

Линейная алгебра, Коллоквиум II

Бобень Вячеслав

[@darkkeks](#), [GitHub](#)

Благодарность выражается Левину Александру ([@azerty1234567890](#))

и Милько Андрею ([@andrew_milko](#)) за видеозаписи лекций.

Дата изменения: 2020.05.28 в 05:33

2019 — 2020

“К коллоку можете даже не готовиться”.

— Роман Сергеевич Авдеев

Содержание

| | | |
|----------|--|----------|
| 1 | Определения и формулировки | 6 |
| 1.1 | Сумма двух подпространств векторного пространства | 6 |
| 1.2 | Теорема о связи размерности суммы двух подпространств с размерностью их пересечения | 6 |
| 1.3 | Сумма нескольких подпространств векторного пространства | 6 |
| 1.4 | Линейная независимость нескольких подпространств векторного пространства | 6 |
| 1.5 | Разложение векторного пространства в прямую сумму подпространств | 6 |
| 1.6 | При каких условиях на подпространства U_1, U_2 векторного пространства V имеет место разложение $V = U_1 \oplus U_2$? | 6 |
| 1.7 | Проекция вектора на подпространство вдоль дополнительного подпространства | 6 |
| 1.8 | Матрица перехода от одного базиса векторного пространства к другому | 6 |
| 1.9 | Формула преобразования координат вектора при замене базиса | 7 |
| 1.10 | Линейное отображение векторных пространств, его простейшие свойства | 7 |
| 1.11 | Изоморфизм векторных пространств, изоморфные векторные пространства | 7 |
| 1.12 | Какими свойствами обладает отношение изоморфности на множестве всех векторных пространств? | 7 |
| 1.13 | Критерий изоморфности двух конечномерных векторных пространств | 7 |
| 1.14 | Матрица линейного отображения | 7 |
| 1.15 | Связь между координатами вектора и его образа при линейном отображении | 8 |
| 1.16 | Формула изменения матрицы линейного отображения при замене базисов | 8 |
| 1.17 | Сумма двух линейных отображений и её матрица. Произведение линейного отображения на скаляр и его матрица | 8 |
| 1.18 | Композиция двух линейных отображений и её матрица | 8 |
| 1.19 | Ядро и образ линейного отображения. Являются ли они подпространствами в соответствующих векторных пространствах? | 8 |
| 1.20 | Критерий инъективности линейного отображения в терминах его ядра | 9 |
| 1.21 | Связь между рангом матрицы линейного отображения и размерностью его образа | 9 |
| 1.22 | Каким свойством обладает набор векторов, дополняющих базис ядра линейного отображения до базиса всего пространства? | 9 |
| 1.23 | Теорема о связи размерностей ядра и образа линейного отображения | 9 |
| 1.24 | К какому простейшему виду можно привести матрицу линейного отображения путём замены базисов? | 9 |
| 1.25 | Линейная функция на векторном пространстве | 9 |
| 1.26 | Сопряжённое (двойственное) векторное пространство и его размерность | 9 |
| 1.27 | Базис сопряжённого пространства, двойственный к данному базису исходного векторного пространства | 10 |
| 1.28 | Билинейная форма на векторном пространстве | 10 |
| 1.29 | Матрица билинейной формы | 10 |
| 1.30 | Формула для вычисления значений билинейной формы в координатах | 10 |
| 1.31 | Формула изменения матрицы билинейной формы при замене базисов | 10 |
| 1.32 | Симметричная билинейная форма. Критерий симметричности билинейной формы в терминах её матрицы | 10 |
| 1.33 | Квадратичная форма | 11 |

| | | |
|------|---|----|
| 1.34 | Соответствие между симметричными билинейными формами и квадратичными формами | 11 |
| 1.35 | Симметризация билинейной формы | 11 |
| 1.36 | Поляризация квадратичной формы | 11 |
| 1.37 | Матрица квадратичной формы | 11 |
| 1.38 | Канонический вид квадратичной формы | 11 |
| 1.39 | Нормальный вид квадратичной формы над \mathbb{R} | 11 |
| 1.40 | Индексы инерции квадратичной формы над \mathbb{R} | 11 |
| 1.41 | Закон инерции для квадратичной формы над \mathbb{R} | 11 |
| 1.42 | Положительно/неотрицательно определённая квадратичная форма над \mathbb{R} | 11 |
| 1.43 | Отрицательно/неположительно определённая квадратичная форма над \mathbb{R} | 11 |
| 1.44 | Неопределённая квадратичная форма над \mathbb{R} | 12 |
| 1.45 | Способ нахождения индексов инерции квадратичной формы над \mathbb{R} , вытекающий из метода Якоби | 12 |
| 1.46 | Критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы над \mathbb{R} | 12 |
| 1.47 | Критерий отрицательной определённости квадратичной формы над \mathbb{R} | 12 |
| 1.48 | Евклидово пространство | 12 |
| 1.49 | Длина вектора в евклидовом пространстве | 12 |
| 1.50 | Неравенство Коши–Буняковского | 12 |
| 1.51 | Угол между ненулевыми векторами евклидова пространства | 13 |
| 1.52 | Матрица Грама системы векторов евклидова пространства | 13 |
| 1.53 | Свойства определителя матрицы Грама | 13 |
| 1.54 | Ортогональное дополнение подмножества евклидова пространства | 13 |
| 1.55 | Чему равна размерность ортогонального дополнения к подпространству евклидова пространства? | 13 |
| 1.56 | Каким свойством обладают подпространство евклидова пространства и его ортогональное дополнение? | 13 |
| 1.57 | Ортогональная проекция вектора на подпространство | 13 |
| 1.58 | Ортогональная составляющая вектора относительно подпространства | 13 |
| 1.59 | Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в \mathbb{R}^n , заданное своим базисом | 14 |
| 1.60 | Ортогональная система векторов евклидова пространства. Ортогональный базис | 14 |
| 1.61 | Ортонормированная система векторов евклидова пространства. Ортонормированный базис | 14 |
| 1.62 | Описание всех ортонормированных базисов евклидова пространства в терминах одного такого базиса и матриц перехода | 14 |
| 1.63 | Ортогональная матрица | 14 |
| 1.64 | Формула для координат вектора в ортогональном и ортонормированном базисах евклидова пространства | 14 |
| 1.65 | Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в терминах его ортогонального базиса | 14 |
| 1.66 | Метод ортогонализации Грама–Шмидта | 15 |
| 1.67 | Теорема Пифагора в евклидовом пространстве | 15 |
| 1.68 | Расстояние между векторами евклидова пространства | 15 |
| 1.69 | Неравенство треугольника в евклидовом пространстве | 15 |
| 1.70 | Теорема о расстоянии между вектором и подпространством в терминах ортогональной составляющей | 15 |
| 1.71 | Псевдорешение несовместной системы линейных уравнений | 15 |
| 1.72 | Формула для расстояния от вектора до подпространства в терминах матриц Грама | 16 |
| 1.73 | k -мерный параллелепипед и его объём | 16 |
| 1.74 | Формула для объёма k -мерного параллелепипеда в n -мерном евклидовом пространстве | 16 |
| 1.75 | Формула для объёма n -мерного параллелепипеда в n -мерном евклидовом пространстве в терминах координат в ортонормированном базисе | 16 |
| 1.76 | В каком случае два базиса евклидова пространства называются одинаково ориентированными? | 16 |
| 1.77 | Ориентированный объём n -мерного параллелепипеда в n -мерном евклидовом пространстве | 16 |
| 1.78 | Свойства ориентированного объёма n -мерного параллелепипеда в n -мерном евклидовом пространстве | 16 |
| 1.79 | Связь векторного произведения со скалярным и ориентированным объёмом | 16 |
| 1.80 | Формула для вычисления векторного произведения в терминах координат в положительно ориентированном ортонормированном базисе | 17 |
| 1.81 | Смешанное произведение векторов трёхмерного евклидова пространства | 17 |
| 1.82 | Формула для вычисления смешанного произведения в терминах координат в положительно ориентированном ортонормированном базисе | 17 |
| 1.83 | Критерий компланарности трёх векторов трёхмерного евклидова пространства | 17 |
| 1.84 | Критерий коллинеарности двух векторов трёхмерного евклидова пространства | 17 |
| 1.85 | Геометрические свойства векторного произведения | 17 |
| 1.86 | Линейное многообразие. Характеризация линейных многообразий как сдвигов подпространств | 17 |
| 1.87 | Критерий равенства двух линейных многообразий. Направляющее подпространство и размерность линейного многообразия | 17 |
| 1.88 | Теорема о плоскости, проходящей через $k + 1$ точку в \mathbb{R}^n | 17 |
| 1.89 | Три способа задания прямой в \mathbb{R}^2 . Уравнение прямой в \mathbb{R}^2 , проходящей через две различные точки | 18 |
| 1.90 | Три способа задания плоскости в \mathbb{R}^3 | 18 |
| 1.91 | Уравнение плоскости в \mathbb{R}^3 , проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой | 18 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1.92 | Три способа задания прямой в \mathbb{R}^3 | 18 |
| 1.93 | Уравнения прямой в \mathbb{R}^3 , проходящей через две различные точки | 19 |
| 1.94 | Случаи взаимного расположения двух прямых в \mathbb{R}^3 | 19 |
| 1.95 | Формула для расстояния от точки до прямой в \mathbb{R}^3 | 19 |
| 1.96 | Формула для расстояния от точки до плоскости в \mathbb{R}^3 | 19 |
| 1.97 | Формула для расстояния между двумя скрещивающимися прямыми в \mathbb{R}^3 | 20 |
| 1.98 | Линейный оператор | 20 |
| 1.99 | Матрица линейного оператора | 20 |
| 1.100 | Связь между координатами вектора и его образа при действии линейного оператора | 20 |
| 1.101 | Формула изменения матрицы линейного оператора при переходе к другому базису | 20 |
| 1.102 | Подобные матрицы | 20 |
| 1.103 | Подпространство, инвариантное относительно линейного оператора | 20 |
| 1.104 | Вид матрицы линейного оператора в базисе, дополняющем базис инвариантного подпространства | 20 |
| 1.105 | Вид матрицы линейного оператора в базисе, согласованном с разложением пространства в прямую сумму двух инвариантных подпространств | 21 |
| 1.106 | Собственный вектор линейного оператора | 21 |
| 1.107 | Собственное значение линейного оператора | 21 |
| 1.108 | Спектр линейного оператора | 21 |
| 1.109 | Диагонализуемый линейный оператор | 21 |
| 1.110 | Критерий диагонализуемости линейного оператора в терминах собственных векторов | 21 |
| 1.111 | Собственное подпространство линейного оператора | 21 |
| 1.112 | Характеристический многочлен линейного оператора | 21 |
| 1.113 | Связь спектра линейного оператора с его характеристическим многочленом | 21 |
| 1.114 | Алгебраическая кратность собственного значения линейного оператора | 21 |
| 1.115 | Геометрическая кратность собственного значения линейного оператора | 21 |
| 1.116 | Связь между алгебраической и геометрической кратностями собственного значения линейного оператора | 22 |
| 1.117 | Критерий диагонализуемости линейного оператора в терминах его характеристического многочлена и кратностей его собственных значений | 22 |
| 1.118 | Линейное отображение евклидовых пространств, сопряжённое к данному | 22 |
| 1.119 | Линейный оператор в евклидовом пространстве, сопряжённый к данному | 22 |
| 1.120 | Самосопряжённый линейный оператор в евклидовом пространстве | 22 |
| 1.121 | Теорема о каноническом виде самосопряжённого линейного оператора | 22 |
| 1.122 | Каким свойством обладают собственные подпространства самосопряжённого линейного оператора, отвечающие попарно различным собственным значениям | 22 |
| 1.123 | Приведение квадратичной формы к главным осям | 22 |
| 1.124 | Ортогональный линейный оператор | 22 |
| 1.125 | Теорема о пяти эквивалентных условиях, определяющих ортогональный линейный оператор | 22 |
| 1.126 | Теорема о каноническом виде ортогонального линейного оператора | 23 |
| 1.127 | Классификация ортогональных линейных операторов в трёхмерном евклидовом пространстве | 23 |
| 2 | Вопросы на доказательство | 24 |
| 2.1 | Подпространства | 24 |
| 2.1.1 | Теорема о связи размерности суммы двух подпространств с размерностью их пересечения | 24 |
| 2.1.2 | Теорема о пяти эквивалентных условиях, определяющих линейно независимый набор подпространств векторного пространства | 24 |
| 2.2 | Линейные отображения | 25 |
| 2.2.1 | Свойства отношения изоморфности на множестве всех векторных пространств | 25 |
| 2.2.2 | Критерий изоморфности двух конечномерных векторных пространств | 26 |
| 2.2.3 | Существование и единственность линейного отображения с заданными образами базисных векторов | 26 |
| 2.2.4 | Связь между координатами вектора и его образа при линейном отображении | 27 |
| 2.2.5 | Формула изменения матрицы линейного отображения при замене базисов | 27 |
| 2.2.6 | Изоморфизм $\text{Hom}(V, W) \xrightarrow{\sim} \text{Mat}_{m \times n}(F)$ при фиксированных базисах V и W | 28 |
| 2.2.7 | Матрица композиции двух линейных отображений | 28 |
| 2.2.8 | Утверждение о том, что ядро и образ — подпространства в соответствующих векторных пространствах | 28 |
| 2.2.9 | Связь между рангом матрицы линейного отображения и размерностью его образа | 29 |
| 2.2.10 | Лемма о дополнении базиса ядра линейного отображения до базиса всего пространства | 29 |
| 2.2.11 | Теорема о связи размерностей ядра и образа линейного отображения, приведение матрицы линейного отображения к диагональному виду с единицами и нулями на диагонали | 29 |
| 2.3 | Линейные, билинейные и квадратичные формы | 30 |
| 2.3.1 | Свойство базиса сопряжённого векторного пространства | 30 |
| 2.3.2 | Формула для вычисления значений билинейной формы в координатах | 30 |
| 2.3.3 | Существование и единственность билинейной формы с заданной матрицей | 30 |

| | | |
|--------|---|----|
| 2.3.4 | Формула изменения матрицы билинейной формы при переходе к другому базису | 31 |
| 2.3.5 | Критерий симметричности билинейной формы в терминах её матрицы в каком-либо базисе | 31 |
| 2.3.6 | Соответствие между симметричными билинейными формами и квадратичными формами | 32 |
| 2.3.7 | Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду | 32 |
| 2.3.8 | Метод Якоби приведения квадратичной формы к каноническому виду | 33 |
| 2.3.9 | Существование нормального вида для квадратичной формы над \mathbb{R} | 34 |
| 2.3.10 | Закон инерции | 35 |
| 2.3.11 | Следствие метода Якоби о нахождении индексов инерции квадратичной формы над \mathbb{R} | 35 |
| 2.3.12 | Критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы, критерий отрица- тельной определённости квадратичной формы | 36 |
| 2.4 | Евклидовы пространства | 36 |
| 2.4.1 | Неравенство Коши–Буняковского | 36 |
| 2.4.2 | Свойства определителя матрицы Грама системы векторов евклидова пространства | 37 |
| 2.4.3 | Свойства ортогонального дополнения к подпространству в евклидовом пространстве: размер- ность, разложение в прямую сумму, ортогональное дополнение к ортогональному дополнению . . | 37 |
| 2.4.4 | Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в \mathbb{R}^n в терминах его произ- вольного базиса | 37 |
| 2.4.5 | Существование ортонормированного базиса в евклидовом пространстве, дополнение ортогональ- ной (ортонормированной) системы векторов до ортогонального (ортонормированного) базиса . . | 38 |
| 2.4.6 | Описание всех ортонормированных базисов в терминах одного и матриц перехода | 38 |
| 2.4.7 | Формула для координат вектора в ортогональном (ортонормированном) базисе. Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в терминах его ортогонального (ортонор- мированного) базиса | 38 |
| 2.4.8 | Теорема Пифагора и неравенство треугольника в евклидовом пространстве | 39 |
| 2.4.9 | Теорема о расстоянии между вектором и подпространством в терминах ортогональной состав- ляющей | 39 |
| 2.4.10 | Метод наименьших квадратов для несовместных систем линейных уравнений: постановка зада- чи и её решение. Единственность псевдорешения и явная формула для него в случае линейной независимости столбцов матрицы коэффициентов | 39 |
| 2.4.11 | Формула для расстояния между вектором и подпространством в терминах матриц Грама | 40 |
| 2.4.12 | Две формулы для объёма k -мерного параллелепипеда в евклидовом пространстве | 40 |
| 2.5 | Элементы аналитической геометрии и линейные многообразия | 41 |
| 2.5.1 | Теорема о векторном произведении и формуле для него в координатах в положительно ориен- тированном ортонормированном базисе | 41 |
| 2.5.2 | Критерий коллинеарности двух векторов трёхмерного евклидова пространства | 41 |
| 2.5.3 | Геометрические свойства векторного произведения | 41 |
| 2.5.4 | Антикоммутативность и билинейность векторного произведения | 42 |
| 2.5.5 | Линейные многообразия как сдвиги подпространств | 42 |
| 2.5.6 | Критерий равенства двух линейных многообразий | 42 |
| 2.5.7 | Теорема о плоскости, проходящей через $k + 1$ точку в \mathbb{R}^n | 42 |
| 2.6 | Линейные операторы | 43 |
| 2.6.1 | Критерий обратимости линейного оператора в терминах его ядра, образа и определителя | 43 |
| 2.6.2 | Критерий диагонализуемости линейного оператора в терминах собственных векторов | 43 |
| 2.6.3 | Связь спектра линейного оператора с его характеристическим многочленом | 43 |
| 2.6.4 | Связь между алгебраической и геометрической кратностями собственного значения линейного оператора | 43 |
| 2.6.5 | Линейная независимость собственных подпространств линейного оператора, отвечающих попар- но различным собственным значениям | 44 |
| 2.6.6 | Диагонализуемость линейного оператора, у которого число корней характеристического много- члена равно размерности пространства | 44 |
| 2.6.7 | Критерий диагонализуемости линейного оператора в терминах его характеристического много- члена и кратностей собственных значений | 44 |
| 2.6.8 | Существование собственного вектора у линейного оператора в векторном пространстве над \mathbb{C} . Существование одномерного или двумерного инвариантного подпространства для линейного опе- ратора в векторном пространстве над \mathbb{R} | 45 |
| 2.7 | Линейные отображения и операторы в евклидовых пространствах | 45 |
| 2.7.1 | Сопряжённое линейное отображение: определение, существование и единственность. Матрица сопряжённого отображения в паре произвольных и паре ортонормированных базисов | 45 |
| 2.7.2 | Инвариантность ортогонального дополнения к подпространству, инвариантному относительно самосопряжённого линейного оператора | 46 |
| 2.7.3 | Существование собственного вектора для самосопряжённого линейного оператора | 46 |
| 2.7.4 | Существование ортонормированного базиса из собственных векторов для самосопряжённого ли- нейного оператора | 46 |

| | | |
|-------|---|----|
| 2.7.5 | Приведение квадратичной формы к главным осям | 46 |
| 2.7.6 | Теорема о пяти эквивалентных условиях, определяющих ортогональный линейный оператор . . | 46 |
| 2.7.7 | Инвариантность ортогонального дополнения к подпространству, инвариантному относительно ортогонального линейного оператора | 47 |
| 2.7.8 | Теорема о каноническом виде ортогонального линейного оператора | 47 |

1 Определения и формулировки

1. Сумма двух подпространств векторного пространства

Пусть V – векторное пространство над F .

$U, W \subseteq V$ – подпространства.

Определение. Суммой подпространств U, W называется множество

$$U + W := \{u + w \mid u \in U, w \in W\}.$$

2. Теорема о связи размерности суммы двух подпространств с размерностью их пересечения

Теорема. $\dim(U \cap W) + \dim(U + W) = \dim U + \dim W$.

Пример. Всякие две плоскости в \mathbb{R}^3 (содержащие 0) имеют общую прямую.

Здесь $V = \mathbb{R}^3$, $\dim U = 2$, $\dim W = 2$.

При этом $\dim(U + W) \leq 3$.

Тогда, $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) \geq 2 + 2 - 3 = 1$.

3. Сумма нескольких подпространств векторного пространства

Пусть $U_1, \dots, U_k \subseteq V$ – подпространства.

Определение. Суммой подпространств U_1, \dots, U_k называется множество

$$U_1 + \dots + U_k = \{u_1 + \dots + u_k \mid u_i \in U_i\}.$$

Замечание. $\dim(U_1 + \dots + U_k) \leq \dim U_1 + \dots + \dim U_k$.

4. Линейная независимость нескольких подпространств векторного пространства

Определение. Подпространства U_1, \dots, U_k называются *линейно независимыми*, если $\forall u_1 \in U_1, \dots, u_k \in U_k$ из условия $u_1 + \dots + u_k = 0$ следует $u_1 = \dots = u_k = 0$.

Пример. Если $\dim U_i = 1$ и $U_i = \langle u_i \rangle \forall i$, то U_1, \dots, U_k линейно независимы $\iff u_1, \dots, u_k$ линейно независимы.

5. Разложение векторного пространства в прямую сумму подпространств

Определение. Говорят, что векторное пространство V разлагается в *прямую сумму* U_1, \dots, U_k , если

1. $V = U_1 + \dots + U_k$,
2. U_1, \dots, U_k линейно независимы.

Обозначение: $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k$.

Пример. Если e_1, \dots, e_n – базис V , то $V = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle e_n \rangle$

6. При каких условиях на подпространства U_1, U_2 векторного пространства V имеет место разложение $V = U_1 \oplus U_2$?

$$V = U_1 \oplus U_2 \iff \begin{cases} V = U_1 + U_2, \\ U_1 \cap U_2 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} \dim V = \dim U_1 + \dim U_2, \\ U_1 \cap U_2 = 0. \end{cases}$$

7. Проекция вектора на подпространство вдоль дополнительного подпространства

Замечание. $V = U_1 \oplus U_2 \implies \forall v \in V \exists! u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$, такие что $v = u_1 + u_2$.

Тогда, u_1 называется проекцией вектора v на U_1 вдоль U_2 .

Так же, u_2 называется проекцией вектора v на U_2 вдоль U_1 .

8. Матрица перехода от одного базиса векторного пространства к другому

Пусть (e_1, \dots, e_n) и (e'_1, \dots, e'_n) – два базиса в V ,

$$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C,$$

при этом $\det C \neq 0$.

Определение. Матрица C называется *матрицей перехода* от базиса (e_1, \dots, e_n) к базису (e'_1, \dots, e'_n) .

Замечание. Матрица перехода от (e'_1, \dots, e'_n) к (e_1, \dots, e_n) – это C^{-1} .

9. Формула преобразования координат вектора при замене базиса

Пусть C — матрица перехода от базиса $e = (e_1, \dots, e_n)$ к базису $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$, $v \in V$, тогда

$$\begin{aligned}v &= x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \\v &= x'_1 e'_1 + \dots + x'_n e'_n.\end{aligned}$$

Предложение.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

10. Линейное отображение векторных пространств, его простейшие свойства

Пусть V, W — векторные пространства над F .

Определение. Отображение $\varphi: V \rightarrow W$ называется *линейным*, если

1. $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$,
2. $\varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v)$.

$\forall v_1, v_2, v \in V, \forall \lambda \in F$.

Простейшие свойства

1. $\varphi(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$.
2. $\varphi(-v) = -\varphi(v)$.

11. Изоморфизм векторных пространств, изоморфные векторные пространства

Определение. Отображение $\varphi: V \rightarrow W$ называется *изоморфизмом* если оно линейно и биективно.

Обозначение: $\varphi: V \xrightarrow{\sim} W$.

Определение. Два векторных пространства V, W называются *изоморфными*, если существует изоморфизм $\varphi: V \xrightarrow{\sim} W$.

Обозначается: $V \simeq W$ (либо $V \cong W$).

12. Какими свойствами обладает отношение изоморфности на множестве всех векторных пространств?

Теорема. Отношение изоморфности является отношением эквивалентности на множестве всех векторных пространств над фиксированным полем F .

13. Критерий изоморфности двух конечномерных векторных пространств

Теорема. Пусть V, W — два конечномерных векторных пространства над F .

Тогда, $V \simeq W \iff \dim V = \dim W$.

14. Матрица линейного отображения

Пусть V, W — векторные пространства над F .

$e = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V ,

$f = (f_1, \dots, f_m)$ — базис W .

Пусть $\varphi: V \rightarrow W$ — линейное отображение.

$\forall j = 1, \dots, n$

$$\varphi(e_j) = a_{1j}f_1 + a_{2j}f_2 + \dots + a_{mj}f_m = (f_1, \dots, f_m) \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

Тогда, $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = (f_1, \dots, f_m) \cdot A$, где $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{m \times n}(F)$.

Определение. A называется матрицей линейного отображения φ в базисах e и f .

Обозначение: $A = A(\varphi, e, f)$.

В j -м столбце матрицы A стоят координаты вектора $\varphi(e_j)$ в базисе f .

15. Связь между координатами вектора и его образа при линейном отображении

Предложение. Пусть $\varphi: V \rightarrow W$ — линейное отображение,

$\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V ,

$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$ — базис W ,

$A = A(\varphi, \mathbf{e}, \mathbf{f})$.

$v \in V \implies v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$,

$$\varphi(v) = y_1 f_1 + \dots + y_m f_m.$$

Тогда,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

16. Формула изменения матрицы линейного отображения при замене базисов

Пусть \mathbf{e}' — другой базис в V , \mathbf{f}' — другой базис в W .

$$\mathbf{e}' = \mathbf{e} \cdot C_{\in M_n},$$

$$\mathbf{f}' = \mathbf{f} \cdot D_{\in M_m}.$$

$$A = A(\varphi, \mathbf{e}, \mathbf{f}),$$

$$A' = A(\varphi, \mathbf{e}', \mathbf{f}').$$

Предложение. $A' = D^{-1}AC$.

17. Сумма двух линейных отображений и её матрица. Произведение линейного отображения на скаляр и его матрица

Пусть $\varphi, \psi \in \text{Hom}(V, W)$, $\lambda \in F$.

Определение.

1. Суммой линейных отображений φ и ψ называется линейное отображение $\varphi + \psi \in \text{Hom}(V, W)$, такое что $(\varphi + \psi)(v) := \varphi(v) + \psi(v)$.
2. Произведение φ на λ — это линейное отображение $\lambda\varphi \in \text{Hom}(V, W)$, такое что $(\lambda\varphi)(v) := \lambda\varphi(v)$.

Зафиксируем базисы $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ в V и $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$ в W .

Предложение.

1. $\varphi, \psi \in \text{Hom}(V, W)$, $A_\varphi = A(\varphi, \mathbf{e}, \mathbf{f})$
 $A_\psi = A(\psi, \mathbf{e}, \mathbf{f})$
 $A_{\varphi+\psi} = A(\varphi + \psi, \mathbf{e}, \mathbf{f}) \implies A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$
2. $\lambda \in F, \varphi \in \text{Hom}(V, W)$, $A_\varphi = A(\varphi, \mathbf{e}, \mathbf{f})$
 $A_{\lambda\varphi} = A(\lambda\varphi, \mathbf{e}, \mathbf{f}) \implies A_{\lambda\varphi} = \lambda A_\varphi$

18. Композиция двух линейных отображений и её матрица

Пусть $U \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{\varphi} W$ — цепочка линейных отображений, а $\varphi \circ \psi: U \rightarrow W$ — их композиция,

$\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V ,

$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$ — базис W ,

$\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_k)$ — базис U .

$$A_\varphi = A(\varphi, \mathbf{e}, \mathbf{f}),$$

$$A_\psi = A(\psi, \mathbf{g}, \mathbf{e}),$$

$$A_{\varphi \circ \psi} = A(\varphi \circ \psi, \mathbf{g}, \mathbf{f}).$$

Тогда, $A_{\varphi \circ \psi} = A_\varphi \cdot A_\psi$.

19. Ядро и образ линейного отображения. Являются ли они подпространствами в соответствующих векторных пространствах?

Пусть $\varphi: V \rightarrow W$.

Определение. Ядро линейного отображения φ — это $\ker \varphi := \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\} \subseteq V$.

Образ линейного отображения φ — это $\text{Im } \varphi := \varphi(V) \subseteq W$.

Предложение.

1. Ядро — подпространство в V .
2. Образ — подпространство в W .

20. Критерий инъективности линейного отображения в терминах его ядра Пусть V, W — векторные пространства над F ,

$\varphi: V \rightarrow W$ — линейное отображение.

Предложение.

- (a) φ инъективно $\iff \ker \varphi = \{0\}$,
- (b) φ сюръективно $\iff \operatorname{Im} \varphi = W$.

21. Связь между рангом матрицы линейного отображения и размерностью его образа

Пусть $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V ,

$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$ — базис W ,

$A = A(\varphi, \mathbf{e}, \mathbf{f})$.

Теорема. $\operatorname{rk} A = \dim \operatorname{Im} \varphi$.

Замечание. Число $\dim \operatorname{Im} \varphi$ называется *рангом* линейного отображения φ , обозначается $\operatorname{rk} \varphi$.

Следствие. $\operatorname{rk} A$ не зависит от выбора пары базисов \mathbf{e} и \mathbf{f} .

22. Каким свойством обладает набор векторов, дополняющих базис ядра линейного отображения до базиса всего пространства?

Предложение. Пусть e_1, \dots, e_k — базис $\ker \varphi$ и векторы e_{k+1}, \dots, e_n дополняют его до базиса всего V .

Тогда, $\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)$ образуют базис в $\operatorname{Im} \varphi$.

23. Теорема о связи размерностей ядра и образа линейного отображения

Теорема. $\dim \operatorname{Im} \varphi + \dim \ker \varphi = \dim V$.

24. К какому простейшему виду можно привести матрицу линейного отображения путём замены базисов?

Предложение. Пусть $\operatorname{rk} \varphi = r$. Тогда существует базис \mathbf{e} в V и базис \mathbf{f} в W , такие что

$$A(\varphi, \mathbf{e}, \mathbf{f}) = \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) = \begin{matrix} & \begin{matrix} r & & & & n-r \end{matrix} \\ \begin{matrix} r \\ m-r \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

25. Линейная функция на векторном пространстве

Определение. *Линейной функцией* (или *линейной формой*, или *линейным функционалом*) на V называется всякое линейное отображение $\alpha: V \rightarrow F$.

Обозначение. $V^* := \operatorname{Hom}(V, F)$ — множество всех линейных функций на V .

26. Сопряжённое (двойственное) векторное пространство и его размерность

Из общей теории линейных отображений:

1. V^* — векторное пространство (оно называется *сопряжённым* или *двойственным*).
2. Если $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — фиксированный базис в V , то есть изоморфизм $V^* \simeq \operatorname{Mat}_{1 \times n}(F)$ (а это ни что иное, как строки длины n).

$$\alpha \rightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

$$v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

$$\alpha(v) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n.$$

$\alpha_i = \alpha(e_i)$ — коэффициенты линейной функции α в базисе \mathbf{e} .

Следствие. $\dim V^* = \dim V \implies V^* \simeq V$.

27. Базис сопряжённого пространства, двойственный к данному базису исходного векторного пространства

При $i = 1, \dots, n$ рассмотрим линейную функцию $\varepsilon_i \in V^*$, соответствующую строке $(0 \dots 1 \dots 0)$. Тогда $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ — базис V^* , он однозначно определяется условием $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$ (δ_{ij} — символ Кронекера)

Определение. Базис $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ пространства V^* , определенный условием выше, называется базисом, *двойственным* (сопряженным) к базису e .

Удобная запись условия:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} (e_1, \dots, e_n) = E.$$

28. Билинейная форма на векторном пространстве

Пусть V — векторное пространство над F .

Определение. Билинейная форма на V — это отображение $\beta: V \times V \rightarrow F$, линейное по каждому аргументу.

Линейность по 1-му аргументу

- $\beta(x_1 + x_2, y) = \beta(x_1, y) + \beta(x_2, y) \quad \forall x_1, x_2, y \in V,$
- $\beta(\lambda x, y) = \lambda \beta(x, y) \quad \forall x, y \in V, \lambda \in F.$

Линейность по 2-му аргументу

- $\beta(x, y_1 + y_2) = \beta(x, y_1) + \beta(x, y_2) \quad \forall x, y_1, y_2 \in V,$
- $\beta(x, \lambda y) = \lambda \beta(x, y) \quad \forall x, y \in V, \lambda \in F.$

29. Матрица билинейной формы

Считаем, что $\dim V = n < \infty$.

Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V .

Определение. Матрицей билинейной формы β в базисе e называется такая матрица $B \in M_n$, что $b_{ij} = \beta(e_i, e_j)$.

Обозначение: $B(\beta, e)$.

30. Формула для вычисления значений билинейной формы в координатах

Пусть $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$,

$y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$.

Тогда,

$$\beta(x, y) = (x_1, \dots, x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

31. Формула изменения матрицы билинейной формы при замене базисов

$B = B(\beta, e)$.

Пусть $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ — другой базис V .

$e' = e \cdot C$.

$B' := B(\beta, e')$.

Предложение. $B' = C^T B C$.

32. Симметричная билинейная форма. Критерий симметричности билинейной формы в терминах её матрицы

Определение. Билинейная форма β называется *симметричной*, если $\beta(x, y) = \beta(y, x) \quad \forall x, y \in V$.

Пусть e — произвольный базис V .

Предложение. β симметрична $\iff B = B^T$.

33. Квадратичная форма

Пусть $\beta: V \times V \rightarrow F$ — билинейная форма на V .

Определение. Отображение $Q_\beta: V \rightarrow F$, $Q_\beta(x) = \beta(x, x)$, называется *квадратичной формой*, ассоциированной с билинейной формой β .

Пусть e — базис V , $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, $B = B(\beta, e)$.

Тогда,

$$Q_\beta(x) = (x_1 \dots x_n) B \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (b_{ij} + b_{ji}) x_i x_j.$$

34. Соответствие между симметричными билинейными формами и квадратичными формами

Предложение. Пусть в поле F выполнено условие $1 + 1 \neq 0$ (то есть $2 \neq 0$). Тогда отображение $\beta \mapsto Q_\beta$ является биекцией между симметричными билинейными формами на V и квадратичными формами на V .

35. Симметризация билинейной формы

Билинейная форма $\sigma(x, y) = \frac{1}{2} (\beta(x, y) + \beta(y, x))$ называется *симметризацией* билинейной формы β .

Если B и S — матрицы билинейных форм β и σ в некотором базисе, то $S = \frac{1}{2}(B + B^T)$.

36. Поляризация квадратичной формы

Симметричная билинейная форма $\beta(x, y) = \frac{1}{2} [Q(x + y) - Q(x) - Q(y)]$ называется *поляризацией* квадратичной формы Q .

37. Матрица квадратичной формы

Определение. Матрицей квадратичной формы Q в базисе e называется матрица соответствующей симметричной билинейной формы (поляризации) в базисе e .

Обозначение: $B(Q, e)$.

Пример. Пусть $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$.

Если e — стандартный базис, то $B(Q, e) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

38. Канонический вид квадратичной формы

Определение. Квадратичная форма Q имеет в базисе e *канонический вид*, если $B(Q, e)$ диагональна.

Если $B(Q, e) = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n)$, то $Q(x_1, \dots, x_n) = b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + \dots + b_n x_n^2$.

39. Нормальный вид квадратичной формы над \mathbb{R}

Определение. Квадратичная форма над \mathbb{R} имеет *нормальный вид* в базисе e , если в этом базисе

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \varepsilon_1 x_1^2 + \dots + \varepsilon_n x_n^2,$$

где $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$.

40. Индексы инерции квадратичной формы над \mathbb{R}

Пусть $F = \mathbb{R}$.

Пусть $Q: V \rightarrow \mathbb{R}$ — квадратичная форма.

Можно привести к нормальному виду

$$Q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_{s+t}^2.$$

Здесь $i_+ := s$ — положительный индекс инерции квадратичной формы Q ,

$i_- := t$ — отрицательный индекс инерции квадратичной формы Q .

41. Закон инерции для квадратичной формы над \mathbb{R}

Теорема. Числа i_+ и i_- не зависят от базиса в котором Q принимает нормальный вид.

42. Положительно/неотрицательно определённая квадратичная форма над \mathbb{R}

43. Отрицательно/неположительно определённая квадратичная форма над \mathbb{R}

44. Неопределённая квадратичная форма над \mathbb{R}

Определение. Квадратичная форма Q над \mathbb{R} называется

| Термин | Обозначение | Условие | Нормальный вид | Индексы инерции |
|-----------------------------|-------------|--|--|--------------------|
| Положительно определённой | $Q > 0$ | $Q(x) > 0 \forall x \neq 0$ | $x_1^2 + \dots + x_n^2$ | $i_+ = n, i_- = 0$ |
| Отрицательно определённой | $Q < 0$ | $Q(x) < 0 \forall x \neq 0$ | $-x_1^2 - \dots - x_n^2$ | $i_+ = 0, i_- = n$ |
| Неотрицательно определённой | $Q \geq 0$ | $Q(x) \geq 0 \forall x$ | $x_1^2 + \dots + x_k^2, k \leq n$ | $i_+ = k, i_- = 0$ |
| Неположительно определённой | $Q \leq 0$ | $Q(x) \leq 0 \forall x$ | $-x_1^2 - \dots - x_k^2, k \leq n$ | $i_+ = 0, i_- = k$ |
| Неопределённой | — | $\exists x : Q(x) > 0$ $\exists y : Q(y) < 0$ | $x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_{s+t}^2$ $s, t \geq 1$ | $i_+ = s, i_- = t$ |

45. Способ нахождения индексов инерции квадратичной формы над \mathbb{R} , вытекающий из метода Якоби

Пусть $Q: V \rightarrow \mathbb{R}$ — квадратичная форма,

$e = (e_1, \dots, e_n)$ — базис,

$B = B(Q, e)$,

δ_k — k -й угловой минор матрицы B .

Следствие (из метода Якоби). Пусть $\delta_k \neq 0 \forall k$. Тогда:

Число i_+ равно количеству сохранений знака в последовательности $1, \delta_1, \dots, \delta_n$.

Число i_- равно количеству перемен знака в последовательности $1, \delta_1, \dots, \delta_n$.

46. Критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы над \mathbb{R}

Пусть V — векторное пространство над \mathbb{R} , $\dim V = n$,

$e = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V ,

$B = B(Q, e)$,

B_k — левый верхний $k \times k$ блок,

$\delta_k = \det B_k$.

Теорема (Критерий Сильвестра положительной определённости).

$$Q > 0 \iff \delta_k > 0 \forall k = 1 \dots n.$$

47. Критерий отрицательной определённости квадратичной формы над \mathbb{R}

Следствие.

$$Q < 0 \iff \delta_k \begin{cases} > 0 & \text{при } k : 2, \\ < 0 & \text{при } k \not: 2. \end{cases}$$

48. Евклидово пространство

Определение. *Евклидово пространство* — это векторное пространство \mathbb{E} над \mathbb{R} , на котором задано *скалярное произведение*, то есть такое отображение $(\cdot, \cdot): \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$, что

1. (\cdot, \cdot) — симметричная билинейная форма,
2. Квадратичная форма (x, x) положительно определённая.

49. Длина вектора в евклидовом пространстве

Определение. *Длина* вектора $x \in \mathbb{E}$ — это $|x| := \sqrt{(x, x)}$.

Свойство: $|x| \geq 0$, причем $|x| = 0 \iff x = 0$.

Пример. Если $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением, то $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.

50. Неравенство Коши–Буняковского

Предложение (неравенство Коши–Буняковского). $\forall x, y \in \mathbb{E}$ верно $|(x, y)| \leq |x| \cdot |y|$, причём равенство $\iff x, y$ пропорциональны.

Пример. Пусть $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением, тогда

$$|x_1 y_1 + \dots + x_n y_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}.$$

51. Угол между ненулевыми векторами евклидова пространства

Пусть $x, y \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$, тогда $-1 \leq \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|} \leq 1$.

Определение. Угол между ненулевыми векторами $x, y \in \mathbb{E}$, это такой $\alpha \in [0, \pi]$, что $\cos \alpha = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}$.

Тогда $(x, y) = |x| |y| \cos \alpha$.

52. Матрица Грама системы векторов евклидова пространства

Пусть v_1, \dots, v_k — произвольная система векторов.

Определение. Матрица Грама этой системы — это

$$G(v_1, \dots, v_k) = \begin{pmatrix} (v_1, v_1) & (v_1, v_2) & \dots & (v_1, v_k) \\ (v_2, v_1) & (v_2, v_2) & \dots & (v_2, v_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (v_k, v_1) & (v_k, v_2) & \dots & (v_k, v_k) \end{pmatrix}.$$

Пример. $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением.

$a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n \rightsquigarrow A := (a_1, \dots, a_k) \in \text{Mat}_{n \times k}(\mathbb{R})$.

Тогда, $G(a_1, \dots, a_k) = A^T \cdot A$.

53. Свойства определителя матрицы Грама

Предложение. $\forall v_1, \dots, v_k \in \mathbb{E} \implies \det G(v_1, \dots, v_k) \geq 0$.

Более того, $\det G(v_1, \dots, v_k) > 0 \iff v_1, \dots, v_k$ линейно независимы.

54. Ортогональное дополнение подмножества евклидова пространства

Определение. Ортогональное дополнение множества $S \subseteq \mathbb{E}$ — это множество $S^\perp := \{x \in \mathbb{E} \mid (x, y) = 0 \ \forall y \in S\}$.

55. Чему равна размерность ортогонального дополнения к подпространству евклидова пространства?

Пусть $\dim \mathbb{E} = n$, $S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство.

Тогда, $\dim S^\perp = n - \dim S$.

56. Каким свойством обладают подпространство евклидова пространства и его ортогональное дополнение?

Считаем, что $\dim \mathbb{E} = n < \infty$.

Предложение. Пусть $S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство. Тогда:

1. $\dim S^\perp = n - \dim S$.
2. $\mathbb{E} = S \oplus S^\perp$.
3. $(S^\perp)^\perp = S$.

57. Ортогональная проекция вектора на подпространство

\Downarrow

58. Ортогональная составляющая вектора относительно подпространства

S — подпространство $\implies \mathbb{E} = S \oplus S^\perp$

$\forall v \in \mathbb{E} \exists! x \in S, y \in S^\perp$, такие что $x + y = v$.

Определение.

1. x называется ортогональной проекцией вектора v на подпространство S .
Обозначение: $x = \text{pr}_S v$.
2. y называется ортогональной составляющей вектора v относительно подпространства S .
Обозначение: $y = \text{ort}_S v$.

59. Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в \mathbb{R}^n , заданное своим базисом

Пусть $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением.

$S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство, a_1, \dots, a_k — базис S .

Пусть $A := (a_1, \dots, a_k) \in \text{Mat}_{n \times k}(\mathbb{R})$, $A^{(i)} = a_i$.

Предложение. $\forall v \in \mathbb{R}^n \quad \text{pr}_S v = A(A^T A)^{-1} A^T v$.

60. Ортогональная система векторов евклидова пространства. Ортогональный базис

\Downarrow

61. Ортонормированная система векторов евклидова пространства. Ортонормированный базис

Определение. Система ненулевых векторов v_1, \dots, v_k называется

1. *ортогональной*, если $(v_i, v_j) = 0 \quad \forall i \neq j$ (то есть $G(v_1, \dots, v_k)$ диагональна),
2. *ортонормированной*, если $(v_i, v_j) = 0 \quad \forall i \neq j$ и $(v_i, v_i) = 1$ ($\iff |v_i| = 1$). То есть $G(v_1, \dots, v_k) = E$.

Замечание. Всякая ортогональная (и в частности ортонормированная) система векторов автоматически линейно независима.

$$\det G(v_1, \dots, v_k) = |v_1|^2 \cdot |v_2|^2 \cdots |v_k|^2 \neq 0.$$

Определение. Базис пространства называется *ортогональным* (соответственно *ортонормированным*), если он является ортогональной (ортонормированной) системой векторов.

62. Описание всех ортонормированных базисов евклидова пространства в терминах одного такого базиса и матриц перехода

Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ — ортонормированный базис в E .

Пусть $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ — какой-то другой базис.

$$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C, \quad C \in M_n^0(\mathbb{R}).$$

Предложение. e' — ортонормированный базис $\iff C^T \cdot C = E$.

63. Ортогональная матрица

Определение. Матрица $C \in M_n(\mathbb{R})$ называется *ортогональной* если $C^T C = E$.

Замечание. $C^T C = E \iff C C^T = E \iff C^{-1} = C^T$.

Свойства.

1. $C^T C = E \implies$ система столбцов $C^{(1)}, \dots, C^{(n)}$ — это ортонормированный базис в \mathbb{R}^n ,
2. $C C^T = E \implies$ система строк $C_{(1)}, \dots, C_{(n)}$ — это тоже ортонормированный базис в \mathbb{R}^n ,

В частности, $|c_{ij}| \leq 1$.

3. $\det C = \pm 1$.

Пример. $n = 2$. Ортогональные матрицы:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}.$$

$\det = 1 \qquad \det = -1$

64. Формула для координат вектора в ортогональном и ортонормированном базисах евклидова пространства

Пусть \mathbb{E} — евклидово пространство, (e_1, \dots, e_n) — ортогональный базис.

$v \in \mathbb{E}$.

Предложение. $v = \frac{(v, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 + \frac{(v, e_2)}{(e_2, e_2)} e_2 + \dots + \frac{(v, e_n)}{(e_n, e_n)} e_n$.

В частности, если e_1, \dots, e_n ортонормирован, то $v = (v, e_1) e_1 + \dots + (v, e_n) e_n$.

65. Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в терминах его ортогонального базиса

Пусть $S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство.

e_1, \dots, e_k — ортогональный базис в S .

Предложение. $\forall v \in \mathbb{E} \quad \text{pr}_S v = \sum_{i=1}^k \frac{(v, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i$.

В частности, если e_1, \dots, e_k ортонормирован, то $\text{pr}_S v = \sum_{i=1}^k (v, e_i) e_i$.

66. Метод ортогонализации Грама–Шмидта

Как построить ортогональный (ортонормированный) базис в \mathbb{E} ?

Если f_1, \dots, f_n — ортогональный базис, то $\left(\frac{f_1}{|f_1|}, \dots, \frac{f_n}{|f_n|}\right)$ — ортонормированный базис.

Тогда, достаточно построить ортогональный базис.

Пусть e_1, \dots, e_k — линейно независимая система векторов.

i -й угловой минор в $G(e_1, \dots, e_k)$ — это $\det G(e_1, \dots, e_i) > 0$.

Следовательно, применим метод Якоби:

$\exists!$ система векторов f_1, \dots, f_k , такая что

$$\begin{aligned} f_1 &= e_1, \\ f_2 &\in e_2 + \langle e_1 \rangle, \\ f_3 &\in e_3 + \langle e_1, e_2 \rangle, \\ &\dots, \\ f_k &\in e_k + \langle e_1, \dots, e_{k-1} \rangle \end{aligned}$$

И выполнены следующие свойства $\forall i = 1, \dots, k$:

0. f_1, \dots, f_i ортогональны.
1. $\langle e_1, \dots, e_i \rangle = \langle f_1, \dots, f_i \rangle$.
2. $f_i = e_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{(e_i, f_j)}{(f_j, f_j)} f_j$ (*).
3. $\det G(e_1, \dots, e_i) = \det G(f_1, \dots, f_i)$ (♥).

Построение базиса f_1, \dots, f_k по формулам (*) называется методом (процессом) ортогонализации Грама–Шмидта.

67. Теорема Пифагора в евклидовом пространстве

Теорема. Пусть $x, y \in \mathbb{E}$, $(x, y) = 0$. Тогда $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$.

68. Расстояние между векторами евклидова пространства

Определение. Расстояние между векторами $x, y \in \mathbb{E}$ — это $\rho(x, y) = |x - y|$.

69. Неравенство треугольника в евклидовом пространстве

Предложение. $\forall a, b, c \in \mathbb{E} \implies \rho(a, b) + \rho(b, c) \geq \rho(a, c)$.

70. Теорема о расстоянии между вектором и подпространством в терминах ортогональной составляющей

Теорема. Пусть $x \in \mathbb{E}$, $S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство. Тогда, $\rho(x, S) = |\text{ort}_S x|$, причем $\text{pr}_S x$ — это ближайший к x вектор из S .

71. Псевдорешение несовместной системы линейных уравнений

СЛУ $Ax = b$, $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$.

$$x_0 \text{ — решение системы} \iff Ax_0 = b \iff Ax_0 - b = 0 \iff |Ax_0 - b| = 0 \iff \rho(Ax_0, b) = 0.$$

Если СЛУ несовместна, то x_0 называется *псевдорешением*, если $\rho(Ax_0, b)$ минимально.

$$\rho(Ax_0, b) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \rho(Ax, b).$$

x_0 — решение задачи оптимизации $\rho(Ax, b) \xrightarrow{x \in \mathbb{R}^n} \min$.

Если столбцы $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$ линейно независимы, то псевдорешение единственно и может быть найдено по формуле $x_0 = (A^T A)^{-1} A^T b$.

72. Формула для расстояния от вектора до подпространства в терминах матриц Грама

Пусть \mathbb{E} — евклидово пространство, $\dim \mathbb{E} = n < \infty$.

$S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство, e_1, \dots, e_k — базис в S .

Теорема. $\forall x \in \mathbb{E} \quad \rho(x, S)^2 = \frac{\det G(e_1, \dots, e_k, x)}{\det G(e_1, \dots, e_k)}$.

73. k -мерный параллелепипед и его объём

Определение. k -мерный параллелепипед, натянутый на векторы a_1, \dots, a_k , это множество

$$P(a_1, \dots, a_k) := \left\{ \sum_{i=1}^k x_i a_i \mid 0 \leq x_i \leq 1 \right\}.$$

Основание: $P(a_1, \dots, a_{k-1})$.

Высота: $h := |\text{ort}_{\langle a_1, \dots, a_{k-1} \rangle} a_k|$.

Определение. k -мерный объём k -мерного параллелепипеда $P(a_1, \dots, a_k)$ — это величина $\text{vol } P(a_1, \dots, a_k)$, определяемая индуктивно:

$$k = 1 \implies \text{vol } P(a_1) := |a_1|.$$

$$k > 1 \implies \text{vol } P(a_1, \dots, a_k) := \text{vol } P(a_1, \dots, a_{k-1}) \cdot h.$$

74. Формула для объёма k -мерного параллелепипеда в n -мерном евклидовом пространстве

Теорема. $\text{vol } P(a_1, \dots, a_k)^2 = \det G(a_1, \dots, a_k)$.

75. Формула для объёма n -мерного параллелепипеда в n -мерном евклидовом пространстве в терминах координат в ортонормированном базисе

Пусть (e_1, \dots, e_n) — ортонормированный базис в \mathbb{E} ,

$$(a_1, \dots, a_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot A, \quad A \in M_n(\mathbb{R}).$$

Предложение. $\text{vol } P(a_1, \dots, a_n) = |\det A|$.

76. В каком случае два базиса евклидова пространства называются одинаково ориентированными?

Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ — два базиса в \mathbb{E} .

$$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C, \quad C \in M_n^0(\mathbb{R}).$$

Определение. Говорят, что e и e' одинаково ориентированы, если $\det C > 0$.

77. Ориентированный объём n -мерного параллелепипеда в n -мерном евклидовом пространстве

Фиксируем ориентацию в \mathbb{E} .

Фиксируем положительно ориентированный ортонормированный базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ в \mathbb{E} .

Пусть $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{E}$, $(a_1, \dots, a_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot A$.

Определение. Ориентированным объёмом параллелепипеда $P(a_1, \dots, a_n)$ называется величина

$$\text{Vol}(a_1, \dots, a_n) = \det A.$$

78. Свойства ориентированного объёма n -мерного параллелепипеда в n -мерном евклидовом пространстве

1. $\text{Vol}(a_1, \dots, a_n)$ линеен по каждому аргументу.
2. $\text{Vol}(a_1, \dots, a_n)$ кососимметрична (то есть меняет знак при перестановке любых двух аргументов).
3. $\text{Vol}(a_1, \dots, a_n) > 0 \iff (a_1, \dots, a_n)$ — положительно ориентированный базис в \mathbb{E} .
4. $\text{Vol}(a_1, \dots, a_n) < 0 \iff (a_1, \dots, a_n)$ — отрицательно ориентированный базис в \mathbb{E} .
5. $\text{Vol}(a_1, \dots, a_n) = 0 \iff (a_1, \dots, a_n)$ линейно зависимы.

79. Связь векторного произведения со скалярным и ориентированным объёмом

Если $v = [a, b]$, то $(v, x) = \text{Vol}(a, b, x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$.

80. Формула для вычисления векторного произведения в терминах координат в положительно ориентированном ортонормированном базисе

Если $e = (e_1, e_2, e_3)$ — положительно ориентированный базис и $a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$, то

$$b = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$$

$$[a, b] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} := \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} e_3. \quad (\star)$$

81. Смешанное произведение векторов трёхмерного евклидова пространства

Определение. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^3$ число $(a, b, c) := ([a, b], c)$ называется *смешанным произведением* векторов a, b, c .

Замечание. $(a, b, c) = \text{Vol}(a, b, c)$.

82. Формула для вычисления смешанного произведения в терминах координат в положительно ориентированном ортонормированном базисе

Если e_1, e_2, e_3 — положительно ориентированный ортонормированный базис, то

$$\begin{cases} a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \\ b = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 \\ c = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3 \end{cases} \implies (a, b, c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

83. Критерий компланарности трёх векторов трёхмерного евклидова пространства

a, b, c компланарны $\iff (a, b, c) = 0$.

84. Критерий коллинеарности двух векторов трёхмерного евклидова пространства

Предложение. $a, b \in \mathbb{E}$ коллинеарны $\iff [a, b] = 0$.

85. Геометрические свойства векторного произведения

Предложение.

1. $[a, b] \perp \langle a, b \rangle$.
2. $|[a, b]| = \text{vol } P(a, b)$.
3. $\text{Vol}(a, b, [a, b]) \geq 0$.

86. Линейное многообразие. Характеризация линейных многообразий как сдвигов подпространств

Определение. *Линейное многообразие* в \mathbb{R}^n — это множество решений некоторой совместной СЛУ.

Пусть $Ax = b$ — СЛУ, $\emptyset \neq L \subseteq \mathbb{R}^n$ — множество решений, $x_z \in L$ — частное решение.

Было: Лемма: $L = x_z + S$, где S — множество решений ОСЛУ $Ax = 0$.

Предложение. Множество $L \subseteq \mathbb{R}^n$ является линейным многообразием $\iff L = v_0 + S$ для некоторых $v_0 \in \mathbb{R}^n$ и подпространства $S \subseteq \mathbb{R}^n$.

87. Критерий равенства двух линейных многообразий. Направляющее подпространство и размерность линейного многообразия

Предложение. Пусть $L_1 = v_1 + S_1$ и $L_2 = v_2 + S_2$ — два линейных многообразия в \mathbb{R}^n . Тогда,

$$L_1 = L_2 \iff \begin{cases} S_1 = S_2 (= S) \\ v_1 - v_2 \in S \end{cases}.$$

Если L — линейное многообразие, то $L = v_0 + S$, где S определено однозначно.

Определение. S называется *направляющим подпространством* линейного многообразия L .

Определение. *Размерностью* линейного многообразия называется размерность его направляющего подпространства.

88. Теорема о плоскости, проходящей через $k + 1$ точку в \mathbb{R}^n

Теорема.

- a) Через любые $k + 1$ точек в \mathbb{R}^n проходит плоскость размерности $\leq k$.
 b) Если эти точки не лежат в плоскости размерности $< k$, то через них проходит ровно одна плоскость размерности k .

Следствие.

1. Через любые две различные точки проходит ровно одна прямая.
2. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит ровно одна плоскость.

89. Три способа задания прямой в \mathbb{R}^2 . Уравнение прямой в \mathbb{R}^2 , проходящей через две различные точки



1. $Ax + By = C$ (A, B) $\neq (0, 0)$ — нормаль.
2. векторное уравнение $(v - v_0, n) = 0$, где n — нормаль.
3. параметрическое уравнение $v = v_0 + at$, где a — направляющий вектор.

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t, & a = (a_1, a_2) \\ y = y_0 + a_2 t. & v_0 = (x_0, y_0) \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix} = 0 \quad \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \quad \begin{matrix} x_1 = x_0 \implies x = x_0, \\ y_1 = y_0 \implies y = y_0. \end{matrix}$$

90. Три способа задания плоскости в \mathbb{R}^3



1. $Ax + By + Cz = D$ (A, B, C) $\neq (0, 0, 0)$ — нормаль.
2. векторное уравнение $(v - v_0, n) = 0$.
3. параметрическое уравнение $v = v_0 + at + bs$, где a, b — направляющие векторы (базис в направляющем подпространстве).

91. Уравнение плоскости в \mathbb{R}^3 , проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

92. Три способа задания прямой в \mathbb{R}^3



1. $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \end{cases} \quad \text{rk} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2$

2. векторное уравнение $[v - v_0, a] = 0$, где $v - v_0$ — точка, a — направляющий вектор.

3. параметрическое уравнение $v = v_0 + at$.

$$\begin{aligned} v_0 = (x_0, y_0, z_0) \\ a = (a_1, a_2, a_3) \end{aligned} \rightarrow \begin{cases} x = x_0 + a_1 t, \\ y = y_0 + a_2 t, \\ z = z_0 + a_3 t. \end{cases} \iff \boxed{\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}} \text{ — каноническое уравнение прямой}$$

Если, например $a_1 = 0$, то пишут $\begin{cases} \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \\ x = x_0 \end{cases}$

93. Уравнения прямой в \mathbb{R}^3 , проходящей через две различные точки

Уравнение прямой, проходящей через точки (x_0, y_0, z_0) и (x_1, y_1, z_1) :

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}.$$

94. Случаи взаимного расположения двух прямых в \mathbb{R}^3



1. Совпадают.
2. Параллельны.
3. Пересекаются в точке.
4. Скрещиваются.

1) или 2) $\iff [a_1, a_2] = \vec{0}$.

1), 2) или 3) $\iff (a_1, a_2, v_1 - v_2) = 0$.

95. Формула для расстояния от точки до прямой в \mathbb{R}^3



Расстояние от точки v до прямой $l = v_0 + at$:

$$\rho(v, l) = \frac{|[v - v_0, a]|}{|a|}$$

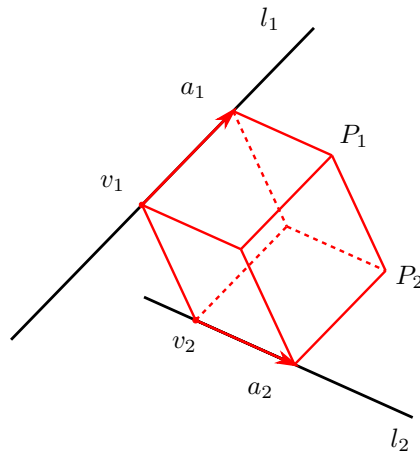
96. Формула для расстояния от точки до плоскости в \mathbb{R}^3



Расстояние от точки v до плоскости P с направляющей нормалью n и направляющим подпространством S ($S = n^\perp$):

$$\rho(v, P) = \frac{|(v - v_0, n)|}{|n|}.$$

97. Формула для расстояния между двумя скрещивающимися прямыми в \mathbb{R}^3



Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми $l_1 = v_1 + a_1 t$ и $l_2 = v_2 + a_2 t$:

$$\begin{aligned} P_1 &= v_1 + \langle a_1, a_2 \rangle \\ P_2 &= v_2 + \langle a_1, a_2 \rangle \\ \rho(l_1, l_2) &= \rho(p_1, p_2) \end{aligned} \quad \rho(l_1, l_2) = \frac{|(a_1, a_2, v_1 - v_2)|}{|[a_1, a_2]|}$$

98. Линейный оператор

Пусть V — векторное пространство над F , $\dim V = n$.

Определение. *Линейным оператором* (или *линейным преобразованием*) на/в V называется всякое линейное отображение $\varphi: V \rightarrow V$ (то есть из V в себя).

$L(V) := \text{Hom}(V, V)$ — все линейные операторы на/в V .

99. Матрица линейного оператора

Пусть $\varphi \in L(V)$, $e = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V .

Тогда, $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = (e_1, \dots, e_n) \cdot A$, $A \in M_n(F)$.

A называется матрицей линейного оператора в базисе e .

Обозначение: $A(\varphi, e)$.

В столбце $A^{(j)}$ записаны координаты вектора $\varphi(e_j)$ в базисе e .

100. Связь между координатами вектора и его образа при действии линейного оператора

Пусть $\varphi \in L(V)$, $e = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V , $A = A(\varphi, e)$,

$$\begin{cases} v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \\ \varphi(v) = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n \end{cases} \implies \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

101. Формула изменения матрицы линейного оператора при переходе к другому базису

Пусть e' — другой базис V , $e' = e \cdot C$, $C \in M_n^0(F)$

$$A = A(\varphi, e), A' = A(\varphi, e') \implies A' = C^{-1} A C.$$

102. Подобные матрицы

Определение. Матрицы $A, A' \in M_n$ называются *подобными*, если $\exists C \in M_n^0(F)$, такая что $A' = C^{-1} A C$.

103. Подпространство, инвариантное относительно линейного оператора

Определение. Подпространство $U \subseteq V$ называется *инвариантным относительно φ* (или *φ -инвариантным*), если $\varphi(U) \subseteq U$ (то есть $\varphi(u) \in U \forall u \in U$).

104. Вид матрицы линейного оператора в базисе, дополняющем базис инвариантного подпространства

Пусть $U \subseteq V$ — φ -инвариантное подпространство, (e_1, \dots, e_k) — базис U , дополним его до базиса (e_1, \dots, e_n) всего V .

Тогда $A(\varphi, \mathfrak{e})$ имеет вид

$$\begin{matrix} & & k & n-k \\ & & A & B \\ k & \left(\begin{array}{cc} & \\ 0 & C \end{array} \right) \\ n-k & & & \end{matrix}. \quad (1)$$

При этом $A(\varphi|_U, (e_1, \dots, e_k)) = A$.

Если $U = \ker \varphi \implies A = 0$,

$U = \operatorname{Im} \varphi \implies C = 0$.

Обратно, если для некоторого базиса $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_k)$ $A(\varphi, \mathfrak{e})$ имеет вид (1), то векторы e_1, \dots, e_k порождают φ -инвариантное подпространство.

105. Вид матрицы линейного оператора в базисе, согласованном с разложением пространства в прямую сумму двух инвариантных подпространств

Пусть $U_1, U_2 \subseteq V$ — два φ -инвариантных подпространства, такие что $V = U_1 \oplus U_2$.

Пусть (e_1, \dots, e_k) — базис U_1 , (e_{k+1}, \dots, e_n) — базис U_2 . Тогда, $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V и $A(\varphi, \mathfrak{e})$ имеет вид

$$\begin{matrix} & & k & n-k \\ & & \star & 0 \\ k & \left(\begin{array}{cc} & \\ 0 & \diamond \end{array} \right) \\ n-k & & & \end{matrix}.$$

106. Собственный вектор линейного оператора

Вектор $v \in V$ называется *собственным* для φ , если $v \neq 0$ и $\varphi(v) = \lambda v$ для некоторого $\lambda \in F$.

107. Собственное значение линейного оператора

Элемент $\lambda \in F$ называется *собственным значением* для φ , если $\exists v \in V$, такой что $v \neq 0$ и $\varphi(v) = \lambda v$.

108. Спектр линейного оператора

Множество всех собственных значений линейного оператора называется его *спектром* и обозначается $\operatorname{Спес} \varphi$.

109. Диагонализуемый линейный оператор

Определение. Линейный оператор φ называется *диагонализуемым*, если существует базис в V , в котором матрица линейного оператора φ диагональна.

110. Критерий диагонализуемости линейного оператора в терминах собственных векторов

Предложение. Линейный оператор φ диагонализуем \iff в V есть базис из собственных векторов.

111. Собственное подпространство линейного оператора

Пусть $\varphi \in L(V)$, $\lambda \in F$.

$V_\lambda(\varphi) := \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$.

Определение. $\lambda \in \operatorname{Спес} \varphi \implies V_\lambda(\varphi)$ называется *собственным подпространством* линейного оператора φ , отвечающим собственному значению λ .

112. Характеристический многочлен линейного оператора

Определение. Многочлен $\chi_\varphi(t) := (-1)^n \det(\varphi - t \cdot \operatorname{Id}) \in F[t]$ называется *характеристическим многочленом* линейного оператора φ .

113. Связь спектра линейного оператора с его характеристическим многочленом

Следствие. $\lambda \in \operatorname{Спес} \varphi \iff \chi_\varphi(\lambda) = 0$, то есть λ — корень характеристического многочлена.

Следствие. $|\operatorname{Спес} \varphi| \leq n$.

114. Алгебраическая кратность собственного значения линейного оператора

Пусть $\lambda \in \operatorname{Спес} \varphi$.

Пусть $a_\lambda = a_\lambda(\varphi) :=$ кратность λ как корня многочлена $\chi_\varphi(t)$. То есть $\chi_\varphi(t) : (t - \lambda)^{a_\lambda}$ и $\chi_\varphi(t) \not\equiv (t - \lambda)^{a_\lambda + 1}$.

Определение. a_λ называется *алгебраической кратностью* собственного значения λ .

115. Геометрическая кратность собственного значения линейного оператора

Определение. Число $g_\lambda = g_\lambda(\varphi) := \dim V_\lambda(\varphi)$ называется *геометрической кратностью* собственного значения λ .

116. Связь между алгебраической и геометрической кратностями собственного значения линейного оператора

Предложение. $g_\lambda \leq a_\lambda \quad \forall \lambda \in \text{Спек } \varphi$.

117. Критерий диагонализуемости линейного оператора в терминах его характеристического многочлена и кратностей его собственных значений

Теорема. (критерий диагонализуемости) φ диагонализуемо \iff выполнены одновременно следующие условия:

1. $\chi_\varphi(t)$ разлагается на линейные множители.
2. если $\chi_\varphi(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (t - \lambda_s)^{k_s}$, то $g_{\lambda_i} = a_{\lambda_i} \quad \forall i$. (то есть $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$)

118. Линейное отображение евклидовых пространств, сопряжённое к данному

Пусть \mathbb{E} — евклидово пространство со скалярным произведением (\cdot, \cdot) , $\dim \mathbb{E} = n$,
 \mathbb{E}' — другое евклидово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)'$, $\dim \mathbb{E}' = m$,
 $\varphi: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$.

Определение. Линейное отображение $\psi: \mathbb{E}' \rightarrow \mathbb{E}$ называется *сопряжённым* к φ , если

$$(\varphi(x), y)' = (x, \psi(y)) \quad \forall x \in \mathbb{E}, y \in \mathbb{E}'. \quad (\star)$$

Обозначение: φ^* .

119. Линейный оператор в евклидовом пространстве, сопряжённый к данному

Пусть $\mathbb{E}' = \mathbb{E}$.

$\varphi: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ — линейный оператор $\implies \exists!$ линейный оператор $\varphi^*: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$, такой что $(\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y)) \quad \forall x, y \in \mathbb{E}$.

120. Самосопряжённый линейный оператор в евклидовом пространстве

Определение. Линейный оператор $\varphi \in L(\mathbb{E})$ называется *самосопряжённым* (или *симметричным*), если $\varphi = \varphi^*$, то есть $(\varphi(x), y) = (x, \varphi(y)) \quad \forall x, y \in \mathbb{E}$.

121. Теорема о каноническом виде самосопряжённого линейного оператора

Теорема. $\varphi = \varphi^* \implies$ в \mathbb{E} существует ортонормированный базис из собственных векторов.

В частности, φ диагонализуем над \mathbb{R} и $\chi_\varphi(t)$ разлагается на линейные множители над \mathbb{R} .

122. Каким свойством обладают собственные подпространства самосопряжённого линейного оператора, отвечающие попарно различным собственным значениям

Предложение. $\varphi = \varphi^*$, $\lambda, \mu \in \text{Спек } \varphi$, $\lambda \neq \mu \implies \mathbb{E}_\lambda(\varphi) \perp \mathbb{E}_\mu(\varphi)$.

123. Приведение квадратичной формы к главным осям

Теорема. Для любой квадратичной формы $Q: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ существует ортонормированный базис $\epsilon = (e_1, \dots, e_n)$, в котором Q принимает канонический вид $Q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$. Более того, набор $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ определен однозначно, с точностью до перестановки.

124. Ортогональный линейный оператор

Определение. Линейный оператор $\varphi \in L(\mathbb{E})$ называется *ортогональным*, если $(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{E}$ (то есть φ сохраняет скалярное произведение).

125. Теорема о пяти эквивалентных условиях, определяющих ортогональный линейный оператор

Теорема. $\varphi \in L(\mathbb{E}) \implies$ следующие условия эквивалентны:

- (1) φ ортогонален.
- (2) $|\varphi(x)| = |x| \quad \forall x \in \mathbb{E}$ (то есть φ сохраняет длины векторов).
- (3) $\exists \varphi^{-1}$ и $\varphi^{-1} = \varphi^*$ (то есть $\varphi^* \varphi = \varphi \varphi^* = \text{Id}$).
- (4) \forall ортонормированного базиса ϵ матрица $A(\varphi, \epsilon)$ ортогональна.

(5) \forall ортонормированного базиса $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$ векторы $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ образуют ортонормированный базис.

126. Теорема о каноническом виде ортогонального линейного оператора

Теорема. Если $\varphi \in L(\mathbb{E})$ — ортогональный оператор, то существует ортонормированный базис $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$, такой что

$$A(\varphi, \mathfrak{e}) = \begin{pmatrix} \Pi(\alpha_1) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Pi(\alpha_2) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Pi(\alpha_k) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \Pi(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

127. Классификация ортогональных линейных операторов в трёхмерном евклидовом пространстве

Следствие. $\dim \mathbb{E} = 3 \implies \exists$ ортонормированный базис $\mathfrak{e} = (e_1, e_2, e_3)$, такой что $A(\varphi, \mathfrak{e}) = \begin{pmatrix} \Pi(\alpha) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ или

$\begin{pmatrix} \Pi(\alpha) & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ для некоторого α .

2 Вопросы на доказательство

2.1 Подпространства

1. Теорема о связи размерности суммы двух подпространств с размерностью их пересечения

Теорема. $\dim(U \cap W) + \dim(U + W) = \dim U + \dim W$.

Пример. Всякие две плоскости в \mathbb{R}^3 (содержащие 0) имеют общую прямую.

Здесь $V = \mathbb{R}^3$, $\dim U = 2$, $\dim W = 2$.

При этом $\dim(U + W) \leq 3$.

Тогда, $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) \geq 2 + 2 - 3 = 1$.

Доказательство. Пусть $\dim(U \cap W) = p$, $\dim U = q$, $\dim W = r$.

Пусть $a = \{a_1, \dots, a_p\}$ – базис в $U \cap W$.

Тогда, a можно дополнить до базиса в U и в W :

$b = \{b_1, \dots, b_{q-p}\}$ – такая система, что $a \cup b$ – базис в U .

$c = \{c_1, \dots, c_{r-p}\}$ – такая система, что $a \cup c$ – базис в W .

Докажем, что $a \cup b \cup c$ – базис в $U + W$.

1. $\langle a \cup b \cup c \rangle = U + W$:

$v \in U + W \implies \exists u \in U, w \in W$, такие что $v = u + w$.

$u \in U = \langle a \cup b \rangle \subseteq \langle a \cup b \cup c \rangle$.

$w \in W = \langle a \cup c \rangle \subseteq \langle a \cup b \cup c \rangle$.

Значит, $v \in \langle a \cup b \cup c \rangle$.

2. $a \cup b \cup c$ линейно независимо.

Пусть $\underbrace{\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_p a_p}_x + \underbrace{\beta_1 b_1 + \dots + \beta_{q-p} b_{q-p}}_y + \underbrace{\gamma_1 c_1 + \dots + \gamma_{r-p} c_{r-p}}_z = 0$, где $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k \in F$.

Тогда, $z = -\underbrace{x}_{\in U} - \underbrace{y}_{\in U} \in U$.

Но, $z \in W$, значит $z \in U \cap W$.

То есть $z = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p$, $\lambda_i \in F$.

Тогда, $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p - \gamma_1 c_1 - \dots - \gamma_{r-p} c_{r-p} = 0$

Так как $a \cup c$ линейно независимо, то $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = \gamma_1 = \dots = \gamma_{r-p} = 0$ и $z = 0$.

Следовательно, $x + y = 0$, то есть $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_p a_p + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_{q-p} b_{q-p} = 0$.

Так как $a \cup b$ линейно независимо, то $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = \beta_1 = \dots = \beta_{q-p} = 0$.

Получаем, что $a \cup b \cup c$ линейно независимо.

Итого: $a \cup b \cup c$ – базис в $U + W$.

$$\begin{aligned} \dim(U + W) &= |a| + |b| + |c| \\ &= p + q - p + r - p \\ &= q + r - p \\ &= \dim U + \dim W - \dim(U \cap W). \end{aligned}$$

■

2. Теорема о пяти эквивалентных условиях, определяющих линейно независимый набор подпространств векторного пространства

Теорема. Следующие условия эквивалентны:

(1) U_1, \dots, U_k линейно независимы.

(2) всякий $u \in U_1 + \dots + U_k$ единственным образом представим в виде $u = u_1 + \dots + u_k$, где $u_i \in U_i$.

(3) Если e_i – базис в $U_i \forall i$, то $\underbrace{e_1 \sqcup e_2 \sqcup \dots \sqcup e_k}_{\text{объединение множеств}}$ – базис в $U_1 + \dots + U_k$.

(4) $\dim(U_1 + \dots + U_k) = \dim U_1 + \dots + \dim U_k$.

(5) $\forall i = 1, \dots, k \quad U_i \cap (U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_k) = 0$.

Пример. Если $\mathfrak{e}_1 = \{e_1, e_2\}$, $\mathfrak{e}_2 = \{e_2, e_3\}$, то

- $\mathfrak{e}_1 \cup \mathfrak{e}_2 = \{e_1, e_2, e_3\}$ — 3 элемента,
- $\mathfrak{e}_1 \sqcup \mathfrak{e}_2 = \{e_1, e_2, e_2, e_3\}$ — 4 элемента.

Доказательство. Пусть $\widehat{U}_i = U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_k$.

(1) \implies (2) Пусть $u_1 + \dots + u_k = u'_1 + \dots + u'_k$, где $u_i, u'_i \in U_i$.

$$\text{Тогда, } (u_1 - u'_1) + (u_2 - u'_2) + \dots + (u_k - u'_k) = 0 \implies \begin{matrix} \in U_1 & \in U_2 & \in U_k \end{matrix} u_i - u'_i = \dots = u_k - u'_k = 0.$$

То есть, $u_1 = u'_1, \dots, u_k = u'_k$.

(2) \implies (3) Пусть $u \in U_1 + \dots + U_k$ — произвольный.

u единственным образом представим в виде $u = u_1 + \dots + u_k$, где $u_i \in U_i$,

u_i единственным образом представим в виде линейной комбинации векторов из \mathfrak{e}_i .

Следовательно, u единственным образом представим в виде линейной комбинации векторов из $\mathfrak{e}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathfrak{e}_k$.

То есть, $\mathfrak{e}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathfrak{e}_k$ — базис в $U_1 + \dots + U_k$.

(3) \implies (4) Очевидно.

(4) \implies (5)

$$\begin{aligned} \dim(U_i \cap \widehat{U}_i) &= \dim U_i + \dim \widehat{U}_i - \dim(U_1 + \dots + U_k) \\ &\leq \dim U_i + (\dim U_1 + \dots + \dim U_{i-1} + \dim U_{i+1} + \dots + \dim U_k) - (\dim U_1 + \dots + \dim U_k) \\ &= 0. \end{aligned}$$

(5) \implies (1) $u_1 + \dots + u_k = 0$, где $u_i \in U_i$.

$$\text{Тогда, } \begin{matrix} u_i \\ \in U_i \end{matrix} = \underbrace{-u_1 - \dots - u_{i-1} - u_{i+1} - \dots - u_k}_{\in \widehat{U}_i}$$

Следовательно, $u_i \in U_i \cap \widehat{U}_i = 0 \implies u_i = 0$. ■

Следствие. Пусть $k = 2$, тогда

U_1, U_2 линейно независимы $\iff U_1 \cap U_2 = 0$.

2.2 Линейные отображения

1. Свойства отношения изоморфности на множестве всех векторных пространств

Предложение. Если $\varphi: V \rightarrow W$ — изоморфизм, то φ^{-1} — тоже изоморфизм.

Доказательство. Биективность есть, так как φ^{-1} — обратное отображение. Проверим линейность:

$$1) \ w_1, w_2 \in W \implies w_1 = \varphi(\varphi^{-1}(w_1)), \ w_2 = \varphi(\varphi^{-1}(w_2))$$

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(w_1 + w_2) &= \varphi^{-1}\left(\underbrace{\varphi(\varphi^{-1}(w_1))}_{w_1} + \underbrace{\varphi(\varphi^{-1}(w_2))}_{w_2}\right) \\ &= \underbrace{\varphi^{-1}}_{Id}(\varphi(\varphi^{-1}(w_1) + \varphi^{-1}(w_2))) \\ &= \varphi^{-1}(w_1) + \varphi^{-1}(w_2). \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(\lambda \cdot w_1) &= \varphi^{-1}(\lambda \cdot \varphi(\varphi^{-1}(w_1))) \\ &= \underbrace{\varphi^{-1}}_{Id}(\varphi(\lambda \cdot \varphi^{-1}(w_1))) \\ &= \lambda \varphi^{-1}(w_1). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Пусть $U \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{\varphi} W$, тогда $\varphi \circ \psi: U \rightarrow W$ — композиция.

Предложение.

1. Если φ, ψ линейны, то $\varphi \circ \psi$ тоже линейна.
2. Если φ, ψ — изоморфизмы, то $\varphi \circ \psi$ — тоже изоморфизм.

Доказательство.

1. (1) $(\varphi \circ \psi)(u_1 + u_2) = \varphi(\psi(u_1 + u_2)) = \varphi(\psi(u_1) + \psi(u_2)) = \varphi(\psi(u_1)) + \varphi(\psi(u_2)) = (\varphi \circ \psi)(u_1) + (\varphi \circ \psi)(u_2)$.
- (2) $(\varphi \circ \psi)(\lambda u) = \varphi(\psi(\lambda u)) = \varphi(\lambda \psi(u)) = \lambda \varphi(\psi(u)) = \lambda(\varphi \circ \psi)(u)$.
2. из 1 следует, что $(\varphi \circ \psi)$ линейно, но при этом биективно как композиция двух биекций. ■

Теорема. Отношение изоморфности является отношением эквивалентности на множестве всех векторных пространств над фиксированным полем F .

Доказательство.

1. Рефлексивность: $Id : V \xrightarrow{\sim} V$.
2. Симметричность: $V \simeq W \implies W \simeq V$ следует из Предложения 1.
3. Транзитивность: $U \simeq V, V \simeq W \implies U \simeq W$ следует из Предложения 2. ■

2. Критерий изоморфности двух конечномерных векторных пространств

Теорема. Пусть V, W — два конечномерных векторных пространства над F .

Тогда, $V \simeq W \iff \dim V = \dim W$.

Лемма. $\dim V = n \implies V \simeq F^n$.

Доказательство. Фиксируем базис (e_1, \dots, e_n) в V .

Тогда, отображение $\varphi : V \rightarrow F^n$ — изоморфизм.

$$v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \implies \varphi(v) := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Лемма. Пусть $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$ и e_1, \dots, e_n — базис V , тогда $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ — базис W .

Доказательство. Пусть $w \in W$. Тогда $\exists x_1, \dots, x_n \in F$, такие что $\varphi^{-1}(w) = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$.

Тогда, $w = \varphi(\varphi^{-1}(w)) = \varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n) \implies W = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \rangle$.

Теперь докажем линейную независимость:

Пусть $\alpha_1 \varphi(e_1) + \dots + \alpha_n \varphi(e_n) = \vec{0}$.

Тогда, $\varphi(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) = \vec{0}$.

Применяя φ^{-1} получаем, $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = \varphi^{-1}(\vec{0}) = \vec{0}$. Значит, $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

Итог: $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ — базис в W . ■

Доказательство теоремы.

\Leftarrow Пусть $\dim V = \dim W = n$. Тогда по лемме 1 $V \simeq F^n, W \simeq F^n$, значит $V \simeq W$.

\Rightarrow Пусть $V \simeq W$. Фиксируем изоморфизм $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$.

Тогда по лемме 2 получаем, что $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ — базис W , а значит $\dim V = n = \dim W$. ■

3. Существование и единственность линейного отображения с заданными образами базисных векторов

Пусть V, W — векторные пространства над F и (e_1, \dots, e_n) — фиксированный базис в V .

Предложение.

1. Если $\varphi : V \rightarrow W$ — линейное отображение, то φ однозначно определяется векторами $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$,
2. $\forall w_1, \dots, w_n \in W \exists!$ линейное отображение φ , такое что, $\varphi(e_1) = w_1, \dots, \varphi(e_n) = w_n$.

Доказательство.

1. $v \in V \implies v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \implies \varphi(v) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n)$.

2. Зададим $\varphi: V \rightarrow W$ формулой $\varphi(x_1e_1 + \dots + x_ne_n) = x_1w_1 + \dots + x_nw_n$.

Тогда φ — линейное отображение из V в W (упражнение).

Единственность следует из 1. ■

4. Связь между координатами вектора и его образа при линейном отображении

Предложение. Пусть $\varphi: V \rightarrow W$ — линейное отображение,

$\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V ,

$\mathfrak{f} = (f_1, \dots, f_m)$ — базис W ,

$A = A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f})$.

$v \in V \implies v = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$,

$\varphi(v) = y_1f_1 + \dots + y_mf_m$.

Тогда,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Доказательство. $v = (e_1, \dots, e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Значит,

$$\varphi(v) = (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (f_1, \dots, f_m) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

При этом,

$$\varphi(v) = (f_1, \dots, f_m) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Так как f_1, \dots, f_m линейно независимы, то

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$
■

5. Формула изменения матрицы линейного отображения при замене базисов

Пусть теперь \mathfrak{e}' — другой базис в V , \mathfrak{f}' — другой базис в W .

$\mathfrak{e}' = \mathfrak{e} \cdot C_{\in M_n}$,

$\mathfrak{f}' = \mathfrak{f} \cdot D_{\in M_m}$.

$A = A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f})$,

$A' = A(\varphi, \mathfrak{e}', \mathfrak{f}')$.

Предложение. $A' = D^{-1}AC$.

Доказательство.

$$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C.$$

Применим φ ,

$$(\varphi(e'_1), \dots, \varphi(e'_n)) = (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) \cdot C = (f_1, \dots, f_m) \cdot A \cdot C$$

При этом,

$$(\varphi(e'_1), \dots, \varphi(e'_n)) = (f'_1, \dots, f'_m) \cdot A' = (f_1, \dots, f_m) \cdot D \cdot A'.$$

Отсюда,

$$A \cdot C = D \cdot A' \implies A' = D^{-1} \cdot A \cdot C.$$
■

6. Изоморфизм $\text{Hom}(V, W) \xrightarrow{\sim} \text{Mat}_{m \times n}(F)$ при фиксированных базисах V и W

Следствие. При фиксированном \mathfrak{e} и \mathfrak{f} отображение $\varphi \mapsto A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f})$ является изоморфизмом между $\text{Hom}(V, W)$ и $\text{Mat}_{m \times n}(F)$.

Зафиксируем базисы $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$ в V и $\mathfrak{f} = (f_1, \dots, f_m)$ в W .

Линейность.

1. $\varphi, \psi \in \text{Hom}(V, W)$, $A_\varphi = A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f})$
 $A_\psi = A(\psi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f})$
 $A_{\varphi+\psi} = A(\varphi + \psi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}) \implies A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$
2. $\lambda \in F, \varphi \in \text{Hom}(V, W)$, $A_\varphi = A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f})$
 $A_{\lambda\varphi} = A(\lambda\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}) \implies A_{\lambda\varphi} = \lambda A_\varphi$

Доказательство.

1.

$$\begin{aligned} (f_1, \dots, f_m) \cdot A_{\varphi+\psi} &= ((\varphi + \psi)(e_1), \dots, (\varphi + \psi)(e_n)) \\ &= (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) + (\psi(e_1), \dots, \psi(e_n)) \\ &= (f_1, \dots, f_m)A_\varphi + (f_1, \dots, f_m)A_\psi \\ &= (f_1, \dots, f_m)(A_\varphi + A_\psi). \end{aligned}$$

Следовательно, $A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$.

2.

$$\begin{aligned} (f_1, \dots, f_m) \cdot A_{\lambda\varphi} &= ((\lambda\varphi)(e_1), \dots, (\lambda\varphi)(e_n)) \\ &= ((\varphi)(e_1), \dots, (\varphi)(e_n))\lambda \\ &= (f_1, \dots, f_m)A_\varphi\lambda. \end{aligned}$$

Следовательно, $A_{\lambda\varphi} = \lambda A_\varphi$. ■

Биективность. По определению, в j -м столбце матрицы A стоят координаты вектора $\varphi(e_j)$ в базисе \mathfrak{f} .

А значит, из пункта 2.3 следует, что при фиксированных базисах \mathfrak{e} и \mathfrak{f} отображение $\varphi \mapsto A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f})$ является биекцией между $\text{Hom}(V, W)$ и $\text{Mat}_{m \times n}(F)$.

7. Матрица композиции двух линейных отображений

Пусть $U \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{\varphi} W$ — цепочка линейных отображений, а $\varphi \circ \psi : U \rightarrow W$ — их композиция,

$\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V ,

$\mathfrak{f} = (f_1, \dots, f_m)$ — базис W ,

$\mathfrak{g} = (g_1, \dots, g_k)$ — базис U .

$$A_\varphi = A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}),$$

$$A_\psi = A(\psi, \mathfrak{g}, \mathfrak{e}),$$

$$A_{\varphi \circ \psi} = A(\varphi \circ \psi, \mathfrak{g}, \mathfrak{f}).$$

$$\text{Тогда, } A_{\varphi \circ \psi} = A_\varphi \cdot A_\psi.$$

Доказательство. $(\psi(g_1), \dots, \psi(g_k)) = (e_1, \dots, e_n)A_\psi$. Тогда применяя φ ,

$$(\varphi(\psi(g_1)), \dots, \varphi(\psi(g_k))) = (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))A_\psi = (f_1, \dots, f_m)A_\varphi A_\psi.$$

С другой стороны,

$$(\varphi(\psi(g_1)), \dots, \varphi(\psi(g_k))) = (f_1, \dots, f_m)A_{\varphi \circ \psi}.$$

Значит, $A_\varphi \cdot A_\psi = A_{\varphi \circ \psi}$. ■

8. Утверждение о том, что ядро и образ — подпространства в соответствующих векторных пространствах

Предложение.

1. Ядро — подпространство в V .
2. Образ — подпространство в W .

Доказательство.

1. (a) $\varphi(0_V) = 0_W$,
 (b) $v_1, v_2 \in \ker \varphi \implies \varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = 0 + 0 = 0 \implies v_1 + v_2 \in \ker \varphi$,
 (c) $\lambda \in F, v \in V \implies \varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v) = \lambda 0 = 0 \implies \lambda v \in \ker \varphi$.
2. (a) $0_W = \varphi(W) \in \operatorname{Im} \varphi$,
 (b) $w_1, w_2 \in \operatorname{Im} \varphi \implies \exists v_1, v_2 : w_1 = \varphi(v_1), w_2 = \varphi(v_2) \implies w_1 + w_2 = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \varphi(v_1 + v_2) \in \operatorname{Im} \varphi$,
 (c) $\varphi \in F, w \in \operatorname{Im} \varphi \implies \exists v \in V : w = \varphi(v) \implies \lambda w = \lambda \varphi(v) = \varphi(\lambda v) \in \operatorname{Im} \varphi$. ■

9. Связь между рангом матрицы линейного отображения и размерностью его образаПусть $U \subseteq V$ — подпространство, u_1, \dots, u_k — базис в U .**Лемма.** Тогда, $\varphi(U) = \langle \varphi(u_1), \dots, \varphi(u_k) \rangle$. В частности, $\dim \varphi(U) \leq \dim U$ и $\dim \operatorname{Im} \varphi \leq \dim V$.*Доказательство.* $u \in U \implies u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k, \alpha_i \in F$, тогда

$$\varphi(u) = \alpha_1 \varphi(u_1) + \dots + \alpha_k \varphi(u_k) \in \langle \varphi(u_1), \dots, \varphi(u_k) \rangle.$$

Пусть $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V ,
 $\mathfrak{f} = (f_1, \dots, f_m)$ — базис W ,
 $A = A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f})$.

Теорема. $\operatorname{rk} A = \dim \operatorname{Im} \varphi$.*Доказательство.* По лемме, $\operatorname{Im} \varphi = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \rangle$. Поэтому, $\dim \operatorname{Im} \varphi = \operatorname{rk} \{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\}$.Так как j -й столбец матрицы A составлен из координат вектора $\varphi(e_j)$ в базисе \mathfrak{f} , то

$$\alpha_1 \varphi(e_1) + \dots + \alpha_n \varphi(e_n) = 0 \iff \alpha_1 A^{(1)} + \dots + \alpha_n A^{(n)} = 0.$$

Значит, $\dim \operatorname{Im} \varphi = \operatorname{rk} \{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\} = \operatorname{rk} \{A^{(1)}, \dots, A^{(n)}\} = \operatorname{rk} A$. ■**Замечание.** Число $\dim \operatorname{Im} \varphi$ называется *рангом* линейного отображения φ , обозначается $\operatorname{rk} \varphi$.**10. Лемма о дополнении базиса ядра линейного отображения до базиса всего пространства****Предложение.** Пусть e_1, \dots, e_k — базис $\ker \varphi$ и векторы e_{k+1}, \dots, e_n дополняют его до базиса всего V .Тогда, $\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)$ образуют базис в $\operatorname{Im} \varphi$.*Доказательство.* $\operatorname{Im} \varphi = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_k), \varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n) \rangle = \langle \varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n) \rangle$. (так как $\varphi(e_1) = \dots = \varphi(e_k) = 0$).Осталось показать, что $\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)$ линейно независимы.Пусть $\alpha_{k+1} \varphi(e_{k+1}) + \dots + \alpha_n \varphi(e_n) = 0$, где $\alpha_i \in F$.Тогда $\varphi(\alpha_{k+1} e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n) = 0 \implies \alpha_{k+1} e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n \in \ker \varphi$.Но тогда $\alpha_{k+1} e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_k e_k$, где $\beta_j \in F$.Так как (e_1, \dots, e_n) — базис V , то $\alpha_i = \beta_j = 0 \forall i, j$. ■**11. Теорема о связи размерностей ядра и образа линейного отображения, приведение матрицы линейного отображения к диагональному виду с единицами и нулями на диагонали****Теорема.** $\dim \operatorname{Im} \varphi + \dim \ker \varphi = \dim V$.*Доказательство.* Вытекает из [предыдущего предложения](#) так как в его доказательстве:

$$\dim V = n,$$

$$\dim \ker \varphi = k,$$

$$\dim \operatorname{Im} \varphi = n - k.$$

Предложение. Пусть $\text{rk } \varphi = r$. Тогда существует базис \mathfrak{e} в V и базис \mathfrak{f} в W , такие что

$$A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}) = \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) = \begin{matrix} & \begin{matrix} r & & n-r \end{matrix} \\ \begin{matrix} r \\ m-r \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Доказательство. Пусть e_{r+1}, \dots, e_n — базис $\ker \varphi$. Дополним его векторами e_1, \dots, e_r до базиса всего V .

Положим $f_1 = \varphi(e_1), \dots, f_r = \varphi(e_r)$, тогда (f_1, \dots, f_r) — базис $\text{Im } \varphi$.

Дополним f_1, \dots, f_r до базиса f_1, \dots, f_m всего W .

Тогда, $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$ и $\mathfrak{f} = (f_1, \dots, f_m)$ — искомые базисы. ■

2.3 Линейные, билинейные и квадратичные формы

1. Свойство базиса сопряжённого векторного пространства

$\varepsilon_i(x_1e_1 + \dots + x_ne_n) = x_i$, поэтому ε_i называется i -й координатной функцией в базисе \mathfrak{e} .

Предложение. Всякий базис пространства V^* двойствен некоторому базису пространства V .

Доказательство. Пусть $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$ — базис пространства V^* . Фиксируем какой-то базис $\mathfrak{e}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ пространства V , и пусть $\varepsilon' = \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \dots \\ \varepsilon'_n \end{pmatrix}$ — соответствующий ему двойственный базис V^* .

Тогда, $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \dots \\ \varepsilon'_n \end{pmatrix}$ для некоторой матрицы $C \in M_n^0(F)$.

Положим $(e_1, \dots, e_n) = (e'_1, \dots, e'_n) \cdot C^{-1}$.

Тогда,

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} (e_1, \dots, e_n) = C \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \dots \\ \varepsilon'_n \end{pmatrix} (e'_1, \dots, e'_n) C^{-1} = C E C^{-1} = E.$$

Значит, ε двойствен к \mathfrak{e} . ■

Упражнение. \mathfrak{e} определён однозначно.

2. Формула для вычисления значений билинейной формы в координатах

Пусть $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$,

$y = y_1e_1 + \dots + y_ne_n$.

Тогда,

$$\begin{aligned} \beta(x, y) &= \beta \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \beta \left(e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \underbrace{\beta(e_i, e_j)}_{\beta_{ij}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \beta_{ij} y_j \\ &= (x_1, \dots, x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. Существование и единственность билинейной формы с заданной матрицей

Предложение. Пусть e — фиксированный базис V .

1. Всякая билинейная форма β на V однозначно определяется матрицей $B(\beta, e)$.
2. $\forall B \in M_n(F) \exists!$ билинейная форма β на V , такая что $B(\beta, e) = B$.

Доказательство.

1. Следует из формулы выше.
2. Единственность следует из формулы выше. Докажем существование:
Определим β по формуле выше.
Тогда β — билинейная форма на V (упражнение).

$$\beta(e_i, e_j) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot B \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad j = \beta_{ij}.$$

Действительно, $B(\beta, e) = B$. ■

4. Формула изменения матрицы билинейной формы при переходе к другому базису

$B = B(\beta, e)$.

Пусть $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ — другой базис V .

$e' = e \cdot C$.

$B' := B(\beta, e')$.

Предложение. $B' = C^T B C$.

Доказательство.

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = x'_1 e'_1 + \dots + x'_n e'_n,$$

$$y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n = y'_1 e'_1 + \dots + y'_n e'_n,$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} y'_1 \\ \dots \\ y'_n \end{pmatrix}.$$

Тогда,

$$\begin{aligned} \beta(x, y) &= (x_1 \dots x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = (x'_1 \dots x'_n) C^T B C \begin{pmatrix} y'_1 \\ \dots \\ y'_n \end{pmatrix} \\ \beta(x, y) &= (x'_1 \dots x'_n) B' \begin{pmatrix} y'_1 \\ \dots \\ y'_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Получаем, что $B' = C^T B C$. ■

5. Критерий симметричности билинейной формы в терминах её матрицы в каком-либо базисе

Пусть e — произвольный базис V .

Предложение. β симметрична $\iff B = B^T$.

Доказательство.

$$\implies b_{ji} = \beta(e_j, e_i) = \beta(e_i, e_j) = b_{ij},$$

$$\Leftarrow x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n,$$

$$y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n,$$

Тогда,

$$\beta(y, x) = (y_1 \dots y_n) B \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1 \dots x_n) B^T \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1 \dots x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \beta(x, y).$$

■

6. Соответствие между симметричными билинейными формами и квадратичными формами

Предложение. Пусть в поле F выполнено условие $1 + 1 \neq 0$ (то есть $2 \neq 0$). Тогда отображение $\beta \mapsto Q_\beta$ является биекцией между симметричными билинейными формами на V и квадратичными формами на V .

Доказательство.

Сюръективность Q — квадратичная форма $\implies Q = Q_\beta$ для некоторой билинейной формы на V .

То есть $Q(x) = \beta(x, x) \forall x \in V$.

Положим $\sigma(x, y) = \frac{1}{2} [\beta(x, y) + \beta(y, x)]$, тогда σ — симметричная билинейная форма.

$$\sigma(x, x) = \frac{1}{2} [\beta(x, x) + \beta(x, x)] = \beta(x, x).$$

Инъективность β — симметричная билинейная форма на V .

$$Q_\beta(x+y) = \beta(x+y, x+y) = \underbrace{\beta(x, x)}_{Q_\beta(x)} + \underbrace{\beta(x, y) + \beta(y, x)}_{\text{равны между собой}} + \underbrace{\beta(y, y)}_{Q_\beta(y)} \implies \beta(x, y) = \frac{1}{2} [Q_\beta(x+y) - Q_\beta(x) - Q_\beta(y)].$$

■

7. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду

Теорема. Всякую квадратичную форму путём замены базиса можно привести к каноническому виду.

Доказательство (метод Лагранжа). Индукция по n :

База $n = 1 \implies Q(x) = bx_1^2$ — канонический вид.

Шаг Пусть утверждение доказано для $< n$, докажем для n .

Пусть $B = B(Q, e)$ — матрица квадратичной формы в исходном базисе e .

$$Q(x) = \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2b_{ij} x_i x_j.$$

Случай 0. $b_{ij} = 0 \forall i, j$ — доказывать нечего.

Случай 1. $\exists i : b_{ii} \neq 0$. Сделав перенумерацию, считаем $b_{11} \neq 0$.

Тогда,

$$\begin{aligned} Q(x_1, \dots, x_n) &= b_{11} x_1^2 + 2b_{12} x_1 x_2 + \dots + 2b_{1n} x_1 x_n + Q_1(x_2, \dots, x_n) \\ &= b_{11} \left(x_1^2 + 2 \frac{b_{12}}{b_{11}} x_1 x_2 + \dots + 2 \frac{b_{1n}}{b_{11}} x_1 x_n \right) + Q_1(x_2, \dots, x_n) \\ &= b_{11} \left(\underbrace{x_1 + \frac{b_{12}}{b_{11}} x_2 + \dots + \frac{b_{1n}}{b_{11}} x_n}_{x'_1} \right)^2 - \underbrace{b_{11} \left(\frac{b_{12}}{b_{11}} x_2 + \dots + \frac{b_{1n}}{b_{11}} x_n \right)^2}_{Q_2(x'_2, \dots, x'_n)} + Q_1(x_2, \dots, x_n) \\ &= b_{11} (x'_1)^2 + Q_2(x'_2, \dots, x'_n), \end{aligned}$$

где

$$\begin{cases} x'_1 &= x_1 + \frac{b_{12}}{b_{11}} x_2 + \dots + \frac{b_{1n}}{b_{11}} x_n, \\ x'_2 &= x_2, \\ &\vdots \\ x'_n &= x_n. \end{cases}$$

Здесь важно проследить, что замена действительно соответствует замене базисов (то есть является невырожденной).

Вспомним как происходит замена базиса:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}' &= \mathbf{e} \cdot C \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} &= C \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Выразим x через x' и запишем матрицу перехода:

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 - \frac{b_{12}}{b_{11}}x'_2 - \dots - \frac{b_{1n}}{b_{11}}x'_n, \\ x_2 = x'_2, \\ \vdots \\ x_n = x'_n. \end{cases} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{b_{12}}{b_{11}} & \dots & -\frac{b_{1n}}{b_{11}} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

По предположению индукции, Q_2 можно привести к каноническому виду.

Случай 2. $b_{ii} = 0 \ \forall i$, но $\exists i, j, i \neq j$, такие что $b_{ij} \neq 0$.

Выполнив перенумерацию считаем, что $b_{12} \neq 0$.

Сделаем замену и выпишем матрицу перехода:

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 + x'_2, \\ x_2 = x'_1 - x'_2, \\ x_3 = x'_3, \\ \vdots \\ x_n = x'_n. \end{cases} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Получаем $Q(x) = b_{12}x_1^2 - b_{12}x_2^2 + \underbrace{\dots}_{\text{нет квадратов}}$, мы попали в случай 1. ■

8. Метод Якоби приведения квадратичной формы к каноническому виду

Пусть $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис пространства V .

Рассмотрим систему векторов e'_1, \dots, e'_n следующего вида:

$$e'_1 = e_1,$$

$$e'_2 \in e_2 + \langle e_1 \rangle,$$

$$e'_3 \in e_3 + \langle e_1, e_2 \rangle,$$

...

$$e'_n \in e_n + \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle.$$

Для любого $k = 1 \dots n$ имеем $(e'_1, \dots, e'_k) = (e_1, \dots, e_k) \cdot C_k$, где

$$C_k = \begin{pmatrix} 1 & \star & \dots & \star & \star \\ 0 & 1 & \ddots & \star & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \star \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_k(F).$$

Так как $\det C = 1 \neq 0$, то e'_1, \dots, e'_k линейно независимы и $\langle e_1, \dots, e_k \rangle = \langle e'_1, \dots, e'_k \rangle$.

В частности, e'_1, \dots, e'_n — базис V .

Заметим, что C_k — левый верхний $k \times k$ блок в C_n .

Пусть $Q: V \rightarrow F$ — квадратичная форма, β — соответствующая симметричная билинейная форма.

$$B := B(Q, \mathbf{e}).$$

B_k — левый верхний $k \times k$ блок в B .

$$\delta_k := \delta_k(Q, \mathbf{e}) := \det B_k(Q, \mathbf{e}) \text{ — } k\text{-й угловой минор матрицы } B.$$

Для удобства, $\delta_0 := 1$.

Лемма. Пусть $(e'_1, \dots, e'_n) = \mathbf{e}'$ — базис V описанного выше вида и $\delta'_k = \delta_k(Q, \mathbf{e}')$. Тогда, $\delta'_k = \delta_k \ \forall k$.

Доказательство. Пусть $B' = B(Q, \mathfrak{e}')$ и $B'_k = B_k(Q, \mathfrak{e}')$.

Так как $\langle e'_1, \dots, e'_k \rangle = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$, то $B'_k = C_k^T B_k C_k$. Отсюда, $\delta'_k = \det B'_k = \underbrace{\det C_k^T}_1 \det B_k \underbrace{\det C_k}_1 = \det B_k = \delta_k$. ■

Теорема. Пусть $\delta_k \neq 0 \ \forall k = 1, \dots, n$.

Тогда, $\exists!$ базис $\mathfrak{e}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ в V , такой что

1. \mathfrak{e}' имеет описанный выше вид;
2. В базисе \mathfrak{e}' Q принимает канонический вид
 $Q(x'_1, \dots, x'_n) = \delta_1 x'^2_1 + \frac{\delta_2}{\delta_1} x'^2_2 + \dots + \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} x'^2_n$.
 То есть $B(Q, \mathfrak{e}') = \text{diag} \left(\delta_1, \frac{\delta_2}{\delta_1}, \dots, \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} \right)$

Доказательство. Индукция по n .

База $n = 1 \implies$ верно.

Шаг Пусть доказано для $< n$, докажем для n .

Применяя предположение индукции к ограничению квадратичной формы на подпространство $\langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle$ получаем, что \exists требуемый базис e'_1, \dots, e'_{n-1} в $\langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle$ нужного вида.

Тогда, $B(Q, (e'_1, \dots, e'_{n-1}, e_n))$ имеет вид

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \delta_1 & 0 & \dots & 0 & \star \\ 0 & \frac{\delta_2}{\delta_1} & \dots & 0 & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\delta_{n-1}}{\delta_{n-2}} & \star \\ \hline \star & \star & \dots & \star & \star \end{array} \right).$$

Ищем e'_n в виде

$$e'_n = e_n + \lambda_1 e'_1 + \dots + \lambda_{n-1} e'_{n-1}.$$

Для любого $k = 1, \dots, n-1$

$$\begin{aligned} \beta(e'_n, e'_k) &= \beta(e_n + \lambda_1 e'_1 + \dots + \lambda_{n-1} e'_{n-1}, e'_k) \\ &= \beta(e_n, e'_k) + \lambda_1 \beta(e'_1, e'_k) + \dots + \lambda_{n-1} \beta(e'_{n-1}, e'_k) \\ &= \beta(e_n, e'_k) + \lambda_k \beta(e'_k, e'_k) \\ &= \beta(e_n, e'_k) + \lambda_k \frac{\delta_k}{\delta_{k-1}}. \end{aligned}$$

Хотим, $\beta(e'_n, e'_k) = 0 \ \forall k = 1, \dots, n-1 \iff \lambda_k = -\beta(e_n, e'_k) \frac{\delta_{k-1}}{\delta_k}$.

Тогда в базисе $\mathfrak{e}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ матрица Q равна

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \delta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\delta_2}{\delta_1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\delta_{n-1}}{\delta_{n-2}} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & ? \end{array} \right).$$

По лемме, $\delta_n = \delta'_n = \delta_1 \cdot \frac{\delta_2}{\delta_1} \cdot \dots \cdot \frac{\delta_{n-1}}{\delta_{n-2}} \cdot ? = \delta_{n-1} \cdot ? \implies ? = \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}}$.

Единственность следует из явной формулы для λ_k . ■

9. Существование нормального вида для квадратичной формы над \mathbb{R}

Следствие (из метода Лагранжа). Для всякой квадратичной формы Q над \mathbb{R} существует базис, в котором Q имеет нормальный вид.

Доказательство. Из теоремы знаем, что существует базис \mathfrak{e} , в котором Q имеет канонический вид

$$Q(x_1, \dots, x_n) = b_1 x_1^2 + \dots + b_n x_n^2.$$

Делаем замену

$$x_i = \begin{cases} \frac{x'_i}{\sqrt{|b_i|}}, & b_i \neq 0 \\ x_i, & b_i = 0 \end{cases}.$$

Тогда в новых координатах $Q(x'_1, \dots, x'_n) = \varepsilon_1 x_1'^2 + \dots + \varepsilon_n x_n'^2$,

$$\varepsilon_i = \operatorname{sgn} b_i = \begin{cases} 1, & b_i > 0 \\ 0, & b_i = 0 \\ -1, & b_i < 0 \end{cases}.$$

■

10. Закон инерции

Пусть $F = \mathbb{R}$.

Пусть $Q: V \rightarrow \mathbb{R}$ — квадратичная форма.

Можно привести к нормальному виду

$$Q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_{s+t}^2.$$

Теорема. Числа i_+ и i_- не зависят от базиса в котором Q принимает нормальный вид.

Доказательство. $s + t = \operatorname{rk} Q$, то есть не зависит от выбора базиса. Следовательно, достаточно показать, что число s определено однозначно.

Пусть $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис, в котором Q принимает нормальный вид

$$Q = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_{s+t}^2.$$

Пусть $\mathbf{e}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ — другой базис, в котором Q принимает нормальный вид

$$Q = x_1'^2 + \dots + x_{s'}^2 - x_{s'+1}'^2 - \dots - x_{s'+t'}^2.$$

Предположим, что $s \neq s'$, можно считать что $s > s'$.

Положим $L := \langle e_1, \dots, e_s \rangle$, $\dim L = s$,

$$L' := \langle e'_{s'+1}, \dots, e'_n \rangle, \dim L' = n - s'.$$

Так как $L + L' \subseteq V$, то $\dim(L + L') \leq n$.

Тогда, $\dim(L \cap L') \geq s + (n - s') - n = s - s' > 0$.

Значит, \exists вектор $v \in L \cap L'$, такой что $v \neq 0$.

Теперь:

1. Так как $v \in L$, то $Q(v) > 0$,
2. Так как $v \in L'$, то $Q(v) \leq 0$.

Противоречие.

■

11. Следствие метода Якоби о нахождении индексов инерции квадратичной формы над \mathbb{R}

Пусть $Q: V \rightarrow \mathbb{R}$ — квадратичная форма,

$\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис,

$$B = B(Q, \mathbf{e}),$$

δ_k — k -й угловой минор матрицы B .

Следствие (из метода Якоби). Пусть $\delta_k \neq 0 \forall k$. Тогда:

Число i_+ равно количеству сохранений знака в последовательности $1, \delta_1, \dots, \delta_n$.

Число i_- равно количеству перемен знака в последовательности $1, \delta_1, \dots, \delta_n$.

Доказательство. Метод Якоби $\implies \exists$ базис, в котором Q принимает канонический вид

$$Q = \delta_1 x_1^2 + \frac{\delta_2}{\delta_1} x_2^2 + \cdots + \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} x_n^2.$$

Здесь, знак отношения $\frac{\delta_i}{\delta_{i-1}}$ соответствует смене либо сохранению знака в рассматриваемой последовательности.

По закону инерции, количества знаков $+$ и $-$ не изменяются от выбора базиса. ■

12. Критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы, критерий отрицательной определённости квадратичной формы

Пусть V — векторное пространство над \mathbb{R} , $\dim V = n$,

$e = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V ,

$B = B(Q, e)$,

B_k — левый верхний $k \times k$ блок,

$\delta_k = \det B_k$.

Теорема (Критерий Сильвестра положительной определённости).

$$Q > 0 \iff \delta_k > 0 \quad \forall k = 1 \dots n.$$

Доказательство.

\Leftarrow По следствию из метода Якоби, $i_+ = n$, то есть $Q > 0$.

\Rightarrow $Q > 0 \implies \exists C \in M_n^0(\mathbb{R})$, такая что $C^T B C = E$.

Тогда, $\det C^T \cdot \det B \cdot \det C = 1$. Отсюда, $\delta_n = \frac{1}{(\det C)^2} > 0$.

Теперь, для любого k ограничение Q на $\langle e_1, \dots, e_k \rangle$ тоже положительно определено, а его матрица в базисе e_1, \dots, e_k равна B_k . Следовательно, $\det B_k > 0$. ■

Следствие.

$$Q < 0 \iff \delta_k \begin{cases} > 0 & \text{при } k : 2, \\ < 0 & \text{при } k \not: 2. \end{cases}$$

Доказательство. $Q < 0 \iff -Q > 0$ ■

$$\iff \det(-B_k) > 0 \quad \forall k$$

$$\iff (-1)^k \delta_k > 0 \quad \forall k$$

2.4 Евклидовы пространства

1. Неравенство Коши–Буняковского

Предложение (неравенство Коши–Буняковского). $\forall x, y \in \mathbb{E}$ верно $|(x, y)| \leq |x| \cdot |y|$, причём равенство $\iff x, y$ пропорциональны.

Доказательство. Случаи:

1. x, y пропорциональны. Тогда, можно считать, что $y = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$|(x, y)| = |(x, \lambda x)| = |\lambda| |(x, x)| = |\lambda| |x|^2 = |x| \cdot |\lambda x| = |x| \cdot |y|.$$

2. x, y не пропорциональны. Тогда x, y линейно независимы.

Значит они образуют базис в $\langle x, y \rangle$.

Получаем

$$\begin{vmatrix} (x, x) & (x, y) \\ (y, x) & (y, y) \end{vmatrix} > 0 \quad (\text{критерий Сильвестра}).$$

$$\text{Отсюда, } (x, x) \cdot (y, y) - (x, y)^2 > 0 \implies (x, y)^2 < |x|^2 \cdot |y|^2.$$

Пример. Пусть $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением, тогда

$$|x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}.$$

2. Свойства определителя матрицы Грама системы векторов евклидова пространства

Предложение. $\forall v_1, \dots, v_k \in \mathbb{E} \implies \det G(v_1, \dots, v_k) \geq 0$.

Более того, $\det G(v_1, \dots, v_k) > 0 \iff v_1, \dots, v_k$ линейно независимы.

Доказательство. Пусть $G := G(v_1, \dots, v_k)$. Случаи:

1. v_1, \dots, v_k линейно независимы. Тогда, G — матрица билинейной формы $(\cdot, \cdot)|_{\langle v_1, \dots, v_k \rangle}$ в базисе v_1, \dots, v_k подпространства $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$, а значит $\det G > 0$ по критерию Сильвестра.
2. v_1, \dots, v_k линейно зависимы. Тогда, $\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$, такие что $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$.
А значит, $\forall i = 1, \dots, k \implies \alpha_1(v_1, v_i) + \dots + \alpha_k(v_k, v_i) = 0$.
Отсюда, $\alpha_1 G_{(1)} + \dots + \alpha_k G_{(k)} = 0 \implies$ строки в G линейно зависимы $\implies \det G = 0$. ■

3. Свойства ортогонального дополнения к подпространству в евклидовом пространстве: размерность, разложение в прямую сумму, ортогональное дополнение к ортогональному дополнению

Далее считаем, что $\dim \mathbb{E} = n < \infty$.

Предложение. Пусть $S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство. Тогда:

1. $\dim S^\perp = n - \dim S$.
2. $\mathbb{E} = S \oplus S^\perp$.
3. $(S^\perp)^\perp = S$.

Доказательство.

1. Пусть $\dim S = k$ и e_1, \dots, e_k — базис S .
Дополним e_1, \dots, e_k до базиса e_1, \dots, e_n всего \mathbb{E} .
Тогда, $\forall x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in \mathbb{E}$.

$$\begin{aligned} x \in S^\perp &\iff (x, e_i) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k \\ &\iff \begin{cases} (e_1, e_1)x_1 + \dots + (e_n, e_1)x_n = 0 \\ (e_1, e_2)x_1 + \dots + (e_n, e_2)x_n = 0 \\ \dots \\ (e_1, e_k)x_1 + \dots + (e_n, e_k)x_n = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Это ОСЛУ с матрицей $G \in \text{Mat}_{k \times n}(\mathbb{R})$, причём левый $k \times k$ блок в G — это $\underbrace{G(e_1, \dots, e_k)}_{\det \neq 0}$.

Это означает, что $\text{rk } G = k$.

Следовательно, пространство решений этой ОСЛУ имеет размерность $n - k$.

Отсюда, $\dim S^\perp = n - k = n - \dim S$.

2. (a) $\dim S + \dim S^\perp = k + (n - k) = n = \dim \mathbb{E}$.
(b) $v \in S \cap S^\perp \implies (v, v) = 0 \implies v = 0 \implies S \cap S^\perp = \{0\}$.
А значит, $\mathbb{E} = S \oplus S^\perp$.
3. Заметим, что $S \subseteq (S^\perp)^\perp$ (по определению).
 $\dim(S^\perp)^\perp = n - \dim S^\perp = n - (n - \dim S) = \dim S$.
Следовательно, $S = (S^\perp)^\perp$. ■

4. Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в \mathbb{R}^n в терминах его произвольного базиса

Пусть $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением.

$S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство, a_1, \dots, a_k — базис S .

Пусть $A := (a_1, \dots, a_k) \in \text{Mat}_{n \times k}(\mathbb{R})$, $A^{(i)} = a_i$.

Предложение. $\forall v \in \mathbb{R}^n \quad \text{pr}_S v = A(A^T A)^{-1} A^T v$.

Доказательство. Корректность: $A^T A = G(a_1, \dots, a_k) \in M_k^0(\mathbb{R})$.

Положим $x := \text{pr}_S v$, $y := \text{ort}_S v$.

Так как $x \in S$, $x = A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_k \end{pmatrix}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

$y \in S^\perp \implies A^T y = 0$.

$$\begin{aligned} A(A^T A)^{-1} A^T v &= A(A^T A)^{-1} A^T (x + y) \\ &= \underbrace{A(A^T A)^{-1} A^T A}_{E} \overbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_k \end{pmatrix}}^x + A(A^T A)^{-1} \underbrace{A^T y}_0 \\ &= A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = x = \text{pr}_S v. \end{aligned}$$

■

5. Существование ортонормированного базиса в евклидовом пространстве, дополнение ортогональной (ортонормированной) системы векторов до ортогонального (ортонормированного) базиса

Теорема. Во всяком конечномерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

Доказательство. Следует из теоремы о приведении квадратичной формы (x, x) к нормальному виду (который будет E в силу положительной определённости). ■

Следствие. Всякую ортогональную (ортонормированную) систему векторов можно дополнить до ортогонального (ортонормированного) базиса.

Доказательство. Пусть e_1, \dots, e_k — данная система.

Пусть e_{k+1}, \dots, e_n — это ортогональный (ортонормированный) базис в $\langle e_1, \dots, e_k \rangle^\perp$.

Тогда e_1, \dots, e_n — искомый базис. ■

6. Описание всех ортонормированных базисов в терминах одного и матриц перехода

Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ — ортонормированный базис в E .

Пусть $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ — какой-то другой базис.

$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C$, $C \in M_n^0(\mathbb{R})$.

Предложение. e' — ортонормированный базис $\iff C^T \cdot C = E$.

Доказательство. $G(e'_1, \dots, e'_n) = C^T \underbrace{G(e_1, \dots, e_n)}_E C = C^T C$.

e' ортонормированный $\iff G(e'_1, \dots, e'_n) = E \iff C^T C = E$. ■

7. Формула для координат вектора в ортогональном (ортонормированном) базисе. Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в терминах его ортогонального (ортонормированного) базиса

Пусть E — евклидово пространство, (e_1, \dots, e_n) — ортогональный базис, $v \in E$.

Предложение. $v = \frac{(v, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 + \frac{(v, e_2)}{(e_2, e_2)} e_2 + \dots + \frac{(v, e_n)}{(e_n, e_n)} e_n$.

В частности, если e_1, \dots, e_n ортонормирован, то $v = (v, e_1) e_1 + \dots + (v, e_n) e_n$.

Доказательство. $v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n$.

$\forall i = 1, \dots, n \quad (v, e_i) = \lambda_1 (e_1, e_i) + \dots + \lambda_n (e_n, e_i)$.

Так как базис ортогонален, то $(v, e_i) = \lambda_i (e_i, e_i) \implies \lambda_i = \frac{(v, e_i)}{(e_i, e_i)}$. ■

Пусть $S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство.

e_1, \dots, e_k — ортогональный базис в S .

Предложение. $\forall v \in \mathbb{E} \quad \text{pr}_S v = \sum_{i=1}^k \frac{(v, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i$.

В частности, если e_1, \dots, e_k ортонормирован, то $\text{pr}_S v = \sum_{i=1}^k (v, e_i) e_i$.

Доказательство. Пусть e_{k+1}, \dots, e_n — ортогональный базис в S^\perp . Тогда e_1, \dots, e_n — ортогональный базис в \mathbb{E} .

$$v = \underbrace{\sum_{i=1}^k \frac{(v, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i}_{\in S} + \underbrace{\sum_{i=k+1}^n \frac{(v, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i}_{\in S^\perp}.$$

Отсюда,

$$\text{pr}_S v = \sum_{i=1}^k \frac{(v, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i. \quad \blacksquare$$

8. Теорема Пифагора и неравенство треугольника в евклидовом пространстве

Теорема. Пусть $x, y \in \mathbb{E}$, $(x, y) = 0$. Тогда $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$.

Доказательство.

$$|x + y|^2 = (x + y, x + y) = \underbrace{(x, x)}_{|x|^2} + \underbrace{(x, y)}_0 + \underbrace{(y, x)}_0 + \underbrace{(y, y)}_{|y|^2} = |x|^2 + |y|^2. \quad \blacksquare$$

Предложение. $\forall a, b, c \in \mathbb{E} \implies \rho(a, b) + \rho(b, c) \geq \rho(a, c)$.

Доказательство. Пусть $x = a - b$, $y = b - c$. Тогда, $a - c = x + y$. Достаточно доказать, что $|x| + |y| \geq |x + y|$.

$$|x + y|^2 = |x|^2 + \underbrace{2(x, y)}_{\leq |x||y|} + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2. \quad \blacksquare$$

9. Теорема о расстоянии между вектором и подпространством в терминах ортогональной составляющей

Теорема. Пусть $x \in \mathbb{E}$, $S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство. Тогда, $\rho(x, S) = |\text{ort}_S x|$, причем $\text{pr}_S x$ — это ближайший к x вектор из S .

Доказательство. Положим $y = \text{pr}_S x$, $z = \text{ort}_S x$. Тогда, $x = y + z$. Для любого $y' \in S$, $y' \neq 0$ имеем

$$\rho(x, y + y')^2 = |x - y - y'|^2 = |z - y'|^2 = |z|^2 + |y'|^2 > |z|^2 = |x - y|^2 = \rho(x, y)^2. \quad \blacksquare$$

10. Метод наименьших квадратов для несовместных систем линейных уравнений: постановка задачи и её решение. Единственность псевдорешения и явная формула для него в случае линейной независимости столбцов матрицы коэффициентов

СЛУ $Ax = b$, $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$.

$$x_0 \text{ — решение системы} \iff Ax_0 = b \iff Ax_0 - b = 0 \iff |Ax_0 - b| = 0 \iff \rho(Ax_0, b) = 0.$$

Если СЛУ несовместна, то x_0 называется *псевдорешением*, если $\rho(Ax_0, b)$ минимально.

$$\rho(Ax_0, b) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \rho(Ax, b).$$

x_0 — решение задачи оптимизации $\rho(Ax, b) \xrightarrow{x \in \mathbb{R}^n} \min$.

Пусть $S \subseteq \mathbb{R}^n$ — подпространство натянутое на столбцы матрицы A .

$$S = \langle A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \rangle.$$

Положим $c := \text{pr}_S b$.

Предложение.

1. x_0 — псевдорешение $Ax = b \iff x_0$ — решение для $Ax = c$.
2. Если столбцы $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$ линейно независимы, то псевдорешение единственно и может быть найдено по формуле $x_0 = (A^T A)^{-1} A^T b$.

Доказательство.

1.

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad Ax = x_1 A^{(1)} + \dots + x_n A^{(n)} \implies \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\} = S \implies \min_{x \in \mathbb{R}^n} \rho(Ax, b) = \rho(S, b).$$

По теореме о расстоянии от вектора до подпространства минимум достигается при $Ax = c = \text{pr}_S b$.

2. Так как $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$ линейно независимы, то c единственным образом представим в виде линейной комбинации этих столбцов.

Следовательно, x_0 единственно.

Знаем, что $A \underbrace{(A^T A)^{-1} A^T}_{=I} b = c$. Значит, $x_0 = (A^T A)^{-1} A^T b$. ■

11. Формула для расстояния между вектором и подпространством в терминах матриц Грама

Пусть \mathbb{E} — евклидово пространство, $\dim \mathbb{E} = n < \infty$.

$S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство, e_1, \dots, e_k — базис в S .

Теорема. $\forall x \in \mathbb{E} \quad \rho(x, S)^2 = \frac{\det G(e_1, \dots, e_k, x)}{\det G(e_1, \dots, e_k)}$.

Доказательство. Пусть $z := \text{ort}_S x$, тогда $\rho(x, S)^2 = |z|^2$.

1. $x \in S \implies \rho(x, S) = 0$:

так как e_1, \dots, e_k линейно независимы, то $\det G(e_1, \dots, e_k, x) = 0$.

2. $x \notin S$.

Ортогонализация Грама-Шмидта: $e_1, \dots, e_k, x \rightsquigarrow f_1, \dots, f_k, z$.

По свойству (♥) получаем

$$\frac{\det G(e_1, \dots, e_k, x)}{\det G(e_1, \dots, e_k)} = \frac{\det G(f_1, \dots, f_k, z)}{\det G(f_1, \dots, f_k)} = \frac{|f_1|^2 \dots |f_k|^2 |z|^2}{|f_1|^2 \dots |f_k|^2} = |z|^2 = \rho(x, S)^2. \quad \blacksquare$$

12. Две формулы для объёма k -мерного параллелепипеда в евклидовом пространстве

Теорема. $\text{vol } P(a_1, \dots, a_k)^2 = \det G(a_1, \dots, a_k)$.

Доказательство. Индукция по k :

$k = 1$: $|a_1|^2 = (a_1, a_1)$ — верно.

$k > 1$: $\text{vol } P(a_1, \dots, a_k)^2 = \text{vol } P(a_1, \dots, a_{k-1})^2 \cdot h^2 = \det G(a_1, \dots, a_{k-1}) \cdot h^2 = (\star)$.

Если a_1, \dots, a_{k-1} линейно независимы, то $h^2 = \frac{\det G(a_1, \dots, a_k)}{\det G(a_1, \dots, a_{k-1})}$. Тогда, $(\star) = \det G(a_1, \dots, a_k)$.

Если же a_1, \dots, a_{k-1} линейно зависимы, то $\det G(a_1, \dots, a_{k-1}) = 0 \implies (\star) = 0$. Но a_1, \dots, a_k тоже линейно зависимы, а значит $\det G(a_1, \dots, a_k) = 0$. ■

Пусть (e_1, \dots, e_n) — ортонормированный базис в \mathbb{E} ,

$(a_1, \dots, a_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot A$, $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Предложение. $\text{vol } P(a_1, \dots, a_n) = |\det A|$.

Доказательство.

$$G(a_1, \dots, a_n) = A^T \cdot A \implies \text{vol } P(a_1, \dots, a_n)^2 = \det(A^T A) = (\det A)^2 \quad \blacksquare$$

2.5 Элементы аналитической геометрии и линейные многообразия

1. Теорема о векторном произведении и формуле для него в координатах в положительно ориентированном ортонормированном базисе

Лемма. Пусть $v_1, v_2 \in \mathbb{E}$. Тогда, $(v_1, x) = (v_2, x) \forall x \in \mathbb{E} \implies v_1 = v_2$.

Доказательство. Имеем $(v_1 - v_2, x) = 0 \forall x \in \mathbb{E}$. Тогда, $v_1 - v_2 \in \mathbb{E}^\perp = \{0\} \implies v_1 - v_2 = 0 \implies v_1 = v_2$. ■

Теорема. Пусть $a, b \in \mathbb{R}^3$. Тогда

1. $\exists! v \in \mathbb{E}$, такой что $(v, x) = \text{Vol}(a, b, x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$.
2. Если $e = (e_1, e_2, e_3)$ — положительно ориентированный ортонормированный базис и $a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$,
 $b = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$

то

$$v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} := \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} e_3. \quad (\star)$$

Доказательство.

Единственность если v' — другой такой вектор, то $(v, x) = (v', x) \forall x \in \mathbb{R}^3$, а значит $v' = v$ по лемме.

Существование Покажем, что v , заданный формулой (\star) подойдёт.

$$\begin{aligned} x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \implies (v, x) &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} x_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} x_3 \\ &= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = \text{Vol}(a, b, x). \end{aligned}$$

■

2. Критерий коллинеарности двух векторов трёхмерного евклидова пространства

Предложение. $a, b \in \mathbb{E}$ коллинеарны $\iff [a, b] = 0$.

Доказательство.

\implies

$$(a, b, x) = 0 \forall x \implies ([a, b], x) = 0 \forall x \implies [a, b] = 0.$$

\Leftarrow

$$[a, b] = 0 \implies ([a, b], x) = 0 \forall x \implies (a, b, x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Если a, b линейно независимы, то можно взять x , который дополняет их до базиса в \mathbb{R}^3 .

Тогда, $(a, b, x) \neq 0$ — противоречие. Значит a, b линейно зависимы \implies коллинеарны. ■

3. Геометрические свойства векторного произведения

Предложение.

1. $[a, b] \perp \langle a, b \rangle$.
2. $|[a, b]| = \text{vol } P(a, b)$.
3. $\text{Vol}(a, b, [a, b]) \geq 0$.

Доказательство.

1. $([a, b], a) = (a, b, a) = 0 = (a, b, b) = ([a, b], b)$.
2. Если a, b коллинеарны, то обе части равны 0.
Пусть $[a, b] \neq 0$.

$$|[a, b]|^2 = ([a, b], [a, b]) = (a, b, [a, b]) = (\#) > 0.$$

$$[a, b] \perp \langle a, b \rangle \implies (\#) = \text{vol } P(a, b, [a, b]) = \text{Vol}(a, b, [a, b]) = \text{vol } P(a, b) \cdot |[a, b]|.$$

Сокращая на $|[a, b]| \neq 0$, получаем требуемое.

3. $\text{Vol}(a, b, [a, b]) = ([a, b], [a, b]) \geq 0$. ■

4. Антикоммутативность и билинейность векторного произведения

Предложение.

1. $[a, b] = -[b, a] \quad \forall a, b$ (антикоммутативность).
2. $[\cdot, \cdot]$ билинейно (то есть линейно по каждому аргументу).

Доказательство.

1. $([a, b], x) = (a, b, x) = -(b, a, x) = -([b, a], x) = (-[b, a], x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \implies [a, b] = -[b, a]$
2. Пусть $u = [\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, b]$, $v = \lambda_1 [a_1, b] + \lambda_2 [a_2, b]$. Тогда $\forall x \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}(u, x) &= (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, b, x) \\ &= \lambda_1 (a_1, b, x) + \lambda_2 (a_2, b, x) \\ &= \lambda_1 ([a_1, b], x) + \lambda_2 ([a_2, b], x) \\ &= (\lambda_1 [a_1, b] + \lambda_2 [a_2, b], x) = (v, x).\end{aligned}$$

Значит $u = v$. Аналогично линейность по второму аргументу. ■

5. Линейные многообразия как сдвиги подпространств

Пусть $Ax = b$ — СЛУ, $\emptyset \neq L \subseteq \mathbb{R}^n$ — множество решений, $x_z \in L$ — частное решение.

Было: Лемма: $L = x_z + S$, где S — множество решений ОСЛУ $Ax = 0$.

Предложение. Множество $L \subseteq \mathbb{R}^n$ является линейным многообразием $\iff L = v_0 + S$ для некоторых $v_0 \in \mathbb{R}^n$ и подпространства $S \subseteq \mathbb{R}^n$.

Доказательство.

\implies Из леммы.

\Leftarrow $L = v_0 + S$. Значит существует ОСЛУ $Ax = 0$, для которой S является множеством решений. Тогда, L — множество решений СЛУ $Ax = Av_0$ (по лемме). ■

6. Критерий равенства двух линейных многообразий

Предложение. Пусть $L_1 = v_1 + S_1$ и $L_2 = v_2 + S_2$ — два линейных многообразия в \mathbb{R}^n . Тогда,

$$L_1 = L_2 \iff \begin{cases} S_1 = S_2 (= S) \\ v_1 - v_2 \in S \end{cases}.$$

Доказательство.

$$\Leftarrow L_1 = v_1 + S_1 = v_1 + S_2 = v_2 + (v_1 - v_2) + S_2 = v_2 + S_2 = L_2.$$

$$\implies v_1 = v_1 + 0 \in L_1 = L_2 = v_2 + S_2 \implies v_1 - v_2 \in S_2,$$

$$v \in S_1 \implies v + v_1 \in L_1 = L_2 = v_2 + S_2 \implies v \in (v_2 - v_1) + S_2 = S_2 \implies S_1 \subseteq S_2.$$

Аналогично, $v_1 - v_2 \in S_1$ и $S_2 \subseteq S_1$. ■

7. Теорема о плоскости, проходящей через $k + 1$ точку в \mathbb{R}^n

Теорема.

- а) Через любые $k + 1$ точек в \mathbb{R}^n проходит плоскость размерности $\leq k$.
- б) Если эти точки не лежат в плоскости размерности $< k$, то через них проходит ровно одна плоскость размерности k .

Доказательство.

- а) Пусть v_0, v_1, \dots, v_k — данные точки. Тогда через них проходит плоскость $P = v_0 + \langle v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0 \rangle$. Ясно, что $\dim P \leq k$.

- б) Из условия следует, что $\dim P = k \implies v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0$ линейно независимы.

Если $P' = v_0 + S$ — другая плоскость размерности k , содержащая v_0, \dots, v_k , то $v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0 \in S \implies S = \langle v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0 \rangle \implies P' = P$. ■

2.6 Линейные операторы

1. Критерий обратимости линейного оператора в терминах его ядра, образа и определителя

Пусть $\varphi \in L(V)$.

Предложение. Следующие условия эквивалентны:

1. $\ker \varphi = \{0\}$.
2. $\operatorname{Im} \varphi = V$.
3. φ обратима (то есть φ — изоморфизм V на себя).
4. $\det \varphi \neq 0$.

Доказательство.

- 1) \iff 2) так как $\dim V = \dim \ker \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi$.
 1)&2) \iff 3) по предложению в [определении 20](#).
 2) \iff 4) $\operatorname{Im} \varphi = V \iff \operatorname{rk} \varphi = \dim V \iff \det \varphi \neq 0$.

■

2. Критерий диагонализуемости линейного оператора в терминах собственных векторов

Предложение. Линейный оператор φ диагонализуем \iff в V есть базис из собственных векторов.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V .

$$A(\varphi, \mathfrak{e}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \iff \varphi(e_i) = \lambda_i e_i \quad \forall i = 1, \dots, n \iff \text{все } e_i \text{ — собственные векторы для } \varphi$$

■

3. Связь спектра линейного оператора с его характеристическим многочленом

Если \mathfrak{e} — какой-либо базис V и $A = (a_{ij}) = A(\varphi, \mathfrak{e})$, то

$$\chi_\varphi(t) = (-1)^n \det(A - tE) = (-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} - t & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - t & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} - t \end{vmatrix}$$

$\chi_\varphi(t) = t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \dots + c_1t + c_0$, где $c_{n-1} = -\operatorname{tr} \varphi$, $c_0 = (-1)^n \det \varphi$.

Следствие. $\lambda \in \operatorname{Spes} \varphi \iff \chi_\varphi(\lambda) = 0$, то есть λ — корень характеристического многочлена.

Следствие. $|\operatorname{Spes} \varphi| \leq n$.

4. Связь между алгебраической и геометрической кратностями собственного значения линейного оператора

Предложение. $g_\lambda \leq a_\lambda \quad \forall \lambda \in \operatorname{Spes} \varphi$.

Доказательство. Выберем в $V_\lambda(f)$ базис $e_1, \dots, e_{g_\lambda}$ и дополним его до базиса $(e_1, \dots, e_n) = \mathfrak{e}$ всего V . Тогда $A(\varphi, \mathfrak{e})$ имеет вид

$$\left(\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} & B \\ \hline \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} & C \end{array} \right) \begin{matrix} g_\lambda \\ n - g_\lambda \end{matrix}$$

$g_\lambda \qquad n - g_\lambda$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\chi_\varphi(t) &= (-1)^n \cdot \det \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda-t & \dots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & B \\ 0 & \dots & \lambda-t & \\ \hline & 0 & & C-tE \end{array} \right) \\ &= (-1)^n (\lambda-t)^{g_\lambda} \cdot \underbrace{\det(C-tE)}_{\text{некий многочлен}} \cdot (t-\lambda)^{g_\lambda} \implies a_\lambda \geq g_\lambda.\end{aligned}$$

■

5. Линейная независимость собственных подпространств линейного оператора, отвечающих попарно различным собственным значениям

Предложение. Пусть $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\} \subseteq \text{Спес } \varphi$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Тогда собственные подпространства $V_{\lambda_1}(\varphi), \dots, V_{\lambda_s}(\varphi)$ линейно независимы.

Доказательство. Индукция по s .

База $s = 1$ — ясно.

Шаг Пусть для $< s$ доказано, докажем для s .

Возьмем $v_i \in V_{\lambda_i}(\varphi) \ \forall i = 1, \dots, s$ и предположим, что $v_1 + \dots + v_s = 0$ (*).

Тогда $\varphi(v_1 + \dots + v_s) = \varphi(0) = 0 \implies$

$$\varphi(v_1) + \dots + \varphi(v_s) = 0 \implies$$

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_s v_s = 0.$$

Вычтем отсюда (*) $\cdot \lambda_s$:

$$(\lambda_1 - \lambda_s)v_1 + \dots + (\lambda_{s-1} - \lambda_s)v_{s-1} = 0.$$

По предположению индукции получаем $v_1 = \dots = v_{s-1} = 0$, а значит и $v_s = 0$.

■

6. Диагонализуемость линейного оператора, у которого число корней характеристического многочлена равно размерности пространства

Следствие. Если $\chi_\varphi(t)$ имеет ровно n различных корней, то φ диагонализуем.

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — все корни многочлена $\chi_\varphi(t)$.

Тогда $\forall i = 1, \dots, n \ \dim V_{\lambda_i}(\varphi) = 1$. Для каждого i выберем $e_i \in V_{\lambda_i}(\varphi) \setminus \{0\}$.

Тогда e_1, \dots, e_n линейно независимы по предложению, а значит (e_1, \dots, e_n) — базис из собственных векторов.

Следовательно, φ диагонализуем.

■

7. Критерий диагонализуемости линейного оператора в терминах его характеристического многочлена и кратностей собственных значений

Пусть V — векторное пространство над F , $\dim V = n$, $\varphi \in L(V)$ — линейный оператор.

Теорема. (критерий диагонализуемости) φ диагонализуемо \iff выполняются одновременно следующие 2 условия:

1. $\chi_\varphi(t)$ разлагается на линейные множители.
2. $\forall \lambda \in \text{Спес } \varphi \quad g_\lambda = a_\lambda$.

Доказательство.

$\implies \varphi$ диагонализуемо $\implies \exists$ базис $e = (e_1, \dots, e_n)$, такой что $\chi_\varphi(t)$ разлагается на линейные множители:

$$A(\varphi, e) = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{pmatrix} \implies \chi_\varphi(t) = (-1)^n \begin{vmatrix} \mu_1 - t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 - t & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n - t \end{vmatrix} = (t - \mu_1) \cdot \dots \cdot (t - \mu_n).$$

Перепишем $\chi_\varphi(t)$ в виде $\chi_\varphi(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (t - \lambda_s)^{k_s}$, где $\{\mu_1, \dots, \mu_n\} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. $\forall i = 1, \dots, s$ имеем $V_{\lambda_i}(\varphi) \supseteq \langle e_j \mid \mu_j = \lambda_i \rangle \implies \dim V_{\lambda_i}(\varphi) \geq k_i$, то есть $g_{\lambda_i} \geq a_{\lambda_i}$.

Но мы знаем, что $g_{\lambda_i} \leq a_{\lambda_i}$. Следовательно, $a_{\lambda_i} = g_{\lambda_i}$.

⇐ Пусть $\chi_\varphi(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (t - \lambda_s)^{k_s}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$.

Так как подпространства $V_{\lambda_1}(\varphi), \dots, V_{\lambda_s}(\varphi)$ линейно независимы, то

$$\dim(V_{\lambda_1}(\varphi) + \dots + V_{\lambda_s}(\varphi)) = \dim V_{\lambda_1}(\varphi) + \dots + \dim V_{\lambda_s}(\varphi) = k_1 + \dots + k_s = n = \dim V.$$

Следовательно, $V = V_{\lambda_1}(\varphi) \oplus \dots \oplus V_{\lambda_s}(\varphi)$.

Если e_i — базис в $V_{\lambda_i}(\varphi)$, то $e = e_1 \sqcup \dots \sqcup e_s$ — базис всего V , состоящий из собственных векторов, а значит φ диагонализуем. ■

8. Существование собственного вектора у линейного оператора в векторном пространстве над \mathbb{C} . Существование одномерного или двумерного инвариантного подпространства для линейного оператора в векторном пространстве над \mathbb{R}

Теорема. $F = \mathbb{R} \implies \forall \varphi \in L(V) \exists$ либо 1-мерное, либо 2-мерное φ -инвариантное подпространство.

Доказательство. Если $\chi_\varphi(t)$ имеет действительные корни, то в V есть собственный вектор \implies 1-мерное φ -инвариантное подпространство.

Пусть $\chi_\varphi(t)$ не имеет корней в \mathbb{R} . Возьмем какой-нибудь комплексный корень $\lambda + i\mu$, $\mu \neq 0$.

Фиксируем базис e в V и положим $A = A(\varphi, e)$. Для $\lambda + i\mu$ у матрицы A существует комплексный собственный вектор, то есть такое $u, v \in \mathbb{R}^n$, что

$$A(u + iv) = (\lambda + i\mu)(u + iv) \implies Au + iAv = \lambda u - \mu v + i(\lambda v + \mu u) \implies \begin{cases} Au = \lambda u - \mu v \\ Av = \lambda v + \mu u \end{cases}.$$

Значит, векторы в V с координатами u, v порождают φ -инвариантное подпространство $U \subseteq V$ размерности ≤ 2 . ■

Упражнение. $\dim U = 2$.

2.7 Линейные отображения и операторы в евклидовых пространствах

1. Сопряжённое линейное отображение: определение, существование и единственность. Матрица сопряжённого отображения в паре произвольных и паре ортонормированных базисов

Пусть \mathbb{E} — евклидово пространство со скалярным произведением (\cdot, \cdot) , $\dim \mathbb{E} = n$,

\mathbb{E} — другое евклидово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)'$, $\dim \mathbb{E}' = m$,

$\varphi: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$.

Определение. Линейное отображение $\psi: \mathbb{E}' \rightarrow \mathbb{E}$ называется *сопряжённым* к φ , если

$$(\varphi(x), y)' = (x, \psi(y)) \quad \forall x \in \mathbb{E}, y \in \mathbb{E}'. \quad (\star)$$

Обозначение: φ^* .

Предложение.

1. ψ существует и единственно.

2. Если e — базис \mathbb{E} , f — базис \mathbb{E}' , $G = G(e_1, \dots, e_n)$ и $A_\varphi = A(\varphi, e, f)$, то $A_\psi = G^{-1} A_\varphi^T G$.

В частности, если e и f ортонормированы, то $A_\psi = A_\varphi^T$.

Доказательство. $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in \mathbb{E}$, $y = y_1 f_1 + \dots + y_m f_m \in \mathbb{E}'$.

$$(\varphi(x), y)' = \left(A_\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \right)^T \cdot G' \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} = (x_1 \dots x_n) \cdot A_\varphi^T \cdot G' \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

$$(x, \psi(y)) = (x_1 \dots x_n) \cdot G \cdot A_\psi \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Так как $\forall B \in \text{Mat}_{m \times n} \quad b_{ij} = (0 \dots 0 \underset{i}{1} 0 \dots 0) \cdot B \cdot (0 \dots 0 \underset{j}{1} 0 \dots 0)^T$, то $(\star) \iff A_\varphi^T G' = G A_\psi \iff A_\psi = G^{-1} A_\varphi^T G$.

Отсюда следуют сразу оба утверждения. ■

2. Инвариантность ортогонального дополнения к подпространству, инвариантному относительно самосопряжённого линейного оператора

Предложение. $\varphi = \varphi^*$, $U \subseteq \mathbb{E}$ — φ -инвариантное подпространство, тогда U^\perp — тоже φ -инвариантное подпространство.

Доказательство. $\varphi(U) \subseteq U$, хотим $\varphi(U^\perp) \subseteq U^\perp$.

$$\forall x \in U^\perp \quad \forall y \in U \quad (\varphi(x), y) = (x, \varphi(y)) = 0 \implies \varphi(x) \in U^\perp. \quad \blacksquare$$

3. Существование собственного вектора для самосопряжённого линейного оператора

Если e — ортонормированный базис в \mathbb{E} , $A_\varphi = A(\varphi, e)$, $A_{\varphi^*} = A(\varphi^*, e)$, то $A_{\varphi^*} = A_\varphi^T$.

Следовательно, $\varphi = \varphi^* \iff A_\varphi = A_\varphi^T$.

Предложение. Если $\varphi = \varphi^*$, то \exists собственный вектор для φ .

Доказательство. Было: \exists либо 1) 1-мерное φ -инвариантное подпространство, либо 2) 2-мерное φ -инвариантное подпространство.

1. ок.

2. $U \subseteq \mathbb{E}$ — φ -инвариантное подпространство, $\dim U = 2$.

Фиксируем ортонормированный базис $e = (e_1, e_2)$. Пусть $\psi = \varphi|_U$.

$$\text{Значит, } \psi = \psi^* \implies A(\psi, e) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

$$\text{Отсюда, } \chi_\psi(t) = \begin{vmatrix} a-t & b \\ b & c-t \end{vmatrix} = t^2 - (a+c)t + ac - b^2.$$

$$D = (a+c)^2 - 4(ac - b^2) = (a-c)^2 + 4b^2 \geq 0.$$

Следовательно, $\chi_\psi(t)$ имеет корни в \mathbb{R} , то есть в U есть собственный вектор для ψ , он же собственный вектор для φ . \blacksquare

4. Существование ортонормированного базиса из собственных векторов для самосопряжённого линейного оператора

Теорема. $\varphi = \varphi^* \implies$ в \mathbb{E} существует ортонормированный базис из собственных векторов.

В частности, φ диагонализуем над \mathbb{R} и $\chi_\varphi(t)$ разлагается на линейные множители над \mathbb{R} .

Доказательство. Индукция по n :

База $n = 1$ — ясно.

Шаг $n > 1$. Тогда существует собственный вектор v для φ . Положим $e_1 = \frac{v}{|v|} \implies |e_1| = 1$.

$U = \langle e_1 \rangle^\perp$ — φ -инвариантное подпространство, $\dim U < n \implies$ по предположению индукции в U существует ортонормированный базис (e_2, \dots, e_n) из собственных векторов. Тогда (e_1, e_2, \dots, e_n) — искомый базис. \blacksquare

5. Приведение квадратичной формы к главным осям

Теорема. (приведение квадратичной формы к главным осям) Для любой квадратичной формы $Q: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ существует ортонормированный базис $e = (e_1, \dots, e_n)$, в котором Q принимает канонический вид $Q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$. Более того, набор $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ определен однозначно, с точностью до перестановки.

Доказательство. Пусть $f = (f_1, \dots, f_n)$ — какой-то ортонормированный базис. Рассмотрим линейный оператор $\varphi: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$, такой что $A(\varphi, f) = B(Q, f)$ ($\varphi = \varphi^*$, так как $B(Q, f)$ симметрична).

Если $f' = (f'_1, \dots, f'_n)$ — другой ортонормированный базис, то $f' = f \cdot C$, где C — ортонормированная матрица ($C^T C = \mathbb{E} \iff C^T = C^{-1}$). Тогда $A(\varphi, f') = C^{-1} A(\varphi, f) C = C^T B(Q, f) C = B(Q, f')$.

Значит, в любом ортонормированном базисе φ и Q имеют одинаковые матрицы.

По **теореме**, существует ортонормированный базис e , такой что $A(\varphi, e) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Тогда $B(Q, e) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Единственность для $\{\lambda_i\}$ следует из того, что набор $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — это спектр φ (с учетом кратностей). \blacksquare

6. Теорема о пяти эквивалентных условиях, определяющих ортогональный линейный оператор

Теорема. $\varphi \in L(\mathbb{E}) \implies$ следующие условия эквивалентны:

- (1) φ ортогонален.
- (2) $|\varphi(x)| = |x| \quad \forall x \in \mathbb{E}$ (то есть φ сохраняет длины векторов).
- (3) $\exists \varphi^{-1}$ и $\varphi^{-1} = \varphi^*$ (то есть $\varphi^* \varphi = \varphi \varphi^* = \text{Id}$).
- (4) \forall ортонормированного базиса \mathfrak{e} матрица $A(\varphi, \mathfrak{e})$ ортогональна.
- (5) \forall ортонормированного базиса $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$ векторы $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ образуют ортонормированный базис.

Доказательство.

$$(1) \implies (2) \quad |\varphi(x)| = \sqrt{(\varphi(x), \varphi(x))} = \sqrt{(x, x)} = |x|.$$

$$(2) \implies (1) \quad (\varphi(x), \varphi(y)) = \frac{1}{2} [(\varphi(x+y), \varphi(x+y)) - (\varphi(x), \varphi(x)) - (\varphi(y), \varphi(y))] \\ = \frac{1}{2} [|\varphi(x+y)|^2 - |\varphi(x)|^2 - |\varphi(y)|^2] = \frac{1}{2} [|x+y|^2 - |x|^2 - |y|^2] = (x, y)$$

$$(1) \& (2) \implies (3) \quad |\varphi(x)| = 0 \implies |x| = 0 \implies x = 0 \implies \ker \varphi = \{0\} \implies \exists \varphi^{-1}. \\ (\varphi^{-1}(x), y) = (\varphi(\varphi^{-1}(x)), \varphi(y)) = (x, \varphi(y)) \implies \varphi^{-1} = \varphi^*.$$

$$(3) \implies (4) \quad \mathfrak{e} \text{ — ортонормированный базис, } A = A(\varphi, \mathfrak{e}) \implies \begin{aligned} A(\varphi^{-1}, \mathfrak{e}) &= A^{-1} \\ A(\varphi^*, \mathfrak{e}) &= A^T \end{aligned}$$

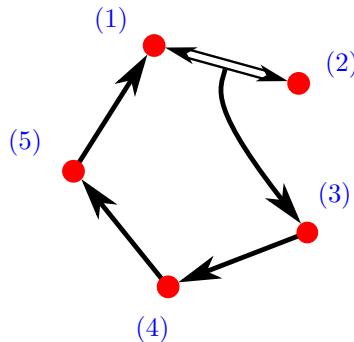
Так как $\varphi^{-1} = \varphi^*$, то $A^{-1} = A^T \implies A$ ортогональная.

$$(4) \implies (5) \quad \mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n) \text{ — ортонормированный базис, } A = A(\varphi, \mathfrak{e}) \implies (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = (e_1, \dots, e_n) \cdot A.$$

Так как A ортогональная, то $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ — ортонормированный базис.

$$(5) \implies (1) \quad (e_1, \dots, e_n) \text{ — ортонормированный базис} \implies (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) \text{ — тоже ортонормированный базис.}$$

$$\begin{aligned} x &= x_1 e_1 + \dots + x_n e_n & \implies & \varphi(x) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n) & \implies \\ y &= y_1 e_1 + \dots + y_n e_n & \implies & \varphi(y) = y_1 \varphi(e_1) + \dots + y_n \varphi(e_n) & \implies \\ (\varphi(x), \varphi(y)) &= (x_1, \dots, x_n) \cdot \underbrace{G(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))}_{=E} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1, \dots, x_n) \cdot \underbrace{G(\mathfrak{e})}_{=E} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = (x, y). \end{aligned} \quad \blacksquare$$



7. Инвариантность ортогонального дополнения к подпространству, инвариантному относительно ортогонального линейного оператора

Предложение. Если $\varphi \in L(\mathbb{E})$ — ортогональный оператор, $U \subseteq \mathbb{E}$ — φ -инвариантное подпространство, то U^\perp тоже φ -инвариантно.

Доказательство. Пусть $\psi := \varphi|_U$. Тогда ψ — ортогональный оператор в U , в частности ψ обратим.

Хотим: $\varphi(U^\perp) \subseteq U^\perp \quad \forall x \in U^\perp \quad \forall y \in U$.

$$(\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y)) = (x, \varphi^{-1}(y)) = \underbrace{(x, \varphi^{-1}(y))}_{\in U^\perp} = 0. \quad \blacksquare$$

8. Теорема о каноническом виде ортогонального линейного оператора

1. $\dim \mathbb{E} = 1$.

φ ортогонально $\iff \varphi = \pm \text{Id}$.

2. $\dim \mathbb{E} = 2$, $\mathfrak{e} = (e_1, e_2)$ — ортонормированный базис $\implies \varphi(e_1), \varphi(e_2)$ — тоже ортонормированный базис.

Два случая:

(a) φ — поворот на угол α .

$$A(\varphi, \mathfrak{e}) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

(b) φ — поворот на угол α и отражение относительно $\langle \varphi(e_1) \rangle$.

$$A(\varphi, \mathfrak{e}) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

Если l — биссектриса угла $\angle(e_1, \varphi(e_1))$, то $\varphi(x) = x \quad \forall x \in l$,

$$\varphi(x) = -x \quad \forall x \in l^\perp.$$

$$e'_1 \in l, e'_2 \in l^\perp, |e'_1| = |e'_2| = 1, \mathfrak{e}' = (e'_1, e'_2) \implies A(\varphi, \mathfrak{e}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Значит φ — отражение относительно l .

Теорема. Если $\varphi \in L(\mathbb{E})$ — ортогональный оператор, то существует ортонормированный базис $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$, такой что

$$A(\varphi, \mathfrak{e}) = \begin{pmatrix} \Pi(\alpha_1) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Pi(\alpha_2) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Pi(\alpha_k) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \Pi(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Индукция по n :

$n = 1, 2$ — было.

$n > 2$ Существует 1-мерное или 2-мерное φ -инвариантное подпространство. В нём требуемый базис найдется.

Так как U^\perp φ -инвариантно и $\dim U^\perp < n$, то по предположению индукции в U^\perp тоже найдется такой базис.

Объединяя эти базисы U и U^\perp , получаем ортонормированный базис, в котором матрица φ имеет требуемый вид с точностью до перестановки блоков. ■