

# Математический анализ, Коллоквиум 4

Балюк Игорь

@lodthe, [GitHub](#)

Материалы предоставил Егор Косов.

Дата изменения: 2020.05.30 в 17:45

## Содержание

<b>1</b>	<b>Метрические и нормированные пространства. Скалярное произведение и евклидово пространство. Неравенство Коши-Буняковского. Сходимость в метрических пространствах, открытые и замкнутые множества, предельные точки. Открытость открытого шара. Эквивалентное описание замкнутых множеств.</b>	<b>3</b>
1.1	Метрические и нормированные пространства. . . . .	3
1.2	Скалярное произведение и евклидово пространство. . . . .	3
1.3	Неравенство Коши-Буняковского . . . . .	3
1.4	Сходимость в метрических пространствах, открытые и замкнутые множества, предельные точки. . . . .	4
1.5	Открытость открытого шара. Эквивалентное описание замкнутых множеств. . . . .	4
<b>2</b>	<b>Полные метрические пространства, полнота <math>\mathbb{R}^k</math>. Непрерывные отображения в метрических пространствах: определения, доказательства их эквивалентностей, основные свойства.</b>	<b>5</b>
2.1	Полные метрические пространства, полнота $\mathbb{R}^k$ . . . . .	5
2.2	Непрерывные отображения в метрических пространствах: определения, доказательства их эквивалентностей, основные свойства. . . . .	5
<b>3</b>	<b>Компакты в метрических пространствах: определение и основные свойства. Образ компакта при непрерывном отображении. Критерий компактности в <math>\mathbb{R}^k</math>. Свойства непрерывных на компакте функций.</b>	<b>6</b>
3.1	Компакты в метрических пространствах: определение и основные свойства. Образ компакта при непрерывном отображении. . . . .	6
3.2	Критерий компактности в $\mathbb{R}^k$ . . . . .	6
3.3	Свойства непрерывных на компакте функций. . . . .	6
<b>4</b>	<b>Дифференцируемость отображений из <math>\mathbb{R}^k</math> в <math>\mathbb{R}^m</math>, дифференциал. Непрерывность дифференцируемых отображений. Производная вдоль вектора и ее связь с дифференциалом. Частные производные.</b>	<b>6</b>
4.1	Дифференцируемость отображений из $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^m$ , дифференциал. . . . .	6
4.2	Непрерывность дифференцируемых отображений. . . . .	7
4.3	Производная вдоль вектора и ее связь с дифференциалом. . . . .	7
4.4	Частные производные. . . . .	7
<b>5</b>	<b>Градиент функции и матрица Якоби отображения. Градиент, как направление наибольшего роста функции. Достаточное условие дифференцируемости функции в точке.</b>	<b>8</b>
5.1	Градиент функции и матрица Якоби отображения. . . . .	8
5.2	Градиент, как направление наибольшего роста функции. . . . .	8
5.3	Достаточное условие дифференцируемости функции в точке. . . . .	8
<b>6</b>	<b>Частные производные высоких порядков. Теоремы Шварца (б/д) и Юнга. Дифференциалы высоких порядков.</b>	<b>8</b>
6.1	Частные производные высоких порядков. . . . .	8
6.2	Теоремы Шварца и Юнга. . . . .	9
6.3	Дифференциалы высоких порядков. . . . .	9
<b>7</b>	<b>Дифференциал суммы и произведения. Дифференциал обратного отображения.</b>	<b>10</b>
7.1	Дифференциал суммы и произведения. . . . .	10
7.2	Дифференциал обратного отображения. . . . .	10

8	Дифференциал композиции. Матрица Якоби композиции, правило вычисления частной производной сложной функции, инвариантность первого дифференциала.	11
8.1	Дифференциал композиции.	11
8.2	Матрица Якоби композиции, правило вычисления частной производной сложной функции, инвариантность первого дифференциала.	12
9	Теорема о неявной функции: постановка вопроса, формулировка общей теоремы и доказательство в случае функции двух переменных.	12
9.1	Теорема о неявной функции: постановка вопроса, формулировка общей теоремы.	12
9.2	Теорема о неявной функции: доказательство в случае функции двух переменных.	13
10	Многомерная формула Тейлора.	14
11	Локальный экстремум: необходимое условие и достаточное условие.	14
12	График функции. Касательная плоскость и касательное пространство к графику функции. Описание касательного пространства, как множества скоростей кривых, проходящих через данную точку.	14
13	Поверхность в $\mathbb{R}^k$ и касательное пространство к ней. Описание касательного пространства к поверхности, заданной системой уравнений (доказательство в случае одного уравнения).	14
14	Формулировки теорем о неявном отображении и обратной функции. Параметрически заданные поверхности. Описание касательного пространства к поверхности, заданной параметрически.	14
15	Условный экстремум и метод множителей Лагранжа. Достаточное условие локального экстремума	14

Исходный код предоставил Егор Косов. В данном файле я попытался исправить опечатки и облегчить некоторые моменты для понимания.

[Оригинальный список вопросов](#)

# 1 Метрические и нормированные пространства. Скалярное произведение и евклидово пространство. Неравенство Коши-Буняковского. Сходимость в метрических пространствах, открытые и замкнутые множества, предельные точки. Открытость открытого шара. Эквивалентное описание замкнутых множеств.

[Оригинальный конспект.](#)

## 1.1 Метрические и нормированные пространства.

**Определение.** Пусть  $X$  — множество. Функция  $d : X \times X \rightarrow [0; +\infty)$  называется метрикой, если

1.  $d(x, y) = 0 \iff x = y$ ;
2.  $d(x, y) = d(y, x) \forall x, y \in X$ ;
3.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \forall x, y, z \in X$ .

Пара  $(X, d)$  называется метрическим пространством.

**Определение.** Пусть  $X$  — линейное пространство. Функция  $\|\cdot\| : X \rightarrow [0; +\infty)$  называется нормой, если:

1.  $\|x\| = 0 \iff x = 0$ ;
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall x \in X$ ;
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \forall x, y \in X$ .

Пара  $(X, \|\cdot\|)$  называется нормированным пространством.

Нормой является привычной нам длина вектора. Аналогично метрике, мы будем часто работать с Евклидовой нормой: пусть  $x \in \mathbb{R}^n$ , тогда  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ .

Всякое нормированное пространство является метрическим с метрикой  $d(x, y) = \|x - y\|$ .

## 1.2 Скалярное произведение и евклидово пространство.

**Определение.** Пусть  $X$  — линейное пространство. Функция  $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  называется скалярным произведением, если для всех  $x, y, z \in X$  и всех  $a, b \in \mathbb{R}$  выполнены следующие условия:

1.  $\langle x, x \rangle \geq 0$  и  $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$ ;
2.  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ ;
3.  $\langle ax + by, z \rangle = a\langle x, z \rangle + b\langle y, z \rangle$ .

Линейное пространство  $X$  со скалярным произведением называется Евклидовым.

Мы будем часто работать со следующим скалярным произведением: пусть  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , тогда  $\langle x, y \rangle = x_1 \cdot y_1 + \dots + x_n \cdot y_n$ .

## 1.3 Неравенство Коши-Буняковского

**Лемма.** (Неравенство Коши-Буняковского) Пусть  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  скалярное произведение на линейном пространстве  $X$ , тогда  $\forall x, y \in X$

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y \rangle}.$$

*Доказательство.* Заметим, что для  $\lambda \in \mathbb{R}$  выполнено

$$0 \leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \lambda^2 \langle y, y \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + \langle x, x \rangle.$$

Не ограничивая общности, считаем, что  $\langle y, y \rangle > 0$  (иначе  $y$  — нулевой вектор, доказательство тривиально). Это означает, что ветви параболы смотрят вверх. Но парабола не касается оси  $Ox$ , поэтому дискриминант этого трехчлена неположителен, т.е.  $4|\langle x, y \rangle|^2 - 4\langle y, y \rangle \langle x, x \rangle \leq 0$ . ■

**Следствие.** На евклидовом пространстве функция  $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$  является нормой.

*Доказательство.* Первые два свойства следуют из определения скалярного произведения. Неравенство треугольника следует из неравенства Коши-Буняковского:

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle \leq \|x\|^2 + 2 \cdot |\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2 \|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

■

**Пример.** На линейном пространстве  $\mathbb{R}^k$  всех упорядоченных наборов  $(x_1, \dots, x_k)$  задано скалярное произведение  $\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^k x_j y_j$ . Тем самым, на  $\mathbb{R}^k$  задана естественная евклидова метрика  $\|x - y\| := \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \dots + |x_k - y_k|^2}$ .

## 1.4 Сходимость в метрических пространствах, открытые и замкнутые множества, предельные точки.

**Определение.** Пусть  $(X, d)$  метрическое пространство.

1. Множество

$$B_r(x_0) := \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$$

называется **открытым шаром** радиуса  $r$ .

2. Множество

$$\overline{B}_r(x_0) := \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq r\}$$

называется **замкнутым шаром** радиуса  $r$ .

3. Последовательность точек  $x_n \in X$  называется **сходящейся к точке**  $x$ , если для всякого  $\varepsilon > 0$  найдется такой номер  $N(\varepsilon)$ , что  $d(x, x_n) < \varepsilon$  для каждого  $n \geq N(\varepsilon)$ .

4. Последовательность точек  $x_n \in X$  называется **фундаментальной**, если для всякого  $\varepsilon > 0$  найдется такой номер  $N(\varepsilon)$ , что  $d(x_k, x_n) < \varepsilon$  для всех  $k, n \geq N(\varepsilon)$ .

5. Точка  $x$  называется **предельной** для множества  $M \subset X$ , если для всякого  $\varepsilon > 0$  выполнено  $B_\varepsilon(x) \cap (M \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ .

6. Множество  $U \subset X$  называется **открытым**, если для всякого  $x \in U$  найдется такое  $\varepsilon > 0$ , что  $B_\varepsilon(x) \subset U$ .

7. Множество  $F \subset X$  называется **замкнутым**, если множество  $X \setminus F$  открыто.

## 1.5 Открытость открытого шара. Эквивалентное описание замкнутых множеств.

**Лемма.** Пусть  $(X, d)$  метрическое пространство. Тогда

1. если  $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$ , то  $d(x_n, y_n) \rightarrow d(x, y)$ ;
2. предел сходящейся последовательности единственный;
3. любой открытый шар является открытым множеством;
4. множество  $F$  замкнуто тогда и только тогда, когда множество  $F$  содержит все свои предельные точки.

*Доказательство.*

1. Следует из оценки

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq |d(x_n, y_n) - d(x_n, y)| + |d(x_n, y) - d(x, y)| \leq d(y_n, y) + d(x_n, x).$$

2. Следует из пункта 1).

3. Если  $x \in B_r(x_0)$ , то по неравенству треугольника  $B_\varepsilon(x) \subset B_r(x_0)$  при  $\varepsilon + d(x, x_0) < r$ .

4. Множество  $F$  замкнуто тогда и только тогда, когда  $\forall x \notin F \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon \cap F = \emptyset \iff$  всякая точка  $x \notin F$  — не предельная для  $F$ .

■

## 2 Полные метрические пространства, полнота $\mathbb{R}^k$ . Непрерывные отображения в метрических пространствах: определения, доказательства их эквивалентностей, основные свойства.

### 2.1 Полные метрические пространства, полнота $\mathbb{R}^k$ .

**Определение.** Метрическое пространство называется полным, если каждая фундаментальная последовательность в нем сходится.

**Замечание.** На  $\mathbb{R}^k$  справедливы соотношения

$$\max_{1 \leq j \leq k} |x_j| \leq \|x_j\| \leq \sqrt{k} \cdot \max_{1 \leq j \leq k} |x_j|$$

для векторов  $x = (x_1, \dots, x_k)$ . Тем самым, последовательность  $x_n \rightarrow x$  в  $\mathbb{R}^k$  тогда и только тогда, когда  $(x_n)_j \rightarrow x_j$ .

**Пример.** Пространство  $\mathbb{R}^k$  со стандартной евклидовой метрикой полное. Действительно, если последовательность векторов  $x_n \in \mathbb{R}^k$  фундаментальна, то фундаментальны и последовательности координат  $\{(x_n)_j\}_{j=1}^\infty$  для всякого  $j \in \{1, \dots, k\}$ .

Тем самым, у  $j$ -ой координаты есть предел  $x_j$  для каждого  $j \in \{1, \dots, k\}$ . То есть  $|(x_n)_j - x_j| \rightarrow 0$ . Значит,  $x_n \rightarrow x := (x_1, \dots, x_k)$ .

**Пример.** Пусть  $X = [0; \pi/2)$ . Пространство  $X$  не является полным с метрикой  $d_1(x, y) = |x - y|$ , но является полным с метрикой  $d_2(x, y) = |\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y|$ .

### 2.2 Непрерывные отображения в метрических пространствах: определения, доказательства их эквивалентностей, основные свойства.

**Определение.** Пусть  $(X, d_X)$  и  $(Y, d_Y)$  — два метрических пространства. Отображение  $f : X \rightarrow Y$  называется непрерывным в точке  $x_0 \in X$ , если для всякой последовательности  $x_n \rightarrow x_0$  выполнено  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ .

**Лемма.** Пусть  $(X, d_X)$  и  $(Y, d_Y)$  — два метрических пространства.

1. Отображение  $f : X \rightarrow Y$  является непрерывным в точке  $x \in X$  тогда и только тогда, когда для всякого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta > 0$  такое, что  $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ , если  $d_X(x, x_0) < \delta$ .
2. Отображение  $f : X \rightarrow Y$  является непрерывным в каждой точке  $x \in X$  тогда и только тогда, когда прообраз каждого открытого множества в  $Y$  будет открытым множеством в  $X$  (такие отображения будем называть просто непрерывными).

*Доказательство.*

1. Отображение  $f$  разрывно в точке  $x_0 \iff$  найдется последовательность  $x_n \rightarrow x_0$ , для которой  $f(x_n)$  не сходится к  $f(x_0) \iff$  найдется число  $\varepsilon > 0$  и последовательность  $x'_n \rightarrow x_0$ , для которой  $d_Y(f(x'_n), f(x_0)) \geq \varepsilon \iff$  найдется такое число  $\varepsilon > 0$ , что для произвольного  $\delta > 0$  существует  $x_\delta \in B_\delta(x_0)$ , для которого  $d_Y(f(x_\delta), f(x_0)) \geq \varepsilon$ .
2. Если прообраз любого открытого множества открыт, то для произвольного  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta > 0$ , что  $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0))) \supset B_\delta(x_0)$ , и значит отображение  $f$  непрерывно в точке  $x_0$ . Наоборот: пусть  $U$  — открыто в  $Y$  и  $x_0 \in f^{-1}(U)$ . Тогда в силу открытости найдется  $\varepsilon > 0$ , для которого  $B_\varepsilon(f(x_0)) \subset U$ . Из-за непрерывности в точке  $x_0$  найдется такое  $\delta > 0$ , что  $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0))) \supset B_\delta(x_0)$ , что дает открытость множества  $f^{-1}(U)$ . ■

**Предложение.** Пусть  $f : X \rightarrow Y$  непрерывна в точке  $a \in X$ ,  $g : Y \rightarrow Z$  непрерывна в точке  $f(a) \in Y$ . Тогда композиция  $g \circ f : X \rightarrow Z$  непрерывна в точке  $a$ .

*Доказательство.* Следует из определения непрерывности. TODO() ■

**Следствие.** Пусть  $f, g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$  — непрерывные в точке  $a$  функции. Тогда  $f + g$  и  $f \cdot g$  — непрерывны в точке  $a$ .

*Доказательство.* Следует из того, что отображение  $(x_1, x_2) \rightarrow x_1 + x_2$  и  $(x_1, x_2) \rightarrow x_1 \cdot x_2$  непрерывны на  $\mathbb{R}^2$ . ■

**Определение.** Пусть  $(X, d_X)$  и  $(Y, d_Y)$  — метрические пространства и пусть  $x_0$  — предельная точка в  $X$ . Скажем, что предел функции  $f : X \rightarrow Y$  в точке  $x_0$  равен  $y_0$ , если функция  $g$ , определенная соотношением  $g(x) = f(x)$  при  $x \neq x_0$  и  $g(x_0) = y_0$  иначе, непрерывна в точке  $x_0$ .

### 3 Компакты в метрических пространствах: определение и основные свойства. Образ компакта при непрерывном отображении. Критерий компактности в $\mathbb{R}^k$ . Свойства непрерывных на компакте функций.

#### 3.1 Компакты в метрических пространствах: определение и основные свойства. Образ компакта при непрерывном отображении.

**Определение.** Множество  $K$  в метрическом пространстве называется компактным тогда и только тогда, когда из произвольной последовательности  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$  можно выделить сходящуюся подпоследовательность  $x_{n_k} \rightarrow x \in K$ .

**Лемма.** Пусть  $K$  — компакт. Тогда

1.  $K$  — ограниченное множество;
2.  $K$  — замкнутое множество;
3. образ  $K$  при непрерывном отображении компактен.

*Доказательство.*

1. Зафиксируем произвольную точку  $x_0 \in K$ . Если  $K$  — неограниченное множество, то найдется последовательность  $x_n \in K$ ,  $d(x_n, x_0) \rightarrow \infty$ . Переходя к подпоследовательности, имеем  $x_{n_k} \rightarrow x$ ,  $d(x_{n_k}, x_0) \rightarrow d(x, x_0)$ . Противоречие.
2. Если  $x_n \in K$ ,  $x_n \rightarrow x_0$ , то переходя к подпоследовательности  $x_{n_k} \rightarrow x \in K$ , в силу единственности предела  $x_0 = x \in K$ .
3. Рассмотрим последовательность  $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $x_n \in K$ . Переходя к подпоследовательности имеем  $x_{n_k} \rightarrow x \in K$ . Так как  $f$  — непрерывное отображение, то  $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x) \in f(K)$ .

■

#### 3.2 Критерий компактности в $\mathbb{R}^k$ .

**Предложение.** Множество  $K$  в  $\mathbb{R}^k$  со стандартной евклидовой метрикой компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.

*Доказательство.* Необходимость этого условия следует из предыдущей леммы. Проверим достаточность. Пусть множество  $K$  — замкнуто и ограничено, и пусть  $x_n \in K$ . В силу ограниченности  $K$  ограниченными будут и все координаты  $(x_n)_j$  последовательности  $x_n$ . Тогда найдется сходящаяся подпоследовательность первых координат  $(x_{n_m})_1$ . Далее, из последовательности  $(x_{n_m})_2$  можно также извлечь сходящуюся подпоследовательность. Повторяя процедуру, получим подпоследовательность  $x'_n$ , у которой каждая координата сходится, то есть  $(x'_n)_j \rightarrow x_j$  для некоторого  $x_j$ . Тем самым,  $x'_n \rightarrow x = (x_1, \dots, x_k)$ . В силу замкнутости  $K$ , вектор  $x \in K$ .

■

#### 3.3 Свойства непрерывных на компакте функций.

**Следствие.** Пусть  $K$  — компакт,  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная функция. Тогда образ  $f(K)$  — ограниченное множество и найдутся точки  $x_m, x_M \in K$ , для которых  $f(x_m) = \inf_{x \in K} f(x)$ ,  $f(x_M) = \sup_{x \in K} f(x)$ .

### 4 Дифференцируемость отображений из $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^m$ , дифференциал. Непрерывность дифференцируемых отображений. Производная вдоль вектора и ее связь с дифференциалом. Частные производные.

#### 4.1 Дифференцируемость отображений из $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^m$ , дифференциал.

**Определение.** Отображение  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$  называется дифференцируемым в точке  $x$ , если для каждого  $h \in \mathbb{R}^k$

$$f(x+h) = f(x) + Lh + \alpha(h) \|h\|,$$

где  $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$  — линейное отображение,  $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \|\alpha(h)\| = 0$ . Линейное отображение  $L$  называют дифференциалом  $f$  в точке  $x$  и обозначают  $df$ .

**Замечание.** Напомним, что отображение  $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$  называется линейным, если

$$L(a_1 h_1 + a_2 h_2) = a_1 L h_1 + a_2 L h_2$$

для произвольных векторов  $h_1, h_2 \in \mathbb{R}^k$  и произвольных чисел  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ .

Если в  $\mathbb{R}^k$  фиксирован базис  $e := \{e_1, \dots, e_k\}$ , а в  $\mathbb{R}^m$  фиксирован  $e' := \{e'_1, \dots, e'_m\}$ , то линейное отображение  $L$  представимо в виде  $L(h) = L(e_1)h_1 + \dots + L(e_k)h_k$ , где  $h = (h_1, \dots, h_k)$  в базисе  $e$ , а векторы  $L(e_j) = (e_{1,j}, \dots, e_{m,j})$  в базисе  $e'$ .

В частности, каждое линейное отображение при фиксированных базисах  $e$  и  $e'$  в  $\mathbb{R}^k$  и  $\mathbb{R}^m$  соответственно записывается с помощью матрицы  $A = (a_{ij})$ . Кроме того,

$$\|Lh\| \leq (\|L(e_1)\| + \dots + \|L(e_k)\|) \cdot \max_{1 \leq j \leq k} |h_j| \leq C \|h\|$$

и каждое линейное отображение непрерывно на  $\mathbb{R}^k$ .

## 4.2 Непрерывность дифференцируемых отображений.

**Следствие.** Если отображение  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$  дифференцируемо в точке  $x$ , то оно непрерывно в точке  $x$ .

*Доказательство.* Действительно,  $\|f(x+h) - f(x)\| = \|df(h) + \alpha(h)\| \leq C \|h\|$  при  $h$  из некоторой окрестности нуля. ■

**Замечание.** Так как дифференцируемость  $f$  в точке  $x$  равносильна тому, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Lh\|}{\|h\|} = 0,$$

и так как сходимость по норме равносильна покоординатной сходимости, то при фиксированном базисе  $e' := \{e'_1, \dots, e'_m\}$  в  $\mathbb{R}^m$  дифференцируемость отображения  $f$  равносильна дифференцируемости каждой координаты  $f_j$  в точке  $x$ . В этом случае  $Lh = (L_1 h, \dots, L_m h)$  в базисе  $e'$ , где  $L_j = df_j$  — дифференциал  $j$ -ой координаты.

**Лемма.** Если отображение  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$  дифференцируемо в точке  $x$ , то для каждого вектора  $h \in \mathbb{R}^k$  функция  $t \rightarrow f(x+th)$  дифференцируема в точке 0 и  $\left. \frac{d}{dt} f(x+th) \right|_{t=0} = df(h)$ .

*Доказательство.* По определению

$$f(x+th) - f(x) = t df(h) + t\alpha(th) \|h\|.$$

Разделив на  $t$  и перейдя к пределу при  $t \rightarrow 0$ , получаем требуемое соотношение. ■

## 4.3 Производная вдоль вектора и ее связь с дифференциалом.

**Определение.** Производная  $\frac{\partial f}{\partial h}(x) := \left. \frac{d}{dt} f(x+th) \right|_{t=0}$  называется производной вдоль вектора  $h$  и может существовать и в случае, когда сама функция  $f$  не дифференцируема в точке  $x$ .

Как мы уже поняли, для дифференцируемости отображения достаточно исследовать дифференцируемость его координат, то есть дифференцируемость функции  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ . Зафиксировав базис  $e := \{e_1, \dots, e_k\}$  в  $\mathbb{R}^n$ , условие дифференцируемости в точке  $x = (x_1, \dots, x_k)$  переписывается в виде

$$f(x_1 + h_1, \dots, x_k + h_k) - f(x_1, \dots, x_k) = c_1 h_1 + \dots + c_k h_k + \bar{o}(\|h\|),$$

то есть  $df(h) = c_1 h_1 + \dots + c_k h_k$ . Из уже доказанного ясно, что  $\frac{\partial f}{\partial e_j}(x) = df(e_j) = c_j$ .

## 4.4 Частные производные.

**Определение.** Частной производной  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  функции  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  в точке  $x = (x_1, \dots, x_k)$  называется производная вдоль вектора  $e_j$ , то есть

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \left. \frac{d}{dt} f(x_1, \dots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \dots, x_k) \right|_{t=x_j}.$$

**Замечание.** При фиксированном базисе  $e = \{e_1, \dots, e_k\}$  в  $\mathbb{R}^k$  линейные функционалы  $dx_1, \dots, dx_k$  оказываются сопряженным базисом к  $e$ . То есть  $dx_i(e_j) = \delta_{i,j}$ . Таким образом,  $df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k$ .

**Замечание.** В случае отображения  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$  при фиксированных базисах  $e$  и  $e'$  в  $\mathbb{R}^k$  и в  $\mathbb{R}^m$  соответственно, компоненты матрицы дифференциала  $df$  имеют вид  $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ , то есть по строкам написаны градиенты  $\nabla f_i(x)$ .

## 5 Градиент функции и матрица Якоби отображения. Градиент, как направление наибольшего роста функции. Достаточное условие дифференцируемости функции в точке.

### 5.1 Градиент функции и матрица Якоби отображения.

**Определение.** При фиксированных базисах  $e$  в  $\mathbb{R}^k$  и  $e'$  в  $\mathbb{R}^m$  матрицу, соответствующую линейному отображению  $df$ , называют матрицей Якоби отображения  $f$  в точке  $x$  и обозначают  $J_f(x)$ .

**Определение.** Градиентом функции  $f$  называется вектор  $\nabla f := \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$ .

### 5.2 Градиент, как направление наибольшего роста функции.

**Лемма.** Если  $f$  дифференцируема в точке  $x$  и  $df \neq 0$ , то наибольшее значение производной вдоль единичного вектора  $v$  (т.е.  $\|v\| = 1$ ) достигается на векторе  $\|\nabla f(x)\|^{-1} \nabla f(x)$ .

*Доказательство.* Так как  $\frac{\partial f}{\partial v}(x) = df(v) = \langle \nabla f(x), v \rangle$ , то по неравенству Коши–Буняковского  $\left| \frac{\partial f}{\partial v}(x) \right| \leq \|\nabla f(x)\| \|v\| = \|\nabla f(x)\|$ . Если  $v = \|\nabla f(x)\|^{-1} \nabla f(x)$ , то в неравенстве достигается равенство. ■

Заметим, что наличия частных производных в точке недостаточно для дифференцируемости функции в этой точке.

**Пример.** Пусть

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Функция  $f$  разрывна в нуле, а значит не дифференцируема, но в точке  $(0, 0)$  существуют обе частных производных. Действительно, если  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ , то функция  $f(x, y) = \sin 2\varphi$ . Таким образом,  $f(x, y)$  в любой окрестности точки  $(0, 0)$  принимает значения  $\pm 1$ , но  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{d}{dx} f(x, 0) = 0$ . Аналогично  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ .

### 5.3 Достаточное условие дифференцируемости функции в точке.

В следующей теореме сформулировано достаточное условие дифференцируемости.

**Теорема.** Если все частные производные  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  существуют в окрестности точки  $x_0$  и непрерывны в этой точке, то  $f$  — дифференцируема в точке  $x_0$ .

*Доказательство.* Для сокращения выкладок докажем теорему в случае  $k = 2$ . Заметим, что

$$\begin{aligned} f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2) &= f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2 + h_2) + f(x_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2 + h_2)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \xi_2)h_2, \end{aligned}$$

где  $\xi_1$  принадлежит интервалу с концами  $x_1$ ,  $x_1 + h_1$ , а  $\xi_2$  — с концами  $x_2$ ,  $x_2 + h_2$ . Запишем теперь последнюю сумму в виде

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)h_2 + \alpha(h)\|h\|,$$

где

$$\alpha(h) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2 + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) \right) \frac{h_1}{\|h\|} + \left( \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \xi_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right) \frac{h_2}{\|h\|}.$$

При малой  $\|h\|$  выражения в скобках будут малы в силу непрерывности частных производных. Тем самым,  $\lim_{h \rightarrow 0} \|\alpha(h)\| = 0$ . ■

## 6 Частные производные высоких порядков. Теоремы Шварца (б/д) и Юнга. Дифференциалы высоких порядков.

### 6.1 Частные производные высоких порядков.

**Определение.** Пусть  $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  и предположим, что в некоторой окрестности  $B_r(x_0)$  точки  $x_0$  существует частная производная  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ . Если функция  $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$  в точке  $x_0$  имеет частную производную по переменной  $x_i$ , то эта частная



производная  $\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) (x_0)$  называется *частной производной второго порядка* по переменным  $x_j$  и  $x_i$  и обозначается  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (x_0)$ .

**Замечание.** Заметим, что частные производные  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$  и  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$  являются разными объектами и, вообще говоря, не совпадают (пример будет в рамках семинарских задач).

## 6.2 Теоремы Шварца и Юнга.

О совпадении смешанных частных производных позволяют судить следующие две теоремы, которые мы для простоты сформулируем в двумерном случае (общий случай, по сути, ничем не отличается).

**Теорема 1** (Шварц). Пусть смешанные частные производные  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  и  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  существуют в окрестности точки  $(x_0, y_0)$  и непрерывны в этой точке. Тогда их значения в точке  $(x_0, y_0)$  совпадают.

**Теорема 2** (Юнг). Пусть  $f$  — дифференцируема в окрестности точки  $(x_0, y_0)$ , а ее частные производные  $\frac{\partial f}{\partial x}$  и  $\frac{\partial f}{\partial y}$  дифференцируемы в точке  $(x_0, y_0)$ . Тогда смешанные частные производные  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  и  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  в точке  $(x_0, y_0)$  совпадают.

Приведем доказательство второй из этих теорем.

*Доказательство.* Не ограничивая общности, будем считать, что  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ . Рассмотрим функцию

$$F(t, t) = f(t, t) - f(0, t) - f(t, 0) + f(0, 0).$$

Применяя теорему Лагранжа к функции  $g(u) = f(t, u) - f(0, u)$ , получаем

$$F(t, t) = g(t) - g(0) = g'(\xi)t = \left( \frac{\partial f}{\partial y}(t, \xi) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, \xi) \right) t.$$

Дифференцируемость  $\frac{\partial f}{\partial y}$  в точке  $(0, 0)$  означает, что

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)x + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0)y + \bar{o}(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

Таким образом,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t, \xi) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)t + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0)\xi + \bar{o}(\sqrt{t^2 + \xi^2}).$$

и

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, \xi) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0)\xi + \bar{o}(\xi).$$

Т.к.  $\xi \leq t$ , то  $\bar{o}(\sqrt{t^2 + \xi^2}) = \bar{o}(t)$  и  $\bar{o}(\xi) = \bar{o}(t)$ . Таким образом,

$$F(t, t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)t^2 + \bar{o}(t^2).$$

Аналогично,

$$F(t, t) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)t^2 + \bar{o}(t^2).$$

Приравняв полученные выражения, поделив на  $t^2$  и устремив  $t$  к нулю, получаем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0).$$

■

## 6.3 Дифференциалы высоких порядков.

Предположим, что  $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  — дифференцируема в окрестности точки  $a$  и предположим, что ее частные производные  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  дифференцируемы в точке  $a$ . Тогда при каждом  $h \in \mathbb{R}^k$  возникает функция  $x \mapsto df|_x(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)h_k$ , дифференцируемая в точке  $a$ .

Ее дифференциал  $d(df(h))|_a(q) = \left( \sum_{j=1}^k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_1}(a) q_j \right) h_1 + \dots + \left( \sum_{j=1}^k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a) q_j \right) h_k$ .

То есть получена билинейная форма  $d(df(h))|_a(q) = \sum_{i,j=1}^k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) q_j h_i$ . Эта билинейная форма оказывается симметричной по теореме Юнга, а т.к. симметричная билинейная форма однозначно задается своей квадратичной формой  $d(df(h))|_a(h) = \sum_{i,j=1}^k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) h_j h_i = \sum_{i,j=1}^k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) dx_j(h) dx_i(h)$ , то эту квадратичную форму  $d^2 f := \sum_{i,j=1}^k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) dx_j dx_i$  и называют **вторым дифференциалом** функции  $f$ .

Аналогично определяется дифференциал  $n$ -го порядка:

**Определение.** Если  $f$  —  $n$  раз дифференцируема в точке  $a$ , то

$$d^n f|_a := \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_n \leq k} \frac{\partial^n f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_n}}(a) dx_{j_1} \dots dx_{j_n}.$$

Последняя запись означает лишь то, что при вычислении  $n$ -го дифференциала на векторе  $h \in \mathbb{R}^k$  надо воспользоваться линейностью, а  $[dx_{j_1} \dots dx_{j_n}](h) := dx_{j_1}(h) \dots dx_{j_n}(h) = h_{j_1} \dots h_{j_n}$ .

## 7 Дифференциал суммы и произведения. Дифференциал обратного отображения.

### 7.1 Дифференциал суммы и произведения.

**Теорема.** Пусть функции  $f, g: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируемы в некоторой точке  $x$ . Тогда, для произвольных чисел  $a, b \in \mathbb{R}$ , функции  $af + bg$  и  $fg$  дифференцируемы в точке  $x$  и  $d(af + bg) = a df + b dg$  и  $d(fg) = f dg + g df$ .

*Доказательство.* Заметим, что

$$\begin{aligned} (af + bg)(x + h) - (af + bg)(x) &= a(f(x + h) - f(x)) + b(g(x + h) - g(x)) \\ &= a(df(h) + \bar{o}(\|h\|)) + b(dg(h) + \bar{o}(\|h\|)) = a df(h) + b dg(h) + \bar{o}(\|h\|). \end{aligned}$$

Таким образом,  $d(af + bg) = a df + b dg$ .

Для доказательства второго равенства заметим, что

$$\begin{aligned} (fg)(x + h) - (fg)(x) &= (f(x + h) - f(x))g(x + h) + f(x)(g(x + h) - g(x)) \\ &= (df(h) + \bar{o}(\|h\|))(g(x) + \bar{o}(1)) + f(x)(dg(h) + \bar{o}(\|h\|)) \\ &= g(x) df(h) + f(x) dg(h) + (df(h))\bar{o}(1) + g(x)\bar{o}(\|h\|) + f(x)\bar{o}(\|h\|) + \bar{o}(\|h\|). \end{aligned}$$

Мы использовали непрерывность функции  $g$ , т.е.  $g(x + h) - g(x) = \bar{o}(1)$  при  $\|h\| \rightarrow 0$ , в силу ее дифференцируемости в точке  $x$ .

Так как  $df$  — линейное отображение, то для некоторого числа  $C > 0$  выполнено  $|df(h)| \leq C\|h\|$ , а значит  $(df(h))\bar{o}(1) = \bar{o}(\|h\|)$ . Т.к.  $f(x)$  и  $g(x)$  просто числа, то  $g(x)\bar{o}(\|h\|) + f(x)\bar{o}(\|h\|) = \bar{o}(\|h\|)$ . Таким образом, теорема доказана. ■

### 7.2 Дифференциал обратного отображения.

**Теорема.** Пусть  $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  — есть непрерывная биекция между окрестностями  $U(a)$  и  $V(f(a))$ , причем обратное отображение  $f^{-1}: V(f(a)) \rightarrow U(a)$  также непрерывно (т.е.  $f$  — гомеоморфизм между  $U(a)$  и  $V(f(a))$ ).

Предположим, что  $f$  — дифференцируемо в точке  $a$  и  $df$  — обратимое линейное отображение. Тогда  $f^{-1}$  — дифференцируемо в точке  $f(a)$  и  $df^{-1}|_{f(a)} = (df|_a)^{-1}$ .

*Доказательство.* Нам нужно проверить, что

$$\lim_{\|q\| \rightarrow 0} \frac{\|f^{-1}(f(a) + q) - f^{-1}(f(a)) - (df)^{-1}(q)\|}{\|q\|} = 0.$$

Пусть  $h = f^{-1}(f(a) + q) - f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(f(a) + q) - a$ , тогда  $q = f(a + h) - f(a)$  и  $\|q\| \rightarrow 0$  тогда и только тогда, когда  $\|h\| \rightarrow 0$ .

Так как  $f$  — дифференцируемо в точке  $a$ , то

$$f(a + h) - f(a) = df(h) + \alpha(h)\|h\|,$$

где  $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \|\alpha(h)\| = 0$ .  
Таким образом,

$$\lim_{\|q\| \rightarrow 0} \frac{\|f^{-1}(f(a) + q) - f^{-1}(f(a)) - (df)^{-1}(q)\|}{\|q\|} = \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|h - (df)^{-1}(df(h) + \alpha(h)\|h\|)\|}{\|df(h) + \alpha(h)\|h\|}.$$

Числитель в последнем выражении равен  $\|h\| \|(df)^{-1}(\alpha(h))\|$ . Для линейного отображения  $(df)^{-1}$  найдется число  $C > 0$ , для которого  $\|(df)^{-1}(p)\| \leq C\|p\|, \forall p \in \mathbb{R}^k$ .

Отсюда, подставив  $p = df(h)$ , получаем  $C^{-1}\|h\| \leq \|df(h)\|$ . Тем самым

$$\|df(h) + \alpha(h)\|h\| \geq \|df(h)\| - \|h\|\|\alpha(h)\| \geq \|h\|(C^{-1} - \|\alpha(h)\|).$$

Таким образом,

$$\frac{\|h - (df)^{-1}(df(h) + \alpha(h)\|h\|)\|}{\|df(h) + \alpha(h)\|h\|} \leq \frac{C\|h\|\|\alpha(h)\|}{\|h\|(C^{-1} - \|\alpha(h)\|)} = \frac{C\|\alpha(h)\|}{(C^{-1} - \|\alpha(h)\|)} \rightarrow 0$$

при  $\|h\| \rightarrow 0$ . ■

**Замечание.** Отметим, что матрица обратного линейного отображения есть обратная матрица к матрице исходного линейного отображения. Тем самым, матрица Якоби обратного отображения  $J_{f^{-1}}(y)$  является обратной к матрице Якоби исходного отображения, т.е. равна  $(J_f(f^{-1}(y)))^{-1}$ .

## 8 Дифференциал композиции. Матрица Якоби композиции, правило вычисления частной производной сложной функции, инвариантность первого дифференциала.

### 8.1 Дифференциал композиции.

**Теорема.** Пусть  $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , причем отображение  $f$  дифференцируемо в точке  $a$ , отображение  $g$  дифференцируемо в точке  $f(a)$ . Тогда отображение  $g \circ f$  дифференцируемо в точке  $a$  и  $d(g \circ f)|_a = dg|_{f(a)} \circ df|_a$ .

**Замечание.** Поясним запись  $d(g \circ f)|_a = dg|_{f(a)} \circ df|_a$ . Здесь  $df|_a: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$  есть линейное отображение и  $dg|_{f(a)}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  есть линейное отображение. Тогда их композиция  $dg|_{f(a)} \circ df|_a: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  есть линейное отображение, действующее по правилу

$$dg|_{f(a)} \circ df|_a(h) = dg|_{f(a)}(df|_a(h)).$$

*Доказательство.* По условию  $f(a + h) - f(a) = df(h) + \alpha(h)\|h\|$ , где  $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \|\alpha(h)\| = 0$  и  $g(f(a) + q) - g(f(a)) = dg(q) + \beta(q)\|q\|$ , где  $\lim_{\|q\| \rightarrow 0} \|\beta(q)\| = 0$ . Мы также доопределим  $\alpha$  и  $\beta$  в точке нуль нулем (т.е. считаем  $\alpha(0) = 0$  и  $\beta(0) = 0$ ). Тогда

$$\begin{aligned} g(f(a + h)) - g(f(a)) &= g(f(a) + [f(a + h) - f(a)]) - g(f(a)) \\ &= dg[f(a + h) - f(a)] + \beta(f(a + h) - f(a))\|f(a + h) - f(a)\| \\ &= dg[df(h) + \alpha(h)\|h\|] + \beta(f(a + h) - f(a))\|df(h) + \alpha(h)\|h\|. \end{aligned}$$

Тем самым,

$$g(f(a + h)) - g(f(a)) = dg[df(h)] + \gamma(h)\|h\|,$$

где

$$\begin{aligned} \|\gamma(h)\| &= \|dg[\alpha(h)] + \beta(f(a + h) - f(a))\|df(h/\|h\|) + \alpha(h)\| \| \\ &\leq \|dg[\alpha(h)]\| + \|\beta(f(a + h) - f(a))\|(\|df(h/\|h\|)\| + \|\alpha(h)\|). \end{aligned}$$

Напомним, что для линейных отображений  $dg$  и  $df$  существуют такие постоянные  $A$  и  $B$ , что  $\|df(h)\| \leq A\|h\|$  и  $\|dg(q)\| \leq B\|q\|$ , поэтому  $\|df(h/\|h\|)\| + \|\alpha(h)\| \leq A + \|\alpha(h)\|$  и  $\|dg[\alpha(h)]\| \leq B\|\alpha(h)\|$ .

Так как  $\|\beta(f(a + h) - f(a))\| \rightarrow 0$  при  $\|h\| \rightarrow 0$ , получаем, что  $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \|\gamma(h)\| = 0$ . ■

## 8.2 Матрица Якоби композиции, правило вычисления частной производной сложной функции, инвариантность первого дифференциала.

**Замечание.** При фиксированных базисах  $e = \{e_1, \dots, e_k\}$ ,  $e' = \{e'_1, \dots, e'_m\}$ ,  $e'' = \{e''_1, \dots, e''_n\}$  в  $\mathbb{R}^k$ ,  $\mathbb{R}^m$  и  $\mathbb{R}^n$  соответственно, матрица композиции линейных отображений есть произведение матриц этих линейных отображений.

Таким образом, в нашем случае для композиции функций  $g \circ f$ , где  $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$  и  $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , по предыдущей теореме выполнено

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial(g \circ f)_1}{\partial y_1}(a) & \dots & \frac{\partial(g \circ f)_1}{\partial y_k}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial(g \circ f)_n}{\partial y_1}(a) & \dots & \frac{\partial(g \circ f)_n}{\partial y_k}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(f(a)) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m}(f(a)) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1}(f(a)) & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_m}(f(a)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_k}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_k}(a) \end{pmatrix}$$

В частности, в случае, когда  $n = 1$ , для функции  $g(x_1, \dots, x_m)$  и отображения

$$f(y_1, \dots, y_k) = (f_1(y_1, \dots, y_k), \dots, f_m(y_1, \dots, y_k)),$$

выполнено:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial(g \circ f)}{\partial y_1}(a) & \dots & \frac{\partial(g \circ f)}{\partial y_k}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1}(f(a)) & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_m}(f(a)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_k}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_k}(a) \end{pmatrix}$$

Отсюда, во-первых получаем правило вычисления частной производной сложной функции:  $\frac{\partial(g \circ f)}{\partial y_j}(a) = \frac{\partial g}{\partial x_1}(f(a)) \frac{\partial f_1}{\partial y_j}(a) + \dots + \frac{\partial g}{\partial x_m}(f(a)) \frac{\partial f_m}{\partial y_j}(a)$ . Во-вторых, получаем следующее свойство инвариантности первого дифференциала: для дифференциала выполнено равенство  $dg = \frac{\partial g}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial g}{\partial x_m} dx_m$ , где нам не важно, являются ли  $dx_1, \dots, dx_m$  — дифференциалами независимых переменных или же являются дифференциалами некоторых функций  $x_j = f_j(y_1, \dots, y_k)$ .

**Пример.** Пусть  $f(x, y) = \varphi(u, v, w)$ , где  $u = xy, v = x + y, w = x - y$ . Тогда

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv + \frac{\partial \varphi}{\partial w} dw = \frac{\partial \varphi}{\partial u} d(xy) + \frac{\partial \varphi}{\partial v} d(x+y) + \frac{\partial \varphi}{\partial w} d(x-y) \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial u} (x dy + y dx) + \frac{\partial \varphi}{\partial v} (dx + dy) + \frac{\partial \varphi}{\partial w} (dx - dy). \end{aligned}$$

В частности,  $\frac{\partial f}{\partial x} = y \frac{\partial \varphi}{\partial u}(xy, x+y, x-y) + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(xy, x+y, x-y) + \frac{\partial \varphi}{\partial w}(xy, x+y, x-y)$  и  $\frac{\partial f}{\partial y} = x \frac{\partial \varphi}{\partial u}(xy, x+y, x-y) + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(xy, x+y, x-y) - \frac{\partial \varphi}{\partial w}(xy, x+y, x-y)$ .

## 9 Теорема о неявной функции: постановка вопроса, формулировка общей теоремы и доказательство в случае функции двух переменных.

### 9.1 Теорема о неявной функции: постановка вопроса, формулировка общей теоремы.

Пусть в  $\mathbb{R}^2$  у нас имеется соотношение  $F(x, y) = 0$ . Нам бы хотелось понять при каких условиях данное уравнение возможно разрешить относительно  $y$  в виде явной зависимости  $y = f(x)$ .

Рассмотрим например  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ . Тогда уравнение  $F(x, y) = 0$  задает обычную окружность и все решения данного уравнения относительно  $y$  имеют вид  $y = \pm \sqrt{1 - x^2}$ . Ясно, что произвольный выбор знаков в разных точках  $x$  будет давать бесконечно много решений данного уравнения.

В тоже время в малой окрестности произвольной точки  $(x_0, y_0)$  на окружности (кроме  $x_0 = \pm 1$ ) кривая  $F(x, y) = 0$  единственным образом представима в виде графика непрерывной функции  $y = f(x)$ . В окрестности же точек  $(\pm 1, 0)$  никакая дуга окружности не может быть представлена в виде графика функции  $y = f(x)$ . Зато эти дуги в окрестности точек  $(\pm 1, 0)$  хорошо расположены относительно оси  $y$  и могут быть представлены в виде графика  $x = g(y)$ .

Чем же обусловлена такая особенность точек  $(\pm 1, 0)$  в случае окружности? Заметим, что локально функция  $F(x, y)$  представима в виде  $F(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + \bar{o}(\sqrt{|x - x_0|^2 + |y - y_0|^2})$ .

Таким образом, пренебрегая малыми более высокого порядка, наше уравнение  $F(x, y) = 0$  в окрестности точки  $(x_0, y_0)$  похоже на линейное уравнение  $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$ , которое в свою очередь разрешимо относительно  $y$  только в случае  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ .

В частности, в случае окружности как раз  $\frac{\partial F}{\partial y}(\pm 1, 0) = 0$ . Из данного эвристического рассуждения возникает гипотеза, что уравнение  $F(x, y) = 0$  разрешимо относительно переменной  $y$  в некоторой окрестности данной точки  $(x_0, y_0)$ , если производная  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$  отлична от нуля. Именно это мы и докажем в следующей теореме уже в строго сформулированном виде.

Для сокращения всех записей будем использовать обозначение  $F'_y(x, y) := \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$ .

**Теорема.** Пусть  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  — определена и непрерывно дифференцируема (т.е. частные производные непрерывно зависят от точки) в некоторой окрестности  $U$  точки  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Пусть 1)  $F(a, b) = 0$  и 2)  $F'_y(a, b) \neq 0$ .

Тогда найдутся промежутки  $I_x = (a - \alpha, a + \alpha)$  и  $I_y = (b - \beta, b + \beta)$  и непрерывно дифференцируемая функция  $f: I_x \rightarrow I_y$ , для которых  $I_x \times I_y \subset U$  и для каждой точки  $(x, y) \in I_x \times I_y$  выполнено  $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$ .

Кроме того,  $f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$ .

## 9.2 Теорема о неявной функции: доказательство в случае функции двух переменных.

*Доказательство.*

1. Для определенности считаем, что  $F'_y(a, b) > 0$ . Так как производные функции  $F$  непрерывны в  $U$ , то в малой окрестности  $\{(x, y): \sqrt{|x - a|^2 + |y - b|^2} < 2\beta\}$  точки  $(a, b)$  также выполнено  $F'_y(x, y) > 0$ .

Так как  $F'_y(a, y) > 0$  на отрезке  $[b - \beta, b + \beta]$ , то функция  $y \mapsto F(a, y)$  монотонно возрастает на этом отрезке, откуда

$$F(a, b - \beta) < F(a, b) = 0 < F(a, b + \beta).$$

Так как  $F$  непрерывна в  $U$ , то найдется такое число  $\alpha < \beta$ , что  $F(x, b - \beta) < 0 < F(x, b + \beta)$  при  $x \in (a - \alpha, a + \alpha)$ .

При каждом  $x \in (a - \alpha, a + \alpha)$  рассмотрим функцию  $y \mapsto F(x, y)$ , заданную на отрезке  $[b - \beta, b + \beta]$ . Рассматриваемая функция есть непрерывная строго возрастающая функция на отрезке, причем на концах отрезка данная функция принимает значения разных знаков. Поэтому при каждом  $x \in (a - \alpha, a + \alpha)$  существует единственная точка  $y = f(x)$ , для которой  $F(x, f(x)) = 0$ . Тем самым построена окрестность точки  $(a, b)$  вида  $I_x \times I_y$  в которой построено единственное решение уравнения  $F(x, y) = 0$  относительно переменной  $y$ .

2. Проверим непрерывность построенного решения в точке  $a$ . Ясно, что  $f(a) = b$  в силу единственности нуля у функции  $y \mapsto F(a, y)$  на  $I_y$ . Пусть теперь фиксировано некоторое  $\varepsilon \in (0, \beta)$ . Повторяя рассуждения первой части для интервала  $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$  найдем интервал  $(a - \delta, a + \delta)$  с  $\delta < \alpha$  и функцию  $\tilde{f}: (a - \delta, a + \delta) \rightarrow (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$  для которых  $F(x, y) = 0$  при  $(x, y) \in (a - \delta, a + \delta) \times (b - \varepsilon, b + \varepsilon) \Leftrightarrow y = \tilde{f}(x), x \in (a - \delta, a + \delta)$ .

Так как  $(a - \delta, a + \delta) \subset I_x$  и  $(b - \varepsilon, b + \varepsilon) \subset I_y$ , то в силу единственности решения  $f$  в  $I_x \times I_y$  получаем, что  $f(x) = \tilde{f}(x)$  при  $x \in (a - \delta, a + \delta)$ . Это означает, что  $|f(x) - b| < \varepsilon$  при  $|x - a| < \delta$ .

Теперь проверим непрерывность  $f$  в произвольной точке  $x \in I_x$ . Для этого просто примем за начальную точку построения произвольную точку  $(x, y)$  с  $x \in I_x, y \in I_y$  и повторим рассуждение выше.

3. Докажем непрерывную дифференцируемость  $f$  на  $I_x$  и докажем формулу для вычисления производной. Пусть  $x \in I_x$  и рассмотрим достаточно малое  $\Delta x$ , для которого  $x + \Delta x \in I_x$ . Пусть  $y = f(x) \in I_y$  и  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ . Применим теорему Лагранжа к функции  $t \mapsto F(x + t\Delta x, y + t\Delta y)$ :

$$0 = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = F'_x(x + \xi\Delta x, y + \xi\Delta y)\Delta x + F'_y(x + \xi\Delta x, y + \xi\Delta y)\Delta y,$$

где  $\xi \in (0, 1)$ . Т.к.  $F'_y \neq 0$  в  $I_x \times I_y$ , то

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x + \xi\Delta x, y + \xi\Delta y)}{F'_y(x + \xi\Delta x, y + \xi\Delta y)}.$$

В силу непрерывности  $f$  при  $\Delta x \rightarrow 0$  выполнено, что и  $\Delta y \rightarrow 0$ , поэтому, в силу непрерывности производных функции  $F$  в  $I_x \times I_y$ , получается, что  $f'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$ , где  $y = f(x)$ . Из формулы следует и непрерывность производной. ■

Аналогично доказывается следующий многомерный аналог предыдущей теоремы.

**Теорема.** Пусть  $F: \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$  — определена и непрерывно дифференцируема (то есть частные производные непрерывно зависят от точки) в некоторой окрестности  $U$  точки  $(a, b) = (a_1, \dots, a_k, b) \in \mathbb{R}^{k+1}$ .

Пусть 1)  $F(a, b) = 0$  и 2)  $F'_y(a, b) \neq 0$ . Найдутся  $I_x = (a_1 - \alpha_1, a_1 + \alpha_1) \times \dots \times (a_k - \alpha_k, a_k + \alpha_k)$  и  $I_y = (b - \beta, b + \beta)$  и непрерывно дифференцируемая функция  $f: I_x \rightarrow I_y$ , для которых  $I_x \times I_y \subset U$  и для каждой точки  $(x, y) \in I_x \times I_y$  выполнено  $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$ .

Кроме того,  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = -\frac{F'_{x_j}(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$ .

*Доказательство.* Существование  $I_x \times I_y$  и функции  $f$ , а также ее непрерывность, дословно повторяют рассуждение из предыдущей теоремы.

Если теперь фиксировать все переменные, кроме  $x_j$  и  $y$ , мы попадем в ситуацию предыдущей теоремы, откуда следует формула для вычисления частной производной. Из формулы следует непрерывность этой частной производной, а значит и непрерывная дифференцируемость  $f$ . ■

**Замечание.** Отметим, что формула для подсчет производной берется из дифференцирования тождества  $F(x, f(x)) = 0$ . Действительно,  $\frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_k} + \frac{\partial F}{\partial y} df = 0$ , откуда выражая  $df$  и получаем нужную нам формулу.

## 10 Многомерная формула Тейлора.

Будет добавлено позже.

## 11 Локальный экстремум: необходимое условие и достаточное условие.

Будет добавлено позже.

## 12 График функции. Касательная плоскость и касательное пространство к графику функции. Описание касательного пространства, как множества скоростей кривых, проходящих через данную точку.

Будет добавлено позже.

## 13 Поверхность в $\mathbb{R}^k$ и касательное пространство к ней. Описание касательного пространства к поверхности, заданной системой уравнений (доказательство в случае одного уравнения).

Будет добавлено позже.

## 14 Формулировки теорем о неявном отображении и обратной функции. Параметрически заданные поверхности. Описание касательного пространства к поверхности, заданной параметрически.

Будет добавлено позже.

## 15 Условный экстремум и метод множителей Лагранжа. Достаточное условие локального экстремума

Будет добавлено позже.