

**Зимний коллоквиум курса «Теория вероятностей»**  
ФКН НИУ ВШЭ, 2-й курс ОП ПМИ, 2-й модуль, 2020 учебный год

Сергей Пилипенко

Атаев Азнаур

Аня «10 за коллок» Смирнова

Дата последнего обновления: 14/12/2020 14:38.

*Спасибо Васильеву Демиду за исходники своих ответов на вопросы и Косову Е. Д. за исходники лекций.*

## Содержание

<b>Билет 1</b>	<b>3</b>
Теорема Пуассона . . . . .	3
Задача про булочки с изюмом . . . . .	3
<b>Билет 2</b>	<b>4</b>
Модель Эрдеша-Реньи случайного графа . . . . .	4
Теорема о надежности сети . . . . .	4
<b>Билет 3</b>	<b>5</b>
Вероятностное пространство в общем случае: алгебра и $\sigma$ -алгебра подмножеств . . . . .	5
Примеры $\sigma$ -алгебр, $\sigma$ -алгебра, порожденная системой подмножеств, борелевская $\sigma$ -алгебра . . . . .	5
<b>Билет 4</b>	<b>6</b>
Аддитивные и счетно аддитивные функции множества на алгебрах и $\sigma$ -алгебрах . . . . .	6
Вероятностная мера и определение вероятностного пространства . . . . .	6
Эквивалентность счетной аддитивности и непрерывности в нуле для неотрицательной аддитивной функции множества на алгебре . . . . .	6
Свойства непрерывности вероятностной меры . . . . .	7
<b>Билет 5</b>	<b>8</b>
Случайные величины на общих вероятностных пространствах . . . . .	8
<b>Билет 6</b>	<b>9</b>
Распределение случайной величины и функция распределения . . . . .	9
Три основных свойства функции распределения . . . . .	9
Формулировка теоремы о продолжении счетно аддитивной функции множества с алгебры на $\sigma$ -алгебру, порожденную исходной алгеброй . . . . .	9
Идея построения меры Лебега равномерного распределения на отрезке с борелевской $\sigma$ -алгеброй . . . . .	9
Формулировка теоремы об однозначности задания распределения функцией распределения и о существовании распределения с заданной функцией распределения . . . . .	10
<b>Билет 7</b>	<b>11</b>
Функция распределения дискретной случайной величины. . . . .	11
Определение абсолютно непрерывного распределения случайной величины и определение плотности распределения . . . . .	11
Основные свойства плотности и связь с функцией распределения. . . . .	11
Примеры абсолютно непрерывных случайных величин. . . . .	12
Равномерное распределение . . . . .	12
Нормальное распределение . . . . .	12
Экспоненциальное (показательное) распределение . . . . .	12
<b>Билет 8</b>	<b>13</b>
Совместное распределение случайных величин, корректность определения . . . . .	13
Функция совместного распределения и четыре ее основных свойства. . . . .	13
Формулировка теоремы об однозначности задания совместного распределения функцией совместного распределения и о существовании распределения с заданной функцией совместного распределения . . . . .	14
Неоднозначность задания совместного распределения распределениями компонент . . . . .	14

<b>Билет 9</b>	<b>15</b>
Случайные векторы с абсолютно непрерывным распределением и плотность совместного распределения . . .	15
Связь с функцией совместного распределения . . . . .	15
Вычисление плотности компонент по совместной плотности . . . . .	15
Плотность случайного вектора, являющегося функцией от другого случайного вектора . . . . .	15
Равномерное распределение на многомерных областях . . . . .	16
<b>Билет 10</b>	<b>17</b>
Независимые случайные величины: характеристика в терминах функций распределения, в терминах совместного распределения, в терминах плотностей . . . . .	17
Независимость функций от независимых случайных величин . . . . .	17
Формула свертки для плотности суммы независимых случайных величин, заданных плотностями . . . . .	17
<b>Билет 11</b>	<b>19</b>
Математическое ожидание в общем случае . . . . .	19
Корректность определений и основные свойства . . . . .	19
<b>Билет 12</b>	<b>21</b>
Математическое ожидание функции от случайной величины с абсолютно непрерывным распределением . . .	21
Математическое ожидание произведения независимых случайных величин . . . . .	21
Дисперсия, ковариация, коэффициент корреляции и их свойства . . . . .	22
Неравенство Чебышева . . . . .	22

# Билет 1

Теорема Пуассона. Задача про булочки с изюмом.

## Теорема Пуассона

Рассмотрим серию испытаний по схеме Бернулли, причем пусть  $N$ -я серия состоит из  $N$  испытаний и вероятность успеха в этой серии равна  $p_N$ . Потребуем, чтобы произведение  $N \cdot p_N = \lambda$  не зависело от  $N$ . Нас интересует вероятность  $P(S_N = k)$  наступления ровно  $k$  успехов в  $N$ -ой серии.

**Теорема.** Пусть  $N \cdot p_N = \lambda$  — не зависит от  $N$ . Тогда

$$P(S_N = k) = C_N^k p_N^k (1 - p_N)^{N-k} \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad N \rightarrow +\infty.$$

*Доказательство.* Пусть  $N \cdot p_N = \lambda$  — не зависит от  $N$ . Тогда

$$P(S_N = k) = C_N^k p_N^k (1 - p_N)^{N-k}.$$

Распишем вероятность  $P(S_N = k)$  в следующем виде:

$$P(S_N = k) = \frac{N!}{k!(N-k)!} \cdot \frac{\lambda^k}{N^k} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{N-k} = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \frac{N \cdot (N-1) \cdot \dots \cdot (N-k+1)}{N^k} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{-k} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^N.$$

Заметим следующие вещи:

- $\frac{N \cdot (N-1) \cdot \dots \cdot (N-k+1)}{N^k} = \frac{N^k + o(N^k)}{N^k} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1$ ;
- $\left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{-k} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1$ ;
- $\left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} e^{-\lambda}$ .

Учитывая, что  $\lambda$  и  $k$  не меняются, устремляем  $N \rightarrow \infty$  и получаем

$$P(S_N = k) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

□

## Задача про булочки с изюмом

**Формулировка** Какое в среднем количество изюма должны содержать булочки, для того чтобы вероятность иметь хотя бы одну изюминку в булочке была не меньше 0.99?

**Решение** Предположим, что уже изготовлено тесто на некоторое количество булочек. В это тесто добавлено  $N$  изюминок так, что отношение числа изюминок к количеству булочек равно  $\lambda$ . Значит количество булочек  $b = \frac{N}{\lambda}$ .

Выделим в тесте кусок, из которого будет изготовлена данная булочка. Вероятность попадания одной изюминки в эту булочку равна  $\frac{1}{b} = \frac{\lambda}{N}$ , а вероятность того, что хотя бы одна изюминка попала в булку, равна  $1 - P(\text{булочка без изюма})$  и равна

$$1 - \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^N.$$

Поскольку мы рассматриваем серийное производство булочек, то можно предполагать, что  $N \rightarrow +\infty$ , т. е. растет объем теста и количество изюма, но не меняется плотность  $\lambda$ . Как и выше, получаем  $\left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^N \rightarrow e^{-\lambda}$ . Для решения задачи надо найти  $\lambda$  такое, что  $e^{-\lambda} < 0.01$ . Подходит  $\lambda = 5$ , т. е. плотность изюма должна быть не менее пяти изюминок на булочку.

## Билет 2

*Модель Эрдеша-Реньи случайного графа. Теорема о надежности сети.*

### Модель Эрдеша-Реньи случайного графа

**Определение** (модель Эрдеша-Реньи). Пусть  $V_n$  — конечное множество  $\{1, 2, \dots, n\}$ , элементы которого мы называем *вершинами*. Будем проводить между двумя различными вершинами ребро (только одно) с вероятностью  $p$  независимо от остальных пар вершин. Получающийся граф будем называть *случайным графом в модели Эрдеша-Реньи*.

Множество элементарных исходов  $\Omega$  состоит из  $C_n^2$  ребер. Событием называется любое подмножество ребер в клике на  $n$  вершинах  $E \subseteq \Omega$ . Вероятность  $E$  задается формулой

$$P(E) = p^{|E|}(1-p)^{C_n^2-|E|}.$$

### Теорема о надежности сети

**Теорема** (о надежности сети в общем случае). Если  $p = \frac{c \ln n}{n}$ , то при  $c > 1$  вероятность того, что граф связан, стремится к 1 (граф почти всегда связан), а при  $c < 1$  вероятность того, что граф связан, стремится к 0 (граф почти всегда не связан).

**Теорема** (о надежности сети в частном случае). Если  $p = \frac{c \ln n}{n}$  и  $c > 2$ , то граф почти всегда связан.

*Доказательство.* Пусть случайная величина  $X_n$  — число компонент связности в случайном графе  $G$ , если граф не является связным, и  $X_n = 0$  в случае связности  $G$ . Нам надо доказать, что  $P(X_n > 1) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . По неравенству Чебышева

$$P(X_n > 1) \leq \mathbb{E}X_n.$$

Следовательно, достаточно доказать стремление к нулю  $\mathbb{E}X_n$ . Пусть  $K_1, \dots, K_{C_n^k}$  — все  $k$ -элементные подмножества  $V_n$ . Через  $X_{n,k,i}$  обозначим случайную величину, которая равна единице в случае, когда  $K_i$  является компонентой связности, и равна нулю в случае, когда это не так. Ясно, что

$$\mathbb{E}X_n = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{C_n^k} \mathbb{E}X_{n,k,i}.$$

Заметим, что  $\mathbb{E}X_{n,k,i} = P(X_{n,k,i} = 1)$ , а эта вероятность оценивается<sup>1</sup> через вероятность того, что вершины из множества  $K_i$  не соединены ребрами с вершинами из  $V_n \setminus K_i$ . Пусть  $q = 1 - p$ , тогда имеет место оценка<sup>2</sup>

$$\mathbb{E}X_n \leq \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k q^{k(n-k)}.$$

Эта сумма симметрична и, удваивая ее, можно считать, что суммирование идет по  $k \leq \frac{n}{2}$ . При таких  $k$  имеет место неравенство  $k(n-k) \geq k(n - \frac{n}{2}) = \frac{kn}{2}$ . Добавим и вычтем  $1 + q^{n^2/2}$ , чтобы можно было свернуть по формуле бинома Ньютона

$$\sum_{k=1}^{n-1} C_n^k q^{k(n-k)} \leq 2 \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k (q^{n/2})^k = 2(1 + q^{n/2})^n - 2 - 2q^{n^2/2}.$$

По условию,  $q = 1 - p = \frac{2a \ln n}{n}$ , где  $a > 1$ . Имеем

$$q^{n/2} = e^{2^{-1} n \ln(1 - \frac{2a \ln n}{n})} = e^{-a \ln n + \beta_n} = \frac{1}{n^a} e^{\beta_n}, \quad \beta_n \rightarrow 0.$$

Следовательно,

$$(1 + q^{n/2})^n = \left(1 + \frac{1}{n^a} e^{\beta_n}\right)^n \rightarrow 1,$$

и

$$2(1 + q^{n/2})^n - 2 - 2q^{n^2/2} \rightarrow 0.$$

Таким образом,  $\mathbb{E}X_n \rightarrow 0$  и теорема доказана. □

<sup>1</sup>Мы говорим, что любая компонента связности на  $k$  вершинах никак не соединена с оставшимися  $n - k$  вершинами, однако не все графы, для которых это верно, являются компонентами связности.

<sup>2</sup>Выбрали вершину (всего  $k$  штук) и удалили ребра из нее в оставшиеся  $n - k$  вершин.

## Билет 3

Вероятностное пространство в общем случае: алгебра и  $\sigma$ -алгебра подмножеств. Примеры  $\sigma$ -алгебр,  $\sigma$ -алгебра, порожденная системой подмножеств, борелевская  $\sigma$ -алгебра.

### Вероятностное пространство в общем случае: алгебра и $\sigma$ -алгебра подмножеств

**Определение.** Класс  $\mathcal{A}_0$  подмножеств пространства  $\Omega$  называется *алгеброй*, если

1.  $\Omega, \emptyset \in \mathcal{A}_0$ ;
2.  $A \in \mathcal{A}_0 \implies \Omega \setminus A \in \mathcal{A}_0$ ;
3.  $A, B \in \mathcal{A}_0 \implies A \cap B, A \cup B \in \mathcal{A}_0$ .

**Определение.** Класс  $\mathcal{A}$  подмножеств пространства  $\Omega$  называется  *$\sigma$ -алгеброй*, если

1.  $\Omega, \emptyset \in \mathcal{A}$ ;
2.  $A \in \mathcal{A} \implies \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ ;
3.  $A_n \in \mathcal{A}, \forall n \in \mathbb{N} \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ .

Отметим, что в силу формул

$$\Omega \setminus \bigcup_{\alpha} A_{\alpha} = \bigcap_{\alpha} (\Omega \setminus A_{\alpha})$$

и

$$\Omega \setminus \bigcap_{\alpha} A_{\alpha} = \bigcup_{\alpha} (\Omega \setminus A_{\alpha}),$$

в пункте 3 каждого определения достаточно проверять включение либо только для объединений, либо только для пересечений.

### Примеры $\sigma$ -алгебр, $\sigma$ -алгебра, порожденная системой подмножеств, борелевская $\sigma$ -алгебра

**Примеры  $\sigma$ -алгебр** Множество всех подмножеств  $2^{\Omega}$ ,  $\{\emptyset, \Omega\}$ ,  $\{\emptyset, B, \Omega \setminus B, \Omega\}$  являются  $\sigma$  алгебрами.

**Примеры алгебр** Множество всех конечных объединений попарно непересекающихся промежутков  $(a, b]$  на  $\mathbb{R}$  является алгеброй, но не является  $\sigma$  алгеброй, поскольку она не содержит одноточечные множества — пересечения счетного числа полуинтервалов.

**Определение.** Говорят, что  $\sigma$  алгебра порождена набором множеств  $S$ , если эта  $\sigma$  алгебра является наименьшей по включению среди всех  $\sigma$ -алгебр, которые содержат данный набор множеств  $S$ . Такую  $\sigma$ -алгебру обозначают  $\sigma(S)$ .

**Определение.**  $\sigma$ -алгебра называется *борелевской  $\sigma$ -алгеброй*  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  подмножеств прямой  $\mathbb{R}$ , если она порождена всеми промежутками (отрезками, интервалами, лучами).

Несложно показать, что в определении не обязательно в качестве порождающего множества брать все промежутки. Например, можно ограничиться только отрезками или только интервалами или только лучами  $(-\infty, c]$ . Например, проверим, что  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  порождена всеми лучами вида  $(-\infty, c]$ . Действительно,  $(-\infty, c] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , как счетное объединение промежутков вида  $(-n, c]$ , поэтому  $\sigma(\{(-\infty, c]\}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . С другой стороны  $(a, b] = (-\infty, b] \setminus (-\infty, a]$ , отрезки получаются счетным пересечением промежутков вида  $(a - \frac{1}{n}, b]$ , интервалы получают счетным объединением промежутков вида  $(a, b - \frac{1}{n}]$ , а полуинтервалы вида  $[a, b]$  получают объединением уже полученных отрезков вида  $[a, b - \frac{1}{n}]$ . Тем самым, все промежутки принадлежат  $\sigma(\{(-\infty, c]\})$ , а значит имеет место и включение  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \sigma(\{(-\infty, c]\})$ .

## Билет 4

Аддитивные и счетно аддитивные функции множества на алгебрах и  $\sigma$ -алгебрах. Вероятностная мера и определение вероятностного пространства. Эквивалентность счетной аддитивности и непрерывности в нуле для неотрицательной аддитивной функции множества на алгебре. Свойства непрерывности вероятностной меры.

### Аддитивные и счетно аддитивные функции множества на алгебрах и $\sigma$ -алгебрах

**Определение 0.1.** Пусть  $\mathcal{A}_0$  — алгебра множеств. Функция  $P: \mathcal{A}_0 \rightarrow [0, 1]$  называется *аддитивной*, если для произвольных  $A, B \in \mathcal{A}_0$ ,  $A \cap B = \emptyset$  выполнено

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

**Определение 0.2.** Функция  $P: \mathcal{A}_0 \rightarrow [0, 1]$  называется *счетно аддитивной*, если для всякого не более чем счетного набора попарно непересекающихся событий  $A_n \in \mathcal{A}_0$ , для которых  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}_0$  выполняется

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

### Вероятностная мера и определение вероятностного пространства

**Определение 0.3.** Пусть  $\mathcal{A}$  —  $\sigma$  алгебра. Функция  $P: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  называется *вероятностной мерой* на  $\mathcal{A}$ , если  $P(\Omega) = 1$  и  $P$  — счетно аддитивна на  $\mathcal{A}$ .

**Определение 0.4.** Пусть  $\mathcal{A}$  —  $\sigma$ -алгебра подмножеств  $\Omega$ , тогда тройку  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  называют *вероятностным пространством*.

### Эквивалентность счетной аддитивности и непрерывности в нуле для неотрицательной аддитивной функции множества на алгебре

**Предложение.** Пусть  $P: \mathcal{A}_0 \rightarrow [0, 1]$  — аддитивная функция множества на алгебре  $\mathcal{A}_0$ . Функция  $P$  счетно аддитивна на  $\mathcal{A}_0$  тогда и только тогда, когда для произвольного набора  $A_n \in \mathcal{A}_0$ ,  $A_{n+1} \subset A_n$ ,  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$  выполнено

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0.$$

*Доказательство.*

$\Rightarrow$  Пусть  $P$  счетно аддитивна на  $\mathcal{A}_0$ . Рассмотрим множества  $C_n = A_n \setminus A_{n+1}$ . Тогда

$$A_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n, \dots, A_{N+1} = \bigcup_{k=N+1}^{\infty} C_k,$$

и

$$P(A_1) = \sum_{n=1}^N P(C_n) + P(A_{N+1}).$$

Если  $P$  счетно аддитивна, то  $\sum_{n=1}^N P(C_n) \rightarrow P(A_1)$ , а  $P(A_{N+1}) \rightarrow 0$ .

$\Leftarrow$  Пусть  $C_n \in \mathcal{A}_0$  — набор попарно непересекающихся множеств, причем известно, что  $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = A_1 \in \mathcal{A}_0$ . Пусть

$$A_{N+1} = \bigcup_{k=N+1}^{\infty} C_k,$$

тогда  $A_{N+1} \subset A_N$ , причем  $\bigcap_{N=1}^{\infty} A_N = \emptyset$ . Если  $P(A_{N+1}) \rightarrow 0$ , то  $P(A_1) = \sum_{n=1}^N P(C_n) + P(A_{N+1})$  и переходя к пределу, получаем

$$P(A_1) = \sum_{n=1}^{\infty} P(C_n).$$

□

## Свойства непрерывности вероятностной меры

**Следствие** (непрерывность вероятностной меры). Пусть  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  — вероятностное пространство. Тогда

1. Если  $A_n \in \mathcal{A}$ ,  $A_{n+1} \subset A_n$  и  $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(A)$ ;
2. Если  $A_n \in \mathcal{A}$ ,  $A_n \subset A_{n+1}$  и  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(A)$ .

В частности,

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

## Билет 5

*Случайные величины на общих вероятностных пространствах: определение и основные свойства (прообраз борелевских лежит в  $\sigma$ -алгебре, сумма и произведение случайных величин — случайная)*

### Случайные величины на общих вероятностных пространствах

**Определение 0.5.** Пусть задано вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Функция  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  называется *случайной величиной*, если для всякого числа  $t \in \mathbb{R}$  выполнено

$$X^{-1}((-\infty, t]) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq t\} \in \mathcal{A}.$$

**Предложение.** Если  $X$  случайная величина, то  $\{\omega \mid X(\omega) \in B\} = X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$  для всякого  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

*Доказательство.* Напомним следующие соотношения для прообраза функции:

$$X^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} X^{-1}(A_n), \quad X^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}(A_n), \quad X^{-1}(\mathbb{R} \setminus B) = \Omega \setminus X^{-1}(B).$$

Рассмотрим систему множеств

$$\mathcal{C} := \{B \subset \mathbb{R} \mid X^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}.$$

Эта система образует  $\sigma$ -алгебру. Действительно,  $X^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{A}$  и  $X^{-1}(\mathbb{R}) = \Omega \in \mathcal{A}$ . Если  $B \in \mathcal{C}$ , то  $X^{-1}(\mathbb{R} \setminus B) = \Omega \setminus X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ . Наконец, если  $B_n \in \mathcal{C}$ , то

$$X^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} X^{-1}(B_n) \in \mathcal{A}.$$

По условию  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{C}$  содержит все лучи вида  $(-\infty, t]$ . Мы знаем, что  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  — наименьшая по включению  $\sigma$  алгебра, содержащая все лучи такого вида, поэтому  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}$ , что и требовалось.  $\square$

**Замечание.** Т. к.  $\{X^2 \leq t\} = \{-\sqrt{t} \leq x \leq \sqrt{t}\}$  (при  $t \geq 0$ ) и отрезок  $[-\sqrt{t}, \sqrt{t}]$  — борелевское множество, получаем, что  $X^2$  — также случайная величина. Можно проверить, что для случайной величины  $X$  и для любой «разумной» функции  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (например, если  $f$  непрерывная),  $f(X)$  также будет случайной величиной.

**Предложение.** Пусть  $X, Y$  — случайные величины. Тогда случайными величинами будут  $\alpha X + \beta Y$ ,  $X \cdot Y$ .

*Доказательство.* Ясно, что  $\alpha X$  и  $\beta Y$  — случайные величины. Проверим, что  $X + Y$  — случайная величина:

$$\{X + Y > t\} = \{X > t - Y\} = \bigcup_{r_n \in \mathbb{Q}} (\{\omega \mid X(\omega) > r_n\} \cap \{\omega \mid r_n > t - Y(\omega)\}) \in \mathcal{A}.$$

В последнем переходе мы воспользовались тем, что  $\mathbb{Q}$  всюду плотно в  $\mathbb{R}$ , поэтому между любыми двумя вещественными числами есть рациональное число. Поэтому и  $\{X + Y \leq t\} \in \mathcal{A}$ , а значит  $X + Y$  — случайная величина. Для произведения заметим, что  $X \cdot Y = \frac{1}{2}((X + Y)^2 - X^2 - Y^2)$ , и утверждение следует из уже доказанных.  $\square$



## Билет 6

*Распределение случайной величины и функция распределения. Три основных свойства функции распределения.*

*Формулировка теоремы о продолжении счетно аддитивной функции множества с алгебры на  $\sigma$ -алгебру, порожденную исходной алгеброй. Идея построения меры Лебега равномерного распределения на отрезке с борелевской  $\sigma$ -алгеброй. Формулировка теоремы об однозначности задания распределения функцией распределения и о существовании распределения с заданной функцией распределения (т.е. с функцией, удовлетворяющей трем свойствам). Идея доказательства.*

### Распределение случайной величины и функция распределения

**Определение 0.6.** Распределением случайной величины  $X$  называется вероятностная мера  $\mu_X$  на  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ , определяемая равенством

$$\mu_X(B) = P(\{\omega \mid X(\omega) \in B\}) = P(X^{-1}(B)).$$

Обратим внимание, что, как и в дискретном случае, распределение случайной величины это мера на значениях случайной величины, т. е. мера  $\mu_X$  показывает с какой вероятностью принимаются те или иные значения  $X$ .

**Определение 0.7.** Функция

$$F_X(t) = \mu_X((-\infty, t]) = P(\{\omega \mid X(\omega) \leq t\}).$$

называется *функцией распределения* случайной величины  $X$ .

Из определения  $F_X$  следует, что  $P(a < X \leq b) = \mu_X((a, b]) = F(b) - F(a)$ .

### Три основных свойства функции распределения

**Предложение.** Функция  $F_X$  удовлетворяет следующим свойствам:

1.  $F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  не убывает;
2.  $F_X$  непрерывна справа;
3.  $\lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = 0$  и  $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_X(t) = 1$ .

*Доказательство.* Т.к.  $\{\omega \mid X(\omega) \leq t\} \subset \{\omega \mid X(\omega) \leq s\}$  при  $t \leq s$ , то получаем свойство 1. Обоснуем пункт 2. Пусть  $t_n \rightarrow t$ ,  $t_n \geq t$ . Заметим, что

$$\{X \leq t\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{X \leq t + \frac{1}{k}\}.$$

В силу непрерывности вероятностной меры  $P$  получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_X(t + \frac{1}{k}) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X \leq t + \frac{1}{k}) = P(X \leq t) = F_X(t).$$

Значит для каждого  $\varepsilon > 0$  найдется  $k$ , для которого

$$F_X(t) \leq F_X(t + \frac{1}{k}) \leq F_X(t) + \varepsilon.$$

Т.к.  $t_n \rightarrow t$ ,  $t_n \geq t$ , то найдется номер  $n_0$ , начиная с которого  $t \leq t_n < t + \frac{1}{k}$ . В силу монотонности  $F_X(t) \leq F_X(t_n) \leq F_X(t + \frac{1}{k}) \leq F_X(t) + \varepsilon$  при  $n \geq n_0$ . Это и означает, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_X(t_n) = F(t)$ .

Свойство 3 обосновывается аналогично. □

### Формулировка теоремы о продолжении счетно аддитивной функции множества с алгебры на $\sigma$ -алгебру, порожденную исходной алгеброй

**Теорема 0.1** (б/д). Пусть  $\mathcal{A}_0$  есть некоторая алгебра подмножеств пространства  $\Omega$  и пусть  $P_0: \mathcal{A}_0 \rightarrow [0, 1]$  счетно аддитивная функция множества на алгебре  $\mathcal{A}_0$ . Тогда существует единственная вероятностная мера  $P$  на  $\sigma(\mathcal{A}_0)$ , продолжающая функцию  $P_0$ , т.е.  $P(A) = P_0(A)$  для произвольного множества  $A \in \mathcal{A}_0$ .

### Идея построения меры Лебега равномерного распределения на отрезке с борелевской $\sigma$ -алгеброй

Мера Лебега — обычная длина, т. е.  $\lambda([a, b]) = b - a$ .

**Схема построения меры Лебега** Рассмотрим алгебру  $\mathcal{A}_0$  конечных объединений попарно непересекающихся промежутков вида  $(a, b] \subset [0, 1]$  и возможно одноточечного множества  $\{0\}$ . Для множества  $A = \bigcup_{j=1}^m (a_j, b_j]$  с попарно непересекающимися  $(a_j, b_j]$  зададим меру Лебега равенством

$$\lambda(A) := \sum_{j=1}^m (b_j - a_j).$$

Нетрудно проверить, что это корректно определенная аддитивная функция множества на  $\mathcal{A}_0$ . Если теперь проверить, что она оказывается счетно аддитивной на этой алгебре (что верно), то по теореме о продолжении меры существует единственная вероятностная мера на  $\mathcal{B}([0, 1])$ , совпадающая с  $\lambda$  на  $\mathcal{A}_0$ .

### Формулировка теоремы об однозначности задания распределения функцией распределения и о существовании распределения с заданной функцией распределения

**Теорема 0.2.** *Распределение  $\mu_X$  однозначно определяется функцией распределения  $F_X$ . Кроме того, если задана функция  $F$ , удовлетворяющая свойствам 1, 2, 3, то существует вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  и случайная величина  $X$  с функцией распределения  $F$ .*

Эта теорема позволяет говорить о распределении случайной величины без уточнения, на каком вероятностном пространстве задана случайная величина и как именно она задана.

**Идея доказательства** Наметим основные идеи доказательства. Первая часть является прямым следствием теоремы о продолжении меры. Пусть  $A = \bigcup_{j=1}^n (a_j, b_j]$ , причем  $(a_j, b_j] \cap (a_k, b_k] = \emptyset$  при  $j \neq k$ . Тогда

$$\mu_X(A) = \sum_j F_X(b_j) - F_X(a_j).$$

Кроме того, множества  $A$  указанного вида образуют алгебру  $\mathcal{A}_0$  подмножеств  $\mathbb{R}$ . Поэтому, если есть две случайные величины с одной и той же функцией распределения, то по теореме о продолжении меры (часть о единственности продолжения) их распределения также совпадают на всех множествах из  $\sigma(\mathcal{A}_0) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

Доказательство второй части аналогично рассуждению о построении меры Лебега. Будем строить вероятностную меру  $P$  на  $\Omega = \mathbb{R}$  с  $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Рассмотрим алгебру  $\mathcal{A}_0$  множеств вида  $A = \bigcup_{j=1}^n (a_j, b_j]$ , где  $(a_j, b_j] \cap (a_k, b_k] = \emptyset$  при

$j \neq k$ . Для такого множества  $A$  положим  $P(A) := \sum_{j=1}^n F(b_j) - F(a_j)$ . Нетрудно видеть, что корректно определена

(т.е. для разных представлений  $A$  равенство дает одно и тоже число) аддитивная функция множества на алгебре  $\mathcal{A}_0$ . Если теперь суметь проверить счетную аддитивность  $P$  на  $\mathcal{A}_0$ , то  $P$  продолжается до счетно аддитивной меры на  $\sigma(\mathcal{A}_0) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Если теперь рассмотреть случайную величину  $X(\omega) = \omega$ , то  $F_X(t) = F(t)$  при  $t \in \mathbb{R}$  в силу того, что  $P((-\infty, t])$ , являясь продолжением, совпадает с  $F(t) - F(-\infty) = F(t)$ .

## Билет 7

Дискретные и абсолютно непрерывные распределения случайных величин. Функция распределения дискретной случайной величины. Определение абсолютно непрерывного распределения случайной величины и определение плотности распределения. Основные свойства плотности и связь с функцией распределения. Примеры абсолютно непрерывных случайных величин.

*Еще будут пояснения для таких как Аня Смирнова чтобы осознать.*

### Функция распределения дискретной случайной величины.

**Определение 0.8.** Случайная величина  $X$  называется *дискретной*, если множество ее значений конечно или счетно. Если  $x_1, \dots, x_N, \dots$  — различные значения  $X$ , то множества  $A_i = \xi^{-1}\{x_i\}$  попарно не пересекаются. Пусть  $p_i = P(A_i)$ . Тогда распределение  $\mu_\xi$  имеет вид

$$\mu_\xi = p_1\delta_{x_1} + \dots + p_N\delta_{x_N} + \dots$$

и полностью определяется значениями  $x_i$  и  $p_i$ . В этой формуле  $\delta_{x_i}(A) := 1$ , если  $x_i \in A$  и  $\delta_{x_i}(A) = 0$ , если  $x_i \notin A$  для каждого  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

*Вот это (мю кси)  $\mu_\xi$  — вероятностная мера, а  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  — борелевская сигма-алгебра.*

### Определение абсолютно непрерывного распределения случайной величины и определение плотности распределения

**Определение 0.9.** Говорят, что случайная величина  $X$  имеет *абсолютно непрерывное* распределение (или является абсолютно непрерывной), если существует такая неотрицательная (и интегрируемая) функция  $\rho_X$ , что

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^t \rho_X(x) dx,$$

Функция  $\rho_X$  называется *плотностью* случайной величины  $X$ .

*$F_X(t)$  — это функция распределения случ. величины, и она абсолютно непрерывна, если ее можно задать какой-то функцией  $\rho_X$  и бахнуть интеграл, а так обычно определение другое.*

**Факты** Отметим, что в данном случае

$$\mu_X((a, b]) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b \rho_X(x) dx,$$

кроме того

$$P(X = a) = \lim_{n \rightarrow \infty} [F_X(a) - F_X(a - 1/n)] = 0 \text{ (непрерывность интеграла с переменным пределом).}$$

На самом деле можно доказать, что

$$\mu_X(A) = \int_A \rho_X(x) dx$$

для всякого множества  $A$ , для которого имеет смысл интеграл в правой части, т. е. функция  $I_A \rho_X$  интегрируема по Риману, где  $I_A(x) = 1$  при  $x \in A$  и  $I_A(x) = 0$  при  $x \notin A$ .

### Основные свойства плотности и связь с функцией распределения.

**Предложение.** Отметим несколько свойств плотности распределения:

1.  $\rho_X \geq 0$ ;
2.  $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_X(x) dx = 1$ ;
3.  $F'_X(x) = \rho_X(x)$  для любой точки непрерывности функции  $\rho_X$ .

Последнее свойство следует из теоремы о дифференцируемости интеграла с переменным верхним пределом.

*Конечно же мы ее не помним: Пусть функция интегрируема на  $[a, b]$  и непрерывна в точке  $x_0 \in [a, b]$ . Тогда функция  $F$  дифференцируема в точке  $x_0$  и  $F'(x_0) = f(x_0)$ .*

## Примеры абсолютно непрерывных случайных величин.

### Равномерное распределение

Случайная величина имеет *равномерное распределение* на отрезке  $[a, b]$ , если ее распределение задано плотностью

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in (a, b], \\ 0 & x \notin (a, b]. \end{cases}$$

Такая случайная величина описывает случайное бросание точки в отрезок  $[a, b]$ . Вероятность того, что точка попадёт в отрезок  $[c, d] \subset [a, b]$  равна  $\frac{d-c}{b-a}$ .

### Нормальное распределение

Случайная величина имеет *нормальное распределение* с параметрами  $a$  и  $\sigma^2$ , если ее распределение задано плотностью

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

В случае  $a = 0$  и  $\sigma = 1$  эта плотность появлялась в теореме Муавра-Лапласа. *Помним этот гроб билет первого коллока.*

### Экспоненциальное (показательное) распределение

Случайная величина имеет *экспоненциальное распределение* (которое еще иногда называется показательным) с параметром  $\lambda > 0$ , если ее распределение задано плотностью

$$\rho(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Функция распределения такой случайной величины имеет вид  $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ .

## Билет 8

*Совместное распределение случайных величин, корректность определения. Функция совместного распределения и четыре ее основных свойства. Формулировка теоремы об однозначности задания совместного распределения функцией совместного распределения и о существовании распределения с заданной функцией совместного распределения (т.е. с функцией, удовлетворяющей четырем свойствам). Неоднозначность задания совместного распределения распределениями компонент (пример).*

### Совместное распределение случайных величин, корректность определения

**Определение 0.10.** Пусть  $X$  и  $Y$  — случайные величины. Совместным распределением случайных величин  $X, Y$  называется вероятностная мера  $\mu_{X,Y}$  на  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ , определяемая следующим образом:

$$\mu_{X,Y}(B) = P(\{\omega \mid (X(\omega), Y(\omega)) \in B\}).$$

**Предложение.** Определение выше корректно в том смысле, что для  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$

$$\{\omega \mid (X(\omega), Y(\omega)) \in B\} \in \mathcal{A}.$$

*Доказательство.* Рассмотрим отображение  $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $g(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$ . Аналогично тому, как мы уже делали, проверяется, что система множеств

$$\mathcal{C} := \{B \subset \mathbb{R}^2 \mid g^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$$

является  $\sigma$ -алгеброй. Заметим, что параллелепипеды  $[a, b] \times [c, d] \in \mathcal{C}$ , т.к.

$$g^{-1}([a, b] \times [c, d]) = \{\omega \mid X(\omega) \in [a, b], Y(\omega) \in [c, d]\} = \{\omega \mid X(\omega) \in [a, b]\} \cap \{\omega \mid Y(\omega) \in [c, d]\}.$$

Тем самым,  $\mathcal{C}$  — некоторая  $\sigma$ -алгебра, содержащая все параллелепипеды, а  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$  — это наименьшая по включению  $\sigma$ -алгебра, содержащая все параллелепипеды.  $\square$

### Функция совместного распределения и четыре ее основных свойства.

**Определение 0.11.** Функцию

$$F_{X,Y}(x, y) = P(\{\omega \mid X(\omega) \leq x, Y(\omega) \leq y\}) = \mu_{X,Y}((-\infty, x] \times (-\infty, y]).$$

называют *функцией совместного распределения* случайных величин  $X$  и  $Y$  или функцией распределения случайного вектора  $(X, Y)$ .

**Предложение.** Функция  $F$  совместного распределения пары случайных величин удовлетворяет следующим свойствам:

1.  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$  и  $F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c) \geq 0$  для всякого прямоугольника  $(a, b] \times (c, d]$ ;
2.  $F$  непрерывна справа по совокупности переменных;
3.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (u,v)} F(x, y) = 0$  если хотя бы одна из переменных  $u$  или  $v$  равна  $-\infty$ ;
4.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, +\infty)} F(x, y) = 1$ .

*Доказательство.* Доказательство повторяет рассуждения одномерного случая. Например, докажем (2). Заметим, что

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{\omega \mid X(\omega) \leq x + \frac{1}{k}, Y(\omega) \leq y + \frac{1}{k}\} = \{\omega \mid X(\omega) \leq x, Y(\omega) \leq y\}.$$

Поэтому  $P(X \leq x + \frac{1}{k}, Y \leq y + \frac{1}{k}) \rightarrow P(X \leq x, Y \leq y)$  и для каждого  $\varepsilon$  найдется такое  $k$ , что

$$P(X \leq x + \frac{1}{k}, Y \leq y + \frac{1}{k}) < P(X \leq x, Y \leq y) + \varepsilon.$$

Если теперь  $x_n \rightarrow x$ ,  $x_n \geq x$ ,  $y_n \rightarrow y$ ,  $y_n \geq y$ , то для произвольного  $k$  найдется номер  $n_0$ , начиная с которого выполняется

$$x \leq x_n < x + \frac{1}{k}, \quad y \leq y_n < y + \frac{1}{k}.$$

Поэтому при  $n > n_0$

$$P(X \leq x, Y \leq y) \leq P(X \leq x_n, Y \leq y_n) \leq P(X \leq x + \frac{1}{k}, Y \leq y + \frac{1}{k}) < P(X \leq x, Y \leq y) + \varepsilon.$$

Утверждения (3) и (4) обосновываются аналогично.  $\square$

## Формулировка теоремы об однозначности задания совместного распределения функцией совместного распределения и о существовании распределения с заданной функцией совместного распределения

**Теорема 0.3.** Совместное распределение пары случайных величин  $\mu_{X,Y}$  однозначно задается функцией совместного распределения  $F_{X,Y}$ . Кроме того, для всякой функции  $F$ , удовлетворяющей свойствам (1), (2), (3), (4), существует вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  и пара случайных величин  $X, Y$  с функцией совместного распределения  $F$ .

## Неоднозначность задания совместного распределения распределениями компонент

**Пример** Пусть в квадрате  $[0, 1] \times [0, 1]$  случайно выбирается точка  $(x, y)$ . Случайные величины  $X(x, y) = x$  и  $Y(x, y) = y$  имеют равномерное распределение на  $[0, 1]$  и их совместное распределение является равномерным на  $[0, 1] \times [0, 1]$ , т. е. вероятность попадания в множество  $B$  равна площади этого множества. Будем теперь выбирать точку  $(x, y)$  случайным образом на диагонали квадрата  $[0, 1] \times [0, 1]$ , а случайные величины останутся прежними. Для всякого отрезка  $[a, b] \subset [0, 1]$  вероятность того, что  $(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R}$  равна вероятности попасть в отрезок длины  $(b - a)\sqrt{2}$  при бросании точки на отрезок длины  $\sqrt{2}$ , т. е. равна  $b - a$ . Таким образом,  $X$  и  $Y$  опять имеют равномерное распределение на  $[0, 1]$ , но совместное распределение у них совсем другое.

## Билет 9

*Случайные векторы с абсолютно непрерывным распределением и плотность совместного распределения. Связь с функцией совместного распределения. Вычисление плотности компонент по совместной плотности. Плотность случайного вектора, являющегося функцией от другого случайного вектора. Равномерное распределение на многомерных областях.*

### Случайные векторы с абсолютно непрерывным распределением и плотность совместного распределения

**Определение 0.12.** Если существует такая интегрируемая и неотрицательная функция  $\rho_{X,Y}(x, y)$ , что

$$F_{X,Y}(x, y) = \iint_{(-\infty, x] \times (-\infty, y]} \rho_{X,Y}(x, y) dx dy,$$

то говорят, что совместное распределение случайных величин  $X, Y$  *абсолютно непрерывно*. Функцию  $\rho_{X,Y}$  называют *плотностью* совместного распределения случайных величин  $X, Y$  (случайного вектора).

### Связь с функцией совместного распределения

Ясно, что

$$P(a < X \leq b, c < Y \leq d) = \mu_{X,Y}((a, b] \times (c, d]) = \iint_{(a, b] \times (c, d]} \rho_{X,Y}(x, y) dx dy.$$

Можно доказать, что

$$P((X, Y) \in B) = \mu_{X,Y}(B) = \iint_B \rho_{X,Y}(x, y) dx dy.$$

для всякого множества  $A$ , для которого имеет смысл интеграл Римана в правой части. В каждой точке непрерывности плотности  $\rho_{X,Y}$  выполнено равенство

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x, y) = \rho_{X,Y}(x, y).$$

### Вычисление плотности компонент по совместной плотности

Если известна плотность  $\rho_{X,Y}$  совместного распределения  $X$  и  $Y$ , то можно найти плотности распределения каждой из случайных величин. Например, для случайной величины  $X$ :

$$F_X(t) = P(X \leq t, Y \in \mathbb{R}) = \int_{-\infty}^t \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{X,Y}(x, y) dy \right) dx.$$

и, следовательно,

$$\rho_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{X,Y}(x, y) dy.$$

Если распределение каждой из случайных величин задается плотностью, то совместное распределение может не иметь плотности.

### Плотность случайного вектора, являющегося функцией от другого случайного вектора

**Теорема 0.4.** Пусть распределение  $X, Y$  задано плотностью  $\rho_{X,Y}$ . Рассмотрим две случайные величины  $\xi = f(X, Y), \eta = g(X, Y)$  и предположим, что отображение  $T: (x, y) \mapsto (f(x, y), g(x, y))$  удовлетворяет условиям теоремы о замене переменных в кратном интеграле Римана (например непрерывно дифференцируемо с невырожденным якобианом). Тогда

$$\rho_{\xi, \eta}(u, v) = \rho_{X,Y}(T^{-1}(u, v)) \cdot |J(T^{-1}(u, v))|^{-1},$$

где  $J$  — якобиан отображения  $T$ .

*Доказательство.* Заметим, что

$$P((\xi, \eta) \in A) = P((X, Y) \in T^{-1}(A)) = \iint_{T^{-1}(A)} \rho_{X,Y}(x, y) dx dy.$$

Сделаем замену в интеграле  $u = f(x, y), v = g(x, y)$ , т.е.  $(x, y) = T^{-1}(u, v)$ . Тогда последний интеграл равен

$$\iint_A \rho_{X,Y}(T^{-1}(u, v)) \cdot |J(T^{-1}(u, v))|^{-1} du dv,$$

что завершает доказательство. □

## Равномерное распределение на многомерных областях

Говорят, что вектор  $(\xi, \eta)$  *равномерно распределен* на множестве  $B$ , имеющем положительную площадь, если его распределение задано плотностью

$$\rho(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{|B|}, & (x, y) \in B, \\ 0, & (x, y) \notin B. \end{cases}$$

Аналогичным образом определяется равномерно распределенный вектор с любым конечным числом координат.



## Билет 10

*Независимые случайные величины: характеристика в терминах функций распределения, в терминах совместного распределения, в терминах плотностей. Независимость функций от независимых случайных величин. Формула свертки для плотности суммы независимых случайных величин, заданных плотностями.*

### Независимые случайные величины: характеристика в терминах функций распределения, в терминах совместного распределения, в терминах плотностей

**Напоминание** Пусть задано вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Функция  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  называется случайной величиной, если для всякого числа  $t \in \mathbb{R}$  выполнено

$$X^{-1}((-\infty, t]) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\} \in \mathcal{A}$$

**Определение.** Случайные величины  $X$  и  $Y$  называются *независимыми*, если:

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y).$$

**Предложение.** Случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы тогда и только тогда, когда для произвольных  $U, V \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  выполнено:

$$P(\{\omega : X(\omega) \in U, Y(\omega) \in V\}) = P(\{\omega : X(\omega) \in U\}) \cdot P(\{\omega : Y(\omega) \in V\}).$$

*Доказательство.* Если  $V = (-\infty, y]$ , то две меры  $U \rightarrow \frac{\mu_{X,Y}(U \times V)}{\mu_Y(V)}$  и  $U \rightarrow \mu_X(U)$  совпадают на всех лучах  $(-\infty, x]$ , т.е. имеют одинаковые функции распределения, а значит совпадают на всех борелевских множествах  $U$ . Теперь для произвольного борелевского множества  $U$  меры  $V \rightarrow \frac{\mu_{X,Y}(U \times V)}{\mu_X(U)}$  и  $V \rightarrow \mu_Y(V)$  совпадают на всех лучах  $(-\infty, y]$ , а значит и на всех борелевских множествах  $V$ .  $\square$

**Предложение.** Пусть распределения  $X$  и  $Y$  заданы плотностями. Тогда независимость  $X$  и  $Y$  равносильна тому, что совместное распределение задано плотностью и эта плотность имеет вид:

$$\rho_{X,Y}(x, y) = \rho_X(x)\rho_Y(y).$$

*Доказательство.* Если  $X$  и  $Y$  независимы, то

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) = \int_{-\infty}^x \rho_X(t) dt \cdot \int_{-\infty}^y \rho_Y(s) ds = \iint_{(-\infty, x] \times (-\infty, y]} \rho_X(t)\rho_Y(s) dt ds.$$

Обратно,

$$F_{X,Y}(x, y) = \iint_{(-\infty, x] \times (-\infty, y]} \rho_X(t)\rho_Y(s) dt ds = \int_{-\infty}^x \rho_X(t) dt \cdot \int_{-\infty}^y \rho_Y(s) ds = F_X(x) \cdot F_Y(y).$$

$\square$

### Независимость функций от независимых случайных величин

**Определение.** Функция  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  называется борелевской, если  $f^{-1}((-\infty, t]) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  для каждого  $t \in \mathbb{R}$ .

Например, такими функциями будут все монотонные функции или все непрерывные.

**Следствие.** Пусть  $X$  и  $Y$  независимы, а  $f, g$  — борелевские функции. Тогда  $f(X)$  и  $g(Y)$  также независимы.

### Формула свертки для плотности суммы независимых случайных величин, заданных плотностями

**Теорема (Формула свертки).** Предположим, что  $X$  и  $Y$  независимы и их распределения заданы плотностями  $\rho_X$  и  $\rho_Y$ . Тогда распределение суммы  $Z = X + Y$  задано плотностью

$$\rho_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_X(t)\rho_Y(z-t)dt.$$

*Доказательство.* По определению  $F_Z(t) = P(\{\omega : X(\omega) + Y(\omega) \leq t\})$ . С другой стороны, эта вероятность выражается через интеграл:

$$F_Z(t) = P(\{\omega : X(\omega) + Y(\omega) \leq t\}) = \iint_{x+y \leq t} \rho_X(x)\rho_Y(y) dx dy.$$

Переходя к новым переменным  $u = x + y$ ,  $v = x$ , и, применяя теорему Фубини<sup>3</sup>, преобразуем этот интеграл:

$$F_Z(t) = \int_{-\infty}^t \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_X(v) \rho_Y(u-v) dv \right) du.$$

Следовательно, распределение  $Z$  имеет плотность требуемого вида. □

---

<sup>3</sup>Также известная, как сведение двойного интеграла к повторному.

# Билет 11

*Математическое ожидание в общем случае: построение математического ожидания для ограниченных, неотрицательных и общих случайных величин. Корректность определений и основные свойства (линейность, монотонность, равенство нулю неотрицательной случайной величины с нулевым ожиданием, ожидание модуля случайной величины).*

## Математическое ожидание в общем случае

**Определение.** Случайные величины с конечным числом значений будем называть *простыми*.

**Определение.** Пусть  $X$  — простая случайная величина на  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , принимающая конечное число значений  $\{x_1, \dots, x_N\}$ . Тогда по определению полагаем, что  $\mathbb{E}X := \sum_{j=1}^N x_j P(X = x_j)$ .

**Определение.** Пусть  $X$  — ограниченная случайная величина, тогда ее *математическим ожиданием* называют предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}X_n$  математических ожиданий произвольной последовательности простых случайных величин  $X_n$ , равномерно сходящейся к  $X$ .

**Определение.** Пусть  $X \geq 0$  — неотрицательная случайная величина. Скажем, что у нее есть конечное математическое ожидание, если конечен следующий супремум

$$\mathbb{E}X := \sup\{\mathbb{E}U \mid 0 \leq U \leq X; U \text{ — ограниченная}\}.$$

**Определение.** Пусть  $X$  — случайная величина и пусть  $X^+ := \max\{X, 0\} \geq 0$ ,  $X^- := \max\{-X, 0\} \geq 0$  (в частности,  $X = X^+ - X^-$ ). Скажем, что  $X$  обладает математическим ожиданием, если  $X^+$  и  $X^-$  имеют конечные математические ожидания. В этом случае определим математическое ожидание  $X$  равенством:

$$\mathbb{E}X := \mathbb{E}X^+ - \mathbb{E}X^-.$$

## Корректность определений и основные свойства

**Лемма.** Пусть  $X$  — ограниченная случайная величина. Тогда найдется последовательность простых случайных величин  $X_n$ , равномерно сходящаяся к  $X$ .

*Доказательство.* Пусть  $|X(\omega)| < R$  для каждого  $\omega \in \Omega$ . Рассмотрим случайную величину<sup>4</sup>

$$X_n(\omega) := \sum_{j=1}^n (-R + \frac{2R}{n}(k-1)) I_{\{-R + \frac{2R}{n}(k-1) \leq X(\omega) < -R + \frac{2R}{n}k\}}.$$

Возьмем теперь произвольный элемент  $\omega_0 \in \Omega$ . Тогда, т.к.  $|X(\omega_0)| < R$ , то найдется<sup>5</sup> число  $k_0 \in \{1, \dots, n\}$ , для которого  $-R + \frac{2R}{n}(k_0 - 1) \leq X(\omega_0) < -R + \frac{2R}{n}k_0$ . Таким образом

$$|X(\omega_0) - X_n(\omega_0)| \leq \frac{2R}{n} = \varepsilon.$$

□

**Предложение.** Определение матожидания неотрицательной случайной величины корректно в том смысле, что для произвольной ограниченной случайной величины  $X$  и для произвольной последовательности простых случайных величин  $X_n$ , равномерно сходящейся к  $X$ , существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}X_n$ . Кроме того, для произвольной другой последовательности простых случайных величин  $Y_n$ , равномерно сходящейся к  $X$ , выполнено

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}Y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}X_n.$$

*Доказательство.* Заметим что,

$$|\mathbb{E}X_n - \mathbb{E}X_k| \leq \mathbb{E}|X_n - X_k| \leq \sup_{\omega \in \Omega} |X_n(\omega) - X_k(\omega)|.$$

Тем самым, последовательность  $\{\mathbb{E}X_n\}$  фундаментальна, а значит сходится. Если  $Y_n$  другая последовательность простых случайных величин, равномерно сходящаяся к  $X$ , то последовательность  $Z_m$ , для которой  $Z_{2k-1} := X_k$ ,  $Z_{2k} := Y_k$ , также образует последовательность простых случайных величин, равномерно сходящуюся к  $X$ . Тогда последовательность чисел  $\mathbb{E}Z_m$  сходится, а значит  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}Y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}X_n$ , как пределы двух подпоследовательностей сходящейся последовательности чисел. □

<sup>4</sup>Мы поделили  $[-R, R - \frac{2R}{n}]$  на  $n$  частей и представили  $X$  в виде взвешенной суммы индикаторов попадания в подотрезки.

<sup>5</sup>Тут мы пользуемся «взвешенностью» с.в., чтобы получить ограничение на область ее значений.

**Предложение.** Для ограниченных случайных величин  $X, Y$  выполнены свойства:

1.  $\mathbb{E}(\alpha X + \beta Y) = \alpha \mathbb{E}X + \beta \mathbb{E}Y$ ;
2. Если  $X \geq 0$  п.н., то  $\mathbb{E}X \geq 0$ , в частности, если  $X \geq Y$  п.н., то  $\mathbb{E}X \geq \mathbb{E}Y$ .

*Доказательство.*

1. Если  $X_n \rightrightarrows X$ ,  $Y_n \rightrightarrows Y$ ,  $X_n, Y_n$  — простые, то  $\alpha X_n + \beta Y_n \rightrightarrows \alpha X + \beta Y$ . Отсюда

$$\mathbb{E}(\alpha X + \beta Y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\alpha X_n + \beta Y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha \mathbb{E}X_n + \beta \mathbb{E}Y_n) = \alpha \mathbb{E}X + \beta \mathbb{E}Y.$$

2. Пусть сначала  $X_n(\omega) \geq 0$  для каждой  $\omega \in \Omega$ . Пусть  $X_n$  — последовательность простых случайных величин, равномерно сходящаяся к  $\sqrt{X}$ . Тогда  $X_n^2 \rightrightarrows X$ , откуда  $\mathbb{E}X = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}X_n^2 \geq 0$ . Теперь, для произвольного  $X \geq 0$  п.н., выполнено  $\mathbb{E}X = \mathbb{E}[XI_{\{x \geq 0\}}] + \mathbb{E}[XI_{\{x < 0\}}]$ . Покажем, что  $\mathbb{E}[XI_{\{x < 0\}}] = 0$ . По доказанному  $\mathbb{E}[-XI_{\{x < 0\}}] \geq 0$  и  $\mathbb{E}[(M + X)I_{\{x < 0\}}] \geq 0$ , где  $M = \sup_{\omega \in \Omega} |X(\omega)|$ . Таким образом,  $0 \leq \mathbb{E}[-XI_{\{x < 0\}}] \leq MP(X < 0) = 0$ . В случае, когда  $X \geq Y$  п.н., получаем, что  $X - Y \geq 0$  п.н. и  $\mathbb{E}X - \mathbb{E}Y = \mathbb{E}(X - Y) \geq 0$ .

□

**Предложение.** Для неотрицательных случайных величин  $X, Y$  выполнены свойства:

1.  $\mathbb{E}(\alpha X + \beta Y) = \alpha \mathbb{E}X + \beta \mathbb{E}Y$ , если  $\alpha, \beta \geq 0$ ;
2. Если  $X \geq Y \geq 0$ , то  $\mathbb{E}X \geq \mathbb{E}Y$ , в частности, если  $X$  имеет конечное математическое ожидание, то и  $Y$  также имеет конечное математическое ожидание;
3. Если  $X = 0$  п.н., то  $\mathbb{E}X = 0$ .

*Доказательство.*

1. Достаточно доказать утверждение при  $\alpha = \beta = 1$ . Если  $0 \leq U \leq X$ ,  $0 \leq V \leq Y$ ,  $U, V$  — ограниченные, то  $U + V \leq X + Y$ , откуда  $\mathbb{E}X + \mathbb{E}Y \leq \mathbb{E}(X + Y)$ . Наоборот, пусть  $0 \leq Z \leq X + Y$ ,  $Z$  — ограниченная случайная величина. Пусть  $U := \min(X, Z)$ ,  $V := Z - U$ . Тогда  $0 \leq U \leq X$ ,  $U$  — ограниченная,  $V = (Z - X)I_{\{X < Z\}} \leq X + Y - X = Y$ ,  $V$  — ограниченная. Таким образом,  $\mathbb{E}Z = \mathbb{E}(U + V) = \mathbb{E}U + \mathbb{E}V \leq \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$ . А значит аналогичная оценка верна и для  $\mathbb{E}(X + Y)$ .
2. Следует из определения;
3. Произвольная ограниченная случайная величина  $U$ ,  $0 \leq U \leq X$ , также обращается в нуль п.н. Поэтому  $\mathbb{E}U = \mathbb{E}[UI_{\{U \neq 0\}}] \leq [\sup U]P(U \neq 0) = 0$ .

□

**Предложение.** Для случайных величин  $X, Y$ , обладающих математическим ожиданием, выполнены свойства:

1.  $\mathbb{E}(\alpha X + \beta Y) = \alpha \mathbb{E}X + \beta \mathbb{E}Y$ ;
2. Если  $X \geq 0$  почти наверное, то  $\mathbb{E}X \geq 0$ , в частности, если  $X \geq Y$ , то  $\mathbb{E}X \geq \mathbb{E}Y$ ;
3. Если  $X \geq 0$  почти наверное и  $\mathbb{E}X = 0$ , то  $X = 0$  почти наверное;
4.  $|\mathbb{E}X| \leq \mathbb{E}|X|$ .

*Доказательство.*

1. Заметим, что  $\mathbb{E}[-X] = -\mathbb{E}X$ , т.к. для произвольного представления  $X = U - V$ ,  $U, V \geq 0$ , выполнено  $-X = V - U$ , откуда  $\mathbb{E}[-X] = \mathbb{E}V - \mathbb{E}U = -(\mathbb{E}U - \mathbb{E}V) = -\mathbb{E}X$ . Тогда достаточно доказать линейность только в случае  $\alpha, \beta \geq 0$ . В этом случае  $\alpha X + \beta Y = \alpha X^+ + \beta Y^+ - (\alpha X^- + \beta Y^-)$ , причем  $\alpha X^+ + \beta Y^+ \geq 0$  и  $\alpha X^- + \beta Y^- \geq 0$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\alpha X + \beta Y) &= \mathbb{E}(\alpha X^+ + \beta Y^+) - \mathbb{E}(\alpha X^- + \beta Y^-) = \alpha \mathbb{E}X^+ + \beta \mathbb{E}Y^+ - \alpha \mathbb{E}X^- - \beta \mathbb{E}Y^- \\ &= \alpha(\mathbb{E}X^+ - \mathbb{E}X^-) + \beta(\mathbb{E}Y^+ - \mathbb{E}Y^-) = \alpha \mathbb{E}X + \beta \mathbb{E}Y. \end{aligned}$$

2. В этом случае  $X^- = 0$  п.н., а значит и  $\mathbb{E}X^- = 0$ . Таким образом,  $\mathbb{E}X = \mathbb{E}X^+ \geq 0$ .
3. Заметим, что  $k^{-1}P(X \geq k^{-1}) = \mathbb{E}[k^{-1}I_{\{X \geq k^{-1}\}}] \leq \mathbb{E}X = 0$ , откуда получаем, что  $P(X > 0) = P(\bigcup_{k=1}^{\infty} \{X \geq k^{-1}\}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k^{-1}) = 0$ .
4. Заметим, что  $-|X| \leq X \leq |X|$ , откуда по свойствам (2) и (1) получаем, неравенства  $-\mathbb{E}|X| \leq \mathbb{E}X \leq \mathbb{E}|X|$ .

□

## Билет 12

*Математическое ожидание функции от случайной величины с абсолютно непрерывным распределением. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин. Дисперсия, ковариация, коэффициент корреляции и их свойства. Неравенство Чебышева.*

### Математическое ожидание функции от случайной величины с абсолютно непрерывным распределением

**Лемма 0.1.** Пусть случайная величина  $X \geq 0$  и пусть  $A_n \subset A_{n+1}$ ,  $A_n \in \mathcal{A}$ , причем  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$ . Тогда  $X$  имеет конечное математическое ожидание тогда и только тогда, когда

$$\sup_n \mathbb{E}[XI_{A_n}] := M < \infty.$$

При этом  $\mathbb{E}X = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[XI_{A_n}] = M$ .

*Доказательство.* Пусть  $U$  — произвольная ограниченная случайная величина, причем  $0 \leq U \leq X$ . Тогда  $P(\Omega \setminus A_n) \rightarrow 0$  (из-за свойства непрерывности вероятностной меры) и  $\mathbb{E}[UI_{\Omega \setminus A_n}] \leq [\max U]P(\Omega \setminus A_n) \rightarrow 0$ . Отсюда

$$\mathbb{E}U = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[UI_{A_n}] \leq M,$$

т. к. имеет место оценка  $\mathbb{E}[UI_{A_n}] \leq \mathbb{E}[XI_{A_n}] \leq M$ . Значит  $\mathbb{E}X \leq M$ . С другой стороны  $X \geq XI_{A_n}$ , откуда  $\mathbb{E}X \geq \mathbb{E}[XI_{A_n}]$ .  $\square$

**Предложение.** Пусть  $X$  — случайная величина, распределение которой имеет плотность  $\rho_X$ . Пусть задана непрерывная функция  $f$ . Тогда математическое ожидание  $\mathbb{E}f(X)$  существует тогда и только тогда, когда сходится несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\rho_X(x)dx.$$

Более того, в случае сходимости

$$\mathbb{E}f(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\rho_X(x)dx.$$

*Доказательство.* Пусть  $R > 0$ . Для непрерывной функции  $f$  на отрезке  $[-R, R]$  найдется последовательность ступенчатых функций  $g_n$ , равномерно сходящаяся к  $f$  на  $[-R, R]$ . Функции  $g_n$  имеют вид  $g_n = \sum_{j=1}^{N_n} c_j I_{[a_j, b_j]}$ , где  $\{[a_j, b_j]\}$  — разбиение отрезка  $[-R, R]$ . Заметим, что

$$\mathbb{E}g_n(X) = \sum_{j=1}^{N_n} c_j \mathbb{E}I_{\{a_j \leq X \leq b_j\}} = \sum_{j=1}^{N_n} c_j P(X \in [a_j, b_j]) = \sum_{j=1}^{N_n} c_j \int_{a_j}^{b_j} \rho_X(x)dx = \int_{-R}^R g_n(x)\rho_X(x)dx.$$

Заметим, что

$$|\mathbb{E}[f(X)I_{\{-R \leq X \leq R\}}] - \mathbb{E}g_n(X)| \leq \mathbb{E}[|f(X) - g_n(X)|I_{\{-R \leq X \leq R\}}] \leq \sup_{x \in [-R, R]} |f(x) - g_n(x)| \rightarrow 0.$$

Аналогично  $\int_{-R}^R g_n(x)\rho_X(x)dx \rightarrow \int_{-R}^R f(x)\rho_X(x)dx$ , откуда получаем равенство

$$\mathbb{E}[f(X)I_{\{-R \leq X \leq R\}}] = \int_{-R}^R f(x)\rho_X(x)dx.$$

Достаточно доказать исходное утверждение для неотрицательных функций  $f$ , для которых оно теперь следует из леммы 0.1.  $\square$

### Математическое ожидание произведения независимых случайных величин

**Предложение.** Пусть  $X, Y$  — независимые случайные величины, имеющие математическое ожидание. Тогда  $X \cdot Y$  также обладает математическим ожиданием и

$$\mathbb{E}[X \cdot Y] = [\mathbb{E}X] \cdot [\mathbb{E}Y].$$

*Доказательство.* Заметим, что

$$X \cdot Y = (X^+ - X^-)(Y^+ - Y^-) = X^+Y^+ + X^-Y^- - X^+Y^- - X^-Y^+.$$

Таким образом, достаточно доказать утверждение только для неотрицательных  $X, Y$ . Если  $X, Y$  ограничены,  $|X| < R$ ,  $|Y| < R$ , то рассмотрим

$$X_n(\omega) := \sum_{j=1}^n \left(-R + \frac{2R}{n}(k-1)\right) I_{\{\omega|-R+\frac{2R}{n}(k-1) \leq X(\omega) < -R+\frac{2R}{n}k\}},$$

$$Y_n(\omega) := \sum_{j=1}^n \left(-R + \frac{2R}{n}(k-1)\right) I_{\{\omega|-R+\frac{2R}{n}(k-1) \leq Y(\omega) < -R+\frac{2R}{n}k\}}.$$

Т.к.  $X_n$  имеет вид  $f_n(X)$ , а  $Y_n$  имеет вид  $f_n(Y)$  для некоторой функции  $f_n$ , то  $X_n$  и  $Y_n$  также независимы. Кроме того,  $X_n \Rightarrow X$ ,  $Y_n \Rightarrow Y$ . Поэтому

$$[EX] \cdot [EY] = \lim_{n \rightarrow \infty} [EX_n] \cdot [EY_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n \cdot Y_n] = \mathbb{E}[X \cdot Y].$$

Для общих неотрицательных независимых  $X$  и  $Y$ , рассмотрим независимые ограниченные случайные величины  $X I_{\{|X|<R\}}$  и  $Y I_{\{|Y|<R\}}$ . Тогда

$$\mathbb{E}[X I_{\{|X|<R\}} \cdot Y I_{\{|Y|<R\}}] = \mathbb{E}[X I_{\{|X|<R\}}] \cdot \mathbb{E}[Y I_{\{|Y|<R\}}].$$

Утверждение теперь следует из леммы 0.1. □

## Дисперсия, ковариация, коэффициент корреляции и их свойства

**Определение.** Дисперсией случайной величины  $X$  называется число  $\mathbb{D}X = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2$ .

**Определение.** Ковариацией пары случайных величин  $X, Y$  называется число  $\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y))$ .

**Определение.** Коэффициентом корреляции называется величина  $\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbb{D}X} \sqrt{\mathbb{D}Y}}$ .

**Теорема (Свойства дисперсии).**

1. Если  $\mathbb{D}X = 0$ , то  $X = \mathbb{E}X$  почти наверное;
2. Для произвольных чисел  $\alpha, \beta$  верно  $\mathbb{D}(\alpha X + \beta) = \alpha^2 \mathbb{D}X$ ;
3. Если  $X$  и  $Y$  независимы, то  $\text{cov}(X, Y) = 0$  и  $\mathbb{D}(X + Y) = \mathbb{D}X + \mathbb{D}Y$ .

*Доказательство.*

1. Исходя из свойства (3) мат. ожидания неотрицательной случайной величины с нулевым мат. ожиданием,  $(X - \mathbb{E}X)^2 = 0 \implies X = \mathbb{E}X$  почти наверное;
2. Исходит из линейности математического ожидания;
3. Так как  $\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - (\mathbb{E}X)(\mathbb{E}Y)$ , то из независимости  $X$  и  $Y$  следует  $\text{cov}(X, Y) = (\mathbb{E}X)(\mathbb{E}Y) - (\mathbb{E}X)(\mathbb{E}Y) = 0$ . Поэтому,  $\mathbb{D}(X + Y) = \mathbb{D}X + 2\text{cov}(X, Y) + \mathbb{D}Y = \mathbb{D}X + \mathbb{D}Y$ . □

## Неравенство Чебышева

**Предложение.** Пусть у неотрицательной случайной величины  $X$  определено математическое ожидание. Тогда  $P(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}X}{t}$  для каждого  $t > 0$ . Пусть у случайной величины  $X$  конечный второй момент, т.е.  $\mathbb{E}X^2 < \infty$ . Тогда

$$P(|X - \mathbb{E}X| \geq \varepsilon) \leq \varepsilon^{-2} \mathbb{D}X.$$

*Доказательство.* Заметим, что  $t \cdot I_{\{X \geq t\}} \leq X$ , поэтому

$$tP(X \geq t) = \mathbb{E}[t \cdot I_{\{X \geq t\}}] \leq \mathbb{E}X.$$

Второе неравенство обосновывается рассмотрением случайной величины  $|X - \mathbb{E}X|^2$  и применением первого неравенства. □