

# Второй коллоквиум по МА-2

Денис Козлов

[Telegram](#)

Версия от 17.12.2020 16:17

0.1

0.2

0.3

0.4

0.5

0.6

0.7

0.8

0.9

0.10

0.11

0.12

0.13

0.14

0.15

0.16

0.17

0.18

0.19

0.20

0.21

0.22

0.23

0.24

0.25

0.26

0.27

0.28

0.29

0.30

**0.31** Сформулируйте свойство непрерывности интеграла (о предельном переходе под знаком интеграла).

**Теорема.** Пусть все функции  $f_n$  ограничены и интегрируемы на  $D$ , а также  $f_n \Rightarrow f$  на  $D$ . Тогда функция  $f$  будет интегрируема на  $D$  и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_D f_n(x) dx = \int_D f(x) dx.$$

### 0.32 Сформулируйте свойство аддитивности интеграла.

**Теорема.** Пусть  $D$  — жорданово множество, а функция  $f$  — ограничена и интегрируема на  $D$ . Пусть  $A$  и  $B$  это дизъюнктные (непересекающиеся) жордановы подмножества  $D$ . Тогда:

$$\int_{A \sqcup B} f(x) dx = \int_A f(x) dx + \int_B f(x) dx.$$

### 0.33 Как вводится понятие заряда на кольце множеств? Покажите, что для заряда справедлива формула включения-исключения.

**Определение.** Функция  $\nu$ , определенная на некотором кольце множеств, называется зарядом, если

- а)  $\nu(\emptyset) = 0$ ;
- б)  $\nu(A \sqcup B) = \nu(A) + \nu(B)$  (аддитивность).

Таким образом, мера — это неотрицательный заряд.

*Пример.* Пусть  $f$  это ограниченная интегрируемая функция на множестве  $D$ . В силу свойства аддитивности интеграла имеем

$$\nu(A) = \int_A f(x) dx.$$

**Теорема.** Для заряда справедлива формула включений-исключений:

$$\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B) - \nu(A \cap B).$$

*Доказательство.* Заметим, что  $A \cup B = A \sqcup (B \setminus A)$  и  $B = (B \setminus A) \sqcup (A \cap B)$ .

- С одной стороны имеем

$$\nu(A \cup B) = \nu(A \sqcup (B \setminus A)) = \nu(A) + \nu(B \setminus A).$$

- С другой стороны имеем

$$\nu(A) + \nu(B) - \nu(A \cap B) = \nu(A) + \nu((B \setminus A) \sqcup (A \cap B)) - \nu(A \cap B) = \nu(A) + \nu(B \setminus A) + \nu(A \cap B) - \nu(A \cap B) = \nu(A) + \nu(B \setminus A).$$

То есть оба выражения равны  $\nu(A) + \nu(B \setminus A)$ , из чего делаем вывод:

$$\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B \setminus A) = \nu(A) + \nu(B) - \nu(A \cap B).$$

■

0.34  
0.35  
0.36  
0.37  
0.38  
0.39  
0.40  
0.41  
0.42  
0.43  
0.44  
0.45  
0.46  
0.47  
0.48  
0.49  
0.50  
0.51  
0.52  
0.53  
0.54  
0.55  
0.56  
0.57  
0.58  
0.59  
0.60  
0.61  
0.62  
0.63

**0.64 Выведите формулу для площади гладкой поверхности в  $\mathbb{R}^3$ , заданной уравнением  $z = f(x, y)$ ,  $f$  – непрерывно дифференцируемая функция.**

Простейший способ задать поверхность  $D$  – это задать её как график функции  $f(x, y)$ . Параметризацией такой поверхности будет

$$z = f(x, y), (x, y) \in G$$

Получим формулу для её площади. Вычислим матрицу Якоби:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f'_x & f'_y \end{pmatrix}$$

Найдём матрицу Грама:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x, y)} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x, y)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f'_x)^2 + 1 & f'_x f'_y \\ f'_x f'_y & (f'_y)^2 + 1 \end{pmatrix}$$

и её определитель:

$$((f'_x)^2 + 1)((f'_y)^2 + 1) - (f'_x f'_y)^2 = (f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1$$

Получаем площадь графика функции  $z = f(x, y)$

$$\mu(D) = \iint_G \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1} dx dy$$

**0.65**

**0.66**

**0.67**

**0.68**

**0.69**

**0.70**

**0.71**

**0.72**

**0.73**

**0.74**

**0.75**