# Линейная алгебра, Коллоквиум II

Бобень Вячеслав
@darkkeks, GitHub

Благодарность выражается Левину Александру (@azerty1234567890)
и Милько Андрею (@andrew_milko) за видеозаписи лекций.

2019 — 2020

“К коллоку можете даже не готовиться”.

— Роман Сергеевич Авдеев

## Содержание

# 1 Определения и формулировки

1. **Сумма двух подпространств векторного пространства**

   Пусть $V$ – векторное пространство над $F$.

   $U, W \subseteq V$ – подпространства.

   **Определение.** *Суммой* подпространств $U$, $W$ называется множество

   $$U + W := \{u + w \mid v \in U, w \in W\}.$$

2. **Теорема о связи размерности суммы двух подпространств с размерностью их пересечения**

   **Теорема.** $\dim(U \cap W) + \dim(U + W) = \dim U + \dim W$.

   *Пример.* Всякие две плоскости в $\mathbb{R}^3$ (содержащие 0) имеют общую прямую.

   Здесь $V = \mathbb{R}^3$, $\dim U = 2$, $\dim W = 2$.

   При этом $\dim(U + W) \leqslant 3$.

   Тогда, $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) \geqslant 2 + 2 - 3 = 1$.

3. **Сумма нескольких подпространств векторного пространства**

   Пусть $U_1, \ldots U_k \subseteq V$ – подпространства.

   **Определение.** *Суммой* подпространств $U_1, \ldots U_k$ называется множество

   $$U_1 + \cdots + U_k = \{u_1 + \cdots + u_k \mid u_i \in U_i\}.$$

   **Замечание.** $\dim(U_1 + \cdots + U_k) \leqslant \dim U_1 + \cdots + \dim U_k$.

4. **Линейная независимость нескольких подпространств векторного пространства**

   **Определение.** Подпространства $U_1, \ldots, U_k$ называются *линейно независимыми*, если $\forall u_1 \in U_1, \ldots, u_k \in U_k$ из условия $u_1 + \cdots + u_k = 0$ следует $u_1 = \cdots = u_k = 0$.

   *Пример.* Если $\dim U_i = 1$ и $U_i = \langle u_i \rangle$ $\forall i$, то $U_1, \ldots, U_k$ линейно независимы $\iff$ $u_1, \ldots, u_k$ линейно независимы.

5. **Разложение векторного пространства в прямую сумму подпространств**

   **Определение.** Говорят, что векторное пространство $V$ разлагается в *прямую сумму* $U_1, \ldots, U_k$, если

   1. $V = U_1 + \cdots + U_k$,
   2. $U_1, \ldots, U_k$ линейно независимы.

   Обозначение: $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k$.

   *Пример.* Если $e_1, \ldots, e_n$ – базис $V$, то $V = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle e_n \rangle$

6. **При каких условиях на подпространства $U_1$, $U_2$ векторного пространства $V$ имеет место разложение $V = U_1 \oplus U_2$?**

7. **Матрица перехода от одного базиса векторного пространства к другому**

8. **Формула преобразования координат вектора при замене базиса**

9. **Линейное отображение векторных пространств, его простейшие свойства**

   Пусть $V$, $W$ — векторные пространства над $F$.

   **Определение.** Отображение $\varphi\colon V \to W$ называется *линейным*, если

   1. $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$,
   2. $\varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v)$.

   $\forall v_1, v_2, v \in V$, $\forall \lambda \in F$.

**Простейшие свойства**

1. $\varphi(\overrightarrow{0_V}) = \overrightarrow{0_W}$.
   Доказательство: $\varphi(\overrightarrow{0_V}) = \varphi(0 \cdot \overrightarrow{0_V}) = 0 \cdot \varphi(\overrightarrow{0_V}) = \overrightarrow{0_W}$.
2. $\varphi(-v) = -\varphi(v)$.
   Доказательство: $\varphi(-v) + \varphi(v) = \varphi(-v+v) = \varphi(0) = \varphi(\overrightarrow{0_V}) = \overrightarrow{0_W} \implies \varphi(-v) = -\varphi(v)$.

## 10. Изоморфизм векторных пространств, изоморфные векторные пространства

**Определение.** Отображение $\varphi\colon V \to W$ называется *изоморфизмом* если оно линейно и биективно.

Обозначение: $\varphi\colon V \xrightarrow{\sim} W$.

**Определение.** Два векторных пространства $V$, $W$ называются *изоморфными*, если существует изоморфизм $\varphi\colon V \xrightarrow{\sim} W$.

Обозначается: $V \simeq W$ (либо $V \cong W$).

## 11. Какими свойствами обладает отношение изоморфности на множестве всех векторных пространств?

**Теорема.** *Отношение изоморфности является отношением эквивалентности на множестве всех векторных пространств над фиксированным полем $F$.*

## 12. Критерий изоморфности двух конечномерных векторных пространств

**Теорема.** *Пусть $V$, $W$ — два конечномерных векторных пространства над $F$.*

*Тогда, $V \simeq W \iff \dim V = \dim W$.*

## 13. Матрица линейного отображения

Пусть $V, W$ — векторные пространства над $F$.

$\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис $V$,

$\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ — базис $W$.

Пусть $\varphi\colon V \to W$ — линейное отображение.

$\forall j = 1, \ldots, n$

$$\varphi(e_j) = a_{1j} f_1 + a_{2j} f_2 + \cdots + a_{mj} f_m = (f_1, \ldots, f_m) \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

Тогда, $(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) = (f_1, \ldots, f_m) \cdot A$, где $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(F)$.

**Определение.** $A$ называется матрицей линейного отображения $\varphi$ в базисах $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$.

Обозначение: $A = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$.

В $j$-м столбце матрицы $A$ стоят координаты вектора $\varphi(e_j)$ в базисе $\mathbb{f}$.

## 14. Связь между координатами вектора и его образа при линейном отображении

**Предложение.** Пусть $\varphi\colon V \to W$ — линейное отображение,

$\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис $V$,

$\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ — базис $W$,

$A = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$.

$v \in V \implies v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$,

$\qquad \varphi(v) = y_1 f_1 + \cdots + y_m f_m$.

Тогда,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

**15. Формула изменения матрицы линейного отображения при замене базисов**

Пусть теперь $\mathbb{e}'$ — другой базис в $V$, $\mathbb{f}'$ — другой базис в $W$.

$\mathbb{e}' = \mathbb{e} \cdot C_{\in M_n}$,

$\mathbb{f}' = \mathbb{f} \cdot D_{\in M_m}$.

$A = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$,

$A' = A(\varphi, \mathbb{e}', \mathbb{f}')$.

**Предложение.** $A' = D^{-1}AC$.

**16. Сумма двух линейных отображений и её матрица. Произведение линейного отображения на скаляр и его матрица**

Пусть $\varphi, \psi \in \operatorname{Hom}(V, W)$, $\lambda \in F$.

**Определение.**

1. *Суммой* линейных отображений $\varphi$ и $\psi$ называется линейное отображение $\varphi + \psi \in \operatorname{Hom}(V, W)$, такое что $(\varphi + \psi)(v) := \varphi(v) + \psi(v)$.
2. Произведение $\varphi$ на $\lambda$ — это линейное отображение $\lambda\varphi \in \operatorname{Hom}(V, W)$, такое что $(\lambda\varphi)(v) := \lambda\varphi(v)$.

Зафиксируем базисы $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ в $V$ и $\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ в $W$.

**Предложение.**

1. $\varphi, \psi \in \operatorname{Hom}(V, W),\ A_\varphi = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$
   $A_\psi = A(\psi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$
   $A_{\varphi+\psi} = A(\varphi + \varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) \implies A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$
2. $\lambda \in F, \varphi \in \operatorname{Hom}(V, W),\ A_\varphi = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$
   $A_{\lambda\varphi} = A(\lambda\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) \implies A_{\lambda\varphi} = \lambda A_\varphi$

**17. Композиция двух линейных отображений и её матрица**

Пусть $U \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{\varphi} W$ — цепочка линейных отображений, а $\varphi \circ \psi : U \to W$ — их композиция,

$\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис $V$,

$\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ — базис $W$,

$\mathbb{g} = (g_1, \ldots, g_k)$ — базис $U$.

$A_\varphi = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$,

$A_\psi = A(\psi, \mathbb{g}, \mathbb{e})$,

$A_{\varphi\circ\psi} = A(\varphi \circ \psi, \mathbb{g}, \mathbb{f})$.

Тогда, $A_{\varphi\circ\psi} = A_\varphi \cdot A_\psi$.

**18. Ядро и образ линейного отображения. Являются ли они подпространствами в соответствующих векторных пространствах?**

Пусть $\varphi\colon V \to W$.

**Определение.** *Ядро* линейной оболочки $\varphi$ — это $\ker\varphi := \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\} \subseteq V$.

*Образ* линейного отображения $\varphi$ — это $\operatorname{Im}\varphi := \varphi(V) \subseteq W$.

*Пример.* $\Delta\colon \mathbb{R}[x]_{\leqslant n} \to \mathbb{R}[x]_{\leqslant n},\ f \mapsto f'$,

$\ker\Delta = \{f \mid f = \text{const}\}$,

$\operatorname{Im}\Delta = \mathbb{R}[x]_{\leqslant n-1}$.

**Предложение.**

1. Ядро — подпространство в $V$.
2. Образ — подпространство в $W$.

**19. Критерий инъективности линейного отображения в терминах его ядра**

Пусть $V, W$ — векторные пространства над $F$,

$\varphi\colon V \to W$ — линейное отображение.

Ядро: $\ker\varphi := \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\} \subseteq V$.

Образ: $\operatorname{Im}\varphi := \varphi(V) \subseteq W$.

**Предложение.**

(a) $\varphi$ инъективно $\iff \ker\varphi = \{0\}$,

(b) $\varphi$ сюръективно $\iff \operatorname{Im}\varphi = W$.

**20. Связь между рангом матрицы линейного отображения и размерностью его образа**

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис $V$,

$\mathbb{f} = (f_1, \dots, f_m)$ — базис $W$,

$A = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$.

**Теорема.** $\operatorname{rk} A = \dim \operatorname{Im}\varphi$.

**Замечание.** Число $\dim\operatorname{Im}\varphi$ называется *рангом* линейного отображения $\varphi$, обозначается $\operatorname{rk}\varphi$.

**Следствие.** $\operatorname{rk} A$ не зависит от выбора пары базисов $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$.

**21. Каким свойством обладает набор векторов, дополняющих базис ядра линейного отображения до базиса всего пространства?**

**Предложение.** Пусть $e_1, \dots, e_k$ — базис $\ker\varphi$ и векторы $e_{k+1}, \dots, e_n$ дополняют его до базиса всего $V$. Тогда, $\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)$ образуют базис в $\operatorname{Im}\varphi$.

**22. Теорема о связи размерностей ядра и образа линейного отображения**

**Теорема.** $\dim\operatorname{Im}\varphi + \dim\ker\varphi = \dim V$.

**23. К какому простейшему виду можно привести матрицу линейного отображения путём замены базисов?**

**Предложение.** Пусть $\operatorname{rk}\varphi = r$. Тогда существует базис $\mathbb{e}$ в $V$ и базис $\mathbb{f}$ в $W$, такие что

$$A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) = \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \begin{array}{c} \\ \\ r \\ \\ \\ \\ m-r \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & r & & & & n-r & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

**24. Линейная функция на векторном пространстве**

**Определение.** *Линейной функцией* (или *линейной формой*, или *линейным функционалом*) на $V$ называется всякое линейное отображение $\alpha\colon V \to F$.

**Обозначение.** $V^* := \operatorname{Hom}(V, F)$ — множество всех линейных функций на $V$.

**25. Сопряжённое (двойственное) векторное пространство и его размерность**

Из общей теории линейных отображений:

1. $V^*$ — векторное пространство (оно называется *сопряженным* или *двойственным*).
2. Если $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — фиксированный базис в $V$, то есть изоморфизм $V^* \simeq \operatorname{Mat}_{1\times n}(F)$ (а это ни что иное, как строки длины $n$).
   $\alpha \to (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$
   $v = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$
   $\alpha(v) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \alpha_1x_1 + \dots + \alpha_nx_n.$
   $\alpha_i = \alpha(e_i)$ — коэффициенты линейной функции $\alpha$ в базисе $\mathbb{e}$.

**Следствие.** $\dim V^* = \dim V$ ($\implies V^* \simeq V$).

**26. Базис сопряжённого пространства, двойственный к данному базису исходного векторного пространства**

При $i = 1, \dots, n$ рассмотрим линейную функцию $\varepsilon_i \in V^*$, соответствующую строке $(0 \dots 1 \dots 0)$. Тогда $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ — базис $V^*$, он однозначно определяется условием $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$. ($\delta_{ij}$ — символ Кронекера)

**Определение.** Базис $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ пространства $V^*$, определенный условием выше, называется базисом, *двойственным* (сопряженным) к базису $\mathbb{e}$.

Удобная запись условия:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} (e_1, \dots, e_n) = E.$$

**27. Билинейная форма на векторном пространстве**

Пусть $V$ — векторное пространство над $F$.

**Определение.** *Билинейная форма* на $V$ — это отображение $\beta\colon V \times V \to F$, линейное по каждому аргументу.

**Линейность по 1-му аргументу**

- $\beta(x_1 + x_2, y) = \beta(x_1, y) + \beta(x_2, y) \quad \forall x_1, x_2, y \in V,$
- $\beta(\lambda x, y) = \lambda\beta(x, y) \quad \forall x, y \in V,\ \lambda \in F.$

**Линейность по 2-му аргументу**

- $\beta(x, y_1 + y_2) = \beta(x, y_1) + \beta(x, y_2) \quad \forall x, y_1, y_2 \in V,$
- $\beta(x, \lambda y) = \lambda\beta(x, y) \quad \forall x, y \in V,\ \lambda \in F.$

**28. Матрица билинейной формы**

Считаем, что $\dim V = n < \infty$.

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис $V$.

**Определение.** Матрицей билинейной формы $\beta$ в базисе $\mathbb{e}$ называется такая матрица $B \in M_n$, что $b_{ij} = \beta(e_i, e_j)$.

Обозначение: $B(\beta, \mathbb{e})$.

**29. Формула для вычисления значений билинейной формы в координатах**

Пусть $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$,

$y = y_1e_1 + \dots + y_ne_n$.

Тогда,

$$\begin{aligned} \beta(x, y) &= \beta\left(\sum_{i=1}^{n} x_ie_i,\ \sum_{j=1}^{n} y_je_j\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \beta\left(e_i,\ \sum_{j=1}^{n} y_je_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_iy_j\,\underbrace{\beta(e_i, e_j)}_{\beta_{ij}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i\beta_{ij}y_j \\ &= (x_1, \dots, x_n)B\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**30. Формула изменения матрицы билинейной формы при переходе к другому базису**

$B = B(\beta, \mathbb{e})$.

Пусть $\mathbb{e}' = (e'_1, \dots e'_n)$ — другой базис $V$.

$\mathbb{e}' = \mathbb{e} \cdot C$.

$B' := B(\beta, \mathbb{e}')$.

**Предложение.** $B' = C^TBC$.

**31. Симметричная билинейная форма. Критерий симметричности билинейной формы в терминах её матрицы**

**Определение.** Билинейная форма $\beta$ называется *симметричной*, если $\beta(x,y)=\beta(y,x)\ \forall x,y\in V$.

Пусть $\mathbb{e}$ — произвольный базис $V$.

**Предложение.** $\beta$ симметрична $\iff B=B^T$.

## 32. Квадратичная форма

Пусть $\beta\colon V\times V\to F$ — билинейная форма на $V$.

**Определение.** Отображение $Q_\beta\colon V\to F$, $Q_\beta(x)=\beta(x,x)$, называется *квадратичной формой*, ассоциированной с билинейной формой $\beta$.

Пусть $\mathbb{e}$ — базис $V$, $x=x_1e_1+\dots x_ne_n$, $B=B(\beta,\mathbb{e})$.

Тогда,

$$Q_\beta(x)=(x_1\dots x_n)B\begin{pmatrix}x_1\\ \dots\\ x_n\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n b_{ij}x_ix_j=\sum_{i=1}^n b_{ii}x_i^2+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(b_{ij}+b_{ji})x_ix_j.$$

## 33. Соответствие между симметричными билинейными формами и квадратичными формами

**Предложение.** Пусть в поле $F$ выполнено условие $1+1\neq 0$ (то есть $2\neq 0$). Тогда отображение $\beta\mapsto Q_\beta$ является биекцией между симметричными билинейными формами на $V$ и квадратичным формами на $V$.

## 34. Симметризация билинейной формы

Билинейная форма $\sigma(x,y)=\frac{1}{2}\left(\beta(x,y)+\beta(y,x)\right)$ называется *симметризацией* билинейной формы $\beta$.

Если $B$ и $S$ — матрицы билинейных форм $\beta$ и $\sigma$ в некотором базисе, то $S=\frac{1}{2}(B+B^T)$.

## 35. Поляризация квадратичной формы

Симметричная билинейная форма $\beta(x,y)=\frac{1}{2}\left[Q(x+y)-Q(x)-Q(y)\right]$ называется *поляризацией* квадратичной формы $Q$.

## 36. Матрица квадратичной формы

**Определение.** Матрицей квадратной формы $Q$ в базисе $\mathbb{e}$ называется матрица соответствующей симметричной билинейной формы (поляризации) в базисе $\mathbb{e}$.

Обозначение: $B(Q,\mathbb{e})$.

*Пример.* Пусть $Q(x_1,x_2)=x_1^2+x_1x_2+x_2^2$.

Если $\mathbb{e}$ — стандартный базис, то $B(Q,\mathbb{e})=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$.

## 37. Канонический вид квадратичной формы

**Определение.** Квадратичная форма $Q$ имеет в базисе $\mathbb{e}$ *канонический вид*, если $B(Q,\mathbb{e})$ диагональна.

Если $B(Q,\mathbb{e})=\operatorname{diag}(b_1,b_2,\dots,b_n)$, то $Q(x_1,\dots,x_n)=b_1x_1^2+b_2x_2^2+\dots+b_nx_n^2$.

## 38. Нормальный вид квадратичной формы над $\mathbb{R}$

**Определение.** Квадратичная форма над $\mathbb{R}$ имеет *нормальный вид* в базисе $\mathbb{e}$, если в этом базисе

$$Q(x_1,\dots,x_n)=\varepsilon_1x_1^2+\dots+\varepsilon_nx_n^2,$$

где $\varepsilon_i\in\{-1,0,1\}$.

## 39. Индексы инерции квадратичной формы над $\mathbb{R}$

Пусть $F=\mathbb{R}$.

Пусть $Q\colon V\to\mathbb{R}$ — квадратичная форма.

Можно привести к нормальному виду

$$Q(x_1,\dots,x_n)=x_1^2+\dots+x_s^2-x_{s+1}^2-\dots-x_{s+t}^2.$$

Здесь $i_+:=s$ — положительный индекс инерции квадратичной формы $Q$,

$i_-:=t$ — отрицательный индекс инерции квадратичной формы $Q$.

## 40. Закон инерции для квадратичной формы над $\mathbb{R}$

**Теорема.** *Числа $i_+$ и $i_-$ не зависят от базиса в котором $Q$ принимает нормальный вид.*

**41. Положительно/неотрицательно определённая квадратичная форма над $\mathbb{R}$**

**42. Отрицательно/неположительно определённая квадратичная форма над $\mathbb{R}$**

**43. Неопределённая квадратичная форма над $\mathbb{R}$**

**Определение.** Квадратичная форма $Q$ над $\mathbb{R}$ называется

| Термин | Обозначение | Условие | Нормальный вид | Индексы инерции |
|---|---|---|---|---|
| Положительно определённой | $Q > 0$ | $Q(x) > 0\ \forall x \neq 0$ | $x_1^2 + \dots + x_n^2$ | $i_+ = n, i_- = 0$ |
| Отрицательно определённой | $Q < 0$ | $Q(x) < 0\ \forall x \neq 0$ | $-x_1^2 - \dots - x_n^2$ | $i_+ = 0, i_- = n$ |
| Неотрицательно определённой | $Q \geqslant 0$ | $Q(x) \geqslant 0\ \forall x$ | $x_1^2 + \dots + x_k^2,\ k \leqslant n$ | $i_+ = k, i_- = 0$ |
| Неположительно определённой | $Q \leqslant 0$ | $Q(x) \leqslant 0\ \forall x$ | $-x_1^2 - \dots - x_k^2,\ k \leqslant n$ | $i_+ = 0, i_- = k$ |
| Неопределённой | — | $\exists x : Q(x) > 0$<br>$\exists y : Q(y) < 0$ | $x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - x_{s+t}^2$<br>$s, t \geqslant 1$ | $i_+ = s, i_- = t$ |

**44. Способ нахождения индексов инерции квадратичной формы над $\mathbb{R}$, вытекающий из метода Якоби**

Пусть $Q\colon V \to \mathbb{R}$ — квадратичная форма,

$\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис,

$B = B(Q, \mathbb{e})$,

$\delta_k$ — $k$-й угловой минор матрицы $B$.

**Следствие** (из метода Якоби)**.** Пусть $\delta_k \neq 0\ \forall k$. Тогда:

Число $i_+$ равно количеству сохранений знака в последовательности $1, \delta_1, \dots, \delta_n$.

Число $i_-$ равно количеству перемен знака в последовательности $1, \delta_1, \dots, \delta_n$.

**45. Критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы над $\mathbb{R}$**

Пусть $V$ — векторное пространство над $\mathbb{R}$, $\dim V = n$,

$\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис $V$,

$B = B(Q, \mathbb{e})$,

$B_k$ — левый верхний $k \times k$ блок,

$\delta_k = \det B_k$.

**Теорема** (Критерий Сильвестра положительной определенности)**.**

$$Q > 0 \iff \delta_k > 0\ \forall k = 1 \dots n.$$

**46. Критерий отрицательной определённости квадратичной формы над $\mathbb{R}$**

**Следствие.**

$$Q < 0 \iff \delta_k \begin{cases} > 0 & \text{при } k \,\vdots\, 2, \\ < 0 & \text{при } k \not\vdots\, 2. \end{cases}$$

**47. Евклидово пространство**

**Определение.** *Евклидово пространство* — это векторное пространство $\mathbb{E}$ над $\mathbb{R}$, на котором задано *скалярное произведение*, то есть такое отображение $(\bullet, \bullet)\colon \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R}$, что

1. $(\bullet, \bullet)$ — симметричная билинейная форма,
2. Квадратичная форма $(x, x)$ положительно определённая.

**48. Длина вектора в евклидовом пространстве**

**Определение.** *Длина* вектора $x \in \mathbb{E}$ — это $|x| := \sqrt{(x, x)}$.

Свойство: $|x| \geqslant 0$, причем $|x| = 0 \iff x = 0$.

*Пример.* Если $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением, то $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.

**49. Неравенство Коши–Буняковского**

**Предложение** (неравенство Коши-Буняковского)**.** $\forall x, y \in \mathbb{E}$ верно $|(x,y)| \leqslant |x| \cdot |y|$, причём равенство $\iff$ $x$, $y$ пропорциональны.

*Пример.* Пусть $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением, тогда

$$|x_1y_1 + \dots + x_ny_n| \leqslant \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}.$$

**50. Угол между ненулевыми векторами евклидова пространства**

Пусть $x, y \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$, тогда $-1 \leqslant \frac{(x,y)}{|x| \cdot |y|} \leqslant 1$.

**Определение.** Угол между ненулевыми векторами $x, y \in \mathbb{E}$, это такой $\alpha \in [0, \pi]$, что $\cos\alpha = \frac{(x,y)}{|x| \cdot |y|}$.

Тогда $(x,y) = |x||y|\cos\alpha$.

**51. Матрица Грама системы векторов евклидова пространства**

Пусть $v_1, \dots, v_k$ — произвольная система векторов.

**Определение.** *Матрица Грама* этой системы — это

$$G(v_1, \dots, v_k) = \begin{pmatrix} (v_1,v_1) & (v_1,v_2) & \dots & (v_1,v_k) \\ (v_2,v_1) & (v_2,v_2) & \dots & (v_2,v_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (v_k,v_1) & (v_k,v_2) & \dots & (v_k,v_k) \end{pmatrix}.$$

*Пример.* $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением.

$a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n \rightsquigarrow A := (a_1, \dots, a_k) \in \mathrm{Mat}_{n \times k}(\mathbb{R})$.

Тогда, $G(a_1, \dots, a_k) = A^T \cdot A$.

**52. Свойства определителя матрицы Грама**

**Предложение.** $\forall v_1, \dots, v_k \in \mathbb{E} \implies \det G(v_1, \dots, v_k) \geqslant 0$.

Более того, $\det G(v_1, \dots, v_k) > 0 \iff v_1, \dots, v_k$ линейно независимы.

**53. Ортогональная система векторов евклидова пространства. Ортогональный базис**

**54. Ортонормированная система векторов евклидова пространства. Ортонормированный базис**

**Определение.** Система ненулевых векторов $v_1, \dots, v_k$ называется

1. *ортогональной*, если $(v_i, v_j) = 0\ \forall i \neq j$ (то есть $G(v_1, \dots, v_k)$ диагональна),
2. *ортонормированной*, если $(v_i, v_j) = 0\ \forall i \neq j$ и $(v_i, v_i) = 1$ ( $\iff$ $|v_i| = 1$). То есть $G(v_1, \dots, v_k) = E$.

**Замечание.** Всякая ортогональная (и в частности ортонормированная) система векторов автоматически линейно независима.

$$\det G(v_1, \dots, v_k) = |v_1|^2 \dots |v_k|^2 \neq 0.$$

**Определение.** Базис пространства называется *ортогональным* (соответственно *ортонормированным*), если он является ортогональной (ортонормированной) системой векторов.

**55. Описание всех ортонормированных базисов евклидова пространства в терминах одного такого базиса и матриц перехода**

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — ортонормированный базис в $E$.

Пусть $\mathbb{e}' = (e_1', \dots, e_n')$ — какой-то другой базис.

$(e_1', \dots, e_n') = (e_1, \dots, e_n) \cdot C$, $C \in M_n^0(\mathbb{R})$.

**Предложение.** $\mathbb{e}'$ — ортонормированный базис $\iff$ $C^T \cdot C = E$.

*Доказательство.* $G(e_1', \dots, e_n') = C^T \underbrace{G(e_1, \dots, e_n)}_{E} C = C^T C$.

$\mathbb{e}'$ ортонормированный $\iff$ $G(e_1', \dots, e_n') = E \iff C^T C = E$. ∎

**56. Ортогональная матрица**

**Определение.** Матрица $C \in M_n(\mathbb{R})$ называется *ортогональной* если $C^T C = E$.

**Замечание.** $C^T C = E \iff CC^T = E \iff C^{-1} = C^T$.

**Свойства.**

1. $C^T C = E \implies$ система столбцов $C^{(1)}, \dots, C^{(n)}$ — это ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$,
2. $CC^T = E \implies$ система строк $C_{(1)}, \dots, C_{(n)}$ — это тоже ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$,

В частности, $|c_{ij}| \leqslant 1$.

3. $\det C = \pm 1$.

*Пример.* $n = 2$. Ортогональный матрицы:

$$\underset{\det = 1}{\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}} \qquad \underset{\det = -1}{\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}}.$$

**57. Формула для координат вектора в ортогональном и ортонормированном базисах евклидова пространства**

Пусть $\mathbb{E}$ — евклидово пространство, $(e_1, \dots, e_n)$ — ортогональный базис.

$v \in \mathbb{E}$.

**Предложение.** $v = \dfrac{(v, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 + \dfrac{(v, e_2)}{(e_2, e_2)} e_2 + \dots + \dfrac{(v, e_n)}{(e_n, e_n)} e_n$.

В частности, если $e_1, \dots, e_n$ ортонормирован, то $v = (v, e_1)e_1 + \dots + (v, e_n)e_n$.

**58. Ортогональное дополнение подмножества евклидова пространства**

**Определение.** *Ортогональное дополнение* множества $S \subseteq \mathbb{E}$ — это множество $S^\perp := \{x \in \mathbb{E} \mid (x, y) = 0 \ \forall y \in S\}$.

**59. Чему равна размерность ортогонального дополнения к подпространству евклидова пространства?**

**60. Каким свойством обладают подпространство евклидова пространства и его ортогональное дополнение?**

Считаем, что $\dim \mathbb{E} = n < \infty$.

**Предложение.** Пусть $S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство. Тогда:

1. $\dim S^\perp = n - \dim S$.
2. $\mathbb{E} = S \oplus S^\perp$.
3. $(S^\perp)^\perp = S$.

**61. Ортогональная проекция вектора на подпространство**

**62. Ортогональная составляющая вектора относительно подпространства**

$S$ — подпространство $\implies \mathbb{E} = S \oplus S^\perp$

$\forall v \in \mathbb{E} \exists! x \in S, y \in S^\perp$, такие что $x + y = v$.

**Определение.**

1. $x$ называется *ортогональной проекцией* вектора $v$ на подпространство $S$.
   Обозначение: $x = \operatorname{pr}_S v$.
2. $y$ называется *ортогональной составляющей* вектора $v$ относительно подпространства $S$.
   Обозначение: $y = \operatorname{ort}_S v$.

**63. Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в $\mathbb{R}^n$, заданное своим базисом**

Пусть $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением.

$S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство, $a_1, \dots, a_k$ — базис $S$.

Пусть $A := (a_1, \dots, a_k) \in \operatorname{Mat}_{n \times k}(\mathbb{R})$, $A^{(i)} = a_i$.

**Предложение.** $\forall v \in \mathbb{R}^n \quad \operatorname{pr}_S v = A(A^T A)^{-1} A^T v$.

**64. Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в терминах его ортогонального базиса**

Пусть $S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство.

$e_1, \dots, e_k$ — ортогональный базис в $S$.

**Предложение.** $\forall v \in \mathbb{E} \quad \operatorname{pr}_S v = \sum_{i=1}^k \dfrac{(v, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i.$

В частности, если $e_1, \dots, e_k$ ортонормирован, то $\operatorname{pr}_S v = \sum_{i=1}^k (v, e_i) e_i$.

**65. Теорема Пифагора в евклидовом пространстве**

**Теорема.** *Пусть* $x, y \in \mathbb{E}$, $(x, y) = 0$. *Тогда* $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$.

**66. Расстояние между векторами евклидова пространства**

**Определение.** *Расстояние* между векторами $x, y \in \mathbb{E}$ — это $\rho(x, y) = |x - y|$.

**67. Неравенство треугольника в евклидовом пространстве**

**Предложение.** $\forall a, b, c \in \mathbb{E} \implies \rho(a, b) + \rho(b, c) \geqslant \rho(a, c)$.

**68. Теорема о расстоянии между вектором и подпространством в терминах ортогональной составляющей**

**Теорема.** *Пусть* $x \in \mathbb{E}$, $S \subseteq \mathbb{E}$ — *подпространство. Тогда,* $\rho(x, S) = |\operatorname{ort}_S x|$, *причем* $\operatorname{pr}_S x$ — *это ближайший к* $x$ *вектор из* $S$.

**69. Псевдорешение несовместной системы линейных уравнений**

СЛУ $Ax = b$, $A \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$.

$$x_0 \text{ — решение системы} \iff Ax_0 = b \iff Ax_0 - b = 0 \iff |Ax_0 - b| = 0 \iff \rho(Ax_0, b) = 0.$$

Если СЛУ несовместна, то $x_0$ называется *псевдорешением*, если $\rho(Ax_0, b)$ минимально.

$$\rho(Ax_0, b) = \min_{x \in R^n} \rho(Ax, b).$$

$x_0$ — решение задачи оптимизации $\rho(Ax, b) \xrightarrow[x \in \mathbb{R}^n]{} \min$.

**70. Формула для расстояния от вектора до подпространства в терминах матриц Грама**

Пусть $\mathbb{E}$ — евклидово пространство, $\dim \mathbb{E} = n < \infty$.

$S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство, $e_1, \dots, e_k$ — базис в $S$.

**Теорема.** $\forall x \in \mathbb{E} \quad \rho(x, S)^2 = \dfrac{\det G(e_1, \dots, e_k, x)}{\det G(e_1, \dots, e_k)}.$

**71. $k$-мерный параллелепипед и его объём**

**Определение.** *$k$-мерный параллелепипед*, натянутый на векторы $a_1, \dots, a_k$, это множество

$$P(a_1, \dots, a_k) := \left\{ \sum_{i=1}^k x_i a_i \mid 0 \leqslant x_1 < 1 \right\}.$$

Основание: $P(a_1, \dots, a_{k-1})$.

Высота: $h := |\operatorname{ort}_{\langle a_1, \dots, a_{k-1} \rangle} a_k|$.

*Пример.*

$k = 1$ $h = |a_1|$ здесь картинка, тоже лень :(

$k = 2$ основание — $P(a_1)$, высота — $h$ дада, люблю картинки делать

*Пример. $k$-мерный объем* $k$-мерного параллелепипеда $P(a_1, \dots, a_k)$ — это величина $\operatorname{vol} P(a_1, \dots, a_k)$, определяемая индуктивно:

$k = 1 \implies \operatorname{vol} P(a_1) := |a_1|$.

$k > 1 \implies \operatorname{vol} P(a_1, \ldots, a_k) := \operatorname{vol} P(a_1, \ldots, a_{k-1}) \cdot h.$

**72. Формула для объёма $k$-мерного параллелепипеда в $n$-мерном евклидовом пространстве**

**Теорема.** $\operatorname{vol} P(a_1, \ldots, a_k)^2 = \det G(a_1, \ldots, a_k)$.

**73. Формула для объёма $n$-мерного параллелепипеда в $n$-мерном евклидовом пространстве в терминах координат в ортонормированном базисе**

Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ — ортонормированный базис в $\mathbb{E}$,

$(a_1, \ldots, a_n) = (e_1, \ldots, e_n) \cdot A$, $A \in M_n(\mathbb{R})$.

**Предложение.** $\operatorname{vol} P(a_1, \ldots, a_n) = |\det A|$.

**74. В каком случае два базиса евклидова пространства называются одинаково ориентированными?**

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ и $\mathbb{e}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ — два базиса в $\mathbb{E}$.

$(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n) \cdot C$, $C \in M_n^0(\mathbb{R})$.

**Определение.** Говорят, что $\mathbb{e}$ и $\mathbb{e}'$ одинаково ориентированы, если $\det C > 0$.

**75. Векторное произведение в трёхмерном евклидовом пространстве**

**Теорема.** *Пусть* $a, b \in \mathbb{R}^3$. *Тогда* $\exists! v \in \mathbb{E}$, *такой что* $(v, x) = \operatorname{Vol}(a, b, x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$.

**Определение.** Вектор $v$ из теоремы выше называется *векторным произведением* векторов $a$ и $b$.

Обозначение: $[a, b]$ или $a \times b$.

**76. Критерий коллинеарности двух векторов трёхмерного евклидова пространства**

**Предложение.** $a, b \in \mathbb{E}$ коллинеарны $\iff$ $[a, b] = 0$.

**77. Формула для вычисления векторного произведения в терминах координат в положительно ориентированном ортонормированном базисе**

Если $\mathbb{e} = (e_1, e_2, e_3)$ — положительно ориентированный базис и $a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$, то
$b = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$

$$[a, b] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} := \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} e_3.$$

**78. Смешанное произведение векторов трёхмерного евклидова пространства**

**Определение.** $\forall a, b, c \in \mathbb{E}$ число $(a, b, c) := ([a, b], c)$ называется *смешанным произведением* векторов $a, b, c$.

**Замечание.** $(a, b, c) = \operatorname{Vol}(a, b, c)$.

**79. Формула для вычисления смешанного произведения в терминах координат в положительно ориентированном ортонормированном базисе**

Если $e_1, e_2, e_3$ — положительно ориентированный ортонормированный базис, то

$$\left.\begin{aligned} a &= a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 \\ b &= b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 \\ c &= c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3 \end{aligned}\right| \implies (a, b, c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

**80. Критерий компланарности трёх векторов трёхмерного евклидова пространства**

$a, b, c$ компланарны $\iff$ $(a, b, c) = 0$.

**81. Линейное многообразие. Характеризация линейных многообразий как сдвигов подпространств**

**Определение.** *Линейное многообразие* в $\mathbb{R}^n$ — это множество решений некоторой совместной СЛУ.

Пусть $Ax = b$ — СЛУ, $\varnothing \neq L \subseteq \mathbb{R}^n$ — множество решений, $x_z \in L$ — частное решение.

Было: Лемма: $L = x_z + S$, где $S$ — множество решений ОСЛУ $Ax = 0$.

**Предложение.** Множество $L \subseteq \mathbb{R}^n$ является линейны многообразием $\iff$ $L = v_0 + S$ для некоторых $v_0 \in \mathbb{R}^n$ и подпространства $S \subseteq \mathbb{R}^n$.

**82. Критерий равенства двух линейных многообразий. Направляющее подпространство и размерность линейного многообразия**

**Предложение.** Пусть $L_1 = v_1 + S_1$ и $L_2 = v_2 + S_2$ — два линейных многообразия в $\mathbb{R}^n$. Тогда,

$$L_1 = L_2 \iff \begin{cases} S_1 = S_2 \ (= S) \\ v_1 - v_2 \in S \end{cases} .$$

Если $L$ — линейное многообразие, то $L = v_0 + S$, где $S$ определено однозначно.

**Определение.** $S$ называется *направляющим подпространством* линейного многообразия $L$.

**Определение.** *Размерностью* линейного многообразия называется размерность его направляющего подпространства.

**83. Теорема о плоскости, проходящей через $k+1$ точку в $\mathbb{R}^n$**

**84. Три способа задания прямой в $\mathbb{R}^2$. Уравнение прямой в $\mathbb{R}^2$, проходящей через две различные точки**

**85. Три способа задания плоскости в $\mathbb{R}^3$. Уравнение плоскости в $\mathbb{R}^3$, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой**

**86. Три способа задания прямой в $\mathbb{R}^3$. Уравнения прямой в $\mathbb{R}^3$, проходящей через две различные точки**

**87. Случаи взаимного расположения двух прямых в $\mathbb{R}^3$**

**88. Формула для расстояния от точки до прямой в $\mathbb{R}^3$**

**89. Формула для расстояния от точки до плоскости в $\mathbb{R}^3$**

**90. Формула для расстояния между двумя скрещивающимися прямыми в $\mathbb{R}^3$**

**91. Линейный оператор**

**92. Матрица линейного оператора**

**93. Связь между координатами вектора и его образа при действии линейного оператора**

**94. Формула изменения матрицы линейного оператора при переходе к другому базису**

**95. Подобные матрицы**

**96. Подпространство, инвариантное относительно линейного оператора**

**97. Вид матрицы линейного оператора в базисе, дополняющем базис инвариантного подпространства**

**98. Вид матрицы линейного оператора в базисе, согласованном с разложением пространства в прямую сумму двух инвариантных подпространств**

**99. Собственный вектор линейного оператора**

**100. Собственное значение линейного оператора**

**101. Спектр линейного оператора**

**102. Диагонализуемый линейный оператор**

**103. Критерий диагонализуемости линейного оператора в терминах собственных векторов**

**104. Собственное подпространство линейного оператора**

**105. Характеристический многочлен линейного оператора**

**106. Связь спектра линейного оператора с его характеристическим многочленом**

**107. Алгебраическая кратность собственного значения линейного оператора**

**108. Геометрическая кратность собственного значения линейного оператора**

**109. Связь между алгебраической и геометрической кратностями собственного значения линейного оператора**

**110. Критерий диагонализуемости линейного оператора в терминах его характеристического многочлена и кратностей его собственных значений**

**111. Линейное отображение евклидовых пространств, сопряжённое к данному**

**112. Линейный оператор в евклидовом пространстве, сопряжённый к данному**

**113. Самосопряжjнный линейный оператор в евклидовом пространстве**

**114. Теорема о каноническом виде самосопряжjнного линейного оператора**

**115. Каким свойством обладают собственные подпространства самосопряжённого линейного оператора, отвечающие попарно различным собственным значениям?**

**116. Приведение квадратичной формы к главным осям**

# 2 Вопросы на доказательство