

Математический анализ, Экзамен 1

Балюк Игорь

@lodthe, [GitHub](#)

Дата изменения: 2020.05.19 в 02:26

Содержание

1	Вопросы	3
1.1	Числовые последовательности. Примеры.	3
1.2	Понятие предела последовательности.	3
1.3	Ограниченные и неограниченные последовательности.	3
1.4	Теорема об ограниченности сходящейся последовательности.	3
1.5	Теорема о единственности предела сходящейся последовательности.	4
1.6	Теорема о переходе к пределу в неравенствах.	4
1.7	Теорема о вынужденном пределе.	4
1.8	Теорема о сходимости монотонных ограниченных последовательностей.	4
1.9	Определение числа ϵ .	5
1.10	Бесконечно малые последовательности.	6
1.11	Связь со сходящимися последовательностями.	6
1.12	Арифметические свойства бесконечно малых и сходящихся последовательностей.	6
1.13	Арифметические свойства для последовательностей, имеющих конечные и бесконечные пределы.	6
1.14	Неопределенности.	7
1.15	Определение подпоследовательности.	7
1.16	Теорема Больцано-Вейерштрасса.	7
1.17	Критерий Коши сходимости последовательности.	7
1.18	Определение предела функции в точке по Коши и по Гейне.	8
1.19	Теорема об эквивалентности этих определений.	8
1.20	Односторонние пределы, их связь с двусторонними. Пределы функции в бесконечности.	9
1.23	Первый и второй замечательные пределы.	9
1.23.1	Первый замечательный предел	9
1.23.2	Второй замечательный предел	10
1.24	Критерий Коши существования конечного предела функции.	10
1.25	Определение непрерывности функции в точке.	11
1.26	Точки разрыва, их классификация.	11
1.27	Непрерывность элементарных функций.	11
1.28	Арифметические свойства непрерывных функций.	11
1.29	Теорема о непрерывности сложной функции.	11
1.30	Свойства функций, непрерывных на отрезке (первая и вторая теоремы Вейерштрасса).	12
1.31	Критерий существования и непрерывности обратной функции на промежутке	13
1.32	Теорема Коши о прохождении непрерывной функции через промежуточные значения.	13
1.33	Понятие производной функции в точке.	13
1.34	Геометрический и физический смысл производной.	14
1.35	Уравнение касательной к графику функции в точке.	14
1.36	Понятие дифференцируемости функции в точке.	14
1.37	Необходимое условие дифференцируемости.	14
1.38	Правила дифференцирования.	14
1.39	Теорема о дифференцируемости и производной сложной функции.	16
1.40	Теорема о дифференцируемости обратной функции	16
1.41	Таблица производных основных элементарных функций.	17

1.42	Понятие дифференциала (первого) функции в точке.	17
1.43	Инвариативность формы первого дифференциала	17
1.44	Производные и дифференциалы высших порядков функции одной переменной в точке.	17
1.45	Понятие об экстремумах функции одной переменной.	19
1.46	Локальный экстремум. Необходимое условие для внутреннего локального экстремума (теорема Ферма).	19
1.47	Основные теоремы о дифференцируемых функций на отрезке (теорема Ролля, формулы Лагранжа и Коши.	19
1.48	Многочлен Тейлора и формула Тейлора для функций одной переменной с остаточным членом в форме Пеано и Лагранжа.	21
1.49	Формулы Маклорена для основных элементарных функций (без доказательства).	22
1.50	Правило Лопиталья.	22
1.51	Достаточное условие строгого возрастания (убывания) функции на промежутке.	24
1.52	Достаточные условия локального экстремума для функции одной переменной.	24
2	Вопросы, которые были убраны из программы экзамена	24
2.1	Эквивалентность определений предела функции по Коши и Гейне	24
2.2	Производные функций, графики которых заданы параметрически.	25
2.3	Геометрический смысл дифференциала.	25

1 Вопросы

1. Числовые последовательности. Примеры.

Определение из википедии: Пусть X — это либо множество вещественных чисел \mathbb{R} , либо множество комплексных чисел \mathbb{C} . Тогда последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов множества X называется **числовой последовательностью**.

Определение из Ёжика: Отображение $\mathbb{N} \mapsto X$ будем называть последовательностью и записывать как x_1, x_2, \dots, x_n . Отображение $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ будем называть **числовой последовательностью**.

Примеры:

- $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ является бесконечной последовательностью рациональных чисел. Элементы этой последовательности начиная с первого имеют вид $1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \dots$
- $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ является бесконечной последовательностью целых чисел. Элементы этой последовательности начиная с первого имеют вид $-1, 1, -1, 1, -1, \dots$

2. Понятие предела последовательности.

Число a называется пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) : \forall n \geq N(\varepsilon) \implies |x_n - a| < \varepsilon$$

3. Ограниченные и неограниченные последовательности.

- Ограниченная сверху последовательность — это последовательность элементов множества \mathbb{R} , все члены которой не превышают некоторого элемента из этого множества. Этот элемент называется верхней гранью данной последовательности (говоря в общем, это верно и не только для \mathbb{R}).

$$\{x_n\} \text{ ограниченная сверху} \iff \exists M \in \mathbb{R} : \forall n \implies x_n \leq M$$

- Ограниченная снизу последовательность — это последовательность элементов множества \mathbb{R} , для которой в этом множестве найдётся элемент, не превышающий всех её членов. Этот элемент называется нижней гранью данной последовательности.

$$\{x_n\} \text{ ограниченная снизу} \iff \exists m \in \mathbb{R} : \forall n \implies x_n \geq m$$

- Ограниченная последовательность (ограниченная с обеих сторон последовательность) — это последовательность, ограниченная и сверху, и снизу.

$$\{x_n\} \text{ ограниченная} \iff \exists M, m \in \mathbb{R} : \forall n \implies m \leq x_n \leq M$$

- Неограниченная последовательность — это последовательность, которая не является ограниченной.

$$\{x_n\} \text{ неограниченная} \iff \forall M, m \in \mathbb{R} : \exists N \implies (x_N < m) \vee (x_N > M)$$

Критерий ограниченности: Числовая последовательность является ограниченной тогда и только тогда, когда существует такое число, что модули всех членов последовательности не превышают его.

$$\{x_n\} \text{ ограниченная} \iff \exists A \in \mathbb{R} : \forall n \implies |x_n| \leq A$$

4. Теорема об ограниченности сходящейся последовательности.

Теорема. Всякая сходящаяся последовательность ограничена.

Доказательство. Все члены последовательности, кроме конечного их числа, принадлежат окрестности предела — ограниченному множеству.

Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится к a , т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \implies |x_n - a| < \varepsilon$$

Пусть $\varepsilon = 1$, тогда $A = \max\{|x_1|, \dots, |x_N|, |a - \varepsilon|, |a + \varepsilon|\}$. Тогда, $\forall n \in \mathbb{N} : |x_n| \leq A$. ■

5. Теорема о единственности предела сходящейся последовательности.

Теорема. Если предел числовой последовательности существует, то он единственный.

Доказательство. Доказательство теоремы проведем «методом от противного». Предположим, что теорема неверна. Тогда, пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a = b$ и выполняется следующее:

$$\begin{cases} a < b, \\ \forall \varepsilon > 0, \exists N_1(\varepsilon) : \forall n \geq N_1(\varepsilon) \implies |x_n - a| < \varepsilon, \\ \forall \varepsilon > 0, \exists N_2(\varepsilon) : \forall n \geq N_2(\varepsilon) \implies |x_n - b| < \varepsilon, \end{cases}$$

Положим $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$ и $N = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$. Тогда, $\forall n \geq N \implies |x_n - a| < \varepsilon \wedge |x_n - b| < \varepsilon$. Возьмём $n \geq N$, тогда,

$$b - a = |b - a| = |b - x_n + x_n - a| \leq |x_n - b| + |x_n - a| < \frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{2} = b - a$$

Пришли к противоречию ($b - a < b - a$). ■

6. Теорема о переходе к пределу в неравенствах.

Теорема. Если элементы сходящейся последовательности $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенству $x_n \geq b$ ($x_n \leq b$), то и предел a этой последовательности удовлетворяет неравенству $a \geq b$ ($a \leq b$).

Доказательство. Пусть все элементы x_n , по крайней мере начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенству $x_n \geq b$. Требуется доказать неравенство $a \geq b$.

Предположим, что $a < b$. Поскольку a - предел последовательности $\{x_n\}$, то для положительного $\varepsilon = b - a$ можно указать номер N такой, что при $n \geq N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < b - a$. Это неравенство эквивалентно следующим двум неравенствам: $-(b-a) < x_n - a < b - a$. Используя правое из этих неравенств, получим $x_n < b$, а это противоречит условию теоремы. Случай $x_n \leq b$ рассматривается аналогично. ■

Замечание 1. Элементы сходящейся последовательности $\{x_n\}$ могут удовлетворять строгому неравенству $x_n > b$, однако при этом предел a может оказаться равным b . Например, если $x_n = \frac{1}{n}$, то $x_n > 0$, однако $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

7. Теорема о вынужденном пределе.

Теорема. Если $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq y_n \leq z_n$ и $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$, тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$.

Доказательство. Из определения предела $\{x_n\}$, $\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 : \forall n \geq N_1 \implies |x_n - a| < \varepsilon \iff a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Аналогично для предела $\{z_n\}$, $\forall \varepsilon > 0 \exists N_2 : \forall n \geq N_2 \implies |z_n - a| < \varepsilon \iff a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$.

Тогда, $\forall n \geq \max\{N_1, N_2\} \implies a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon \implies \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$. ■

8. Теорема о сходимости монотонных ограниченных последовательностей.

Теорема. Неубывающая числовая последовательность имеет предел, причём он в точности равен точной верхней границе (нижней границе, для ограниченной невозрастающей ч.п.).

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — ограниченная неубывающая числовая последовательность. Тогда множество $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ограничено, следовательно, из определения супремума, имеет супремум. Обозначим его через S . Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = S$. Действительно, так как $S = \sup\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \implies S - \varepsilon < x_n \leq S \implies |x_n - S| < \varepsilon$$
■

Аналогичное доказательство для ограниченной невозрастающей ч.п.

9. Определение числа e .

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Теорема. Последовательность с общим членом $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ имеет конечный предел при $n \rightarrow \infty$. Для обозначение этого предела используется символ e .

Доказательство. Докажем сначала, что $\{e_n\}$ представляет собой монотонно возрастающую последовательность. Согласно биному Ньютона,

$$\begin{aligned} e_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{1}{n^n} \\ &= 2 + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \frac{1}{n!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n-1}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\ &= 2 + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots \end{aligned}$$

Сравним e_n и e_{n+1} :

- Оба выражения содержат только положительные слагаемые
- Начиная со второго слагаемого, каждый член в выражении e_{n+1} превышает соответствующий член в e_n , так как

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) < \left(1 - \frac{1}{n+1}\right), \left(1 - \frac{2}{n}\right) < \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots$$

- Выражение e_{n+1} состоит из большего числа слагаемых. Следовательно, $e_{n+1} > e_n$.

Далее докажем, что последовательность $\{e_n\}$ является ограниченной. Действительно, первый член любой монотонно возрастающей последовательности является ее наибольшей нижней границей и, таким образом, $e_n \geq 2 \forall n \in \mathbb{N}$.

Перейдем к доказательству существования верхней границы. Очевидно, что

$$\begin{aligned} e_n &= 2 + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \frac{1}{n!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n-1}\right) < \\ &< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots + \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

Кроме того, $\frac{1}{k!} < \frac{1}{2^k} \forall k > 3$. Тогда,

$$\frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots + \frac{1}{n!} < \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

Правая часть этого неравенства представляет собой сумму убывающей геометрической прогрессии, которая равна $\frac{\frac{1}{16}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$. Таким образом, последовательность

$$e_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} < 3$$

представляет собой ограниченную монотонно возрастающую последовательность и, следовательно, имеет конечный предел. ■

10. Бесконечно малые последовательности.

Последовательность $\{a_n\}$ называется бесконечно малой, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \implies |a_n| < \varepsilon$$

т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

11. Связь со сходящимися последовательностями.

Если предел последовательности равен 0, то это бесконечно малая последовательность. Бесконечно малые последовательности являются сходящимися последовательностями.

Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ имела предел b , необходимо и достаточно, чтобы $x_n = b + \alpha_n$, где α_n — бесконечно малая последовательность.

12. Арифметические свойства бесконечно малых и сходящихся последовательностей.

Пусть $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая числовая последовательность.

Теорема. $\{\alpha_n\}$ ограничена

Доказательство. Как известно, $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \implies |\alpha_n| < \varepsilon$. Значит, для всех $n > N$ доказано. Но $\forall n < N \implies \alpha_n \leq \max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|, \dots, |\alpha_{N-1}|\}$. Тогда выберем $\varepsilon = 1, A = \max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|, \dots, |\alpha_{N-1}|, 1\} \implies \forall n \in \mathbb{N}, |\alpha_n| \leq A$. ■

Теорема. Если $\{y_n\}$ ограничена, то $\{y_n \cdot \alpha_n\}$ — бесконечно малая.

Доказательство. $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая, поэтому $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \implies |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{A}$. Ввиду ограниченности $\{y_n\}, \exists A : \forall n \in \mathbb{N} \implies |y_n| \leq A$. Но тогда $\{y_n \cdot \alpha_n\} : \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \implies |y_n \cdot \alpha_n| < \frac{\varepsilon}{A} \cdot A = \varepsilon$. ■

Теорема. Если $\{\beta_n\}$ — бесконечно малая, то $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ и $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ — бесконечно малые.

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 : \forall n \geq N_1 \implies |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } \forall \varepsilon > 0 \exists N_2 : \forall n \geq N_2 \implies |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{Тогда при } N = \max\{N_1, N_2\} \implies \forall n \geq N \implies |\alpha_n \pm \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Аналогично для произведения:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 : \forall n \geq N_1 \implies |\alpha_n| < \frac{1}{\varepsilon} \text{ и } \forall \varepsilon > 0 \exists N_2 : \forall n \geq N_2 \implies |\beta_n| < \varepsilon^2$$

$$\text{Тогда при } N = \max\{N_1, N_2\} \implies \forall n \geq N \implies |\alpha_n \cdot \beta_n| \leq |\alpha_n| \cdot |\beta_n| < \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varepsilon^2 = \varepsilon$$

■

13. Арифметические свойства для последовательностей, имеющих конечные и бесконечные пределы.

Теорема. Если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, то $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b, \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$, а также $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$, если $b \neq 0$.

Доказательство.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \iff x_n = a + \alpha_n, y_n = b + \beta_n, \text{ где } \{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \text{ — бесконечно малые.}$$

$$x_n \pm y_n = (a + \alpha_n) \pm (b + \beta_n) = (a \pm b) + \underbrace{(\alpha_n \pm \beta_n)}_{\text{б. м.}}$$

$$x_n \cdot y_n = (a + \alpha_n) \cdot (b + \beta_n) = a \cdot b + \underbrace{(\alpha_n \cdot \beta_n + \alpha_n \cdot b + \beta_n \cdot a)}_{\text{б.м.}}$$

Лемма. Пусть $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \neq 0$. Тогда $\exists r > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \implies |y_n| > r > 0$.

Доказательство. $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \implies |y_n - b| < \varepsilon \implies b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon$. Пусть $\varepsilon = \left| \frac{b}{2} \right|$, тогда $r < \left| \frac{b}{2} \right| < |y_n| < \left| \frac{3b}{2} \right|$. ■

Рассмотрим последовательность $\left\{ \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} \right\}$ — бесконечно малая.

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{b \cdot a + b \cdot \alpha_n - b \cdot a - \beta_n \cdot a}{y_n \cdot b} = (\alpha_n \cdot b - \beta_n \cdot a) \cdot \frac{1}{y_n \cdot b}$$

По лемме $\left| \frac{1}{y_n \cdot b} \right| \leq \max \left\{ \left| \frac{1}{y_1 \cdot b} \right|, \dots, \left| \frac{1}{y_N \cdot b} \right|, \frac{1}{rb} \right\} \implies \left\{ \frac{1}{y_n \cdot b} \right\}$ ограничена. Но тогда имеем произведение бесконечно малой и ограниченной последовательностей, значит, $\left\{ \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} \right\}$ — бесконечно малая. ■

14. Неопределенности.

Не очень понятно, что именно требуется в этом пункте

Основные виды неопределенностей: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$

Раскрывать неопределенность помогает:

- упрощение вида функции (преобразование выражения с использованием формул сокращенного умножения,
- тригонометрических формул, домножением на сопряженные выражения с последующим сокращением и т.п.); использование замечательных пределов;

15. Определение подпоследовательности.

Подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$ — это последовательность $\{x_{n_k}\} = \{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}\}$, полученная из $\{x_n\}$, удалением ряда её членов без изменения порядка следования членов.

То есть подпоследовательность состоит из членов исходной последовательности $\{x_n\}$ с номерами n_k , где $\{n_k\}$ — строго монотонная последовательность натуральных чисел.

Замечание 2. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, тогда $\forall \{a_{n_k}\} : \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$

16. Теорема Больцано-Вейерштрасса.

Теорема. Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. $\{x_n\}$ ограничена $\implies \exists [a, b] : \forall n \in \mathbb{N} \implies a \leq x_n \leq b$. Поделим $[a, b]$ на две равные части. Хотя бы одна из частей (пусть это $[a_1; b_1]$) содержит бесконечно много элементов $\{x_n\}$.

Выберем на $[a_1; b_1]$ произвольный элемент $\{x_n\}$. Назовем его x_{n_1} . Далее делим $[a_1; b_1]$ на две равные части. Хотя бы одна из этих частей содержит бесконечно много элементов $\{x_n\}$. Обозначим ее $[a_2; b_2]$. Выберем $x_{n_2} \in [a_2; b_2]$. Будем продолжать выполнять указанные действия. Обозначим за x_{n_k} число, полученное на k -ом шаге, т.е. $x_{n_k} \in [a_k; b_k]$.

$\{[a_k; b_k]\}$ — система стягивающихся отрезков. Тогда, существует единственное $c : \forall k \implies c \in [a_k; b_k]$.

$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = c \implies \exists \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = c$ (по теореме о двух милиционерах) ■

17. Критерий Коши сходимости последовательности.

Теорема. Для того, чтобы последовательность $\{x_n\}$ сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Последовательность называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m \geq N : |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Доказательство. Докажем необходимость и достаточность.

• Необходимость:

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ по определению:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall p \geq N \implies |x_p - a| < \varepsilon$$

Поскольку ε произвольное, можно взять вместо него $\frac{\varepsilon}{2}$

$$p = m \geq N \implies |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$p = n \geq N \implies |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leq |x_n - a| + |a - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

То есть $|x_n - x_m| < \varepsilon$, а значит $\{x_n\}$ фундаментальная по определению. Необходимость доказана

• Достаточность:

Пусть $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность, докажем, что она имеет предел. Сначала покажем, что $\{x_n\}$ — ограничена. По определению фундаментальной последовательности

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m \geq N : |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Так как ε произвольное, возьмём $\varepsilon = 1$.

$$|x_n| = |(x_n - x_N) + x_N| \leq \underbrace{|x_n - x_N|}_{\leq \varepsilon} + |x_N| \leq 1 + |x_N|$$

$$\forall n \geq N \implies |x_n| \leq (1 + |x_N|) = \text{const} \leq A \implies |x_n| \leq A$$

$$A = \max\{1 + |x_N|; |x_1|; |x_2|; \dots; |x_N|\}$$

$$\forall n \geq N \implies |x_n| \leq A$$

По теореме ?? Больцано-Вейерштрасса, так как $\{x_n\}$ — ограниченная, $\{x_n\}$ имеет сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$.

Пусть $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$, покажем, что число a и будет пределом всей последовательности $\{x_n\}$.

Так как $\{x_n\}$ фундаментальная:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_1 : \forall m, n \geq N_1 \implies |x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Так как $\{x_{n_k}\}$ сходящаяся:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a : \forall \varepsilon > 0 \exists N_2 : \forall n_k \geq n_{N_2} \implies |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall \varepsilon > 0 : |x_n - a| = |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - a)| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\text{Возьмём } N = \max\{N_1, N_2\} : \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \implies |x_n - a| < \varepsilon$$

Достаточность доказана. ■

18. Определение предела функции в точке по Коши и по Гейне.

• По Коши (или на языке $\varepsilon - \delta$):

A — предел функции $f(x)$ в точке a ($\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$), если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

• По Гейне:

A называется пределом функции $f(x)$ в точке a , если $\forall \{x_n\} \rightarrow a, x_n \neq a$ (т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$), соответствующая последовательность значений $f(x_n) \rightarrow A$ (т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$)

19. Теорема об эквивалентности этих определений.

- Из определения по Коши следует определение по Гейне:

Выберем произвольную $\{x_n\} \rightarrow a, x_n \neq a$. По определению предела последовательности

$$\forall \delta > 0 \exists N : \forall n \geq N \implies |x_n - a| < \delta$$

Указанное неравенство выполняется для любого $\delta > 0$. Тогда какое бы $\varepsilon > 0$ мы бы ни выбрали, можно найти $\delta > 0$, такое, что по определению по Коши будет выполняться

$$\forall x : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

т.е. $\{f(x_n)\} \rightarrow A$, а значит из сходимости по Коши следует сходимость по Гейне.

- Из определения по Гейне следует определение по Коши:

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ По Гейне. От противного: если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ по Гейне, то $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq A$ по Коши. Напишем отрицание определения по Коши:

$$\exists \varepsilon_0 : \forall \delta > 0 : \exists x : 0 < |x - a| < \delta : |f(x) - A| \geq \varepsilon_0$$

Так как δ может быть любым, можно выбрать последовательность $\{\delta_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$, а соответствующие значения x будем обозначать как x_n . Тогда $0 < |x_n - a| < \delta_n = \frac{1}{n}$, и $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$. Отсюда следует, что последовательность $\{x_n\}$ является подходящей, но при этом число A не является пределом функции $f(x)$ в точке a (по Гейне). Пришли к противоречию.

20. Односторонние пределы, их связь с двусторонними. Пределы функции в бесконечности.

Назовём число A левым (правым) пределом f по Коши, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in (a - \delta; a)(x \in (a; a + \delta)) \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

Назовём число A левым (правым) пределом f по Гейне, если:

$$\forall \{x_n\} : \forall n \in \mathbb{N}, x_n \neq a, x_n < a (x_n > a) \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \{f(x_n)\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} A$$

Обозначим односторонние пределы так: $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A = f(a-0)$ и $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A = f(a+0)$.

Таким образом, когда мы можем «подойти» к предельному значению функции, двигаясь по x к точке a слева, говорят, что существует левый предел. Аналогично следует понимать и определение правого предела. Поэтому если мы можем подойти к a и слева, и справа, то существует предел в точке a . В кванторах это значит следующее:

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \iff \exists f(a-0) = f(a+0) = A$$

$$(\text{т. к. } \forall x : a - \delta < x < a \text{ и } \forall x : a < x < a + \delta \iff \forall x : 0 < |x - a| < \delta)$$

Предел функции на бесконечности:

- По Коши:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D(f) : |x| > \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

- По Гейне:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \iff \forall \{x_n\} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$$

23. Первый и второй замечательные пределы.

1.23.1 Первый замечательный предел

Утверждение.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 0$$

Доказательство

1.23.2 Второй замечательный предел

Утверждение.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Доказательство. Будем пользоваться тем фактом, что $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (здесь $n \in \mathbb{N}$, а x в утверждении — может быть не целым)

$[x]$ — целая часть от числа x . Тогда

$$\begin{aligned} [x] &\leq x \leq [x+1] = [x] + 1 \\ \frac{1}{[x]+1} &\leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{[x]} \\ 1 + \frac{1}{[x]+1} &\leq 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{[x]} \\ \left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} &\leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{[x]} \leq \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]} \\ \left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} &\leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} \end{aligned}$$

Воспользуемся теоремой о вынужденной сходимости

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \rightarrow e \\ \left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} &= \left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1-1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} \rightarrow e \\ \text{Пояснение: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e \end{aligned}$$

■

Рассмотрим похожее утверждение

Утверждение.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} y &= -x \\ x \rightarrow -\infty &\iff y \rightarrow \infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &\iff \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y-1+1}{y-1}\right)^y = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y-1+1} = e \end{aligned}$$

■

24. Критерий Коши существования конечного предела функции.

Теорема. Для того, чтобы функция f имела конечный предел в точке x_0 , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие Коши: для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое число $\delta > 0$, что для всех $u, v \in X$ из неравенств $0 < |u - x_0| < \delta$, $0 < |v - x_0| < \delta$ следует неравенство $|f(u) - f(v)| < \varepsilon$.

Доказательство

25. Определение непрерывности функции в точке.

Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 , если она определена на некоторой окрестности этой точки $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Другими словами, $A = f(x_0)$ и справедливы следующие определения предела функции в точке x_0 :

- **По Коши:**

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

- **По Гейне:**

$$\forall \{x_n\} : x_n \in \overset{\circ}{U}(x_0), \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$$

26. Точки разрыва, их классификация.

Пусть $f(x)$ определена в некоторой окрестности $U_\delta(a)$ и функция разрывна в a . Тогда говорят, что функция имеет

- **Устранимый разрыв:** пределы $f(x)$ справа и слева существуют и равны друг другу, но отличаются от значения функции в исследуемой точке:

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \neq f(a)$$

- **Неустраняемый разрыв первого рода:** пределы $f(x)$ справа и слева существуют, но не равны друг другу
- **Неустраняемый разрыв второго рода:** хотя бы один из односторонних пределов $f(x)$ не существует или равен бесконечности.

27. Непрерывность элементарных функций.

Многие элементарные функции непрерывны на своей области определения (например, $\sin x, \cos x$). Докажем для некоторых из них

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sin(x_0 + \Delta) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} (\sin x_0 \cos \Delta + \cos x_0 \sin \Delta) = \sin x_0 \cdot 1 + \cos x_0 \cdot 0 = \sin x_0$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \cos(x_0 + \Delta) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} (\cos x_0 \cos \Delta - \sin x_0 \sin \Delta) = \cos x_0 \cdot 1 - \sin x_0 \cdot 0 = \cos x_0$$

Тангенс и котангенс выражаются через синус и косинус. Воспользуемся арифметическими свойствами непрерывных функций. Поскольку синус и косинус определены и непрерывны для всех x , то тангенс и котангенс определены и непрерывны для всех x , кроме точек, в которых знаменатель обращается в нуль:

$$y = \operatorname{tg} x, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$y = \operatorname{ctg} x, \quad x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} a^{x_0 + \Delta} = a^{x_0} \cdot a^0 = a^{x_0} \cdot 1 = a^{x_0}$$

28. Арифметические свойства непрерывных функций.

Теорема. Пусть $g(x)$ и $f(x)$ непрерывны в a , тогда функции $f \pm g, f \cdot g, \frac{f}{g} (g \neq 0)$ также непрерывны в точке a .

Доказательство. Рассмотрим сумму $(f(x) + g(x))$. Для остальных операций доказательство практически аналогично. По определению $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$. Но тогда, используя свойство суммы для пределов, получаем, что $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = f(a) + g(a)$, что означает, что $(f(x) + g(x))$ непрерывна в точке a . ■

29. Теорема о непрерывности сложной функции.

Теорема. Если функция $g(t)$ непрерывна в точке t_0 и функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 = g(t_0)$, то $f(g(t))$ непрерывна в t_0 .

Доказательство. Для доказательства этой теоремы воспользуемся формальным преобразованием двух выражений с кванторами.

$f(x)$ непрерывна в x_0 :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$g(t)$ непрерывна в t_0 :

$$\forall \delta > 0 \exists \mu > 0 : \forall t : 0 < |t - t_0| < \mu \implies |g(t) - g(t_0)| < \delta$$

Получается, $f(g(t))$ непрерывна в t_0 :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \mu > 0 : \forall t : 0 < |t - t_0| < \mu \implies |f(g(t)) - f(g(t_0))| < \varepsilon$$

■

30. Свойства функций, непрерывных на отрезке (первая и вторая теоремы Вейерштрасса).

Теорема Вейерштрасса (первая) Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она на нём ограничена, то есть $\exists A : \forall x \in [a, b] \implies |f(x)| \leq A$

Доказательство. Докажем от противного.

Пусть f не ограничена на отрезке $[a, b]$, тогда:

$$\begin{aligned} \forall A > 0 \exists x_A \in [a, b] : |f(x_A)| > A \\ A = 1 &\implies \exists x_1 \in [a, b] : |f(x_1)| > 1 \\ A = 2 &\implies \exists x_2 \in [a, b] : |f(x_2)| > 2 \\ &\vdots \\ A = n &\implies \exists x_n \in [a, b] : |f(x_n)| > n \end{aligned}$$

Получим последовательность $\{x_n\} \subset [a, b]$, то есть последовательность $\{x_n\}$ ограничена.

По теореме Больцано-Вейерштрасса из неё можно выделить подпоследовательность, которая сходится к точке c , то есть

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = c$$

Тогда $c \in [a, b]$. Но по условию функция непрерывна в точке c и тогда по определению непрерывности в точке по Гейне $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(c)$.

С другой стороны

$$|f(x_{n_k})| > n_k, n_k \geq k \implies \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \infty$$

А это противоречит единственности предела.

■

Теорема Вейерштрасса (вторая) Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция f достигает на нём своих точных нижней и верхней граней. То есть существуют такие точки $c_1, c_2 \in [a, b]$, так что для любого $x \in [a, b]$, выполняются неравенства:

$$f(c_2) \leq f(x) \leq f(c_1)$$

Доказательство. Докажем $\exists c_1 \in [a, b] : f(c_1) = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$.

Пусть $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ (существование следует из первой теоремы Вейерштрасса). В силу определения точной верхней грани выполняется условие:

$$\begin{cases} \forall x \in [a, b] \implies f(x) \leq M \\ \forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in [a, b] : M - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \end{cases}$$

Полагая $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}$ получим последовательность $\{x_n\}$ такую, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняются условия $M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$, откуда $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$. Существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$

последовательности $\{x_n\}$ (она ограничена отрезком $[a, b]$, а значит является ограниченной) и точка c (по теореме Больцано-Вейерштрасса, из последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к точке c), такие что $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = c$, где $c \in [a, b]$.

В силу непрерывности функции f в точке c , получаем $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(c)$.

С другой стороны, $\{f(x_{n_k})\}$ — подпоследовательность последовательности $\{f(x_n)\}$, сходящейся к числу M . Поэтому $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = M$.

В силу единственности предела последовательности заключаем, что $f(c) = M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$.

Утверждение $\exists c_1 \in [a, b] : f(c_1) = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ доказано.

Аналогично доказывается $\exists c_2 \in [a, b] : f(c_2) = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$

Функция непрерывна на интервале может не достигать своих точных граней (требовать непрерывности на сегменте существенно). ■

31. Критерий существования и непрерывности обратной функции на промежутке

32. Теорема Коши о прохождении непрерывной функции через промежуточные значения.

Теорема Больцано-Коши (первая), о нулях непрерывной функции Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и на своих концах принимает значение разных знаков, то существует такая точка, принадлежащая этому отрезку, в которой функция обращается в нуль.

Доказательство. Геометрически очень легко: функция пересечет ось OX .

Алгебраически: разделим отрезок $[a, b]$ точкой x_0 на два равных по длине отрезка, тогда либо $f(x_0) = 0$ и, значит, искомая точка x_0 найдена, либо $f(x_0) \neq 0$ и тогда на концах одного из полученных промежутков функция f принимает значения разных знаков, точнее, на левом конце значение меньше нуля, на правом — больше.

Обозначим этот отрезок $[a_1, b_1]$ и разделим его снова на два равных по длине отрезка и т.д. В результате, либо через конечное число шагов придем к искомой точке x , в которой $f(x) = 0$, либо получим последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$ по длине стремящихся к нулю и таких, что

$$f(a_n) < 0 < f(b_n)$$

Пусть γ — общая точка всех отрезков $[a_n, b_n]$. Тогда $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Поэтому, в силу непрерывности функции f

$$f(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$$

Но тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$$

Откуда следует, что $f(\gamma) = 0$. ■

Теорема Больцано-Коши (вторая), о промежуточном значении непрерывных функций Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $A = f(a) \neq f(b) = B$, число $C \in (A, B)$, тогда существует такая точка $c \in [a, b]$, что $f(c) = C$.

Другими словами, утверждается, что если непрерывная функция, принимает два значения, то она принимает и любое значение между ними.

Доказательство. Не нарушая общности будем считать, что $A = f(a) < f(b) = B$. Рассмотрим функцию $h(x) = f(x) - C$, непрерывность на отрезке $[a, b]$ которой следует из непрерывности функции f . Очевидно что $h(a) = A - C < 0$ и $h(b) = B - C > 0$. Применяем к h первую теорему Больцано-Коши и находим точку c , в которой $h(c) = f(c) - C = 0$, то есть $f(c) = C$. Теорема доказана. ■

33. Понятие производной функции в точке.

Рассмотрим функцию, область определения которой содержит точку x_0 . Тогда функция $f(x)$ является дифференцируемой в точке x_0 , и ее производная $f'(x_0)$ определяется следующей формулой, если существует предел

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta}$$

34. Геометрический и физический смысл производной.

Геометрический смысл производной. Производная в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в этой точке.

Физический смысл производной. Если точка движется вдоль оси OX и ее координата изменяется по закону $x(t)$, то мгновенная скорость точки: $v(t) = x'(t)$.

35. Уравнение касательной к графику функции в точке.

Пусть дана функция f , которая в некоторой точке x_0 имеет конечную производную $f'(x_0)$. Тогда прямая, проходящая через точку $(x_0; f(x_0))$, имеющая угловой коэффициент $f'(x_0)$, называется касательной.

Итак, пусть дана функция $y = f(x)$, которая имеет производную $y = f'(x)$ на отрезке $[a, b]$. Тогда в любой точке $x_0 \in (a; b)$ к графику этой функции можно провести касательную, которая задается уравнением:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

36. Понятие дифференцируемости функции в точке.

Функция $f(x)$ является дифференцируемой в точке x_0 своей области определения $D[f]$, если существует такая константа A , что:

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \bar{o}(x - x_0)$$

и

$$A = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Теорема $f(x)$ дифференцируема в точке x только и только тогда, когда $\exists f'(x)$, причем $A = f'(x)$

Доказательство. Докажем необходимость и достаточность

- **Необходимость.** Пусть $f(x)$ дифференцируема в точке $x \implies \Delta y = A\Delta x + \bar{o}(\Delta x) \implies \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{\bar{o}(\Delta x)}{\Delta x} = A + \bar{o}(1)$
Тогда $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A \implies A = f'(x)$
- **Достаточность.** Пусть $\exists f'(x) \implies \exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$. Рассмотрим $\beta(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)$.
 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \beta(\Delta x) = 0$, т.е. $\beta(\Delta x) = \bar{o}(1) \implies \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = \bar{o}(1) \implies \Delta y = f'(x)\Delta x + \bar{o}(\Delta x)$

■

37. Необходимое условие дифференцируемости.

Теорема. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 . Тогда её приращение представимо в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \bar{o}(\Delta x)$$

Но тогда при $\Delta x \rightarrow 0$ будет $\Delta y \rightarrow 0$, а это означает непрерывность функции $y = f(x)$ в точке x_0 . ■

Обратите внимание, что из непрерывности не следует дифференцируемости (например, $f(x) = |x|$).

38. Правила дифференцирования.

Теорема. Если $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x , то $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ ($g \neq 0$) также дифференцируемы в точке x , причем $(f \pm g)' = f' \pm g'$, $(f \cdot g)' = f'g + fg'$, $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Доказательство. Будем считать, что Δf отвечает приращению $f(x)$, Δg отвечает приращению $g(x)$, а Δh отвечает приращению $h(x)$.

$$1. h(x) = f(x) \pm g(x)$$

$$\begin{aligned}\Delta h &= h(x + \Delta x) - h(x) = (f(x + \Delta x) \pm g(x + \Delta x)) - (f(x) \pm g(x)) \\ &= (f(x + \Delta x) - f(x)) \pm (g(x + \Delta x) - g(x)) \\ &= \Delta f \pm \Delta g\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} \pm \frac{\Delta g}{\Delta x}$$

При $\Delta x \rightarrow 0$ существует предел правой части, равный $f'(x) \pm g'(x)$, а значит, существует и предел левой части

$$h'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

$$2. h(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\begin{aligned}\Delta h &= h(x + \Delta x) - h(x) = f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x)g(x) \\ &= (f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x + \Delta x) \cdot g(x)) + (f(x + \Delta x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x))\end{aligned}$$

Далее можно записать

$$\Delta h = f(x + \Delta x) \cdot (g(x + \Delta x) - g(x)) + g(x) \cdot (f(x + \Delta x) - f(x)) = f(x + \Delta x) \cdot \Delta g + g(x) \Delta f$$

Таким образом

$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = f(x + \Delta x) \frac{\Delta g}{\Delta x} + g(x) \cdot \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Возьмем теперь предел правой части при $\Delta x \rightarrow 0$. В силу непрерывности $f(x)$ в x (т.к. она дифференцируема в этой точке) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) = f(x)$. Тогда получаем, что

$$h'(x) = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

Лемма. Если $f(x)$ непрерывна в точке a и $f(a) > 0$ ($f(a) < 0$), то $\exists \delta > 0 : f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) $\forall x \in U_\delta(a)$

Доказательство. Так как $f(x) \in C(a)$, то $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(a) \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon \iff f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$. Положим $\varepsilon = \frac{|f(a)|}{2}$, тогда $f(a) - \varepsilon > 0$ при $f(a) > 0$ и $f(a) + \varepsilon < 0$ при $f(a) < 0$. Т.е. левая и правая части неравенства всегда одного знака, значит $\forall x \in U_\delta(a)$ выполнено требуемое. ■

$$3. h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}. \text{ По лемме, } g(x) \neq 0, \text{ то } g(x + \Delta x) \neq 0 \text{ для малых } \Delta x. \text{ Тогда}$$

$$\begin{aligned}\Delta h &= h(x + \Delta x) - h(x) = \frac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)} \\ &= \frac{f(x + \Delta x)g(x) - g(x + \Delta x)f(x)}{g(x)g(x + \Delta x)} \\ &= \frac{(f(x + \Delta x)g(x) - f(x)g(x)) - (g(x + \Delta x)f(x) - f(x)g(x))}{g(x)g(x + \Delta x)} \\ &= \frac{g(x)(f(x + \Delta x) - f(x)) - f(x)(g(x + \Delta x) - g(x))}{g(x)g(x + \Delta x)} \\ &= \frac{g(x)\Delta f - f(x)\Delta g}{g(x)g(x + \Delta x)}\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{g(x) \frac{\Delta f}{\Delta x} - f(x) \frac{\Delta g}{\Delta x}}{g(x)g(x + \Delta x)}$$

Снова используя непрерывность и беря предел правой и левой частей, получаем, что

$$h'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

39. Теорема о дифференцируемости и производной сложной функции.

Теорема. Пусть функцию $y = y(x)$ от переменной x можно представить как сложную функцию в следующем виде:

$$y(x) = f(u(x))$$

где $f(u)$ и $u(x)$ есть некоторые функции. Функция $u = u(x)$ дифференцируема при некотором значении переменной x . Функция $f(u)$ дифференцируема при значении переменной $u = u(x)$. Тогда сложная (составная) функция $y = f(u(x))$ дифференцируема в точке x и ее производная определяется по формуле:

$$y'(x) = f'(u) \cdot u'(x)$$

Доказательство. Введем следующие обозначения.

$$\begin{aligned}\Delta u &= u(x + \Delta x) - u(x) \\ \Delta f &= f(u + \Delta u) - f(u) = f(u(x + \Delta x)) - f(u(x))\end{aligned}$$

Здесь Δu есть функция от переменных x и Δx , Δf есть функция от переменных u и Δu . Но мы будем опускать аргументы этих функций, чтобы не загромождать выкладки.

Поскольку функции u и f дифференцируемы в точках x и $u = u(x)$, соответственно, то в этих точках существуют производные этих функций, которые являются следующими пределами:

$$\begin{aligned}u'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ f'(u) &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta u}\end{aligned}$$

Рассмотрим следующую функцию:

$$\varepsilon(\Delta u) = \frac{\Delta f}{\Delta u} - f'(u)$$

При фиксированном значении переменной u , ε является функцией от Δu . Очевидно, что

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta u) = 0$$

Тогда

$$\Delta f = (f'(u) + \varepsilon(\Delta u)) \cdot \Delta u$$

Поскольку функция $u(x)$ является дифференцируемой функцией в точке x , то она непрерывна в этой точке. Поэтому

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u = 0$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta u) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta u) = 0$$

Теперь находим производную.

$$\begin{aligned}y'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(f'(u) \frac{\Delta u}{\Delta x} + \varepsilon(\Delta u) \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) \\ &= f'(u) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta u) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ &= f'(u) \cdot u'(x) + 0 \cdot u'(x) \\ &= f'(u) \cdot u'(x)\end{aligned}$$

Формула доказана.

40. Теорема о дифференцируемости обратной функции

Теорема. Рассмотрим функцию $f(x)$, которая является строго монотонной на некотором интервале (a, b) . Если в этом интервале существует такая точка x_0 , что $f'(x_0) \neq 0$, то функция $x = \varphi(y)$, обратная к функции $y = f(x)$, также дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$ и её производная равна

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

41. Таблица производных основных элементарных функций.

$f(x)$	$f'(x)$
$const$	0
x^a	$a \cdot x^{a-1}$
a^x	$a^x \cdot \ln a$
e^x	e^x
$\log_a x$	$\frac{1}{\ln a \cdot x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

42. Понятие дифференциала (первого) функции в точке.

Функция $f(x)$ является дифференцируемой в точке x_0 своей области определения $D[f]$, если существует такая константа A , что:

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \bar{o}(x - x_0)$$

$$A = f'(x_0) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta}$$

Тогда выражение $f'(x_0)dx$ называют дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0 . Обозначение: $df = df(x_0, dx)$. Обратите внимание, что df зависит и от точки, и от dx .

43. Инвариативность формы первого дифференциала

Найдем выражение для дифференциала сложной функции. Пусть $y = f(u(x))$. Тогда

$$dy = y'(x) \cdot dx = f'(u(x)) \cdot u'(x) \cdot dx = f' \cdot du$$

Таким образом, форма дифференциала не зависит от того, является аргумент функции независимой переменной или функцией другого аргумента. Это свойство называется свойством неизменности, или инвариантности, дифференциала.

44. Производные и дифференциалы высших порядков функции одной переменной в точке.

Рассмотрим функцию, дифференцируемую на множестве E . Т.е. $\exists f'(x)$. Если $f'(x)$ тоже дифференцируема на E , то $\exists (f'(x))' = f''(x)$.

Производной n -ого порядка будем считать $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$, причем $f^{(0)}(x) = f(x)$. Разумеется, для существования производной n -ого порядка должны существовать производные всех меньших порядков.

Множество функций, имеющих все производные до порядка n включительно на множестве E , обозначается $C^{(n)}(E)$. Рассмотрим несколько примеров

- $f(x) = \sin x$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \\
f''(x) &= -\sin x = \sin\left(\frac{2\pi}{2} + x\right) \\
f'''(x) &= -\cos x = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \\
f^{(4)}(x) &= \sin x = \sin x
\end{aligned}$$

Докажем по индукции, что $f^{(n)}(x) = \sin\left(\frac{\pi n}{2} + x\right)$. При $n = 1$ уже было показано ранее. Пусть это верно при некотором n , покажем для $n = n + 1$.

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= \sin\left(\frac{\pi(n+1)}{2} + x\right) \\
f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)}(x))' = \left(\sin\left(\frac{\pi n}{2} + x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi n}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi(n+1)}{2} + x\right)
\end{aligned}$$

- $f(x) = e^x$. $f^{(n)}(x) = e^x$
- $f(x) = x^m$. Беря n раз производную, получаем, что $f^{(n)}(x) = m(m-1)\dots(m-n+1)x^{m-n}$
- $f(x) = \ln x$. $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$. $f^{(n)}(x^{-1}) = (-1)(-2)\dots(-n)x^{-1-n} = (-1)^n \cdot n! \cdot x^{-1-n}$, Тогда получаем, что

$$f^{(n)}(x) = f^{(n-1)}(x-1) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot x^{-n}$$

Дифференциал порядка n , где $n > 1$, от функции f в некоторой точке называется дифференциал в этой точке от дифференциала порядка $(n-1)$, то есть

$$d^n f = d(d^{n-1} f) = f^{(n)} \cdot dx^n$$

Теорема (Формула Лейбница) Пусть $u(x)$ и $v(x)$ имеют не менее n производных на множестве E . Тогда

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot u^{(n-k)} \cdot v^{(k)}$$

Доказательство. Докажем по индукции. При $n = 1$

$$(u \cdot v)' = u'v + uv' = \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} \cdot u^{(1-k)} \cdot v^{(k)}$$

Пусть равенство верно при некотором n , докажем его справедливость при $n = n + 1$. Беря по определению производную $(u \cdot v)^{(n+1)}$

$$\begin{aligned}
(u \cdot v)^{(n+1)} &= \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot u^{(n-k)} \cdot v^{(k)} \right)' \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot u^{(n-k+1)} \cdot v^{(k)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot u^{(n-k)} \cdot v^{(k+1)} \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot u^{(n-k+1)} \cdot v^{(k)} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \cdot u^{(n-k+1)} \cdot v^{(k)} \\
&= \binom{n}{0} \cdot u^{(n+1)} \cdot v + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) \cdot u^{(n-k+1)} \cdot v^{(k)} + \binom{n}{n} \cdot u \cdot v^{(n+1)} \\
&= \binom{n}{0} \cdot u^{(n+1)} \cdot v + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} \cdot u^{(n-k+1)} \cdot v^{(k)} + \binom{n}{n} \cdot u \cdot v^{(n+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot u^{(n-k+1)} \cdot v^{(k)}
\end{aligned}$$

Последний переход сделан при помощи следующего рассуждения:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

■

45. Понятие об экстремумах функции одной переменной.

Точка x_0 называется точкой локального максимума (минимума) функции f , если существует такая окрестность $U_\delta(x_0)$ точки x_0 , что

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \implies f(x) \leq f(x_0)$$

и точкой локального минимума, если

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \implies f(x) \geq f(x_0)$$

Точка x_0 будет называться точкой строгого локального экстремума, если заменить окрестность на проколотую окрестность и нестрогий знак заменить на строгий.

Теорема Ферма Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0 , то ее производная $f'(x_0)$ либо равна нулю, либо не существует.

46. Локальный экстремум. Необходимое условие для внутреннего локального экстремума (теорема Ферма).

Теорема Ферма Пусть функция f определена на интервале (a, b) и в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$ принимает наибольшее (наименьшее) значение на этом интервале. Если существует $f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Пусть x_0 — точка максимума функции f . Рассмотрим разностное отношение $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Так как $f(x) \leq f(x_0)$, то при $x > x_0$ имеем $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, и, следовательно, $f'_+(x_0) \leq 0$. Если же $x < x_0$, то $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, и поэтому $f'_-(x_0) \geq 0$. Но из дифференцируемости функции f в точке x_0 следует, что $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$ (следует из равенности предела справа и слева). ■

С геометрической точки зрения теорема Ферма означает, что если в точке экстремума у графика функции существует касательная, то она параллельна оси OX .

47. Основные теоремы о дифференцируемых функций на отрезке (теорема Ролля, формулы Лагранжа и Коши).

Теорема Ролля. О нуле производной функции, принимающей на концах отрезка равные значения Пусть функция $y = f(x)$

1. непрерывна на отрезке $[a, b]$;
2. дифференцируема на интервале (a, b) ;
3. $f(a) = f(b)$

Тогда на интервале (a, b) найдется, по крайней мере, одна точка x_0 , в которой $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Если функция $f(x)$ постоянна на отрезке $[a, b]$ (а значит, её минимальное и максимальное значение совпадают), то производная равна нулю в любой точке интервала (a, b) , в этом случае утверждение справедливо.

Иначе, минимальное и максимальное значение функции не совпадают. По второй теореме Вейерштрасса (о достижении функции значения точной верхней/нижней грани на отрезке), функция достигает своего наибольшего или наименьшего значения в точке ξ интервала (a, b) , т.е. в точке ξ существует локальный экстремум. Тогда по теореме Ферма производная в этой точке равна нулю

$$f'(\xi) = 0$$

■

Теорема Лагранжа. Формула конечных приращений Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b) , то в этом интервале существует хотя бы одна точка x_0 , что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию $F(x) = f(x) + \lambda x$.

Выберем число λ таким, чтобы выполнялось условие $F(a) = F(b)$, тогда

$$f(a) + \lambda a = f(b) + \lambda b \implies f(b) - f(a) = \lambda(a - b) \implies \lambda = -\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

В результате получаем

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot x$$

Функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и принимает одинаковые значения на концах отрезка. Следовательно, для неё выполнены все условия теоремы Ролля. Тогда в интервале (a, b) существует такая точка ξ , что $F'(\xi) = 0$.

Отсюда следует, что $0 = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ или

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

■

Теорема Лагранжа имеет простой геометрический смысл. Хорда, проходящая через точки графика, соответствующие концам отрезка a и b имеет угловой коэффициент, равный

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Тогда внутри отрезка существует точка $x = \xi$, в которой касательная к графику параллельна хорде.

Теорема Коши. Обобщает формулу конечных приращений Лагранжа. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемы на интервале (a, b) , причем $g'(x) \neq 0$ при всех $x \in (a, b)$. Тогда в этом интервале существует точка $x = \xi$ такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Доказательство. Доказательство совпадает с доказательством теоремы Лагранжа.

Прежде всего заметим, что знаменатель в левой части формулы Коши не равен нулю: $g(b) - g(a) \neq 0$. Действительно, если $g(a) = g(b)$, то по теореме Ролля найдется точка $\mu \in (a, b)$, в которой $g'(\mu) = 0$. Это, однако, противоречит условию, где указано, что $\forall x \in (a, b) : g'(x) \neq 0$.

Введем вспомогательную функцию $F(x) = f(x) + \lambda g(x)$.

Выберем число λ таким, чтобы выполнялось условие $F(a) = F(b)$, тогда

$$f(a) + \lambda g(a) = f(b) + \lambda g(b) \implies f(b) - f(a) = \lambda(g(b) - g(a)) \implies \lambda = -\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

В результате получаем

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g(x)$$

Функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и при найденном значении λ принимает одинаковые значения на концах отрезка. Следовательно, для неё выполнены все условия теоремы Ролля. Тогда в интервале (a, b) существует такая точка ξ , что $F'(\xi) = 0$.

Отсюда следует, что

$$0 = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(\xi)$$

или

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

■

48. Многочлен Тейлора и формула Тейлора для функций одной переменной с остаточным членом в форме Пеано и Лагранжа.

Предположим, что имеется некоторая функция $f(x)$ и надо исследовать ее поведение в некоторой точке x_0 или ее окрестности. Сама функция может быть при этом достаточно сложной, и поэтому непосредственное вычисление $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ (как пример того, что мы хотим узнать о функции в x_0) окажется крайне трудоемким. Идея в том, чтобы найти такой многочлен $P_n(x)$, что $f(x) \sim P_n(x - x_0)$ при $x \rightarrow x_0$, а затем исследовать его. Работать с многочленами практически всегда намного проще.

Предположим пока, что $x_0 = 0$. Тогда $P_n(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n$. $P_n(0) = c_0$, а $P'_n(x) = c_1 + 2c_2x + \dots + nc_nx^{n-1}$, из чего следует, что $c_1 = P'_n(0)$. По аналогии можно получить, что $c_2 = \frac{P''_n(0)}{2!}, \dots, c_n = \frac{P^{(n)}_n(0)}{n!}$. Т.е. получаем, что $P_n(x) = P_n(0) + \frac{P'_n(0)}{1!}x + \dots + \frac{P^{(n)}_n(0)}{n!}x^n$.

Пусть $\exists f^{(n)}(x_0)$, тогда справедлива формула:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(f, x)$$

Эта формула называется **формулой Тейлора** и обычно записывается в виде:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k}_{\text{многочлен Тейлора}} + \underbrace{r_n(f, x)}_{\text{остаточный член}}$$

Лемма. Пусть $\exists f^{(n)}(x_0)$ и $\exists f'(x)$ на некоторой $U(x_0)$. Тогда $(r_n(f, x))' = r_{n-1}(f', x)$.

Доказательство.

$$r_n(f, x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

$$(r_n(f, x))' = f'(x) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x - x_0)^{k-1} = f'(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = r_{n-1}(f', x)$$

так как $f^{(k+1)}(x_0) = (f')^{(k)}(x_0)$. Следует также обратить внимание на то, что дифференцирование $r_n(f, x)$ происходит по x , поэтому все члены суммы, кроме $(x - x_0)^k$, — константы. ■

Теорема о локальной форме остаточного члена (Форма Пеано) Пусть $\exists f^{(n)}(x_0)$ и $\exists f^{(n-1)}(x)$ на некоторой $U(x_0)$. Тогда справедлива формула Тейлора, причем $r_n(f, x) = \bar{o}((x - x_0)^n), x \rightarrow x_0$.

Доказательство. Докажем с помощью метода математической индукции. При $n = 1$, $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \bar{o}(x - x_0)$, что верно, т.к. $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 . Предположим теперь, что теорема верна для произвольной функции f при $n = n - 1$, и докажем её при $n = n$.

Заметим сначала, что $r_n(f, x_0) = 0$ (следует из обычной формулы Тейлора). Тогда $r_n(f, x) = r_n(f, x) - r_n(f, x_0) = (r_n(f, \xi))'(x - x_0)$, где ξ принадлежит интервалу $(\min\{x, x_0\}, \max\{x, x_0\})$ по теореме Лагранжа.

По лемме получаем, что $(r_n(f, \xi))'(x - x_0) = r_{n-1}(f', \xi)(x - x_0)$. По предположению для произвольной функции f , у которой есть n -ая производная в x_0 и $(n - 1)$ -ая в окрестности x_0 , можно выполнить индукционный переход для f' , т.к. для r_{n-1} у $f'(x)$ существуют $(n - 1)$ -ая производная в x_0 и $(n - 2)$ -ая в окрестности x_0 . Тогда $r_{n-1}(f', \xi)(x - x_0) = \bar{o}((\xi - x_0)^{n-1})(x - x_0) = [|\xi - x_0| < |x - x_0| \implies \bar{o}((\xi - x_0)^{n-1}) = \bar{o}((x - x_0)^{n-1})] = \bar{o}((x - x_0)^{n-1})(x - x_0) = \bar{o}((x - x_0)^n)$ ■

Теорема о форме Лагранжа Пусть $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $\exists f^{(n)}(x)$, причем $f^{(n)}(x)$ непрерывна на отрезке $[x_0, x]$. Кроме того, $\exists f^{(n+1)}(x)$ на (x_0, x) . Тогда справедлива формула Тейлора, причем $r_n(f, x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, где $\xi \in (x_0, x)$.

Доказательство. Снова воспользуемся методом математической индукции. При $n = 0$, $f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)$ — формула Лагранжа. Предположим теперь, что для произвольной функции f справедливо, что $r_{n-1}(f, x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n$, где $\xi \in (x_0, x)$. При $n = n$ имеем:

$$\begin{aligned}
\frac{r_n(f, x)}{(x - x_0)^{n+1}} &= \frac{r_n(f, x) - r_n(f, x_0)}{(x - x_0)^{n+1} - (x_0 - x_0)^{n+1}} \quad [\text{по формуле Коши}] = \\
&= \frac{(r_n(f, \mu))'}{(n+1)(\mu - x_0)^n} \quad [\text{по лемме, доказанной выше}] = \\
&= \frac{r_{n-1}(f', \mu)}{(n+1)(\mu - x_0)^n} = \frac{(f'(\xi))^{(n)}}{(n+1)n!} \implies r_n(f, x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}
\end{aligned}$$

■

49. Формулы Маклорена для основных элементарных функций (без доказательства).

При $x_0 = 0$ формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано называется формулой Маклорена

Приведем пример: $f(x) = \sin x$. Вспомним, что

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right) \implies f^{(n)}(0) = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k, \\ (-1)^k, & \text{если } n = 2k + 1 \end{cases}$$

Тогда получаем следующее разложение:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \bar{o}(x^{2n})$$

$$1. e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \bar{o}(x^n), x \rightarrow 0$$

$$2. \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n} + \bar{o}(x^n), x \rightarrow 0$$

$$3. (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{\alpha}{k} x^k + \bar{o}(x^n)$$

$$\text{Например } (1+x)^{\frac{1}{3}} - 1 = \left(\frac{1}{3}\right)x + \left(\frac{1}{2}\right)x^2 + \bar{o}(x^2) = \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2}x^2 + \bar{o}(x^2)$$

$$4. \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \bar{o}(x^{2n})$$

$$5. \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \bar{o}(x^{2n+1})$$

$$6. \operatorname{tg}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \dots + \frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!} \cdot x^{2n-1} + \bar{o}(x^{2n-1}), \text{ где } B_{2n} \text{ — числа Бернулли}$$

Но достаточно помнить, что $\operatorname{tg}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \bar{o}(x^5)$, т.е. общая формула для семинаров не нужна

$$7. \arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \dots + \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)} \cdot x^{2n+1} + \bar{o}(x^{2n+1})$$

$$\text{Достаточно знать } \arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \bar{o}(x^5)$$

$$8. \arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$$

$$9. \operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \bar{o}(x^{2n-1})$$

50. Правило Лопиталья.

Теорема Лопиталья (первое правило) Если функции $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что

1. $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в проколотой окрестности точки a
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$
3. $g'(x) \neq 0$ в окрестности $U(a)$
4. Существует $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Тогда существует $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Доказательство. Доопределим функции в точке a нулём (непрерывности не нарушится, так как предел этих функций при $x \rightarrow a$ равен 0). Из первого условия следует, что $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, x]$, где x принадлежит рассматриваемой окрестности точки a .

Применим обобщённую формулу конечных приращений (Коши) к $f(x)$ и $g(x)$ на отрезке $[a, x]$.

$$\exists \xi \in [a, x] : \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Так как $g(a) = f(a) = 0$ получим, что $\forall x \exists \xi \in [a, x] : \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

По определению предела, $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x : a < x < a + \delta \implies \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - A \right| < \varepsilon$. Но для каждого x из указанного интервала найдётся своё ξ_x , такое что $\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$. Но раз $\xi_x \in (a, x)$, то выполняется $\left| \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} - A \right| < \varepsilon \implies \left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| < \varepsilon$, что и требовалось доказать. ■

Теорема Лопиталя (второе правило) Если для функций $f(x)$ и $g(x)$ справедливо следующее:

1. $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на интервале (a, b)
2. $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = \infty$
3. $g'(x) \neq 0$ при $x \in (a, b)$
4. Существует $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$

то $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$

Доказательство. Для начала положим, что $A \leq 0$ (при $A > 0$ доказательство практически аналогично приведенному). Пусть $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$. Тогда по определению предела

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \iff \exists x_\varepsilon \in (a, b) : \forall x \in (a, x_\varepsilon) \implies \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - A \right| < \varepsilon$$

Здесь мы просто приняли, что $x_\varepsilon = a + \delta$, в остальном же интерпретация определения предела не изменилась.

Выберем произвольное x из данного интервала (a, x_ε) . Заметим, что выполняется теорема Коши (доопределим функции f и g в точке a , а в точке x_ε они уже определены):

$$\frac{f(x) - f(x_\varepsilon)}{g(x) - g(x_\varepsilon)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \text{ где } a < x < \xi < x_\varepsilon < b$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1 - \frac{f(x_\varepsilon)}{f(x)}}{1 - \frac{g(x_\varepsilon)}{g(x)}} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot \frac{1 - \frac{g(x_\varepsilon)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_\varepsilon)}{f(x)}}$$

Заметим теперь, что $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x_\varepsilon)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{g(x_\varepsilon)}{g(x)} = 0$, т.к. $f(x_\varepsilon)$ и $g(x_\varepsilon)$ — константы (а знаменатели по условию стремятся к ∞). Тогда выберем для текущего закреплённого ε такое $\delta(\varepsilon) > 0$:

$$\forall x \in (a, a + \delta), \delta + a < b \implies \left| \frac{f(x_\varepsilon)}{f(x)} \right| < \varepsilon, \left| \frac{g(x_\varepsilon)}{g(x)} \right| < \varepsilon$$

Тогда получаем следующую оценку:

$$\frac{1 - \frac{g(x_\varepsilon)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_\varepsilon)}{f(x)}} \in \left(\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}, \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \right)$$

Поскольку $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$, то $\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} = 1 - \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon} > 1 - 2\varepsilon$ и $\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} = 1 + \frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon} < 1 + \frac{8}{3}\varepsilon$. Учитывая, что $\frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overset{\circ}{U}_\varepsilon(A)$:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot \frac{1 - \frac{g(x_\varepsilon)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_\varepsilon)}{f(x)}} \in \left((A - \varepsilon)(1 - 2\varepsilon), (A + \varepsilon) \left(1 + \frac{8}{3}\varepsilon\right) \right) = \\ &= \left(A - (\varepsilon + 2A\varepsilon - 2\varepsilon^2), A + \left(\varepsilon + \frac{8}{3}\varepsilon A + \frac{8}{3}\varepsilon^2\right) \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} &\in U_\mu(A), \text{ где } \mu = \max \left\{ \varepsilon + 2A\varepsilon - 2\varepsilon^2, \varepsilon + \frac{8}{3}\varepsilon A + \frac{8}{3}\varepsilon^2 \right\} \end{aligned}$$

Как видно, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu = 0$, а для любого сколько угодно малого μ всегда можно найти соответствующее ε , такое, что все значения отношения функций попадут в заданную μ -трубку. Это и означает, что предел отношения функции равен A . ■

51. Достаточное условие строгого возрастания (убывания) функции на промежутке.

Теорема. Для того чтобы дифференцируемая функция $f(x)$ на интервале (a, b) строго возрастала, достаточно, чтобы $\forall x \in (a, b) : f'(x) > 0$

Для того чтобы дифференцируемая функция $f(x)$ на интервале (a, b) строго убывала, достаточно, чтобы $\forall x \in (a, b) : f'(x) < 0$

Доказательство. Докажем для строгого возрастания. Пусть $f'(x) > 0 \forall x \in (a, b)$. Выберем произвольные точки $x_1, x_2 \in (a, b)$, и, не ограничивая общности, скажем, что $x_1 < x_2$.

Применим формулу конечных приращений Лагранжа. Так как $f'(\xi) > 0$ и $x_2 > x_1$, имеем

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

■

52. Достаточные условия локального экстремума для функции одной переменной.

2 Вопросы, которые были убраны из программы экзамена

1. Эквивалентность определений предела функции по Коши и Гейне

Теорема. Определения предела функции в точке по Коши и Гейне эквивалентны

Доказательство. Пусть f определена на множестве X и число A является пределом функции f в точке x_0 в смысле Коши. Выберем произвольную подходящую последовательность $x_n, n \in \mathbb{N}$, т.е. такую, для которой $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in X$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Покажем, что A является пределом в смысле Гейне.

Зададим произвольное число $\varepsilon > 0$ и укажем для него такое $\delta > 0$, что $\forall x \in X$ из условия $0 < |x - x_0| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. В силу того, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, для $\delta > 0$ найдется такой номер $N \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq N$ будет выполняться неравенство $|f(x_n) - A| < \varepsilon$, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

Докажем теперь обратное утверждение: предположим, что $A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ в смысле Гейне, и покажем, что число A является пределом функции f в точке x_0 в смысле Коши. Предположим, что это неверно, т.е.

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall \delta > 0 \exists x_\delta \in X : 0 < |x_\delta - x_0| < \delta : |f(x_\delta) - A| \geq \varepsilon$$

В качестве δ рассмотрим $\delta = \frac{1}{n}$, а соответствующие значения x_δ будем обозначать x_n . Тогда при любом $n \in \mathbb{N}$ выполняются условия $x_n \neq x_0, |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ и $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon$. Отсюда следует, что последовательность $\{x_n\}$ является подходящей, но число A не является пределом функции f в точке x_0 . Получили противоречие. ■

Доказательство. Пусть переменная y в точке y_0 получает приращение $\Delta y \neq 0$. Соответствующее ему приращение переменной x в точке x_0 обозначим как Δx , причем $\Delta x \neq 0$ в силу строгой монотонности функции $y = f(x)$. Запишем отношение приращений в виде

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Допустим, что $\Delta y \rightarrow 0$, тогда $\Delta x \rightarrow 0$, поскольку обратная функция $x = \varphi(y)$ является непрерывной в точке y_0 . В пределе, при $\Delta x \rightarrow 0$, правая часть записанного соотношения становится равной

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

В таком случае левая часть тоже стремится к пределу, который по определению равен производной обратной функции:

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \varphi'(y_0)$$

Таким образом,

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

■

2. Производные функций, графики которых заданы параметрически.

Теорема. Зависимость между аргументом x и функцией y может быть задана в параметрическом виде с помощью двух уравнений:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

Пусть $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ определены и дифференцируемы при $t \in (a, b)$, причем $x'_t = \varphi'(t) \neq 0$ и $x = \varphi(t)$ имеет обратную функцию $t = \theta(x)$, то

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

Доказательство. Перейдем от параметрического задания к явному. При этом получаем сложную функцию $y = \psi(t) = \psi(\theta(x))$, аргументов которой является x .

По правилу нахождения производной сложной функции имеем

$$y'_x = (\psi(\theta(x)))' = \psi'(\theta(x)) \cdot \theta'(x)$$

По теореме об обратной функции $\theta'(x) = \frac{1}{\varphi'(t)}$. А значит

$$y'_x = \psi'(\theta(x)) \cdot \theta'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

■

3. Геометрический смысл дифференциала.

Дифференциал функции численно равен приращению ординаты касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в данной точке, когда аргумент x получает приращение Δx .

[Подробнее тут](#)