

# Линейная алгебра, Коллоквиум II

Бобень Вячеслав

[@darkkeks](#), [GitHub](#)

Благодарность выражается Левину Александру ([@azerty1234567890](#))

и Милько Андрею ([@andrew\\_milko](#)) за видеозаписи лекций.

Дата изменения: 2020.05.29 в 08:50

2019 — 2020

“К коллоку можете даже не готовиться”.

---

— Роман Сергеевич Авдеев

# 1 Определения и формулировки

1. Сумма двух подпространств векторного пространства
2. Теорема о связи размерности суммы двух подпространств с размерностью их пересечения
3. Сумма нескольких подпространств векторного пространства
4. Линейная независимость нескольких подпространств векторного пространства
5. Разложение векторного пространства в прямую сумму подпространств
6. При каких условиях на подпространства  $U_1, U_2$  векторного пространства  $V$  имеет место разложение  $V = U_1 \oplus U_2$ ?
7. Проекция вектора на подпространство вдоль дополнительного подпространства
8. Матрица перехода от одного базиса векторного пространства к другому
9. Формула преобразования координат вектора при замене базиса
10. Линейное отображение векторных пространств, его простейшие свойства
11. Изоморфизм векторных пространств, изоморфные векторные пространства
12. Какими свойствами обладает отношение изоморфности на множестве всех векторных пространств?
13. Критерий изоморфности двух конечномерных векторных пространств
14. Матрица линейного отображения
15. Связь между координатами вектора и его образа при линейном отображении
16. Формула изменения матрицы линейного отображения при замене базисов
17. Сумма двух линейных отображений и её матрица. Произведение линейного отображения на скаляр и его матрица
18. Композиция двух линейных отображений и её матрица
19. Ядро и образ линейного отображения. Являются ли они подпространствами в соответствующих векторных пространствах?
20. Критерий инъективности линейного отображения в терминах его ядра
21. Связь между рангом матрицы линейного отображения и размерностью его образа
22. Каким свойством обладает набор векторов, дополняющих базис ядра линейного отображения до базиса всего пространства?
23. Теорема о связи размерностей ядра и образа линейного отображения
24. К какому простейшему виду можно привести матрицу линейного отображения путём замены базисов?
25. Линейная функция на векторном пространстве
26. Сопряжённое (двойственное) векторное пространство и его размерность
27. Базис сопряжённого пространства, двойственный к данному базису исходного векторного пространства
28. Билинейная форма на векторном пространстве
29. Матрица билинейной формы
30. Формула для вычисления значений билинейной формы в координатах
31. Формула изменения матрицы билинейной формы при замене базисов
32. Симметричная билинейная форма. Критерий симметричности билинейной формы в терминах её матрицы
33. Квадратичная форма

34. Соответствие между симметричными билинейными формами и квадратичными формами
35. Симметризация билинейной формы
36. Поляризация квадратичной формы
37. Матрица квадратичной формы
38. Канонический вид квадратичной формы
39. Нормальный вид квадратичной формы над  $\mathbb{R}$
40. Индексы инерции квадратичной формы над  $\mathbb{R}$
41. Закон инерции для квадратичной формы над  $\mathbb{R}$
42. Положительно/неотрицательно определённая квадратичная форма над  $\mathbb{R}$
43. Отрицательно/неположительно определённая квадратичная форма над  $\mathbb{R}$
44. Неопределённая квадратичная форма над  $\mathbb{R}$
45. Способ нахождения индексов инерции квадратичной формы над  $\mathbb{R}$ , вытекающий из метода Якоби
46. Критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы над  $\mathbb{R}$
47. Критерий отрицательной определённости квадратичной формы над  $\mathbb{R}$
48. Евклидово пространство
49. Длина вектора в евклидовом пространстве
50. Неравенство Коши–Буняковского
51. Угол между ненулевыми векторами евклидова пространства
52. Матрица Грама системы векторов евклидова пространства
53. Свойства определителя матрицы Грама
54. Ортогональное дополнение подмножества евклидова пространства
55. Чему равна размерность ортогонального дополнения к подпространству евклидова пространства?
56. Каким свойством обладают подпространство евклидова пространства и его ортогональное дополнение?
57. Ортогональная проекция вектора на подпространство
58. Ортогональная составляющая вектора относительно подпространства
59. Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в  $\mathbb{R}^n$ , заданное своим базисом
60. Ортогональная система векторов евклидова пространства. Ортогональный базис
61. Ортонормированная система векторов евклидова пространства. Ортонормированный базис
62. Описание всех ортонормированных базисов евклидова пространства в терминах одного такого базиса и матриц перехода
63. Ортогональная матрица
64. Формула для координат вектора в ортогональном и ортонормированном базисах евклидова пространства
65. Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в терминах его ортогонального базиса
66. Метод ортогонализации Грама–Шмидта
67. Теорема Пифагора в евклидовом пространстве
68. Расстояние между векторами евклидова пространства
69. Неравенство треугольника в евклидовом пространстве

70. Теорема о расстоянии между вектором и подпространством в терминах ортогональной составляющей
71. Псевдорешение несовместной системы линейных уравнений
72. Формула для расстояния от вектора до подпространства в терминах матриц Грама
73.  $k$ -мерный параллелепипед и его объём
74. Формула для объёма  $k$ -мерного параллелепипеда в  $n$ -мерном евклидовом пространстве
75. Формула для объёма  $n$ -мерного параллелепипеда в  $n$ -мерном евклидовом пространстве в терминах координат в ортонормированном базисе
76. В каком случае два базиса евклидова пространства называются одинаково ориентированными?
77. Ориентированный объём  $n$ -мерного параллелепипеда в  $n$ -мерном евклидовом пространстве
78. Свойства ориентированного объёма  $n$ -мерного параллелепипеда в  $n$ -мерном евклидовом пространстве
79. Связь векторного произведения со скалярным и ориентированным объёмом
80. Формула для вычисления векторного произведения в терминах координат в положительно ориентированном ортонормированном базисе
81. Смешанное произведение векторов трёхмерного евклидова пространства
82. Формула для вычисления смешанного произведения в терминах координат в положительно ориентированном ортонормированном базисе
83. Критерий компланарности трёх векторов трёхмерного евклидова пространства
84. Критерий коллинеарности двух векторов трёхмерного евклидова пространства
85. Геометрические свойства векторного произведения
86. Линейное многообразие. Характеризация линейных многообразий как сдвигов подпространств
87. Критерий равенства двух линейных многообразий. Направляющее подпространство и размерность линейного многообразия
88. Теорема о плоскости, проходящей через  $k + 1$  точку в  $\mathbb{R}^n$
89. Три способа задания прямой в  $\mathbb{R}^2$ . Уравнение прямой в  $\mathbb{R}^2$ , проходящей через две различные точки
90. Три способа задания плоскости в  $\mathbb{R}^3$
91. Уравнение плоскости в  $\mathbb{R}^3$ , проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой
92. Три способа задания прямой в  $\mathbb{R}^3$
93. Уравнения прямой в  $\mathbb{R}^3$ , проходящей через две различные точки
94. Случаи взаимного расположения двух прямых в  $\mathbb{R}^3$
95. Формула для расстояния от точки до прямой в  $\mathbb{R}^3$
96. Формула для расстояния от точки до плоскости в  $\mathbb{R}^3$
97. Формула для расстояния между двумя скрещивающимися прямыми в  $\mathbb{R}^3$
98. Линейный оператор
99. Матрица линейного оператора
100. Связь между координатами вектора и его образа при действии линейного оператора
101. Формула изменения матрицы линейного оператора при переходе к другому базису
102. Подобные матрицы
103. Подпространство, инвариантное относительно линейного оператора
104. Вид матрицы линейного оператора в базисе, дополняющем базис инвариантного подпространства

105. Вид матрицы линейного оператора в базисе, согласованном с разложением пространства в прямую сумму двух инвариантных подпространств
106. Собственный вектор линейного оператора
107. Собственное значение линейного оператора
108. Спектр линейного оператора
109. Диагонализуемый линейный оператор
110. Критерий диагонализуемости линейного оператора в терминах собственных векторов
111. Собственное подпространство линейного оператора
112. Характеристический многочлен линейного оператора
113. Связь спектра линейного оператора с его характеристическим многочленом
114. Алгебраическая кратность собственного значения линейного оператора
115. Геометрическая кратность собственного значения линейного оператора
116. Связь между алгебраической и геометрической кратностями собственного значения линейного оператора
117. Критерий диагонализуемости линейного оператора в терминах его характеристического многочлена и кратностей его собственных значений
118. Линейное отображение евклидовых пространств, сопряжённое к данному
119. Линейный оператор в евклидовом пространстве, сопряжённый к данному
120. Самосопряжённый линейный оператор в евклидовом пространстве
121. Теорема о каноническом виде самосопряжённого линейного оператора
122. Каким свойством обладают собственные подпространства самосопряжённого линейного оператора, отвечающие попарно различным собственным значениям
123. Приведение квадратичной формы к главным осям
124. Ортогональный линейный оператор
125. Теорема о пяти эквивалентных условиях, определяющих ортогональный линейный оператор
126. Теорема о каноническом виде ортогонального линейного оператора
127. Классификация ортогональных линейных операторов в трёхмерном евклидовом пространстве

## 2 Вопросы на доказательство

### 2.1 Подпространства

1. Теорема о связи размерности суммы двух подпространств с размерностью их пересечения
2. Теорема о пяти эквивалентных условиях, определяющих линейно независимый набор подпространств векторного пространства

### 2.2 Линейные отображения

1. Свойства отношения изоморфности на множестве всех векторных пространств
2. Критерий изоморфности двух конечномерных векторных пространств
3. Существование и единственность линейного отображения с заданными образами базисных векторов
4. Связь между координатами вектора и его образа при линейном отображении
5. Формула изменения матрицы линейного отображения при замене базисов
6. Изоморфизм  $\text{Hom}(V, W) \xrightarrow{\sim} \text{Mat}_{m \times n}(F)$  при фиксированных базисах  $V$  и  $W$
7. Матрица композиции двух линейных отображений
8. Утверждение о том, что ядро и образ — подпространства в соответствующих векторных пространствах
9. Связь между рангом матрицы линейного отображения и размерностью его образа
10. Лемма о дополнении базиса ядра линейного отображения до базиса всего пространства
11. Теорема о связи размерностей ядра и образа линейного отображения, приведение матрицы линейного отображения к диагональному виду с единицами и нулями на диагонали

### 2.3 Линейные, билинейные и квадратичные формы

1. Свойство базиса сопряжённого векторного пространства
2. Формула для вычисления значений билинейной формы в координатах
3. Существование и единственность билинейной формы с заданной матрицей
4. Формула изменения матрицы билинейной формы при переходе к другому базису
5. Критерий симметричности билинейной формы в терминах её матрицы в каком-либо базисе
6. Соответствие между симметричными билинейными формами и квадратичными формами
7. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду
8. Метод Якоби приведения квадратичной формы к каноническому виду
9. Существование нормального вида для квадратичной формы над  $\mathbb{R}$
10. Закон инерции
11. Следствие метода Якоби о нахождении индексов инерции квадратичной формы над  $\mathbb{R}$
12. Критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы, критерий отрицательной определённости квадратичной формы

## 2.4 Евклидовы пространства

1. Неравенство Коши–Буняковского
2. Свойства определителя матрицы Грама системы векторов евклидова пространства
3. Свойства ортогонального дополнения к подпространству в евклидовом пространстве: размерность, разложение в прямую сумму, ортогональное дополнение к ортогональному дополнению
4. Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в  $\mathbb{R}^n$  в терминах его произвольного базиса
5. Существование ортонормированного базиса в евклидовом пространстве, дополнение ортогональной (ортонормированной) системы векторов до ортогонального (ортонормированного) базиса
6. Описание всех ортонормированных базисов в терминах одного и матриц перехода
7. Формула для координат вектора в ортогональном (ортонормированном) базисе. Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в терминах его ортогонального (ортонормированного) базиса
8. Теорема Пифагора и неравенство треугольника в евклидовом пространстве
9. Теорема о расстоянии между вектором и подпространством в терминах ортогональной составляющей
10. Метод наименьших квадратов для несовместных систем линейных уравнений: постановка задачи и её решение. Единственность псевдорешения и явная формула для него в случае линейной независимости столбцов матрицы коэффициентов
11. Формула для расстояния между вектором и подпространством в терминах матриц Грама
12. Две формулы для объёма  $k$ -мерного параллелепипеда в евклидовом пространстве

## 2.5 Элементы аналитической геометрии и линейные многообразия

1. Теорема о векторном произведении и формуле для него в координатах в положительно ориентированном ортонормированном базисе
2. Критерий коллинеарности двух векторов трёхмерного евклидова пространства
3. Геометрические свойства векторного произведения
4. Антисимметричность и билинейность векторного произведения
5. Линейные многообразия как сдвиги подпространств
6. Критерий равенства двух линейных многообразий
7. Теорема о плоскости, проходящей через  $k + 1$  точку в  $\mathbb{R}^n$

## 2.6 Линейные операторы

1. Критерий обратимости линейного оператора в терминах его ядра, образа и определителя
2. Критерий диагонализуемости линейного оператора в терминах собственных векторов
3. Связь спектра линейного оператора с его характеристическим многочленом
4. Связь между алгебраической и геометрической кратностями собственного значения линейного оператора
5. Линейная независимость собственных подпространств линейного оператора, отвечающих попарно различным собственным значениям
6. Диагонализуемость линейного оператора, у которого число корней характеристического многочлена равно размерности пространства
7. Критерий диагонализуемости линейного оператора в терминах его характеристического многочлена и кратностей собственных значений
8. Существование собственного вектора у линейного оператора в векторном пространстве над  $\mathbb{C}$ . Существование одномерного или двумерного инвариантного подпространства для линейного оператора в векторном пространстве над  $\mathbb{R}$

## 2.7 Линейные отображения и операторы в евклидовых пространствах

1. Сопряжённое линейное отображение: определение, существование и единственность. Матрица сопряжённого отображения в паре произвольных и паре ортонормированных базисов
2. Инвариантность ортогонального дополнения к подпространству, инвариантному относительно самосопряжённого линейного оператора
3. Существование собственного вектора для самосопряжённого линейного оператора
4. Существование ортонормированного базиса из собственных векторов для самосопряжённого линейного оператора
5. Приведение квадратичной формы к главным осям
6. Теорема о пяти эквивалентных условиях, определяющих ортогональный линейный оператор
7. Инвариантность ортогонального дополнения к подпространству, инвариантному относительно ортогонального линейного оператора
8. Теорема о каноническом виде ортогонального линейного оператора