Математический Анализ 2, Коллоквиум III

Версия от 18.03.2021 22:05

Содержание

1. Собственный интеграл, зависящий от параметра. Теорема о непрерывности по параметру. Теорема о дифференцировании по параметру под знаком интеграла. Теорема об интегрировании по параметру под знаком интеграла.

1.1. Собственный интеграл, зависящий от параметра.

Определение. Собственным интегралом, зависящем от параметра, будем называть интеграл вида

$$F(y) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\mathrm{d}x,$$

где α и β это некие функции, определенные для y из некоторого отрезка $[c; d]$.
Часто α и β являются константами и интеграл принимает следующий вид:

$$F(y) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x, y)\mathrm{d}x.$$

1.2. Теорема о непрерывности по параметру

Теорема. Рассмотрим $G = [a; b] \times [c; d]$ и пусть функция $f \colon G \to \mathbb{R}$ — непрерывна на ограниченном замкнутом множестве, откуда следует, что она равномерно непрерывна.
Пусть α, β непрерывны на отрезке $[c; d]$, тогда функция

$$F(y) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\mathrm{d}x$$

равномерно непрерывна на $[c; d]$.

Доказательство. Докажем непрерывность.
Пусть функция f ограничена каким-то числом M.
В силу непрерывности α и β для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что из условия $|y - y_0| < \delta$ следует $|\alpha(y) - \alpha(y_0)| < \varepsilon$ и $|\beta(y) - \beta(y_0)| < \varepsilon$.
В силу равномерной непрерывности f для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что из условия $|y - y_0| < \delta$ следует $|f(x, y) - f(x, y_0)| < \varepsilon$.
Воспользуемся этим:

$$\begin{aligned}
|F(y) - F(y_0)| &= \Big| \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\mathrm{d}x - \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y_0)\mathrm{d}x \Big| \\
&\left[\text{— прибавим и вычтем член } \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y)\mathrm{d}x \right] \\
&= \Big| \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\mathrm{d}x - \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y)\mathrm{d}x + \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y)\mathrm{d}x - \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y_0)\mathrm{d}x \Big| \\
&\leqslant \Big| \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\mathrm{d}x - \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y)\mathrm{d}x \Big| + \Big| \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y)\mathrm{d}x - \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y_0)\mathrm{d}x \Big| \\
&[\text{ — оценим слагаемое с модулем интеграла как интеграл модуля }] \\
&\leqslant \Big| \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\mathrm{d}x - \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y)\mathrm{d}x \Big| + \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \Big| f(x, y) - f(x, y_0) \Big| \mathrm{d}x \\
&[\text{ — раскроем первое слагаемое; для понимания представьте, что } \alpha(y) < \alpha(y_0) < \beta(y_0) < \beta(y) \text{ }]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big| \int\limits_{\alpha(y)}^{\alpha(y_0)} f(x,y)\mathrm{d}x + \int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)\mathrm{d}x \Big| + \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \Big| f(x,y) - f(x,y_0) \Big| \mathrm{d}x \\
&\leqslant \int\limits_{\alpha(y)}^{\alpha(y_0)} \underbrace{|f(x,y)|}_{\leqslant M} \mathrm{d}x + \int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} \underbrace{|f(x,y)|}_{\leqslant M} \mathrm{d}x + \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \underbrace{\Big| f(x,y) - f(x,y_0) \Big|}_{\leqslant \varepsilon} \mathrm{d}x \\
&\leqslant (\alpha(y_0) - \alpha(y)) \cdot M + (\beta(y) - \beta(y_0)) \cdot M + (\beta(y_0) - \alpha(y_0)) \cdot \varepsilon \\
&= 2 \cdot \varepsilon \cdot M + (\beta(y) - \alpha(y)) \cdot \varepsilon = \varepsilon',
\end{aligned}
$$

то есть выбирая $\delta > 0$ мы можем сделать так, что $|F(y) - F(y_0)| < \varepsilon'$ для любого $\varepsilon' > 0$. ■

Теперь немного о том, зачем нам эта теорема. Если вместо отрезка $[c; d]$ рассмотреть $[c; +\infty)$, то утверждение из теоремы остается верным и из равномерной непрерывности $f(x,y)$ на $[a;b] \times [c; +\infty)$ следует

$$
\exists \lim_{y \to +\infty} F(y) = \lim_{y \to +\infty} \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\mathrm{d}x = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \lim_{y \to +\infty} f(x,y)\mathrm{d}x.
$$

1.3. Теорема о дифференцировании по параметру под знаком интеграла.

Для простоты изложения будем рассматривать $a = \alpha(y)$ и $b = \beta(y)$. Тогда

$$
F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\mathrm{d}x.
$$

Теорема. Если f непрерывна на $G = [a;b] \times [c;d]$, а также производная $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ существует и непрерывна на G, то F непрерывно дифференцируема на $[c;d]$.
Причем эта производная может быть вычислена:

$$
F'(y) = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}x.
$$

Доказательство. Необходимо доказать, что отношение стремится в пределе к интегралу:

$$
D = \frac{F(y) - F(y_0)}{y - y_0} - \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \frac{f(x,y) - f(x,y_0)}{y - y_0}\mathrm{d}x - \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\mathrm{d}x.
$$

По теореме о среднем (теорема Лагранжа, 1 курс) на отрезке $[y_0; y]$ найдется точка y^* такая, что

$$
f(x,y) - f(x,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y^*) \cdot (y - y_0).
$$

Подставим в нашу разность:

$$
\begin{aligned}
|D| = \ldots &= \Big| \int\limits_a^b \frac{f(x,y) - f(x,y_0)}{y - y_0}\mathrm{d}x - \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\mathrm{d}x \Big| = \Big| \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y^*)\mathrm{d}x - \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\mathrm{d}x \Big| \\
&= \Big| \int\limits_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y^*) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0) \right) \mathrm{d}x \Big| \leqslant \int\limits_a^b \underbrace{\Big| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y^*) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0) \Big|}_{\leqslant \varepsilon} \mathrm{d}x \leqslant (b - a) \cdot \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Последний переход получается в силу равномерной непрерывности $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ на G и того, что $|y^* - y^*| \leqslant |y - y_0| < \varepsilon$.

То есть мы доказали, что $\dfrac{F(y) - F(y_0)}{y - y_0}$ равномерно стремится к числу $\displaystyle\int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\mathrm{d}x$, то есть существует предел, который мы и называем производной $F'(y)$.
Непрерывность производной получается как следствие предыдущей теоремы (о непрерывности по параметру), где в роли непрерывной функции выступает $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. ■

Иногда мы не можем взять какой-то интеграл, но с помощью этой теоремы мы можем взять производную интеграла, а зная производную потом найти сам интеграл.

1.4. Теорема об интегрировании по параметру под знаком интеграла.

Пусть $F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$. Мы хотим эту функцию проинтегрировать, то есть найти $\int\limits_c^d F(y)\mathrm{d}y$. Возникает вопрос, можно ли переставить интегралы.

Теорема. Если f непрерывна на множестве $G = [a;b] \times [c;d]$ (то есть она интегрируема на G), и выполняются следующие два пункта:

- при любом значении $y \in [c;d]$ функция $f(x,y)$ интегрируема по x, то есть существует $\int\limits_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$;
- при любом значении $x \in [a;b]$ функция $f(x,y)$ интегрируема по y, то есть существует $\int\limits_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$;

то эти интегралы равны друг другу, то есть

$$\int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_c^d \int\limits_a^b f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Доказательство. Доказательство следует из теоремы Фубини о том, что повторные интегралы равны двойном интегралу по прямоугольнику:

$$\int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_c^d \int\limits_a^b f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

■

Интегрирование по параметру также иногда позволяет вычислить интеграл, который по-другому вычислить невозможно.

2. Равномерная сходимость семейства функций. Определение. Критерий Коши равномерной сходимости.

2.1. TDB

3. Свойства равномерно сходящегося семейства функций. Теорема о предельном переходе. Теорема о непрерывности по параметру. Теорема об интегрировании по параметру. Теорема о дифференцировании по параметру.

3.1. Теорема о пределльном переходе

Теорема (Теорем о предельном переходе).
Пусть:

- $f(x,y) \underset{x\to a}{\overset{y\in H}{\rightrightarrows}} g(y)$
- $\forall x \in D : f(x,y) \underset{y\to b}{\to} h(x)$
- $h(x) \underset{x\to a}{\to} c$

Тогда $\lim\limits_{y\to b} g(y) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = c$

Доказательство теоремы о предельном переходе. Необходимо доказать, что $|g(y) - c|$ мала.
$|g(y) - c| \leqslant |g(y) - f(x, y)| + |f(x + y) - h(x)| + |h(x) - c|$

- $|g(y) - f(x, y)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$, при $0 < |x - a| < \delta_1,\ \forall y \in H$
- $|h(x) - c| < \dfrac{\varepsilon}{3}$, при $0 < |x - a| < \delta_2$
- $|f(x, y) - h(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ при фиксированном x и $0 < |y - b| < \delta_3$

Для $\delta = min(\delta_1, \delta_2, \delta_3) : |g(y) - c| < \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ ■

3.2. Теорема о непрерывности по параметру

Теорема (Теорема о непрерывности по параметру)**.** Пусть

- $f(x, y) \underset{x \to a}{\overset{y \in H}{\rightrightarrows}} g(y)$
- $f(x, y), \forall x \in D$ – непрерывна как функция от y в точке $y = b$

Тогда $g(y)$ – непрерывна в точке $y = b$

Доказательство теоремы о непрерывности по парметру. Необходимо доказать, что предел разности $|g(y)-g(b)|$ равен нулю.
$|g(y) - g(b)| \leqslant |g(y) - f(x, y)| + |f(x, y) - f(x, b)| + |f(x, b) - g(b)|$

- $|g(y) - f(x, y)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$, при $0 < |x - a| < \delta_1, \forall y \in H$ (в силу условий равномерной сходимости)
- $|f(x, b) - g(b)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ – это частный случай предыдущего пункта (так как $b \in H$ по условию теоремы)
- $|f(x, y)-f(x, b)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ при фиксированном x и, в виду непрерывности $f(x, y)$ по y в точки $y = b$ (условие теоремы), $|y - b| < \delta_2$

Для $\delta = min(\delta_1, \delta_2) : |g(y) - g(b)| < \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ ■

3.3. Теорема об интегрировании по параметру

Теорема (Теорема об интегрировании по параметру)**.** Пусть

- Пусть H – жорданово множество
- $f(x, y)$ – ограничена на $D \times H$
- $\forall x \in D : f(x, y)$ – интегрируема по y
- $f(x, y) \underset{x \to a}{\overset{y \in H}{\rightrightarrows}} g(y)$

Тогда функция $g(y)$ интегрируема и $\displaystyle\int\limits_H g(y)dy = \lim_{x \to a} \int\limits_H f(x,y)dy$

Доказательство теоремы об интегрировании по параметру. Сначала докажем, что функция $g(y)$ – интегрируема.
Случай, когда $\mu(H) = 0$ – тривиален: любая функция интегрируема на этом множестве и интеграл равен нулю. Поэтому далее рассматриваем случай $\mu(H) \neq 0$.
Для этого воспользуемся критерием Дарбу.
Пусть $\{H_i\}$ – разбиение множества H. Тогда необходимо доказать:
$\displaystyle\sum_i \sup_{y_1, y_2 \in H_i} |g(y_1) - g(y_2)|\mu(H_i) = \sum_i \omega_g(H_i)\mu(H_i) < \varepsilon$, где $\mu(H_i)$ – мера множества H_i.
$|g(y_1) - g(y_2) \leqslant |g(y_1) - f(x, y_1)| + |f(x, y_1) - f(x, y_2)| + |f(x, y_2) - g(y_2)|$

- $|g(y_1) - f(x,y_1)| < \dfrac{\varepsilon}{3\mu(H)}$, при $0 < |x-a| < \delta_1,\ \forall y_1 \in H$

- $|f(x,y_2) - g(y_2)| < \dfrac{\varepsilon}{3\mu(H)}$, при $0 < |x-a| < \delta_2,\ \forall y_2 \in H$

Теперь перепишем сумму с учётом оценок выше для $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$:
$\sum\limits_i \sup\limits_{y_1,y_2\in H_i} |g(y_1) - g(y_2)|\mu(H_i) \leqslant \sum\limits_i \dfrac{\varepsilon}{3\mu(H)}\mu(H_i) + \sum\limits_i \sup\limits_{y_1,y_2\in H} |f(x,y_1) - f(x,y_2)|\mu(H_i) + \sum\limits_i \dfrac{\varepsilon}{3\mu(H)}\mu(H_i)$

- $\sum\limits_i \sup\limits_{y_1,y_2\in H} |f(x,y_1) - f(x,y_2)|\mu(H_i) < \dfrac{\varepsilon}{3}$ по критерию Дарбу, так как $f(x,y)$ интегрируема по y при фиксированном x (условие теоремы)

Таким образом, $\sum\limits_i \sup\limits_{y_1,y_2\in H_i} |g(y_1) - g(y_2)|\mu(H_i) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \Rightarrow g$ – интегрируема по критерию Дарбу

Теперь докажем вторую часть утверждения – научимся брать интеграл от функции g.
$\left|\int\limits_H (g(y) - f(x,y))dy\right| \leqslant \int\limits_H |(g(y) - f(x,y)|dy$

- $|(g(y) - f(x,y)| < \varepsilon$ при $0 < |x-a| < \delta$ и $\forall y \in H$

Следовательно, $\left|\int\limits_H (g(y) - f(x,y))dy\right| < \varepsilon\mu(H)$
$\Rightarrow \int\limits_H ((g(y) - f(x,y))dy \underset{x\to a}{\to} 0$
$\int\limits_H f(x{,}y)dy = \int\limits_H g(y)dy + \int\limits_H ((g(y) - f(x,y))dy \to \int\limits_H g(y)dy$ ■

3.4. Теорема о дифференцировании по параметру

Теорема (Теорема о дифференцировании по параметру)**.** Пусть

- H – выпуклое ограниченное множество (например: отрезок $[c,d]$)

- $\forall x \in D : f(x,y)$ – дифференцируема по $y \in H$

- $f(x,y) \overset{y\in H}{\underset{x\to a}{\rightrightarrows}} g(y), a \in \overline{D}$

- $f'_y(x,y) \overset{y\in H}{\underset{x\to a}{\rightrightarrows}} h(y)$

Тогда $g(y)$ – дифференцируема на множестве H и $g'(y) = h(y)$

Доказательство теоремы о дифференцировании по параметру. Сначала докажем, что $f(x,y) \overset{y\in H}{\underset{x\to a}{\rightrightarrows}} g(y)$. Для этого воспользуемся критерием Коши: хотим доказать, что $|f(x_1,y) - f(x_2,y)| < \varepsilon$ равномерно по всем y, если только x_1 и x_2 достаточно близко к точке a лежат. Тогда будет выполнено условие Коши, а значит, что семейство $f(x,y)$ равномерно сходится к своей предельной функции g.
Возьмём какое-нибудь $y_0 \in H$, тогда:
$|f(x_1,y) - f(x_2,y)| = |(f(x_1,y) - f(x_2,y)) - (f(x_1,y_0) - f(x_2,y_0))| + |(f(x_1,y_0) - f(x_2,y_0))|$
Теперь зафиксируем x_1 и x_2, тогда можем рассматривать функцию $q(y) = (f(x_1,y) - f(x_2,y))$. Так как мы из условия теоремы знаем, что $f(x{,}y)$ дифференцируема по $y \in H$, то и функции $q(y)$ дифференцируема по $y \in H$. Теперь необходимо применить теорему Лагранжа для функции $q(y)$. Модифицируем равенство дальше:
$|f(x_1,y) - f(x_2,y)| = |q(y) - q(y_0)| + |q(y_0)| =$ [Теорема Лагранжа] $= |q'(y*)| \cdot |y - y_0| + |q(y_0)|$, где $y* \in [min(y_0,y), max(y_0,y)]$
Вернёмся к записи через функцию f:
$|f(x_1,y) - f(x_2,y)| = |f'_y(x_1,y*) - f'_y(x_2,y*)| \cdot |y - y_0| + |(f(x_1,y_0) - f(x_2,y_0))|$

- По условию теоремы $f'_y(x,y) \overset{y\in H}{\underset{x\to a}{\rightrightarrows}} h(y) \Rightarrow$, применив критерий Коши для производной можем сказать, что $|f'_y(x_1,y*) - f'_y(x_2,y*)| < \dfrac{\varepsilon}{2\cdot diam(H)}$
- $|y - y_0| < diam(H)$
- $|(f(x_1,y_0) - f(x_2,y_0))| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, так как $f(x,y_0) \to g(y_0)$

Итого: $|f(x_1,y) - f(x_2,y)| < \varepsilon$

Теперь хотим доказать $\dfrac{f(x,y)-f(x,b)}{y-b} \rightrightarrows \dfrac{g(y)-g(b)}{y-b}$, $b \in H, y \neq b$

Для этого давайте снова воспользуемся критерием Коши:

$|\dfrac{f(x_1,y)-f(x_1,b)}{y-b} - \dfrac{f(x_2,y)-f(x_2,b)}{y-b}|$

Снова введём функцию $F(y) = f(x_1,y) - f(x_2,y)$ как в первой части доказательства и снова воспользуемся для неё формулой Лагранжа. Перепишем равенство:

$|\dfrac{f(x_1,y)-f(x_1,b)}{y-b} - \dfrac{f(x_2,y)-f(x_2,b)}{y-b}| = |\dfrac{F'(y*)\cdot(y-b)}{y-b}| = |F'(y*)|$, где $y* \in [b,y]$

Тогда, вернувшись к записи с f получаем:

$|\dfrac{f(x_1,y)-f(x_1,b)}{y-b} - \dfrac{f(x_2,y)-f(x_2,b)}{y-b}| = |f'_y(x_1,y*) - f'_y(x_2,y*)| < \varepsilon$, так как по условию теоремы $f'_y(x,y) \overset{y\in H}{\underset{x\to a}{\rightrightarrows}} h(y)$

Теперь осталось воспользоваться теоремой о внесении предела под знак равномерной сходимости:

$\lim\limits_{y\to b} \dfrac{g(y)-g(b)}{y-b} =$ [см. пункт 3.1 лекций] $= \lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b} \dfrac{f(x,y)-f(x,b)}{y-b} = \lim\limits_{x\to a} f'_y(x,b) = h(b) \Rightarrow g'(y) = h(y)$, что и требовалось доказать. ■

4. Равномерная сходимость несобственного интеграла. Определение. Критерий Коши равномерной сходимости несобственного интеграла. Мажорантный признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственного интеграла. Вторая интегральная теорема о среднем (для собственного интеграла). Признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости несобственного интеграла.

4.1. TBD

5. Свойства равномерно сходящегося несобственного интеграла. Теорема о предельном переходе под знаком несобственного интеграла. Монотонный предельный переход и теорема Дини и равномерной сходимости семейства функций. Следствие из теоремы Дини о монотонном предельном переходе под знаком несобственного интеграла. Теорема о непрерывности несобственного интеграла по параметру.

5.1. Свойства равномерно сходящегося несобственного интеграла.

Свойства. 1. Предельный переход под знаком интеграла.

Пример.

$$\int\limits_0^{+\infty} f(x,n)\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int\limits_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx$$

Покажем, что $f(x,n) \rightrightarrows \varphi(x)$ недостаточно:

$$f(x,n) = \begin{cases} \frac{n}{x^3}\, e^{-\frac{n}{2x^2}}, & x > 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ непрерывна на } [0;+\infty)$$

Проверяем равномерную сходимость $f(x,n) \rightrightarrows \varphi(x) = 0$:

$$\sup_{x\geq 0} |f(x,n) - \varphi(x)| = \sup_{x>0} \frac{n}{x^3}\, e^{-\frac{n}{2x^2}} \underset{\substack{\uparrow \\ x=\sqrt{\frac{n}{3}}}}{=} 3\sqrt{\frac{3}{n}}\, e^{-3/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \text{ сходимость равномерная}$$

Проверяем значение интеграла:

$$\int\limits_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 0$$

$$\int\limits_0^{+\infty} f(n,x)\,dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{n}{x^3}\, e^{-\frac{n}{2x^2}}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{0} e^z\,dz = e^z \Big|_{-\infty}^{0} = 1$$

$$z = -\frac{n}{2x^2},\ dz = \frac{n}{x^3}\,dx$$

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{+\infty} f(x,n)\,dx \neq \int\limits_0^{+\infty} \lim_{n\to\infty} f(x,n)\,dx$$

Требуется равномерная сходимость несобственного интеграла.

Теорема. О предельном переходе под знаком несобственного интеграла.

Рассмотрим $f(x,y)$, определенную на $[a;\omega)\times H$ (ω — особая точка).

Пусть

$\forall y \in H \quad f(x,y)$ несобственно интегрируема на $[a;\omega)$,

причем $\int\limits_a^{\omega} f(x,y)\,dx$ сходится равномерно по $y \in H$,

$\forall t \in [a;\omega) \quad f(x,y) \underset{y\to y_0}{\overset{x\in[a;t]}{\rightrightarrows}} \varphi(x),\ y_0 \in H.$

Тогда φ несобственно интегрируема на $[a;\omega)$, причем

$$\lim_{y\to y_0} \int\limits_a^{\infty} f(x,y)\,dx = \int\limits_a^{\omega} \varphi(x)\,dx$$

Доказательство. (a) Покажем, что $\int\limits_a^{\omega} \varphi(x)\,dx$ сходится:

$$a \le t_1 < t_2 < \omega$$

По критерию Коши для равномерно сходящегося несобственного интеграла $\int\limits_a^{\omega} f(x,y)\,dx$

$$\left|\int\limits_{t_1}^{t_2} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon \quad \forall t_1,t_2 \in U(\omega),\ \forall y \in H$$

$$y \to y_0: \quad \lim_{y\to y_0} \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x,y)\,dx = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right) dx = \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi(x)\,dx \quad (\text{т.к. } f(x,y) \underset{y\to y_0}{\overset{x\in[a;t]}{\rightrightarrows}} \varphi(x))$$

$$\Rightarrow \left|\int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi(x)\,dx\right| \le \varepsilon \quad \forall t_1,t_2 \in U(\omega)$$

$\Rightarrow$ φ несобственно интегрируема

(b) Покажем, что $\left|\int\limits_a^{\omega} f(x,y)\,dx - \int\limits_a^{\omega} \varphi(x)\,dx\right| \xrightarrow[y\to y_0]{} 0$:

$$\left|\int\limits_a^{\omega} f(x,y)\,dx - \int\limits_a^{\omega} \varphi(x)\,dx\right| \le \underbrace{\left|\int\limits_a^{\omega} f(x,y)\,dx - \int\limits_a^{t} f(x,y)\,dx\right|}_{<\frac{\varepsilon}{3}\ \ \begin{matrix}\forall t \in U(\omega)\\ \forall y \in H\end{matrix}} +$$

$$+\underbrace{\left|\int\limits_a^t f(x,y)\,dx - \int\limits_a^t \varphi(x)\,dx\right|}_{<\frac{\varepsilon}{3} \quad \substack{\text{При фикс. } t\in U(\omega) \\ |y-y_0|<\delta}} + \underbrace{\left|\int\limits_a^t \varphi(x)\,dx - \int\limits_a^\omega \varphi(x)\,dx\right|}_{<\frac{\varepsilon}{3}\ \forall t\in U(\omega)} < \varepsilon \quad \forall\varepsilon>0, \quad \text{что и требовалось}$$

■

2. Монотонный предельный переход

Теорема. Теорема Дини

Пусть

$f(x,y)\geq 0$ и непрерывна $\forall y\in H$ по $x\in[a;\omega)$,
при $\forall x\in[a;\omega)$ $\;f(x,y)\uparrow$ по y и $f(x,y)\xrightarrow[y\to y_0]{}\varphi(x)$,
φ — непрерывна на $[a;\omega)$.

$$\text{Тогда}\quad f(x,y)\underset{y\to y_0}{\overset{[a;t]}{\rightrightarrows}}\varphi(x)\quad \forall t\in(a;\omega)$$

Доказательство. В силу монотонности по y:

$$(\varphi(x)-f(x,y))\downarrow \text{ по } y,\ \varphi(x)-f(x,y)\geq 0$$

$$\forall y_1<y_2\quad \varphi(x)-f(x,y_1)\geq\varphi(x)-f(x,y_2)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \sup_x|\varphi(x)-f(x,y_1)|\geq\sup_x|\varphi(x)-f(x,y_2)|\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \psi(y)=\sup_x|\varphi(x)-f(x,y)| \text{ — убывает и } \geq 0$$

Докажем, что $\psi(y)\xrightarrow[y\to y_0]{}0$. От противного: пусть $\psi(y)\geq\varepsilon>0$.

Тогда $\exists\{(x_n,y_n)\}:\ y_n\nearrow y_0,\ \varphi(x_n)-f(x_n,y_n)\geq\varepsilon/2$

$\{x_n\}\subset[a;t]\ \Rightarrow$ из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такую, что $x_{n_k}\xrightarrow[k\to\infty]{}c\in[a;t]$.

$$\varphi(x_{n_k})-f(x_{n_k},y)\geq\varepsilon/2$$

$$k\to\infty:\ \varphi(c)-f(c,y)\geq\varepsilon/2\quad\forall y\in U(y_0)$$

— противоречит тому, что $f(x,y)\to\varphi(x)$. ■

Следствие. Пусть $f(x,y)\geq 0$ и непрерывна по $x\in[a;\omega)$ $\forall y\in H$,
$\forall x\in[a;\omega)$ $\;f(x,y)\uparrow$ по y и $f(x,y)\underset{y\to y_0}{\nearrow}\varphi(x)$,
$\int\limits_a^\omega\varphi(x)\,dx$ — сходится.

$$\text{Тогда}\quad \lim_{y\to y_0}\int\limits_a^\omega f(x,y)\,dx=\int\limits_a^\omega\varphi(x)\,dx$$

Доказательство. По теореме Дини: $f(x,y)\underset{y\to y_0}{\overset{[a;t]}{\rightrightarrows}}\varphi(x)\varphi(x)\quad\forall t\in(a;\omega)$

$0\leq f(x,y)\leq\varphi(x)$

Т.к. $\int\limits_a^\omega\varphi(x)\,dx$ сходится, то $\int\limits_a^\omega f(x,y)\,dx$ сходится равномерно (по признаку Вейерштрасса) ■

Пример.

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = ?$$

$$\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\nearrow} e^{x^2} \quad \forall x \geq 0$$

Т.к. функции непрерывны, сходимость равномерная (по теореме Дини)

$\Rightarrow$ равномерно сходится $f(x,n) = \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} e^{-x^2} = \varphi(x)$

Но последовательность $f(x,n)$ убывает — рассмотрим разность

$$g(x,n) = f(x,1) - f(x,n) = \left(1+x^2\right)^{-1} - \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n \geq 0 \quad \uparrow \text{ по } n$$

$$g(x,n) \rightrightarrows \psi(x) = (1+x^2)^{-1} - e^{-x^2} \geq 0 \qquad \int\limits_0^{+\infty} \psi(x)\,dx \quad \text{сходится}$$

По следствию из теоремы Дини:

$$\Rightarrow \int\limits_0^{+\infty} g(x,n)\,dx \to \int\limits_0^{+\infty} \psi(x)\,dx$$

$$\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n}\right) dx \to \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+x^2} - e^{-x^2}\right) dx$$

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n}$$

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n} = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \sqrt{n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Формула Валлиса: $\prod\limits_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{4k^2-1} \to \frac{\pi}{2}$

3. Непрерывность интеграла

$$f(x,y) \quad [a;\omega) \times [c;d]$$

Пусть $f(x,y)$ непрерывна на $[a;\omega) \times [c;d]$

$$F(y) = \int\limits_a^{\omega} f(x,y)\,dx \text{ сходится равномерно на } [c;d]$$

Тогда $F(y)$ непрерывна на $[c;d]$

Доказательство.

$$g(t,y) = \int\limits_a^{t} f(x,y)\,dx \text{ — непрерывна по } y \in [c;d] \quad \forall t \in (a;\omega)$$

$$\int\limits_a^{t} f(x,y)\,dx \text{ — сходится равномерно } \Leftrightarrow g(t,y) \overset{y\in[c;d]}{\underset{t\to\omega}{\rightrightarrows}} F(y)$$

Равномерно сходящееся семейство непрерывных функций сходится к непрерывной функции:

$$|F(y)-F(y_0)| \leq \underbrace{|F(y)-g(t,y)|}_{\substack{<\frac{\varepsilon}{3} \quad \forall t\in U(\omega) \\ \forall y \in H}} + \underbrace{|g(t,y)-g(t,y_0)|}_{\substack{<\frac{\varepsilon}{3} \quad \text{При фикс. } t\in U(\omega) \\ |y-y_0|<\delta}} + \underbrace{|g(t,y_0)-F(y_0)|}_{\substack{<\frac{\varepsilon}{3} \quad \forall t\in U(\omega) \\ \forall y \in H}} < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

■

4. Дифференцирование по параметру

$$F(y) = \int\limits_a^\omega f(x,y)\,dx, \quad y \in [c;d]$$

Пусть: $f(x,y),\ f'_y(x,y)$ — непрерывны на $[a;\omega) \times [c;d]$

$$\Phi(y) = \int\limits_a^\omega f'_y(x,y)\,dx \text{ — сходится равномерно на } [c;d]$$

$$\int\limits_a^\omega f(x,y)\,dx \text{ сходится хотя бы в 1 точке } y_0 \in [c;d]$$

Тогда:

$$\int\limits_a^\omega f(x,y)\,dx \text{ сходится равномерно на } [c;d],$$

причем $F(y)$ дифференцируема на $[c;d]$ и $F'(y) = \Phi(y)$

Доказательство.

$$g(t,y) = \int\limits_a^t f(x,y)\,dx$$

По теореме о дифференцировании собственного интеграла по параметру, $g(t,y)$ дифференцируема по y на $[c;d]$ и

$$g'_y(t,y) = \int\limits_a^t f'_y(x,y)\,dx \underset{t\to\omega}{\overset{y\in[c;d]}{\rightrightarrows}} \Phi(y)$$

По условию $g(t,y_0) \xrightarrow[t\to\omega]{} F(y_0)$

Рассмотрим семейство $g(t,y)$. По теореме о дифференцировании семейства функций по параметру:

$$g(t,y) \underset{t\to\omega}{\overset{y\in[c;d]}{\rightrightarrows}} F(y), \quad F'(y) = \Phi(y)$$

∎

Пример. Вычислим интеграл Дирихле: $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$

Рассмотрим вспомогательный интеграл: $F(y) = \displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \cdot e^{-xy}\,dx,\ y > 0$

$$f(x,y) = \frac{\sin x}{x} \cdot e^{-xy}, \quad f'_y(x,y) = -\sin x \cdot e^{-xy} \text{ — непрерывна на } [0;+\infty) \times [c;d],$$

где $[c;d] \subset (0;+\infty)$

$$\Phi(y) = -\int\limits_0^{+\infty} \sin x \cdot e^{-xy}\,dx \text{ — вспомогательный интеграл}$$

$$\left|\sin x \cdot e^{-xy}\right| \le e^{-xy},\ xy \ge cx,\ \int\limits_0^{+\infty} e^{-cx}\,dx \text{ — сходится}$$

$$\Rightarrow \int\limits_0^{+\infty} \sin x \cdot e^{-xy}\,dx \text{ — равномерно сходится по признаку Вейерштрасса}$$

При $y_0 > 0$ $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \cdot e^{-xy}\,dx$ сходится по признаку Абеля

(т.к. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}$ — сходится, а e^{-xy} — монотонная и ограниченная)

$\Rightarrow$ по теореме можно внести $\frac{d}{dy}$ под знак интеграла:

$$F'(y) = -\int\limits_0^{+\infty} \sin x \cdot e^{-xy}\,dx = \star$$

$$\int \sin x \cdot e^{-xy}\,dx = -\int e^{-xy}\,d(\cos x) = -e^{-xy}\cos x - y\int \cos x \cdot e^{-xy}\,dx =$$

$$= -e^{-xy}\cos x - y\int e^{-xy}\,d(\sin x) = -e^{-xy}\cos x - ye^{-xy}\sin x - y^2\int \sin x \cdot e^{-xy}\,dx$$

$$\Rightarrow; \int \sin x \cdot e^{-xy}\,dx = -\frac{e^{-xy}(\cos x + y\sin x)}{1+y^2} + C \quad (y > 0)$$

$$\star = -\left(0 + \frac{1}{1+y^2}\right)$$

Т.е. $F'(y) = -\frac{1}{1+y^2} \;\Rightarrow\; F(y) = -\operatorname{arctg} y + C$

Вычислим $\lim\limits_{y\to+\infty} F(y) = \lim\limits_{y\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \cdot e^{-xy}\,dx$

$$\begin{cases} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \cdot e^{-xy}\,dx \text{ — сходится равномерно,} \\ \lim_{y\to+\infty} \frac{\sin x}{x} \cdot e^{-xy} = 0 \quad \text{при } x \in [a;b] \subset (0;+\infty), \\ \text{причем } \frac{\sin x}{x} \cdot e^{-xy} \underset{y\to+\infty}{\overset{x\in[a;b]}{\rightrightarrows}} 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ можно внести $\lim\limits_{y\to+\infty}$ под знак интеграла

$$\lim_{y\to+\infty} F(y) = \int\limits_0^{+\infty} 0\,dx = 0 \;\Rightarrow\; C = \frac{\pi}{2}$$

Итак: $F(y) = -\operatorname{arctg} y + \frac{\pi}{2}$ Осталось внести $\lim\limits_{y\to+\infty}$ под интеграл $F(y)$ и получить интеграл Дирихле

$$\begin{cases} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy}\,dx \text{ — сходится равномерно по признаку Абеля,} \\ \lim_{y\to+0} \frac{\sin x}{x} e^{-xy} = \frac{\sin x}{x}, \\ \left|\frac{\sin x}{x} e^{-xy} - \frac{\sin x}{x}\right| \le \frac{|\sin x|}{x} \cdot (1 - e^{-xy}) \le \frac{1}{a} \cdot \left(1 - e^{-by}\right) \\ \Rightarrow \frac{\sin x}{x} e^{-xy} \rightrightarrows \frac{\sin x}{x} \end{cases} \qquad x \in [a;b] \subset (0;+\infty)$$

$$\Rightarrow \lim_{y\to+0} F(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

$$\Rightarrow \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{y\to+0}\left(-\operatorname{arctg} y + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

5. Собственный интеграл по параметру

$$\int\limits_c^d F(y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^\omega f(x,y)\,dx$$

Пусть

$f(x,y)$ непрерывна на $[a,\omega)\times[c,d]$

$F(y) = \int\limits_a^\omega f(x,y)\,dx$ — сходится равномерно на $[c,d]$

Тогда F — непрерывна на $[c,d]$ (следовательно, интегрируема) и

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_a^\omega f(x,y)\,dx = \int\limits_a^\omega dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy$$

Доказательство. Пусть $a < t < \omega$. Для собственного интеграла

$$g(t,y) = \int\limits_a^t f(x,y)\,dx$$

возможность внесения $\int\limits_c^d dy$ следует из непрерывности f:

$$\int\limits_c^d g(t,y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^t f(x,y)\,dx = \underbrace{\int\limits_a^t dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy}_{\text{непр. ф-ция}}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ \int\limits_c^d F(y)\,dy & = & \int\limits_a^\omega dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy \end{array}$$

$$\lim_{t\to\omega} \int\limits_c^d dy \left(\int\limits_a^t f(x,y)\,dx \right) = \int\limits_c^d \left(\lim_{t\to\omega} \int\limits_a^t f(x,y)\,dx \right) dy = \int\limits_c^d F(y)\,dy$$

$\blacksquare$

6. Несобственный интеграл по параметру

$$\int\limits_c^{\tilde\omega} F(y)\,dy = \int\limits_c^{\tilde\omega} dy \int\limits_a c^\omega f(x,y)\,dx$$

Пусть

$f(x,y)$ непрерывна на $[a,\omega)\times[c,\tilde\omega]$

$F(y) = \int\limits_a^\omega f(x,y)\,dx$ — сходится равномерно на $[c,\tau]$, где $c < \tau < \omega$,

хотя бы 1 из интегралов:

$$\int\limits_c^{\tilde\omega} dy \int\limits_a^\omega |f(x,y)|\,dx, \quad \int\limits_a^\omega dx \int\limits_c^{\tilde\omega} |f(x,y)|\,dy$$

сходится.

Тогда $\int\limits_c^{\tilde\omega} dy \int\limits_a^\omega f(x,y)\,dx = \int\limits_a^\omega dx \int\limits_c^{\tilde\omega} f(x,y)\,dy$

Доказательство.

$$\forall \tau \in (c; \tilde{\omega}) \quad \int\limits_c^\tau dy \int\limits_a^\omega f(x,y)\,dx = \int\limits_a^\omega dx \int\limits_c^\tau f(x,y)\,dy$$

Рассмотрим предельный переход $\tau \to \tilde{\omega}$:

$$\lim_{\tau \to \tilde{\omega}} \int\limits_a^\omega dx \int\limits_c^\tau f(x,y)\,dy$$

$$\varphi(\tau, x) = \int\limits_c^\tau f(x,y)\,dy \underset{\tau \to \tilde{\omega}}{\overset{x \in [a;t]}{\rightrightarrows}} \Phi(x) = \int\limits_c^{\tilde{\omega}} f(x,y)\,dy$$

— по условию

$$|\varphi(\tau, x)| \le \int\limits_c^{\tilde{\omega}} |f(x,y)|\,dy, \quad \int\limits_a^\omega |\varphi(\tau,x)|\,dx \le \int\limits_a^\omega dx \int\limits_c^{\tilde{\omega}} |f(x,y)|\,dy$$

— сходятся по условию

$\Rightarrow$ по признаку Вейерштрасса $\int\limits_a^\omega \varphi(\tau, x)\,dx$ сходится равномерно ∎

6. Свойства равномерно сходящегося несобственного интеграла. Теорема о дифференцировании по параметру под знаком несобственного интеграла. Теорема о собственном интегрировании по параметру под знаком несобственного интеграла. Теорема о несобственном интегрировании по параметру под знаком несобственного интеграла.

6.1. TBD

7. Эйлеровы B- и Г- функции. Определение B-функции, ее область определения и свойства: симметричность, формула понижения, случайно натурально-значных аргументов. Формула Эйлера – Гаусса. Формула дополнения (с использованием разложения $\sin$ в бесконечное произведение без доказательства). Связь между B- и Г-функциями.

7.1. TBD

8. Абстрактные ряды Фурье. Пространство квадратично-интегрируемых функций $\mathcal{R}_2$ (определение). Скалярное произведение и норма в этом пространстве (определение). Ортогональная и ортонормированная система элементов (определение). Стандартная тригонометрическая система на $[-\pi;\pi]$, ее ортогональность и нормы элементов. Ряд в пространстве квадратично-интегрируемых функций и его сходимость (определение). Непрерывность скалярного произведения. Равенство Парсеваля.

8.1. TBD

9. Абстрактные ряды фурье. Коэффициенты и ряды Фурье (определение). Коэффициенты и ряд Фурье по стандартной тригонометрической системе на $[-\pi;\pi]$. Лемма о перпендикуляре. Неравенство Бесселя. Из полноты пространства следует сходимость ряда Фурье. Ряд и частичная сумма ряда Фурье как наилучшее приближение. Полная ортогональная система (определение). Критерии полноты ортогональной системы (представимость любого элемента его рядом Фурье; равенство Парсеваля; отсутствие ненулевого элемента, ортогонального всем элементам системы).

9.1. TBD

10. Тригонометрический ряд Фурье. Теорема о сходимости тригонометрического ряда Фурье в средне-квадратичном (без доказательства полноты тригонометрической системы). Представление частичной суммы ряда Фурье через ядро Дирихле. Лемма Римана. Условие Дини и теорема о поточечной сходимости ряда Фурье. Разложение $\sin$ в бесконечное произведение.

10.1. TBD

11. Тригонометрический ряд Фурье. Теорема о почленном дифференцировании ряда Фурье. Теорема о связи гладкости функции и скорости убывания ее коэффициентов Фурье. Теорема о связи гладкости функции и скорости сходимости ее ряда Фурье. Теорема о полноте тригонометрической системы.

11.1. TBD