_n - S_m = \sum_{k=m+1}^n a_k$ Тогда $\sum a_n$ – сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > m > N |a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n| < \varepsilon$ ■

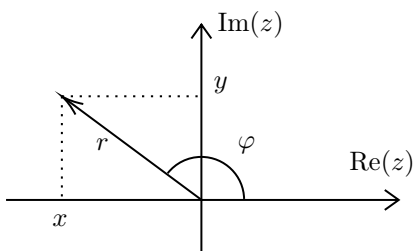
Пример.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Заметим, что $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} \right) = 1 - \frac{1}{N+1} \rightarrow 1$

Этот ряд сходится при $N \rightarrow \infty$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

2. $z \in \mathbb{C}, z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$



Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots$

$$S_N = 1 + z + z^2 + \dots + z^N = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z}$$

Ряд сходится $\Leftrightarrow |z| < 1$

$$|z| < 1 \Rightarrow z^n \rightarrow 0, S_N = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z} \rightarrow \frac{1}{1 - z}$$

1.4 Положительные ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \geq 0, S_n \uparrow, \text{ т.к. } S_{n+1} \geq S_n$$

Возможны 2 случая:

$$1. \exists S \in \mathbb{R}$$

$$2. \exists S = \infty$$

Обозначение 1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ – ряд сходится, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ – ряд расходится.

1.5 Признаки сравнения

1. Сравнение с помощью неравенства.

$$a_n \leq b_n \text{ при всех } n \geq n_0$$

$$\text{Ряд } \sum b_n \text{ сходится} \Rightarrow \text{ряд } \sum a_n \text{ сходится}$$

$$\text{Ряд } \sum a_n \text{ расходится} \Rightarrow \text{ряд } \sum b_n \text{ расходится}$$

2. Сравнение отношений.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \text{ при всех } n \geq n_0$$

$$\text{Ряд } \sum b_n \text{ сходится} \Rightarrow \text{ряд } \sum a_n \text{ сходится}$$

$$\text{Ряд } \sum a_n \text{ расходится} \Rightarrow \text{ряд } \sum b_n \text{ расходится}$$

Доказательство.

$$a_{n_0+1} \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+1}$$

$$a_{n_0+2} \leq \frac{a_{n_0+1}}{b_{n_0+1}} \cdot b_{n_0+2} \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+2}$$

\vdots

$$a_{n_0+k} \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+k} \Rightarrow \sum_{n=n_0}^N a_n \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot \sum_{n=n_0}^N b_n$$

■

3. Сравнение с помощью предела.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0; +\infty) \Rightarrow \text{сходимость } \sum a_n \Leftrightarrow \text{сходимость } \sum b_n$$

Доказательство.

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$$

$$\forall \varepsilon \exists n_0 : c - \varepsilon \leq \frac{a_n}{b_n} \leq c + \varepsilon, \forall n \geq n_0$$

$$\text{Возьмём } \varepsilon : c - \varepsilon > 0 \Rightarrow (c - \varepsilon) \cdot b_n \leq a_n \leq (c + \varepsilon) \cdot b_n$$

Сходимость следует из правой части неравенства, а расходимость из левой.

■

1.6 Отсутствие универсального ряда сравнения

Предложение. Не существует ряда $\sum c_n$, $c_n > 0$:

- 1) $\frac{a_n}{c_n} \rightarrow 0 \implies$ ряд $\sum a_n$ сходится.
- 2) $\frac{b_n}{c_n} \rightarrow \infty \implies$ ряд $\sum b_n$ расходится.

Доказательство.

1. Если ряд $\sum c_n$ расходится, то пусть $S_N = \sum_{n=1}^N c_n \rightarrow \infty, S_0 = 0$, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}})}_{a_n}$ расходится так как:

$$(a) \sum_{n=1}^N (\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}}) = \sqrt{S_1} - \sqrt{S_0} + \sqrt{S_2} - \sqrt{S_1} + \dots + \sqrt{S_N} - \sqrt{S_{N-1}} = \sqrt{S_N} - \sqrt{S_0} = \sqrt{S_N} \rightarrow \sqrt{S}$$

$$(b) \frac{\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}}}{c_n} = \frac{\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}}}{S_n - S_{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}}} \implies \frac{a_n}{c_n} \rightarrow 0$$

Ряд расходится, но по предположению сходится, получили противоречие.

2. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, то рассмотрим r_n - его n -ый остаток, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n})}_{b_n}, r_0 = S = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, так как:

$$(a) \sum_{n=1}^N (\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}) = \sqrt{r_0} - \sqrt{r_1} + \sqrt{r_1} - \sqrt{r_2} + \dots + \sqrt{r_{N-1}} - \sqrt{r_N} = \sqrt{r_0} - \sqrt{r_N} = \sqrt{S} - \sqrt{r_N} \rightarrow \sqrt{S}, \text{ т.к. } r_N \rightarrow 0$$

$$(b) \frac{\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}}{c_n} = \frac{\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}}{r_{n-1} - r_n} = \frac{1}{\sqrt{r_{n-1}} + \sqrt{r_n}} \rightarrow \infty, \text{ т.к. } \sqrt{r_{n-1}} \rightarrow 0 \text{ и } \sqrt{r_n} \rightarrow 0$$

Ряд сходится, но по предположению расходится, получили противоречие.

■

2 Лекция 2 - 08.09.2020 - Положительные ряды

2.1 Признак Лобачевского-Коши

Предложение. Пусть $a_n > 0$ и $a_n \downarrow$

Тогда ряды $\sum a_n$ и $\sum 2^n \cdot a_{2^n}$ ведут себя одинаково

Доказательство. $a_1 + (a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + \dots + a_8) + \dots$

$$a_1 \geq a_2 \geq a_2$$

$$2a_2 \geq a_3 + a_4 \geq 2a_4$$

$$4a_4 \geq a_5 + \dots + a_8 \geq 4a_8$$

\vdots

$$a_1 + \sum_{n=0}^{m-1} 2^n a_{2^n} \geq \sum_{n=1}^{2^m} a_n \geq a_1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^m 2^n a_{2^n}$$

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ – обобщённый гармонический ряд, $p > 0$

$$a_n = \frac{1}{n^p} \downarrow \quad a_{2^n} = \frac{1}{(2^n)^p}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2^n)^{p-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}} \right)^n$$

Это сумма геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{2^{p-1}}$

$q < 1 \iff p > 1$ – ряды сходятся, например: $\sum \frac{1}{n^{1,001}}, \sum \frac{1}{n^2}$

$q \geq 1 \iff p \leq 1$ – ряды расходятся, например: $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}, \sum \frac{1}{n}$

Пример. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^p n}, p > 0$

$$\frac{1}{n \cdot \ln^p n} \downarrow, a_{2^n} = \frac{1}{2^n \cdot \ln^p 2^n} = \frac{1}{2^n \cdot n^p \cdot \ln^p 2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \cdot n^p \cdot \ln^p 2} = \frac{1}{\ln^p 2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

2.2 Теорема Штольца и оценка частичных сумм гармонического ряда

Гармонический ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$

$$A_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} - \ln n$$

$$B_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$$

$$A_n \uparrow, B_n \downarrow$$

$$B_n > A_n$$

$$B_1 > \dots > B_{n-1} > B_n > A_n > A_{n-1} > \dots > A_1, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$B_n - A_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

Значит, $\exists \lim A_n = \lim B_n = \gamma \approx 0.5772 \dots$ – число Эйлера-Маскерони

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N} = \ln N + \gamma + o(1)$$

Теорема 2.1. (Штольца.) Если $p_n, q_n \rightarrow 0, q_n \downarrow$ и $\exists \lim \frac{p_{n+1} - p_n}{q_{n+1} - q_n}$, то $\lim \frac{p_n}{q_n} = \lim \frac{p_{n+1} - p_n}{q_{n+1} - q_n}$

Теперь с помощью теоремы Штольца уточним остаточный член у гармонического ряда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n - \gamma}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right)} \stackrel{\circ}{=}$$

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Получаем, что $\varlimsup \frac{1}{-\frac{2n^2}{1}} = \frac{1}{2}$

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + \underbrace{\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}_{o(1)}$$

Так как

$$\frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n - \gamma - \frac{1}{2n}}{\frac{1}{n}} \rightarrow 0$$

2.3 Признак Даламбера и радикальный признак Коши

Теорема 2.2. *Признак Даламбера. Пусть $a_n > 0$.*

$$\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \text{ряд } \sum a_n \text{ сходится.}$$

$$\underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies \text{ряд } \sum a_n \text{ расходится.}$$

Теорема 2.3. *Радикальный признак Коши. Пусть $a_n \geq 0$.*

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} < 1 \implies \text{ряд } \sum a_n \text{ сходится.}$$

$$\underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} > 1 \implies \text{ряд } \sum a_n \text{ расходится.}$$

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{n!}, \quad p > 0$

$$a_n = \frac{p^n}{n!}, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{p^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{p^n} = \frac{p}{n+1} \rightarrow 0 < 1 \implies \text{ряд сходится по признаку Даламбера.}$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{p^n}{n!}} = \frac{p}{\sqrt[n]{n!}} \rightarrow 0 < 1 \implies \text{ряд сходится по радикальному признаку Коши. } (\sqrt[n]{n!} \rightarrow \infty)$$

2.4 Радикальный признак сильнее признака Даламбера

Пусть $a_n > 0$. Тогда:

$$\underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$\text{Если } \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} < 1$$

$$\text{Если } \underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies \underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} > 1$$

$$\text{Если } \exists \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}, \text{ то } \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow \exists \lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

2.5 Признак Гаусса

$$(\text{Сравнение с } \sum \frac{1}{n^p})$$

$$\text{Если } \exists \delta > 0, p: \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right) \text{ то:}$$

$$p > 1 \implies \text{ряд } \sum a_n \text{ сходится.}$$

$$p \leq 1 \implies \text{ряд } \sum a_n \text{ расходится.}$$

2.6 Сравнение с интегралом

Рассмотрим $f(x) \downarrow$ при $x \geq n_0 - 1$ и ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$, где $a_n = f(n)$

$$f(n+t) \leq a_n \leq f(n-1+t), t \in [0; 1]$$

$$\int_0^1 dt : \int_n^{n+1} f(x) dx \leq a_n \leq \int_{n-1}^n f(x) dx$$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} : \int_{n_0}^{N+1} f(x) dx \leq \sum_{n=n_0}^N a_n \leq \int_{n_0-1}^N f(x) dx$$

$$\Rightarrow \sum a_n \text{ ведёт себя так же как несобственный интеграл } \int^{\infty} f(x) dx$$

2.7 Улучшение сходимости ряда

Пример. $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Для улучшения сходимости будем пользоваться рядами такого типа:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}, \quad \dots$$

Такие ряды достаточно легко считаются, в нашем примере воспользуемся первым т.к. $\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2+2} - \frac{1}{n(n+1)} \right) &= S - 1 \Rightarrow S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2+2} - \frac{1}{n(n+1)} \right) \\ \frac{1}{n^2+2} - \frac{1}{n(n+1)} &= \frac{1}{n^2} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{2}{n^2}} - \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \right) = \frac{1}{n^2} \cdot \left(1 - \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \right) = \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned}$$

Слагаемые убывают быстрее, чтобы получить число с определённой точностью потребуется значительно меньше сложений.

Получили, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2} \approx 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

3 Лекция 3 - 15.09.2020 - Знакопеременные ряды

3.1 Абсолютная и условная сходимость

Определение 4. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \in \mathbb{R}$

Если $a_n \cdot a_{n+1} < 0$, то ряд называется знакопеременным.

Пусть $\sum a_n$ сходится

Определение 5. Рассмотрим дополнительный ряд $\sum |a_n|$ (*)

Если (*) сходится, то $\sum a_n$ называется сходящимся абсолютно

Если (*) расходится, то $\sum a_n$ называется сходящимся условно

Определение 6. Введём $a_n^+ = \begin{cases} a_n, & a_n > 0 \\ 0 & a_n < 0 \end{cases}$ $a_n^- = \begin{cases} |a_n|, & a_n < 0 \\ 0 & a_n > 0 \end{cases}$

Ряды $\sum a_n^+, \sum a_n^-$ называются положительной и отрицательной частью исходного ряда $\sum a_n$

$$S_N^+ = \sum_{n=1}^N a_n^+, S_N^- = \sum_{n=1}^N a_n^-$$

$$a_n = a_n^+ - a_n^-, |a_n| = a_n^+ + a_n^-$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_N^+ - S_N^-, \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_N^+ + S_N^-$$

Замечание. Ряд $\sum a_n$ сходится абсолютно \iff оба ряда $\sum a_n^+, \sum a_n^-$ сходятся Ряд $\sum a_n$ сходится условно \implies оба ряда $\sum a_n^+, \sum a_n^-$ расходятся

3.2 Мажорантный признак Вейерштрасса

Теорема 3.1. Если $|a_n| \leq b_n$ при $n > n_0$ и положительный ряд $\sum b_n$ сходится, то $\sum a_n$ сходится, причём абсолютно.

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^p}, p > 0$

$$|\sin(nx)| \leq 1 \implies \left| \frac{\sin(nx)}{n^p} \right| \leq \frac{1}{n^p}$$

$$\sum \frac{1}{n^p} \text{ сходится } (p > 1) \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^p} \text{ сходится абсолютно.}$$

3.3 Группировка членов ряда

Говорят, что ряд $\sum b_k$ получен из $\sum a_n$ группировкой членов, если $\exists n_1 < n_2 < \dots$:

$$b_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1}$$

$$b_2 = a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \dots + a_{n_2}$$

...

Замечание. Если $\sum a_n$ сходится, то ряд $\sum b_k$ сходится к той же сумме.

Доказательство. $\sum_{k=1}^m b_k = \sum_{n=1}^{n_m} a_n$ ■

Обратное утверждение неверно: $(1-1) + (1-1) + \dots$

Знакопеременный ряд при помощи группировки сводится к знакопеременному:

$$a_1 \leq 0, \dots, a_{n_1} \leq 0; b_1 = \sum_{i=1}^{n_1} a_i \leq 0$$

$$a_{n_1+1} \geq 0, \dots, a_{n_2} \geq 0; b_2 = \sum_{i=n_1+1}^{n_2} a_i \leq 0$$

При такой группировке сходимость исходного ряда \iff сходимость $\sum b_n$

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k, \text{ где } b_k = (-1)^k$$

$$|b_k| = \sum_{n=[e^k]+1}^{[e^{k+1}]} \frac{1}{n} \leq \frac{1}{[e^k]+1} \cdot ([e^{k+1}] - [e^k]) \approx \frac{e^{k+1} - e^k}{e^k} \rightarrow e - 1 > 0$$

3.4 Знакопередающие ряды, пр-к Лейбница

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \text{ где } a_n = (-1)^n \cdot u_n, u_n > 0$$

Теорема 3.2. Признак Лейбница. Если $u_n \downarrow 0$, то ряд сходится, причём $|r_n| \leq u_{n+1}$

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}, p > 0$

$$\frac{1}{n^p} \downarrow 0 \implies \text{ряд сходится (при } \forall p > 0)$$

При этом $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^p} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ – сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}: p \in (0; 1] - \text{сходится условно, } p \in (1; +\infty) - \text{абсолютно}$$

3.5 О неприменимости эквивалентности

Рассмотрим 2 ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} \approx \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

При этом правый ряд сходится по признаку Лейбница, а левый – расходится:

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n} - (-1)^n)} \approx \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n} - (-1)^n)} \rightarrow \infty$$

3.6 Признаки Дирихле и Абеля

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$$

Теорема 3.3. Признак Дирихле. Если $a_n \downarrow 0$, а частичные суммы $\left| \sum_{n=1}^N b_n \right| \leq C$ ограничены, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ сходится.

Теорема 3.4. Признак Абеля. Если a_n монотонна и ограничена, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ сходится.

$$a_n \rightarrow a, a_n = a + \alpha_n, \alpha_n \downarrow 0; \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n = a \sum_{n=1}^{\infty} b_n + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot b_n$$

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^p}, p > 0$

$$a_n = \frac{1}{n^p} \downarrow 0, b_n = \sin nx$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_N = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin Nx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos((N+1/2)x)}{2 \sin \frac{x}{2}}; \left| \sum_{n=1}^N b_n \right| \leq \frac{2}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin \frac{x}{2}}$$

Ряд сходится по признаку Дирихле

3.7 Влияние перестановки членов ряда на его сумму

Пусть $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ – биекция

Говорят, что ряд $\sum b_n$ получен из $\sum a_n$ перестановкой членов, если $b_n = a_{f(n)}$

Если ряд $\sum a_n$ сходится абсолютно, то \forall ряд, полученный из него перестановкой членов, сходится абсолютно к той же сумме.

Теорема 3.5. (Римана) Если ряд $\sum a_n$ сходится условно, то для $\forall S \in [-\infty; +\infty]$ то \exists перестановка f такая, что $\sum a_{f(n)} = S$

4 Лекция 4 - 22.09.2020

4.1 Умножение рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{m=1}^{\infty} b_m$$
$$\left(\sum_{k=1}^K a_k \right) \cdot \left(\sum_{m=1}^M b_m \right) = \sum_{1 \leq k \leq K, 1 \leq m \leq M} a_k \cdot b_m$$

Если эта сумма имеет предел при $K, M \rightarrow \infty$, не зависящий от порядка суммирования, то говорят, что определено произведение рядов.

Теорема 4.1. (Коши) Если $\sum a_k, \sum b_m$ сходятся абсолютно, то определено их произведение.

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} \cdot b_{m_n}$$

Произведение рядов по Коши:

$$c_2 = a_1 \cdot b_1$$

$$c_3 = a_2 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_2$$

$$c_4 = a_3 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_3$$

...

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m \right) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n$$

4.2 Бесконечное произведение

4.2.1 Основные понятия

$$\prod_{n=1}^N a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_N - \text{частичное произведение.}$$

Бесконечным произведением называют формальную запись $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$

Значением бесконечного произведения является предел частичного произведения:

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N a_n$$

4.2.2 Сходимость бесконечного произведения

Необходимое условие сходимости:

$$\text{Если } P_N = \prod_{n=1}^N a_n \text{ сходится, то } a_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} \rightarrow 1$$

$$\prod_{n=1}^N a_n = e^{\ln \prod_{n=1}^N a_n} = e^{\sum_{n=1}^N \ln a_n}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = P \iff \sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n = \ln P \quad (P \neq 0, a_n \rightarrow 1)$$

Пусть $a_n \geq 1$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n$ — положительный ряд

$$\ln a_n = (a_n - 1) + o(1), \text{ т. к. } a_n \rightarrow 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n \text{ сходится} \iff \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 1) \text{ сходится.}$$

4.2.3 Абсолютная сходимость бесконечного произведения

$\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ называется абсолютно сходящимся, если абсолютно сходится соответствующий ему ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n$

Замечание. $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно $\iff \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 1)$ сходится абсолютно.

Пример. (Произведение Валлиса) $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1} = \frac{\pi}{2}$ – получается из анализа интегралов $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$

Прим. ред.: есть отличное [видео](#) с интуитивно понятным доказательством.

Пример. (Дзета-функция Римана) $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, s > 1$

Тождество Эйлера:

$$\zeta(s) = \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{p_n^s})}, \text{ где } p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots$$

4.3 Функциональные последовательности

4.3.1 Поточечная и равномерная сходимость

Пусть при всех $n \in \mathbb{N}$ функции $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$

Говорят, что $a \in D$ – точка сходимости $\{f_n(x)\}$, если последовательность $\{f_n(a)\}$ сходится.

Множество всех точек сходимости называется множеством сходимости.

Говорят, что последовательность сходится на D поточечно, если D – множество сходимости.

Говорят, что $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно на D , если $\sup |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$

Свойства

$$1. f_n \xrightarrow{D} f \implies f_n \xrightarrow{D} f$$

2. Если $D = D_1 \cup D_2$, то:

$$f_n \xrightarrow{D} f \iff (f_n \xrightarrow{D_1} f \text{ и } f_n \xrightarrow{D_2} f)$$

4.3.2 Равномерная норма. Критерий Коши

Рассмотрим множество всех функций $D \rightarrow \mathbb{R}$

$$\|f\| = \sup_{x \in D} |f(x)|$$

$$\text{Таким образом, } f_n \xrightarrow{D} f \iff \|f_n - f\| \rightarrow 0$$

4.3.3 Теорема Дини

Пусть $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x)$ монотонна по n при каждом $x \in [a, b], f_n \rightarrow f$ на $[a, b]$

Тогда $f_n \xrightarrow{D} f$

5 Лекция 5 - 29.09.2020 - Исследование сходимости функциональных рядов

5.1 Свойства равномерно сходящейся последовательности

1. $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, рассмотрим $D = (a; b)$, $D = [a; b]$

Пусть $f_n \rightarrow f$, $x \in D$, $y_n = \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$, $\{y_n\}$ – сходящ., $y_n \rightarrow y$

Тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$, т.е. $\lim_{x \rightarrow x_0} (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x))$

Доказательство. $|y - f(x)| \leq |y - y_n| + |y_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|$

Пусть n такое, что $|y - y_n| < \frac{\varepsilon}{3}$, $\|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{3}$, $|x - x_0| < \delta$, $|f(x) - y| < \frac{\varepsilon}{3}$

Тогда $|y - f(x)| \leq |y - y_n| + |y_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ ■

2. $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, рассмотрим $D = (a; b)$, $D = [a; b]$

Пусть f_n дифференцируемы на D , $f'_n \xrightarrow{D} g$, $\exists c \in D : \{f_n(c)\}$ сходятся

Тогда $\exists f : f_n \rightarrow f$ (причем, если D огр., то сходимость равномерная)

f – дифференцируема, $f' = g$.

$$(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x))' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$$

3. $-\infty < a < b < +\infty$, $D = [a; b]$

Пусть f_n непрерывны на D , $f_n \xrightarrow{D} f$ ($\implies f$ непрерывна на D)

$$\text{Тогда } \int_a^x f_n(t) dt \xrightarrow{D} \int_a^x f(t) dt$$

5.2 Равномерная сходимость функционального ряда

$$D \subseteq \mathbb{R}, a_n : D \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{Функциональный ряд: } \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$$

$$\text{Частичные суммы: } S_N(x) = \sum_{n=1}^N a_n(x)$$

Множество абсолютной сходимости – множество всех тех значений x , при которых ряд сходится абсолютно.

5.3 Необходимое условие равномерной сходимости

$$\text{Если } \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \text{ равномерно сходится к сумме } S(x), \text{ то } a_n \xrightarrow{D} 0$$

Доказательство. $S_n(x) = a_1(x) + \dots + a_n(x)$, $a_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x)$

$$S_n \xrightarrow{D} S \implies a_n \xrightarrow{D} (S - S) = 0$$
 ■

Пример. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $D = \mathbb{R}$ – не является сходящейся равномерно, т.к. $\frac{x^n}{n!} \rightarrow^{\mathbb{R}} 0$

5.4 Критерий Коши равномерной сходимости

Теорема 5.1. Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на $D \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon), \forall n \geq N, \forall m:$

$$|a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+m}| < \varepsilon$$

Т.е. $|a_n(x) + a_{n+1}(x) + \dots + a_{n+m}(x)| < \varepsilon \forall x \in D$.

Отрицание: если $\exists \{x_n\} \subset D$, $\exists \{m_n\} \in \mathbb{N}$, $\exists \varepsilon_0$:

$$|a_n(x_n) + a_{n+1}(x_n) + \dots + a_{m_n}(x_n)| > \varepsilon_0$$

То ряд не является сходящимся равномерно.

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}$, $D = \mathbb{R}$ – сходится, т.к. $\approx \sum \frac{1}{n^2}$. Докажем, что сходится неравномерно. Возьмём $x_n = n$, $m_n = 2n$:

$$\frac{n}{n^2 + n^2} + \frac{n}{n^2 + (n+1)^2} + \dots + \frac{n}{n^2 + (2n)^2} > \frac{n}{5n^2} \cdot n = \frac{1}{5}$$

5.5 Признаки Вейерштрасса и Даламбера

Теорема 5.2. (Признак Вейерштрасса) Если $|a_n(x)| \leq b_n$ при $\forall n \geq n_0$, $\forall x \in D$, а ряд $\sum b_n$ сходится, то $\sum a_n(x)$ сходится на D абсолютно и равномерно.

Доказательство. $|a_n(x) + a_{n+1}(x) + \dots + a_{n+m}(x)| \leq b_n + b_{n+1} + \dots + b_{n+m} < \varepsilon$ ■

Теорема 5.3. (Признак Даламбера) Если $\exists q < 1$: $|a_{n+1}(x)| \leq q \cdot |a_n(x)|$ при $\forall n \geq n_0$, $\forall x \in D$, причём $a_{n_0}(x)$ – ограничена на D , то $\sum a_n(x)$ сходится на D абсолютно и равномерно.

Пример. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $D = [-r; r]$, $r > 0$

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq q \cdot \left| \frac{x^n}{n!} \right|$$

$$\left| \frac{x}{n+1} \right| \leq q. \text{ Пусть } n_0 : \frac{r}{n_0+1} < 1, \text{ берём } q = \frac{r}{n_0+1}. \text{ Значит, ряд абсолютно и равномерно сходится.}$$

5.6 Признак Лейбница

Знакопередающийся функциональный ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot u_n(x)$, $u_n(x) \geq 0$ на D .

Теорема 5.4. (Признак Лейбница) Если $u_n(x) \downarrow_{(n)}$ и $u_n \xrightarrow{D} 0$, то ряд сходится равномерно.

Пример. $\sum \frac{(-1)^n}{(n+x)^p} \downarrow_{(n)}$, $|u_n(x)| \leq \frac{1}{n^p} \rightarrow 0 \implies u_n \rightarrow^0 0$

5.7 Признаки Дирихле и Абеля

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \cdot b_n(x)$

Теорема 5.5. (Признак Дирихле) Если $a_n(x) \downarrow_{(n)}$ и $a_n \xrightarrow{D} 0$, а $\|b_1 + \dots + b_n\| \leq C \forall n$, то ряд равномерно сходится на D .

Теорема 5.6. (Признак Абеля) Если $a_n(x)$ монотонна по n (при $\forall x \in D$), и $\|a_n\| \leq C$ при всех n , а ряд $\sum b_n(x)$ сходится равномерно, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \cdot b_n(x)$ сходится равномерно.

5.8 Свойства равномерно сходящегося ряда

1. $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $D = (a; b)$, $D = [a; b]$

Пусть функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x)$ сходится равномерно на D , $x_0 \in D$, $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} c_n(x) = y_n$ и $\exists \sum_{n=1}^{\infty} y_n = y$.

$$\text{Тогда } \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} c_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n = y$$

2. $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $D = (a; b)$, $D = [a; b]$

Пусть $c_n(x)$ дифференцируемы на D и $\sum_{n=1}^{\infty} c'_n(x)$ сходится равномерно на D .

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x)$ сходится на D (а если D огр, то сходится равномерно), а его сумма будет дифференцируемой функцией на D и $\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} c'_n(x)$

3. $-\infty < a < b < +\infty$, $D = (a; b)$, $D = [a; b]$

$$\int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x c_n(t) dt - \text{сходится равномерно на } D.$$

6 Лекция 6 - 6.10.2020 - Степенные ряды

6.1 Основные понятия

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x - x_0)^n$$

$\{c_n\}$ – числовая последовательность (коэффициенты), $x_0 \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^N c_n \cdot (x - x_0)^n - \text{многочлен.}$$

6.2 Теорема Абеля, радиус и интервал последовательности

Теорема 6.1. (Абеля)

1. Если степенной ряд сходится в точке $x_1 \neq x_0$, то он сходится при всех $x : |x - x_0| < |x_1 - x_0|$
2. Если степенной ряд расходится в точке $x_2 \neq x_0$, то он расходится при всех $x : |x - x_0| > |x_2 - x_0|$

Доказательство. 1. $\left| \sum_{n=m}^N c_n (x - x_0)^n \right| = \left| \sum_{n=m}^N c_n \cdot (x_1 - x_0)^n \cdot \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right)^n \right| \leq \sum_{n=m}^N |c_n \cdot (x_1 - x_0)^n| \cdot \left| \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right)^n \right| \leq \varepsilon (q^m + \dots + q^N) \leq \varepsilon \cdot q^m \cdot \frac{1}{1 - q} \rightarrow 0$

Пусть:

$$R_{cv} = \sup\{|x - x_0| : \text{ряд сходится}\}$$

$$R_{dv} = \inf\{|x - x_0| : \text{ряд расходится}\} \text{ или } +\infty, \text{ если ряд сходится всюду}$$

$$\exists R = R_{cv} = R_{dv} - \text{радиус сходимости.}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x - x_0)^n$$

Применим радикальный признак Коши:

$$\sqrt[n]{|a_n(x)|} = \sqrt[n]{|c_n|} \cdot |x - x_0|$$

$$\lim \sqrt[n]{|a_n(x)|} = |x - x_0| \cdot \lim \sqrt[n]{|c_n|}$$

Если $|x - x_0| \cdot \lim \sqrt[n]{|c_n|} < 1$, то ряд сходится

Если $|x - x_0| \cdot \lim \sqrt[n]{|c_n|} \geq 1$, то ряд расходится

$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|c_n|}} - \text{формула Коши-Адамара}$$

$$\text{Pro tip: если } \exists \lim \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|, \text{ то } \lim \sqrt[n]{|c_n|} = \lim \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$$

6.3 Равномерная сходимость степенного ряда

Если $R > 0$, то степенной ряд сходится равномерно при $|x - x_0| \leq r$, где $r < R$ (доказательство через признак Вейерштрасса).

6.4 Сходимость ряда в граничных точках интервала сходимости

Пусть $\sum c_n R^n$ сходится. Тогда степенной ряд $\sum c_n (x - x_0)^n$ сходится равномерно на $[x_0; x_0 + R]$.

Доказательство. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n \cdot R^n) \cdot \left(\frac{x - x_0}{R} \right)^n$

$$b_n = c_n \cdot R^n, a_n = \left(\frac{x - x_0}{R} \right)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ сходится} \implies \text{сходится равномерно.}$$

$$a_n(x) \downarrow_{(n)}$$

Значит, ряд сходится равномерно по признаку Абеля.

6.5 Дифференцирование и интегрирование степенного ряда

$\sum c_n(x-x_0)^n$, $R > 0$ – его радиус сходимости.

1. Дифференцирование

При почленном дифференцировании получаем $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot n \cdot (x-x_0)^{n-1}$ Его радиус сходимости равен радиусу исходного ряда \Rightarrow он сходится равномерно при $|x-x_0| \leq r < R$ Значит по теореме о почленном дифференцировании функционального ряда: $\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x-x_0)^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot n \cdot (x-x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)(x-x_0)^n$

2. Интегрирование

$$\int_{x_0}^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(t-x_0)^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1}$$

6.6 Бесконечное дифференцирование

Функция называется бесконечно дифференцируемой в точке a , если $\forall n$ она n раз дифференцируема в точке a . Сумма степенного ряда с $R > 0$ является бесконечно дифференцируемой функцией.

6.7 Ряд Тейлора

Если функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в точке x_0 , то функции $f(x)$ можно сопоставить её ряд Тейлора:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

При этом $f(x) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + r_N(x)$

$$r_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(x_0 + \theta)(x-x_0)}{(N+1)!} (x-x_0)^{N+1}, \theta \in (0; 1) \text{ – формула Лагранжа}$$

$$r_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(x_0 + \theta)(x-x_0)}{N!} (1-\theta)^N (x-x_0)^{N+1}, \theta \in (0; 1) \text{ – формула Коши}$$

Определение 7. Функция называется аналитической в т. x_0 , если она представима в окрестности этой точки в виде степенного ряда.

Не всякая бесконечно дифференцируемая функция будет аналитической:

Пример. $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = 0, \text{ ряд Тейлора при } x_0 = 0 \text{ равен } 0$$

6.7.1 Ряды Тейлора основных элементарных функций

1. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, R = \infty$

2. $(1+x)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(p)_n}{n!} x^n$, где $(p)_n = p(p-1)\dots(p-n+1)$, $R = 1$

3. $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)} x^n}{n!}$