Математический анализ, Экзамен 1

Балюк Игорь

@lodthe, GitHub

Дата изменения: 2020.02.28 в 00:20

Содержание

1 Вопросы

1. **Числовые последовательности. Примеры.**

   Определение из википедии: Пусть X — это либо множество вещественных чисел $\mathbb{R}$, либо множество комплексных чисел $\mathbb{C}$. Тогда последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов множества X называется **числовой последовательностью**.

   Определение из Ёжика: Отображение $\mathbb{N} \mapsto X$ будем называть последовательностью и записывать как $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Отображение $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ будем называть **числовой последовательностью**.

   Примеры:

   - $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ является бесконечной последовательностью рациональных чисел. Элементы этой последовательности начиная с первого имеют вид $1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \ldots$.
   - $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ является бесконечной последовательностью целых чисел. Элементы этой последовательности начиная с первого имеют вид $-1, 1, -1, 1, -1, \ldots$.

2. **Понятие предела последовательности.**

   Число a называется пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, если

   $$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N(\varepsilon) \implies |x_n - a| < \varepsilon$$

3. **Ограниченные и неограниченные последовательности.**

   - Ограниченная сверху последовательность — это последовательность элементов множества $\mathbb{R}$, все члены которой не превышают некоторого элемента из этого множества. Этот элемент называется верхней гранью данной последовательности (говоря в общем, это верно и не только для $\mathbb{R}$).
   $$\{x_n\} \text{ ограниченная сверху} \iff \exists M \in \mathbb{R} : \ \forall n \implies x_n \leqslant M$$
   - Ограниченная снизу последовательность — это последовательность элементов множества $\mathbb{R}$, для которой в этом множестве найдётся элемент, не превышающий всех её членов. Этот элемент называется нижней гранью данной последовательности.
   $$\{x_n\} \text{ ограниченная снизу} \iff \exists m \in \mathbb{R} : \ \forall n \implies x_n \geqslant m$$
   - Ограниченная последовательность (ограниченная с обеих сторон последовательность) — это последовательность, ограниченная и сверху, и снизу.
   $$\{x_n\} \text{ ограниченная} \iff \exists M, m \in \mathbb{R} : \ \forall n \implies m \leqslant x_n \leqslant M$$
   - Неограниченная последовательность — это последовательность, которая не является ограниченной.
   $$\{x_n\} \text{ неограниченная} \iff \forall M, m \in \mathbb{R} : \ \exists N \implies (x_N < m) \vee (x_N > M)$$

   Критерий ограниченности: Числовая последовательность является ограниченной тогда и только тогда, когда существует такое число, что модули всех членов последовательности не превышают его.
   $$\{x_n\} \text{ ограниченная} \iff \exists A \in \mathbb{R} : \ \forall N \implies |x_N| \leqslant A$$

4. **Теорема об ограниченности сходящейся последовательности.**

   Теорема. Всякая сходящаяся последовательность ограничена.

   Доказательство. Все члены последовательности, кроме конечного их числа, принадлежат окрестности предела — ограниченному множеству.

   Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится к a, т.е. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

   $$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \ \forall n \geqslant N \implies |x_n - a| < \varepsilon$$

   Пусть $\varepsilon = 1$, тогда $A = \max\{|x_1|, \ldots, |x_N|, |a - \varepsilon|, |a + \varepsilon|\}$. Тогда, $\forall n \in \mathbb{N} : \ |x_n| \leqslant A$. ■

5. Теорема о единственности предела сходящейся последовательности.

Теорема. Если предел числовой последовательности существует, то он единственный.

Доказательство. Доказательство теоремы проведем «методом от противного». Предположим, что теорема неверна. Тогда, пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a = b$ и выполняется следующее:

$$\begin{cases} a < b, \\ \forall\varepsilon > 0, \exists N_1(\varepsilon) : \forall n \geqslant N_1(\varepsilon) \implies |x_n - a| < \varepsilon, \\ \forall\varepsilon > 0, \exists N_2(\varepsilon) : \forall n \geqslant N_2(\varepsilon) \implies |x_n - b| < \varepsilon, \end{cases}$$

Положим $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$ и $N = max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$. Тогда, $\forall n \geqslant N \implies |x_n - a| < \varepsilon \ \wedge \ |x_n - b| < \varepsilon$. Возьмём $n \geqslant N$, тогда,

$$b - a = |b - a| = |b - x_n + x_n - a| \leqslant |x_n - b| + |x_n - a| < \frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{2} = b - a$$

Пришли к противоречию ($b - a < b - a$). ■

6. Теорема о переходе к пределу в неравенствах.

Теорема. Если элементы сходящейся последовательности $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенству $x_n \geqslant b$ ($x_n \leqslant b$), то и предел a этой последовательности удовлетворяет неравенству $a \geqslant b$ ($a \leqslant b$).

Доказательство. Пусть все элементы x_n, по крайней мере начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенству $x_n \geqslant b$. Требуется доказать неравенство $a \geqslant b$.

Предположим, что $a < b$. Поскольку a - предел последовательности $\{x_n\}$, то для положительного $\varepsilon = b - a$ можно указать номер N такой, что при $n \geqslant N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < b - a$. Это неравенство эквивалентно следующим двум неравенствам: $-(b-a) < x_n - a < b - a$. Используя правое из этих неравенств, получим $x_n < b$, а это противоречит условию теоремы. Случай $x_n \leqslant b$ рассматривается аналогично.. ■

Замечание 1. Элементы сходящейся последовательности $\{x_n\}$ могут удовлетворять строгому неравенству $x_n > b$, однако при этом предел a может оказаться равным b. Например, если $x_n = \dfrac{1}{n}$, то $x_n > 0$, однако $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

7. Теорема о вынужденном пределе.

Теорема. Если $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Доказательство. Из определения предела $\{x_n\}$, $\forall\varepsilon > 0 \ \exists N_1 : \ \forall n \geqslant N_1 \implies |x_n - a| < \varepsilon \iff a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Аналогично для предела $\{z_n\}$, $\forall\varepsilon > 0 \ \exists N_2 : \ \forall n \geqslant N_2 \implies |z_n - a| < \varepsilon \iff a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$.

Тогда, $\forall n \geqslant \max\{N_1, N_2\} \implies a - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < a + \varepsilon \implies \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. ■

8. Теорема о сходимости монотонных ограниченных последовательностей.

Теорема. Неубывающая числовая последовательность имеет предел, причём он в точности равен точной верхней границе (нижней границе, для ограниченной невозрастающей ч.п.).

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — ограниченная неубывающая числовая последовательность. Тогда множество $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ограничено, следовательно, из определения супремума, имеет супремум. Обозначим его через S. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = S$. Действительно, так как $S = sup\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, то

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists N : \ \forall n \geqslant N \implies S - \varepsilon < x_N \leqslant x_n \leqslant S \implies |x_n - S| < \varepsilon$$

■

Аналогичное доказательство для ограниченной невозрастающей ч.п.

9. Определение числа e.

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Теорема. Последовательность с общим членом $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ имеет конечный предел при $n \to \infty$. Для обозначение этого предела используется символ e.

Доказательство. Докажем сначала, что $\{e_n\}$ представляет собой монотонно возрастающую последовательность. Согласно биному Ньютона,

$$\begin{aligned} e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{1}{n^n} \\ &= 2 + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \frac{1}{n!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{n-1}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\ &= 2 + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \ldots \end{aligned}$$

Сравним e_n и e_{n+1}:

- Оба выражения содержат только положительные слагаемые
- Начиная со второго слогаемого, каждый член в выражении e_{n+1} превышает соответствующий член в e_n, так как

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) < \left(1 - \frac{1}{n+1}\right), \left(1 - \frac{2}{n}\right) < \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \ldots$$

- Выражение e_{n+1} состоит из большего числа слагаемых. Следовательно, $e_{n+1} > e_n$.

Далее докажем, что последовательность $\{e_n\}$ является ограниченной. Действительно, первый член любой монотонно возрастающей последовательности является ее наибольшей нижней границей и, таким образом, $e_n \geqslant 2 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Перейдем к доказательству существования верхней границы. Очевидно, что

$$\begin{aligned} e_n = 2 + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \frac{1}{n!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{n-1}\right) < \\ < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots + \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

Кроме того, $\frac{1}{k!} < \frac{1}{2^k} \ \forall k > 3$. Тогда,

$$\frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots + \frac{1}{n!} < \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

Правая часть этого неравенства представляет собой сумму убывающей геометрической прогрессии, которая равна $\frac{\frac{1}{16}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$. Таким образом, последовательность

$$e_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} < 3$$

представляет собой ограниченную монотонно возрастающую последовательность и, следовательно, имеет конечный предел. ■

10. Бесконечно малые последовательности.

Последовательность $\{a_n\}$ называется бесконечно малой, если

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n \geqslant N \implies |a_n| < \varepsilon$$

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

11. Связь со сходящимися последовательностями.

Если предел последовательности равен 0, то это бесконечно малая последовательность. Бесконечно малые последовательности являются сходящимися последовательностями.

Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ имела предел b, необходимо и достаточно, чтобы $x_n = b + \alpha_n$, где α_n — бесконечно малая последовательность.

12. Арифметические свойства бесконечно малых и сходящихся последовательностей.

Пусть $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая числовая последвательность.

Теорема. $\{\alpha_n\}$ ограничена

Доказательство. Как известно, $\forall\varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n > N \implies |\alpha_n| < \varepsilon$. Значит, для всех $n > N$ доказано. Но $\forall n < N \implies \alpha_n \leqslant \max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|, \ldots, |\alpha_{N-1}|\}$. Тогда выберем $\varepsilon = 1$, $A = \max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|, \ldots, |\alpha_{N-1}|, 1\} \implies \forall n \in \mathbb{N}, |\alpha_n| \leqslant A$. ∎

Теорема. Если $\{y_n\}$ ограничена, то $\{y_n \cdot \alpha_n\}$ — бесконечно малая.

Доказательство. $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая, поэтому $\forall\varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n \geqslant N \implies |\alpha_n| < \dfrac{\varepsilon}{A}$. Ввиду ограниченности $\{y_n\}, \exists A:\ \forall n \in \mathbb{N} \implies |y_n| \leqslant A$. Но тогда $\{y_n \cdot \alpha_n\}: \forall\varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n \geqslant N \implies |y_n \cdot \alpha_n| < \dfrac{\varepsilon}{A} \cdot A = \varepsilon$. ∎

Теорема. Если $\{\beta_n\}$ — бесконечно малая, то $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ и $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ — бесконечно малые.

Доказательство.

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_1 : \forall n \geqslant N_1 \implies |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } \forall\varepsilon > 0\ \exists N_2 : \forall n \geqslant N_2 \implies |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{Тогда при } N = \max\{N_1, N_2\} \implies \forall n \geqslant N \implies |\alpha_n \pm \beta_n| \leqslant |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Аналогично для произведения:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_1 : \forall n \geqslant N_1 \implies |\alpha_n| < \frac{1}{\varepsilon} \text{ и } \forall\varepsilon > 0\ \exists N_2 : \forall n \geqslant N_2 \implies |\beta_n| < \varepsilon^2$$

$$\text{Тогда при } N = \max\{N_1, N_2\} \implies \forall n \geqslant N \implies |\alpha_n \cdot \beta_n| \leqslant |\alpha_n| \cdot |\beta_n| < \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varepsilon^2 = \varepsilon$$

∎

13. Арифметические свойства для последовательностей, имеющих конечные и бесконечные пределы.

Теорема. Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$, $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$, а также $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$, если $b \neq 0$.

Доказательство.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = b \iff x_n = a + \alpha_n, y_n = b + \beta_n, \text{ где } \{\alpha_n\}\{\beta_n\}\text{— бесконечно малые.}$$

$$x_n \pm y_n = (a + \alpha_n) \pm (b + \beta_n) = (a \pm b) + \underbrace{(\alpha_n \pm \beta_n)}_{\text{б. м.}}$$

$$x_n \cdot y_n = (a + \alpha_n) \cdot (b + \beta_n) = a \cdot b + \underbrace{(\alpha_n \cdot \beta_n + \alpha_n \cdot b + \beta_n \cdot a)}_{\text{б.м.}}$$

Лемма. Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$. Тогда $\exists r > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N \implies |y_n| > r > 0$.

Доказательство. $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geqslant N \implies |y_n - b| < \varepsilon \implies b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon$. Пусть $\varepsilon = \left|\dfrac{b}{2}\right|$, тогда $r < \left|\dfrac{b}{2}\right| < |y_n| < \left|\dfrac{3b}{2}\right|$. ■

Рассмотрим последовательность $\left\{\dfrac{x_n}{y_n} - \dfrac{a}{b}\right\}$ — бесконечно малая.

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{b \cdot a + b \cdot \alpha_n - b \cdot a - \beta_n \cdot a}{y_n \cdot b} = (\alpha_n \cdot b - \beta_b \cdot a) \cdot \frac{1}{y_n \cdot b}$$

По лемме $\left|\dfrac{1}{y_n \cdot b}\right| \leqslant max\left\{\left|\dfrac{1}{y_1 \cdot b}\right|, \ldots, \left|\dfrac{1}{y_N \cdot b}\right|, \dfrac{1}{rb}\right\} \implies \left\{\dfrac{1}{y_n \cdot b}\right\}$ ограничена. Но тогда имеем произведение бесконечно малой и ограниченной последовательностей, значит, $\left\{\dfrac{x_n}{y_n} - \dfrac{a}{b}\right\}$ — бесконечно малая. ■

14. Неопределенности.

Не очень понятно, что именно требуется в этом пункте

Основные виды неопределенностей: $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^{\infty}, 0^0, \infty^0$

Раскрывать неопределенность помогает:

- упрощение вида функции (преобразование выражения с использованием формул сокращенного умножения,
- тригонометрических формул, домножением на сопряженные выражения с последующим сокращением и т.п.); использование замечательных пределов;

15. Определение подпоследовательности.

Подпоследоследовательность последовательности $\{x_n\}$ — это последовательность $\{x_{n_k}\} = \{x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}\}$, полученная из $\{x_n\}$, удалением ряда её членов без изменения порядка следования членов.

То есть подпоследовательность состоит из членов исходной последовательности $\{x_n\}$ с номерами n_k, где $\{n_k\}$ — строго монотонная последовательность натуральных чисел.

Замечание 2. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, тогда $\forall \{a_{n_k}\} : \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$

16. Теорема Больцано-Вейерштрасса.

Теорема. Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. $\{x_n\}$ ограничена $\implies \exists [a, b] : \forall n \in N \implies a \leqslant x_n \leqslant b$. Поделим $[a; b]$ на две равные части. Хотя бы одна из частей (пусть это $[a_1; b_1]$) содержит бесконечно много элементов $\{x_n\}$.

Выберем на $[a_1; b_1]$ произвольный элемент $\{x_n\}$. Назовем его x_{n_1}. Далее делим $[a_1; b_1]$ на две равные части. Хотя бы одна из этих частей содержит бесконечно много элементов $\{x_n\}$. Обозначим ее $[a_2; b_2]$. Выберем $x_{n_2} \in [a_2; b_2]$. Будем продолжать выполнять указанные действия. Обозначим за x_{n_k} число, полученное на k-ом шаге, т.е. $x_{n_k} \in [a_k; b_k]$.

$\{[a_k; b_k]\}$ — система стягивающихся отрезков. Тогда, существует единственное $c : \forall k \implies c \in [a_k; b_k]$.

$\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k = c \implies \exists \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = c$ (по теореме о двух милиционерах) ■

17. Критерий Коши сходимости последовательности.

Теорема. Для того, чтобы последовательность $\{x_n\}$ сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Последовательность называется фундаментальной, если

$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N : \forall n, m \geqslant N : |x_n - x_m| < \varepsilon$

Доказательство. Докажем необходимость и достаточность.

- Необходимость:
  Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ по определению:
  $$\forall\varepsilon>0:\ \exists N:\ \forall p\geqslant N \implies |x_p-a|<\varepsilon$$
  Поскольку ε произвольное, можно взять вместо него $\dfrac{\varepsilon}{2}$
  $$p=m\geqslant N \implies |x_m-a|<\frac{\varepsilon}{2}$$
  $$p=n\geqslant N \implies |x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$$
  $$|x_n-x_m|=|x_n-a+a-x_m|\leqslant|x_n-a|+|a-x_m|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$
  То есть $|x_n-x_m|<\varepsilon$, а значит $\{x_n\}$ фундаментальная по определению. Необходимость доказана
- Достаточность:
  Пусть $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность, докажем, что она имеет предел. Сначала покажем, что $\{x_n\}$ — ограничена. По определению фундаментальной последовательности
  $$\forall\varepsilon>0\ \exists N:\forall n,m\geqslant N:|x_n-x_m|<\varepsilon$$
  Так как ε произвольное, возьмём $\varepsilon=1$.
  $$|x_n|=|(x_n-x_N)+x_N|\leqslant\underbrace{|x_n-x_N|}_{\leqslant\varepsilon}+|x_N|\leqslant 1+|x_N|$$
  $$\forall n\geqslant N \implies |x_n|\leqslant(1+|x_N|)\ =const\leqslant A \implies |x_n|\leqslant A$$
  $$A=\max\{1+|x_N|;|x_1|;|x_2|;\ldots;|x_N|\}$$
  $$\forall n\geqslant N \implies |x_n|\leqslant A$$
  По теореме **??** Больцано-Вейерштрасса, так как $\{x_n\}$ — ограниченная, $\{x_n\}$ имеет сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$.
  Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=a$, покажем, что число a и будет пределом всей последовательности $\{x_n\}$.
  Так как $\{x_n\}$ фундаментальная:
  $$\forall\varepsilon>0:\ \exists N_1:\ \forall m,n\geqslant N_1 \implies |x_m-x_n|<\frac{\varepsilon}{2}$$
  Так как $\{x_{n_k}\}$ сходящаяся:
  $$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=a:\ \forall\varepsilon>0\ \exists N_2:\ \forall n_k\geqslant n_{N_2} \implies |x_{n_k}-a|<\frac{\varepsilon}{2}$$
  $$\forall\varepsilon>0:\ |x_n-a|=|(x_n-x_{n_k})+(x_{n_k}-a)|\leqslant|x_n-x_{n_k}|+|x_{n_k}-a|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$
  $$\text{Возьмём } N=\max\{N_1,N_2\}:\ \forall\varepsilon>0\ \exists N:\ \forall n\geqslant N \implies |x_n-a|<\varepsilon$$
  Достаточность доказана.

■

18. Определение предела функции в точке по Коши и по Гейне.

- По Коши (или на языке $\varepsilon-\delta$):
  A — предел функции $f(x)$ в точке a ($\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$), если
  $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\forall x:\ 0<|x-a|<\delta \implies |f(x)-A|<\varepsilon$
- По Гейне:
  A называется пределом функции $f(x)$ в точке a, если $\forall\{x_n\}\to a, x_n\neq a$ (т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$), соответствующая последовательность значений $f(x_n)\to A$ (т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$)

19. Теорема об эквивалентности этих определений.

- Из определения по Коши следует определение по Гейне:
Выберем произвольную $\{x_n\} \to a, x_n \neq a$. По определению предела последовательности

$$\forall \delta > 0\, \exists N:\ \forall n \geqslant N \implies |x_n - a| < \delta$$

Указанное неравенство выполняется для любого $\delta > 0$. Тогда какое бы $\varepsilon > 0$ мы бы ни выбрали, можно найти $\delta > 0$, такое, что по определению по Коши будет выполняться

$$\forall x:\ 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

т.е. $\{f(x_n)\} \to A$, а значит из сходимости по Коши следует сходимость по Гейне.
- Из определения по Гейне следует определение по Коши:
Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$ По Гейне. От противного: если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ по Гейне, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq A$ по Коши. Напишем отрицание определения по Коши:

$$\exists \varepsilon_0:\ \forall \delta > 0:\ \exists x:\ 0 < |x - a| < \delta:\ |f(x) - A| \geqslant \varepsilon_0$$

Так как δ может быть любым, можно выбрать последовательность $\{\delta_n\} = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}$, а соответствующие значения x будем обозначать как x_n. Тогда $0 < |x_n - a| < \delta_n = \dfrac{1}{n}$, и $|f(x_n) - A| \geqslant \varepsilon_0$. Отсюда следует, что последовательность $\{x_n\}$ является подходящей, но при этом число A не является пределом функции $f(x)$ в точке a (по Гейне). Пришли к противоречию.

20. Односторонние пределы, их связь с двусторонними. Пределы функции в бесконечности.

Назовём число A левым (правым) пределом f по Коши, если:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0:\ \forall x \in (a - \delta; a)(x \in (a; a + \delta)) \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

Назовём число A левым (правым) пределом f по Гейне, если:

$$\forall \{x_n\}:\ \forall n \in \mathbb{N}, x_n \neq a, x_n < a\ (x_n > a) \text{ и } \lim_{n\to\infty} x_n = a \implies \{f(x_n)\} \xrightarrow[n\to\infty]{} A$$

Обозначим односторонние пределы так: $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A = f(a - 0)$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A = f(a + 0)$. Таким образом, когда мы можем «подойти» к предельному значению функции, двигаясь по x к точке a слева, говорят, что существует левый предел. Аналогично следует понимать и определение правого предела. Поэтому если мы можем подойти к a и слева, и справа, то существует предел в точке a. В кванторах это значит следующее:

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = A \iff \exists f(a - 0) = f(a + 0) = A$$
$$(\text{т. к. } \forall x:\ a - \delta < x < a \ \text{ и } \forall x:\ a < x < a + \delta \iff \forall x:\ 0 < |x - a| < \delta)$$

Предел функции на бесконечности:

- По Коши:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0:\ \forall x \in D(f):\ |x| > \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

- По Гейне:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \iff \forall \{x_n\}:\ \lim_{n\to\infty} x_n = \infty \implies \lim_{n\to\infty} f(x) = A$$

23. Первый и второй замечательные пределы.

1.23.1 Первый замечательный предел

Утверждение.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 0$$

Доказательство

1.23.2 Второй замечательный предел

Утверждение.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Доказательство. Будем пользоваться тем фактом, что $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ (тут $n \in \mathbb{N}$, а x в утверждении — может быть не целым)

$[x]$ — целая часть от числа x. Тогда

$$[x] \leqslant x \leqslant [x+1] = [x]+1$$
$$\frac{1}{[x]+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{[x]}$$
$$1+\frac{1}{[x]+1} \leqslant 1+\frac{1}{x} \leqslant 1+\frac{1}{[x]}$$
$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} \leqslant \left(1+\frac{1}{x}\right)^{[x]} \leqslant \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}$$
$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} \leqslant \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \leqslant \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

Воспользуемся теоремой о вынужденной сходимости

$$\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \to e$$
$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} = \left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1-1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1} \to e$$
$$\text{Пояснение: } \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e$$

■

Рассмотрим похожее утверждение

Утверждение.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Доказательство.

$$y = -x$$
$$x\to-\infty \iff y\to\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \iff \lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} =$$
$$= \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y-1+1}{y-1}\right)^{y} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1+1} = e$$

■

24. Критерий Коши существования конечного предела функции.

Теорема. Для того, чтобы функция f имела конечный предел в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие Коши: для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое число $\delta > 0$, что для всех $u, v \in X$ из неравенств $0 < |u-x_0| < \delta, 0 < |v-x_0| < \delta$ следует неравенство $|f(u)-f(v)| < \varepsilon$.

Доказательство

25. Определение непрерывности функции в точке.

Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если она определена на некоторой окрестности этой точки $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Другими словами, $A = f(x_0)$ и справедливы следующие определения предела функции в точке x_0:

- ***По Коши***:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

- ***По Гейне***:

$$\forall \{x_n\} :\ x_n \in \overset{\circ}{U}(x_0), \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$$

26. Точки разрыва, их классификация.

Пусть $f(x)$ определена в некоторой окрестности $U_\delta(a)$ и функция разрывна в a. Тогда говорят, что функция имеет

- ***Устранимый разрыв***: пределы $f(x)$ справа и слева существуют и равны друг другу, но отличаются от значения функции в исследуемой точке:

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x) \neq f(a)$$

- ***Неустранимый разрыв первого рода***: пределы $f(x)$ справа и слева существуют, но не равны друг другу
- ***Неустранимый разрыв второго рода***: хотя бы один из односторонних пределов $f(x)$ не существует или равен бесконечности.

27. Непрерывность элементарных функций.

Многие элементарные функции непрерывны на своей области определения (например, $\sin x, \cos x$). Докажем для некоторых из них

$$\lim_{\Delta\to 0} \sin(x_0 + \Delta) = \lim_{\Delta\to 0} (\sin x_0 \cos\Delta + \cos x_0 \sin\Delta) = \sin x_0 \cdot 1 + \cos x_0 \cdot 0 = \sin x_0$$

$$\lim_{\Delta\to 0} \cos(x_0 + \Delta) = \lim_{\Delta\to 0} (\cos x_0 \cos\Delta - \sin x_0 \sin\Delta) = \cos x_0 \cdot 1 - \sin x_0 \cdot 0 = \cos x_0$$

Тангенс и котангенс выражаются через синус и косинус. Воспользуемся арифметическими свойствами непрерывных функций. Поскольку синус и косинус определены и непрерывны для всех x, то тангенс и котангенс определены и непрерывны для всех x, кроме точек, в которых знаменатель обращается в нуль:

$$y = \operatorname{tg} x, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$
$$y = \operatorname{ctg} x, \quad x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\lim_{\Delta\to 0} a^{x_0+\Delta} = a^{x_0} \cdot a^0 = a^{x_0} \cdot 1 = a^{x_0}$$

28. Арифметические свойства непрерывных функций.

Теорема. Пусть $g(x)$ и $f(x)$ непрерывны в a, тогда функции $f \pm g, f \cdot g, \dfrac{f}{g}(g \neq 0)$ также непрерывны в точке a.

Доказательство. Рассмотрим сумму $(f(x)+g(x))$. Для остальных операций доказательство практически аналогично. По определению $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$. Но тогда, используя свойство суммы для пределов, получаем, что $\lim\limits_{x\to a} (f(x) + g(x)) = f(a) + g(a)$, что означает, что $(f(x) + g(x))$ непрерывна в точке a. ■

29. Теорема о непрерывности сложной функции.

Теорема. Если функция $g(t)$ непрерывна в точке t_0 и функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 = g(t_0)$, то $f(g(t))$ непрерывна в t_0.

Доказательство. Для доказательства этой теоремы воспользуемся формальным преобразованием двух выражений с кванторами.

$f(x)$ непрерывна в x_0:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 :\ \forall x :\ 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$g(t)$ непрерывна в t_0:

$$\forall\delta > 0\ \exists\mu > 0 :\ \forall t :\ 0 < |t - t_0| < \mu \implies |g(t) - g(t_0)| < \delta$$

Получается, $f(g(t))$ непрерывна в t_0:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\mu > 0 :\ \forall t :\ 0 < |t - t_0| < \mu \implies |f(g(t)) - f(g(t_0))| < \varepsilon$$

■

30. Свойства функций, непрерывных на отрезке (первая и вторая теоремы Вейерштрасса).

Теорема Вейерштрасса (первая) Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она на нём ограничена, то есть $\exists A :\ \forall x \in [a, b] \implies |f(x)| \leqslant A$

Доказательство. Докажем от противного.

Пусть f не ограничена на отрезке $[a, b]$, тогда:

$$\begin{gathered}\forall A > 0\ \exists x_A \in [a, b] :\ |f(x_A)| > A \\ A = 1 \implies \exists x_1 \in [a, b] :\ |f(x_1)| > 1 \\ A = 2 \implies \exists x_2 \in [a, b] :\ |f(x_2)| > 2 \\ \vdots \\ A = n \implies \exists x_n \in [a, b] :\ |f(x_n)| > n\end{gathered}$$

Получим последовательность $\{x_n\} \subset [a, b]$, то есть последовательность $\{x_n\}$ ограничена.

По теореме Больцано-Вейерштрасса из неё можно выделить подпоследовательность, которая сходится к точке c, то есть

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c$$

Тогда $c \in [a, b]$. Но по условию функция непрерывна в точке c и тогда по определению непрерывности в точке по Гейне $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(c)$.

С другой стороны

$$|f(x_{n_k})| > n_k, n_k \geqslant k \implies \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \infty$$

А это противоречит единственности предела. ■

Теорема Вейерштрасса (вторая) Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция f достигает на нем своих точных нижней и верхней граней. То есть существуют такие точки $c_1, c_2 \in [a, b]$, так что для любого $x \in [a, b]$, выполняются неравенства:

$$f(c_2) \leqslant f(x) \leqslant f(c_1)$$

Доказательство. Докажем $\exists c_1 \in [a, b] :\ f(c_1) = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Пусть $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ (существование следует из первой теоремы Вейерштрасса). В силу определения точной верхней грани выполняется условие:

$$\begin{cases}\forall x \in [a, b] \implies f(x) \leqslant M \\ \forall\varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon \in [a, b] :\ M - \varepsilon < f(x_\varepsilon)\end{cases}$$

Полагая $\varepsilon = 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dots, \dfrac{1}{n}$ получим последовательность $\{x_n\}$ такую, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняются условия $M - \dfrac{1}{n} < f(x_n) \leqslant M$, откуда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$. Существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$

последовательности $\{x_n\}$ (она ограничена отрезком $[a,b]$, а значит является ограниченной) и точка c (по теореме Больцано-Вейерштрасса, из последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к точке c), такие что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = c$, где $c \in [a,b]$.

В силу непрерывности функции f в точке c, получаем $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(c)$.

С другой стороны, $\{f(x_{n_k})\}$ — подпоследовательность последовательности $\{f(x_n)\}$, сходящейся к числу M. Поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M$.

В силу единственности предела последовательности заключаем, что $f(c) = M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Утверждение $\exists c_1 \in [a,b] : \ f(c_1) = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ доказано.

Аналогично доказывается $\exists c_2 \in [a,b] : \ f(c_2) = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

Функция непрерывна на интервале может не достигать своих точных граней (требовать непрерывности на сегменте существенно). ■

31. Критерий существования и непрерывности обратной функции на промежутке

32. Теорема Коши о прохождении непрерывной функции через промежуточные значения.

Теорема Больцано-Коши (первая), о нулях непрерывной функции Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$ и на своих концах принимает значение разных знаков, то существует такая точка, принадлежащая этому отрезку, в которой функция обращается в нуль.

Доказательство. Геометрически очень легко: функция пересечет ось OX.

Алгебраически: разделим отрезок $[a,b]$ точкой x_0 на два равных по длине отрезка, тогда либо $f(x_0) = 0$ и, значит, искомая точка x_0 найдена, либо $f(x_0) \neq 0$ и тогда на концах одного из полученных промежутков функция f принимает значения разных знаков, точнее, на левом конце значение меньше нуля, на правом — больше.

Обозначим этот отрезок $[a_1, b_1]$ и разделим его снова на два равных подлине отрезка и т.д. В результате, либо через конечное число шагов придем к искомой точке x, в которой $f(x) = 0$, либо получим последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$ по длине стремящихся к нулю и таких, что

$$f(a_n) < 0 < f(b_n)$$

Пусть γ — общая точка всех отрезков $[a_n, b_n]$. Тогда $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Поэтому, в силу непрерывности функции f

$$f(\gamma) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$$

Но тогда

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \leqslant 0 \leqslant \lim_{n\to\infty} f(b_n)$$

Откуда следует, что $f(\gamma) = 0$. ■

Теорема Больцано-Коши (вторая), о промежуточном значении непрерывных функций Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $A = f(a) \neq f(b) = B$, число $C \in (A,B)$, тогда существует такая точка $c \in [a,b]$, что $f(c) = C$.

Другими словами, утверждается, что если непрерывная функция, принимает два значения, то она принимает и любое значение между ними.

Доказательство. Не нарушая общности будем считать, что $A = f(a) < f(b) = B$. Рассмотри функцию $h(x) = f(x) - C$, непрерывность на отрезке $[a,b]$ которой следует из непрерывности функции f. Очевидно что $h(a) = A - C < 0$ и $h(b) = B - C > 0$. Применяем к h первую теорему Больцано-Коши и находим точку c, в которой $h(c) = f(c) - C = 0$, то есть $f(c) = C$. Теорема доказана. ■

33. Понятие производной функции в точке.

Рассмотрим функцию, область определения которой содержит точку x_0. Тогда функция $f(x)$ является дифференцируемой в точке x_0, и ее производная $f'(x_0)$ определяется следующей формулой, если существует предел

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta\to 0} \frac{f(x_0+\Delta) - f(x_0)}{\Delta}$$

34. Геометрический и физический смысл производной.

Геометрический смысл производной. Производная в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в этой точке.

Физический смысл производной. Если точка движется вдоль оси OX и ее координата изменяется по закону $x(t)$, то мгновенная скорость точки: $v(t) = x'(t)$.

35. Уравнение касательной к графику функции в точке.

Пусть дана функция f, которая в некоторой точке x_0 имеет конечную производную $f'(x_0)$. Тогда прямая, проходящая через точку $(x_0; f(x_0))$, имеющая угловой коэффициент $f'(x_0)$, называется касательной.

Итак, пусть дана функция $y = f(x)$, которая имеет производную $y = f'(x)$ на отрезке $[a, b]$. Тогда в любой точке $x_0 \in (a; b)$ к графику этой функции можно провести касательную, которая задается уравнением:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

36. Понятие дифференцируемости функции в точке.

Функция $f(x)$ является дифференцируемой в точке x_0 своей области определения $D[f]$, если существует такая константа A, что:

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \bar{\bar{o}}(x - x_0)$$

и

$$A = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Теорема $f(x)$ дифференцируема в точке x только и только тогда, когда $\exists f'(x)$, причем $A = f'(x)$

Доказательство. Докажем необходимость и достаточность

- **Необходимость**. Пусть $f(x)$ дифференцируема в точке $x \implies \Delta y = A\Delta x + \bar{\bar{o}}(\Delta x) \implies \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A + \dfrac{\bar{\bar{o}}(\Delta x)}{\Delta x} = A + \bar{\bar{o}}(1)$
  Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A \implies A = f'(x)$
- **Достаточность**. Пусть $\exists f'(x) \implies \exists \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$. Рассмотрим $\beta(\Delta x) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)$. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \beta(\Delta x) = 0$, т.е. $\beta(\Delta x) = \bar{\bar{o}}(1) \implies \dfrac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = \bar{\bar{o}}(1) \implies \Delta y = f'(x)\Delta x + \bar{\bar{o}}(\Delta x)$

■

37. Необходимое условие дифференцируемости.

Теорема. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Тогда её приращение представимо в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \bar{\bar{o}}(\Delta x)$$

Но тогда при $\Delta x \to 0$ будет $\Delta y \to 0$, а это означает непрерывность функции $y = f(x)$ в точке x_0. ■

Обратите внимание, что из непрерывности не следует дифференцируемости (например, $f(x) = |x|$).

38. Правила дифференцирования.

Теорема. Если $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x, то $f \pm g$, $f \cdot g$, $\dfrac{f}{g} (g \neq 0)$ также дифференцируемы в точке x, причем $(f \pm g)' = f' \pm g'$, $(f \cdot g)' = f'g + fg'$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

Доказательство. Будем считать, что Δf отвечает приращению $f(x)$, Δg отвечает приращению $g(x)$, а Δh отвечает приращению $h(x)$.

1. $h(x) = f(x) \pm g(x)$

$$\begin{aligned}\Delta h = h(x+\Delta x) - h(x) &= (f(x+\Delta x) \pm g(x+\Delta x)) - (f(x) \pm g(x)) \\ &= (f(x+\Delta x) - f(x)) \pm (g(x+\Delta x) - g(x)) \\ &= \Delta f \pm \Delta g\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} \pm \frac{\Delta g}{\Delta x}$$

При $\Delta x \to 0$ существует предел правой части, равный $f'(x) \pm g'(x)$, а значит, существует и предел левой части

$$h'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

2. $h(x) = f(x) \cdot g(x)$

$$\begin{aligned}\Delta h = h(x+\Delta x) - h(x) &= f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x)g(x) \\ &= (f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x) \cdot g(x)) + (f(x+\Delta x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x))\end{aligned}$$

Далее можно записать

$$\Delta h = f(x+\Delta x) \cdot (g(x+\Delta x) - g(x)) + g(x) \cdot (f(x+\Delta x) - f(x)) = f(x+\Delta x) \cdot \Delta g + g(x)\Delta f$$

Таким образом

$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = f(x+\Delta x)\frac{\Delta g}{\Delta x} + g(x) \cdot \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Возьмем теперь предел правой части при $\Delta x \to 0$. В силу непрерывности $f(x)$ в x (т.к. она дифференцируема в этой точке) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) = f(x)$. Тогда получаем, что

$$h'(x) = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

Лемма. Если $f(x)$ непрерывна в точке a и $f(a) > 0 (f(a) < 0)$, то $\exists \delta > 0 : f(x) > 0 (f(x) < 0) \forall x \in U_\delta(a)$

Доказательство. Так как $f(x) \in C(a)$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \in U_\delta(a) \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon \iff f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$. Положим $\varepsilon = \dfrac{|f(a)|}{2}$, тогда $f(a) - \varepsilon > 0$ при $f(a) > 0$ и $f(a) + \varepsilon < 0$ при $f(a) < 0$. Т.е. левая и правая части неравенства всегда одного знака, значит $\forall x \in U_\delta(a)$ выполнено требуемое. ∎

3. $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$. По лемме, $g(x) \neq 0$, то $g(x+\Delta x) \neq 0$ для малых Δx. Тогда

$$\begin{aligned}\Delta h = h(x+\Delta x) - h(x) &= \frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)} \\ &= \frac{f(x+\Delta x)g(x) - g(x+\Delta x)f(x)}{g(x)g(x+\Delta x)} \\ &= \frac{(f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x)) - (g(x+\Delta x)f(x) - f(x)g(x))}{g(x)g(x+\Delta x)} \\ &= \frac{g(x)(f(x+\Delta x) - f(x)) - f(x)(g(x+\Delta x) - g(x))}{g(x)g(x+\Delta x)} \\ &= \frac{g(x)\Delta f - f(x)\Delta g}{g(x)g(x+\Delta x)}\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{g(x)\dfrac{\Delta f}{\Delta x} - f(x)\dfrac{\Delta g}{\Delta x}}{g(x)g(x+\Delta x)}$$

Снова используя непрерывность и беря предел правой и левой частей, получаем, что

$$h'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

■

39. Теорема о дифференцируемости и производной сложной функции.

Теорема. Пусть функцию $y = y(x)$ от переменной x можно представить как сложную функцию в следующем виде:

$$y(x) = f(u(x))$$

где $f(u)$ и $u(x)$ есть некоторые функции. Функция $u = u(x)$ дифференцируема при некотором значении переменной x. Функция $f(u)$ дифференцируема при значении переменной $u = u(x)$. Тогда сложная (составная) функция $y = f(u(x))$ дифференцируема в точке x и ее производная определяется по формуле:

$$y'(x) = f'(u) \cdot u'(x)$$

Доказательство. Введем следующие обозначения.

$$\Delta u = u(x + \Delta x) - u(x)$$
$$\Delta f = f(u + \Delta u) - f(u) = f(u(x + \Delta x)) - f(u(x))$$

Здесь Δu есть функция от переменных x и Δx, Δf есть функция от переменных u и Δu. Но мы будем опускать аргументы этих функций, чтобы не загромождать выкладки.

Поскольку функции u и f дифференцируемы в точках x и $u = u(x)$, соответственно, то в этих точках существуют производные этих функций, которые являются следующими пределами:

$$u'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$
$$f'(u) = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta u}$$

Рассмотрим следующую функцию:

$$\varepsilon(\Delta u) = \frac{\Delta f}{\Delta u} - f'(u)$$

При фиксированном значении переменной u, ε является функцией от Δu. Очевидно, что

$$\lim_{\Delta u \to 0} \varepsilon(\Delta u) = 0$$

Тогда

$$\Delta f = (f'(u) + \varepsilon(\Delta u)) \cdot \Delta u$$

Поскольку функция $u(x)$ является дифференцируемой функцией в точке x, то она непрерывна в этой точке. Поэтому

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta u) = \lim_{\Delta u \to 0} \varepsilon(\Delta u) = 0$$

Теперь находим производную.

$$\begin{aligned}
y'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(f'(u) \frac{\Delta u}{\Delta x} + \varepsilon(\Delta u) \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) \\
&= f'(u) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta u) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\
&= f'(u) \cdot u'(x) + 0 \cdot u'(x) \\
&= f'(u) \cdot u'(x)
\end{aligned}$$

Формула доказана. ■

40. Теорема о дифференцируемости обратной функции

Теорема. Рассмотрим функцию $f(x)$, которая является строго монотонной на некотором интервале (a, b). Если в этом интервале существует такая точка x_0, что $f'(x_0) \neq 0$, то функция $x = \phi(y)$, обратная к функции $y = f(x)$, также дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$ и её производная равна

$$\phi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

41. Таблица производных основных элементарных функций.

$f(x)$	$f'(x)$
$const$	0
x^a	$a \cdot x^{a-1}$
a^x	$a^x \cdot \ln a$
e^x	e^x
$\log_a x$	$\frac{1}{\ln a \cdot x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

42. Понятие дифференциала (первого) функции в точке.

Функция $f(x)$ является дифференцируемой в точке x_0 своей области определения $D[f]$, если существует такая константа A, что:

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \bar{\bar{o}}(x - x_0)$$
$$A = f'(x_0) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta}$$

Тогда выражение $f'(x_0)dx$ называют дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0. Обозначение: $df = df(x_0, dx)$. Обратите внимание, что df зависит и от точки, и от dx.

43. Инвариативность формы первого дифференциала

Найдем выражение для дифференциала сложной функции. Пусть $y = f(u(x))$. Тогда

$$dy = y'(x) \cdot dx = f'(u(x)) \cdot u'(x) \cdot dx = f' \cdot du$$

Таким образом, форма дифференциала не зависит от того, является аргумент функции независимой переменной или функцией другого аргумента. Это свойство называется свойством неизменности, или инвариантности, дифференциала.

44. Производные и дифференциалы высших порядков функции одной переменной в точке.

Рассмотрим функцию, дифференцируемую на множестве E. Т.е. $\exists f'(x)$, Если $f'(x)$ тоже дифференцируема на E, то $\exists (f'(x))' = f''(x)$.

Производной n-ого порядка будем считать $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$, причем $f^{(0)}(x) = f(x)$. Разумеется, для существования производной n-ого порядка должны существовать производные всех меньших порядков.

Множество функций, имеющих все производные до порядка n включительно на множестве E, обозначается $C^{(n)}(E)$. Рассмотрми несколько примеров

- $f(x) = \sin x$

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$
$$f''(x) = -\sin x = \sin\left(\frac{2\pi}{2} + x\right)$$
$$f'''(x) = -\cos x = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$$
$$f^{(4)}(x) = \sin x = \sin x$$

Докажем по индукции, что $f^{(n)}(x) = \sin\left(\frac{\pi n}{2} + x\right)$. При $n = 1$ уже было показано ранее. Пусть это верно при некотором n, покажем для $n = n + 1$.

$$f^{(n+1)}(x) = \sin\left(\frac{\pi(n+1)}{2} + x\right)$$
$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' = \left(\sin\left(\frac{\pi n}{2} + x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi n}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi(n+1)}{2} + x\right)$$

- $f(x) = e^x$. $f^{(n)}(x) = e^x$
- $f(x) = x^m$. Беря n раз производную, получаем, что $f^{(n)}(x) = m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n}$
- $f(x) = \ln x$. $f'(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$. $f^{(n)}(x^{-1}) = (-1)(-2)\ldots(-n)x^{-1-n} = (-1)^n \cdot n! \cdot x^{-1-n}$, Тогда получаем, что

$$f^{(n)}(x) = f^{(n-1)}(x-1) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot x^{-n}$$

Дифференциал порядка n, где $n > 1$, от функции f в некоторой точке называется дифференциал в этой точке от дифференциала порядка $(n-1)$, то есть

$$d^n f = d(d^{n-1}f) = f^{(n)} \cdot dx^n$$

Теорема (Формула Лейбница) Пусть $u(x)$ и $v(x)$ имеют не менее n производных на множестве E. Тогда

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot u^{(n-k)} \cdot v^{(k)}$$

Доказательство. Докажем по индукции. При $n = 1$

$$(u \cdot v)' = u'v + uv' = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} \cdot u^{(1-k)} \cdot v^{(k)}$$

Пусть равенство верно при некотором n, докажем его справедливость при $n = n + 1$. Беря по определению производную $(u \cdot v)^{(n+1)}$

$$\begin{aligned}
(u \cdot v)^{(n+1)} &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot u^{(n-k)} \cdot v^{(k)}\right)' \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot u^{(n-k+1)} \cdot v^{(k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot u^{(n-k)} \cdot v^{(k+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot u^{(n-k+1)} \cdot v^{(k)} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \cdot u^{(n-k+1)} \cdot v^{(k)} \\
&= \binom{n}{0} \cdot u^{(n+1)} \cdot v + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right) \cdot u^{(n-k+1)} \cdot v^{(k)} + \binom{n}{n} \cdot u \cdot v^{(n+1)} \\
&= \binom{n}{0} \cdot u^{(n+1)} \cdot v + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} \cdot u^{(n-k+1)} \cdot v^{(k)} + \binom{n}{n} \cdot u \cdot v^{(n+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot u^{(n-k+1)} \cdot v^{(k)}
\end{aligned}$$

Последний переход сделан при помощи следующего рассуждения:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

■

45. Понятие об экстремумах функции одной переменной.

Точка x_0 называется точкой локального максимума (минимума) функции f, если существует такая окрестность $U_\delta(x_0)$ точки x_0, что

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \implies f(x) \leqslant f(x_0)$$

и точкой локального минимума, если

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \implies f(x) \geqslant f(x_0)$$

Точка x_0 будет называться точкой строгого локального экстремума, если заменить окрестность на проколотую окрестность и нестрогий знак заменить на строгий.

Теорема Ферма Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то ее производная $f'(x_0)$ либо равна нулю, либо не существует.

46. Локальный экстремум. Необходимое условие для внутреннего локального экстремума (теорема Ферма).

Теорема Ферма Пусть функция f определена на интервале (a, b) и в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$ принимает наибольшее (наименьшее) значение на этом интервале. Если существует $f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Пусть x_0 — точка максимума функции f. Рассмотрим разностное отношение $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Так как $f(x) \leqslant f(x_0)$, то при $x > x_0$ имеем $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0$, и, следовательно, $f'_+(x_0) \leqslant 0$. Если же $x < x_0$, то $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$, и поэтому $f'_-(x_0) \geqslant 0$. Но из дифференцируемости функции f в точке x_0 следует, что $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$ (следует из равности предела справа и слева). ■

С геометрической точки зрения теорема Ферма означает, что если в точке экстремума у графика функции существует касательная, то она параллельна оси OX.

47. Основные теоремы о дифференцируемых функций на отрезке (теорема Ролля, формулы Лагранжа и Коши.

Теорема Ролля. О нуле производной функции, принимающей на концах отрезка равные значения Пусть функция $y = f(x)$

1. непрерывна на отрезке $[a, b]$;
2. дифференцируема на интервале (a, b);
3. $f(a) = f(b)$

Тогда на интервале (a, b) найдется, по крайней мере, одна точка x_0, в которой $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Если функция $f(x)$ постоянна на отрезке $[a, b]$ (а значит, её минимальное и максимальное значение совпадают), то производная равна нулю в любой точке интервала (a, b), в этом случае утверждение справедливо.

Иначе, минимальное и максимальное значение функции не совпадают. По второй теореме Вейерштрасса (о достижении функции значения точной верхней/нижней грани на отрезке), функция достигает своего наибольшего или наименьшего значения в точке ξ интервала (a, b), т.е. в точке ξ существует локальный экстремум. Тогда по теореме Ферма производная в этой точке равна нулю

$$f'(\xi) = 0$$

■

Теорема Лагранжа. Формула конечных приращений Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b), то в этом интервале существует хотя бы одна точка x_0, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_0)$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию $F(x)=f(x)+\lambda x$.

Выберем число λ таким, чтобы выполнялось условие $F(a)=F(b)$, тогда

$$f(a)+\lambda a=f(b)+\lambda b \implies f(b)-f(a)=\lambda(a-b) \implies \lambda=-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

В результате получаем

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot x$$

Функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на интервале (a,b) и принимает одинаковые значения на концах отрезка. Следовательно, для неё выполнены все условия теоремы Ролля. Тогда в интервале (a,b) существует такая точка ξ, что $F'(\xi)=0$.

Отсюда следует, что $0=f'(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ или

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

■

Теорема Лагранжа имеет простой геометрический смысл. Хорда, проходящая через точки графика, соответствующие концам отрезка a и b имеет угловой коэффициент, равный

$$k=\operatorname{tg}\alpha=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Тогда внутри отрезка существует точка $x=\xi$, в которой касательная к графику параллельна хорде.

Теорема Коши. Обобщает формулу конечных приращений Лагранжа. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ и дифференцируемы на интервале (a,b), причем $g'(x)\neq 0$ при всех $x\in(a,b)$. Тогда в этом интервале существует точка $x=\xi$ такая, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Доказательство. **Доказательство совпадает с доказательством теормы Лагранжа**.

Прежде всего заметим, что знаменатель в левой части формулы Коши не равен нулю: $g(b)-g(a)\neq 0$. Действительно, если $g(a)=g(b)$, то по теореме Ролля найдется точка $\mu\in(a,b)$, в которой $g'(\mu)=0$. Это, однако, противоречит условию, где указано, что $\forall x\in(a,b):\ g'(x)\neq 0$.

Введем вспомогательную функцию $F(x)=f(x)+\lambda g(x)$.

Выберем число λ таким, чтобы выполнялось условие $F(a)=F(b)$, тогда

$$f(a)+\lambda g(a)=f(b)+\lambda g(b) \implies f(b)-f(a)=\lambda(g(a)-g(b)) \implies \lambda=-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

В результате получаем

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g(x)$$

Функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на интервале (a,b) и при найденном значении λ принимает одинаковые значения на концах отрезка. Следовательно, для неё выполнены все условия теоремы Ролля. Тогда в интервале (a,b) существует такая точка ξ, что $F'(\xi)=0$.

Отсюда следует, что

$$0=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(\xi)$$

или

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

■

48. Многочлен Тейлора и формула Тейлора для функций одной переменной с остаточным членом в форме Пеано и Лагранжа.

Предположим, что имеется некоторая функция $f(x)$ и надо исследовать ее поведение в некоторой точке x_0 или ее окрестности. Сама функция может быть при этом достаточно сложной, и поэтому непосредственное вычисление $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ (как пример того, что мы хотим узнать о функции в x_0) окажется крайне трудоемким. Идея в том, чтобы найти такой многочлен $P_n(x)$, что $f(x) \sim P_n(x - x_0)$ при $x \to x_0$, а затем исследовать его. Работать с многочленами практически всегда намного проще.

Предположим пока, что $x_0 = 0$. Тогда $P_n(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n$. $P_n(0) = c_0$, а $P_n'(x) = c_1 + 2c_2 x + \dots + nc_n x^{n-1}$, из чего следует, что $c_1 = P_n'(0)$. По аналогии можно получить, что $c_2 = \dfrac{P_n''(0)}{2!}, \dots, c_n = \dfrac{P_n^{(n)}(0)}{n!}$. Т.е. получаем, что $P_n(x) = P_n(0) + \dfrac{P_n'(0)}{1!}x + \dots + \dfrac{P_n^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

Пусть $\exists f^{(n)}(x_0)$, тогда справедлива формула:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(f, x)$$

Эта формула называется **формулой Тейлора** и обычно записывается в виде:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k}_{\text{многочлен Тейлора}} + \underbrace{r_n(f, x)}_{\text{остаточный член}}$$

Лемма. Пусть $\exists f^{(n)}(x_0)$ и $\exists f'(x)$ на некоторой $U(x_0)$. Тогда $(r_n(f, x))' = r_{n-1}(f', x)$.

Доказательство.

$$r_n(f, x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

$$(r_n(f, x))' = f'(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x - x_0)^{k-1} = f'(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = r_{n-1}(f', x)$$

так как $f^{(k+1)}(x_0) = (f')^{(k)}(x_0)$. Следует также обратить внимание на то, что дифференцирование $r_n(f, x)$ происходит по x, поэтому все члены суммы, кроме $(x - x_0)^k$, — константы. ∎

Теорема о локальной форме остаточного члена (Форма Пеано) Пусть $\exists f^{(n)}(x_0)$ и $\exists f^{(n-1)}(x)$ на некоторой $U(x_0)$. Тогда справедлива формула Тейлора, причем $r_n(f, x) = \bar{\bar{o}}((x - x_0)^n), x \to x_0$.

Доказательство. Докажем с помощью метода математической индукции. При $n = 1$, $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \bar{\bar{o}}(x - x_0)$, что верно, т.к. $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Предположим теперь, что теорема верна для **произвольной функции** f при $n = n - 1$, и докажем её при $n = n$.

Заметим сначала, что $r_n(f, x_0) = 0$ (следует из обычной формулы Тейлора). Тогда $r_n(f, x) = r_n(f, x) - r_n(f, x_0) = (r_n(f, \xi))'(x - x_0)$, где ξ принадлежит интервалу $(\min\{x, x_0\}, \max\{x, x_0\})$ по теореме Лагранжа.

По лемме получаем, что $(r_n(f, \xi))'(x - x_0) = r_{n-1}(f', \xi)(x - x_0)$. По предположению для произвольной функции f, у которой есть n-ая производная в x_0 и $(n-1)$-ая в окрестности x_0, можно выполнить индукционный переход для f', т.к. для r_{n-1} у $f'(x)$ существуют $(n-1)$-ая производная в x_0 и $(n-2)$-ая в окрестности x_0. Тогда $r_{n-1}(f', \xi)(x - x_0) = \bar{\bar{o}}((\xi - x_0)^{n-1})(x - x_0) = [|\xi - x_0| < |x - x_0| \implies \bar{\bar{o}}((\xi - x_0)^{n-1}) = \bar{\bar{o}}((x - x_0)^{n-1})] = \bar{\bar{o}}((x - x_0)^{n-1})(x - x_0) = \bar{\bar{o}}((x - x_0)^n)$ ∎

Теорема о форме Лагранжа Пусть $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $\exists f^{(n)}(x)$, причем $f^{(n)}(x)$ непрерывна на отрезке $[x_0, x]$. Кроме того, $\exists f^{(n+1)}(x)$ на (x_0, x). Тогда справедлива формула Тейлора, причем $r_n(f, x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, где $\xi \in (x_0, x)$.

Доказательство. Снова воспользуемся методом математической индукции. При $n = 0$, $f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)$ — формула Лагранжа. Предположим теперь, что для произвольной функции f справедливо, что $r_{n-1}(f, x) = \dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n$, где $\xi \in (x_0, x)$. При $n = n$ имеем:

$$\frac{r_n(f,x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{r_n(f,x)-r_n(f,x_0)}{(x-x_0)^{n+1}-(x_0-x_0)^{n+1}} \text{ [по формуле Коши] } =$$
$$= \frac{(r_n(f,\mu))'}{(n+1)(\mu-x_0)^n} \text{ [по лемме, доказанной выше] } =$$
$$= \frac{r_{n-1}(f',\mu)}{(n+1)(\mu-x_0)^n} = \frac{(f'(\xi))^{(n)}}{(n+1)n!} \implies r_n(f,x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

■

49. Формулы Маклорена для основных элементарных функций (без доказательства).

При $x_0 = 0$ формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано называется формулой Маклорена Приведем пример: $f(x) = \sin x$. Вспомним, что

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right) \implies f^{(n)}(0) = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k, \\ (-1)^k, & \text{если } n = 2k+1 \end{cases}$$

Тогда получаем следующее разложение:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \bar{\bar{o}}(x^{2n})$$

1. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \bar{\bar{o}}(x^n), x \to 0$
2. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n} + \bar{\bar{o}}(x^n), x \to 0$
3. $\underset{\alpha \in \mathbb{R}}{(1+x)^\alpha} = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + \bar{\bar{o}}(x^n)$

   Например $(1+x)^{\frac{1}{3}} - 1 = \binom{\frac{1}{3}}{1} x + \binom{\frac{1}{3}}{2} x^2 + \bar{\bar{o}}(x^2) = \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2}x^2 + \bar{\bar{o}}(x^2)$
4. $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \bar{\bar{o}}(x^{2n})$
5. $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \bar{\bar{o}}(x^{2n+1})$
6. $\operatorname{tg}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \dots + \frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!} \cdot x^{2n-1} + \bar{\bar{o}}(x^{2n-1})$, где B_{2n} — числа Бернулли

   Но достаточно помнить, что $\operatorname{tg}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \bar{\bar{o}}(x^5)$, т.е. общая формула для семинаров <u>не</u> нужна
7. $\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \dots + \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)} \cdot x^{2n+1} + \bar{\bar{o}}(x^{2n+1})$

   Достаточно знать $\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \bar{\bar{o}}(x^5)$
8. $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$
9. $\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \bar{\bar{o}}(x^{2n-1})$

50. Правило Лопиталя.

Теорема Лопиталя (первое правило) Если функции $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что

1. $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в проколотой окрестности точки a
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$
3. $g'(x) \neq 0$ в окрестности $U(a)$
4. Существует $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Тогда существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Доказательство. Доопределим функции в точке a нулём (непрерывности не нарушится, так как предел этих функций при $x\to a$ равен 0). Из первого условия следует, что $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a,x]$, где x принадлежит рассматриваемой окрестности точки a.

Применим обобщённую формулу конечных приращений (Коши) к $f(x)$ и $g(x)$ на отрезке $[a,x]$.

$$\exists\xi\in[a,x]:\ \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Так как $g(a)=f(a)=0$ получим, что $\forall x\ \exists\xi\in[a,x]:\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

По определению предела, $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A\iff\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall x:\ a<x<a+\delta\implies\left|\dfrac{f'(x)}{g'(x)}-A\right|<\varepsilon$. Но для каждого x из указанного интервала найдется своё ξ_x, такое что $\dfrac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}=\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Но раз $\xi_x\in(a,x)$, то выполняется $\left|\dfrac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}-A\right|<\varepsilon\implies\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}-A\right|$, что и требовалось доказать. ■

Теорема Лопиталя (второе правило) Если для функций $f(x)$ и $g(x)$ справедливо следующее:

1. $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на интервале (a,b)
2. $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\lim\limits_{x\to a+0}g(x)=\infty$
3. $g'(x)\neq0$ при $x\in(a,b)$
4. Существует $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$

то $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$

Доказательство. Для начала положим, что $A\leqslant0$ (при $A>0$ доказательство практически аналогично приведенному). Пусть $\varepsilon\in\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$. Тогда по определению предела

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A\iff\exists x_\varepsilon\in(a,b):\ \forall x\in(a,x_\varepsilon)\implies\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-A\right|<\varepsilon$$

Здесь мы просто приняли, что $x_\varepsilon=a+\delta$, в остальном же интерпретация определения предела не изменилась.

Выберем произвольное x из данного интервала (a,x_ε). Заметим, что выполняется теорема Коши (доопределим функции f и g в точке a, а в точке x_ε они уже определены):

$$\frac{f(x)-f(x_\varepsilon)}{g(x)-g(x_\varepsilon)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},\text{ где } a<x<\xi<x_\varepsilon<b$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{1-\dfrac{f(x_\varepsilon)}{f(x)}}{1-\dfrac{g(x_\varepsilon)}{g(x)}}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\cdot\frac{1-\dfrac{g(x_\varepsilon)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(x_\varepsilon)}{f(x)}}$$

Заметим теперь, что $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x_\varepsilon)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{g(x_\varepsilon)}{g(x)}=0$, т.к. $f(x_\varepsilon)$ и $g(x_\varepsilon)$ — константы (а знаменатели по условию стремятся к ∞). Тогда выберем для текущего закрепленного ε такое $\delta(\varepsilon)>0$:

$$\forall x\in(a,a+\delta),\delta+a<b\implies\left|\frac{f(x_\varepsilon)}{f(x)}\right|<\varepsilon,\left|\frac{g(x_\varepsilon)}{g(x)}\right|<\varepsilon$$

Тогда получаем следующую оценку:

$$\frac{1-\dfrac{g(x_\varepsilon)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(x_\varepsilon)}{f(x)}} \in \left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}, \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)$$

Поскольку $\varepsilon \in \left(0, \dfrac{1}{4}\right)$, то $\dfrac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} = 1 - \dfrac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} > 1 - 2\varepsilon$ и $\dfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} = 1 + \dfrac{2\varepsilon}{1-\varepsilon} < 1 + \dfrac{8}{3}\varepsilon$. Учитывая, что $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathring{U}_\varepsilon(A)$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot \frac{1-\dfrac{g(x_\varepsilon)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(x_\varepsilon)}{f(x)}} \in \left((A-\varepsilon)(1-2\varepsilon), (A+\varepsilon)\left(1+\frac{8}{3}\varepsilon\right)\right) =$$

$$= \left(A - (\varepsilon + 2A\varepsilon - 2\varepsilon^2), A + \left(\varepsilon + \frac{8}{3}\varepsilon A + \frac{8}{3}\varepsilon^2\right)\right) \implies$$

$$\implies \frac{f(x)}{g(x)} \in U_\mu(A), \text{ где } \mu = \max\left\{\varepsilon + 2A\varepsilon - 2\varepsilon^2, \varepsilon + \frac{8}{3}\varepsilon A + \frac{8}{3}\varepsilon^2\right\}$$

Как видно, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \mu = 0$, а для любого сколько угодно малого μ всегда можно найти соответствующее ε, такое, что все значения отношения функций попадут в заданную μ-трубку. Это и означает, что предел отношения функции равен A. ■

51. Достаточное условие строгого возрастания (убывания) функции на промежутке.

Теорема. Для того чтобы дифференцируемая функция $f(x)$ на интервале (a,b) строго возрастала, достаточно, чтобы $\forall x \in (a,b): \ f'(x) > 0$

Для того чтобы дифференцируемая функция $f(x)$ на интервале (a,b) строго убывала, достаточно, чтобы $\forall x \in (a,b): \ f'(x) < 0$

Доказательство. Докажем для строгого возрастания. Пусть $f'(x) > 0 \ \forall x \in (a,b)$. Выберем произвольные точки $x_1, x_2 \in (a,b)$, и, не ограничивая общности, скажем, что $x_1 < x_2$.

Применим формулу конечных приращений Лагранжа. Так как $f'(\xi) > 0$ и $x_2 > x_1$, имеем

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)\cdot(x_2 - x_1) > 0 \implies f(x_2) > f(x_1)$$

■

52. Достаточные условия локального экстремума для функции одной переменной.

2 Вопросы, которые были убраны из программы экзамена

1. Эквивалентность определений предела функции по Коши и Гейне

Теорема. Определения предела функции в точке по Коши и Гейне эквивалентны

Доказательство. Пусть f определена на множестве X и число A является пределом функции f в точке x_0 в смысле Коши. Выберем произвольную подходящую последовательность $x_n, n \in \mathbb{N}$, т.е. такую, для которой $\forall n \in \mathbb{N}: \ x_n \in X$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Покажем, что A является пределом в смысле Гейне.

Зададим произвольное число $\varepsilon > 0$ и укажем для него такое $\delta > 0$, что $\forall x \in X$ из условия $0 < |x - x_0| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. В силу того, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, для $\delta > 0$ найдется такой номер $N \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geqslant N$ будет выполняться неравенство $|f(x_n) - A| < \varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Докажем теперь обратное утверждение: предположим, что $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ в смысле Гейне, и покажем, что число A является пределом функции f в точке x_0 в смысле Коши. Предположим, что это неверно, т.е.

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x_\delta \in X : \ 0 < |x_\delta - x_0| < \delta : \ |f(x_\delta) - A| \geqslant \varepsilon$$

В качестве δ рассмотрим $\delta = \dfrac{1}{n}$, а соответствующие значения x_δ будем обозначать x_n. Тогда при любом $n \in \mathbb{N}$ выполняются условия $x_n \neq x_0, |x_n - x_0| < \dfrac{1}{n}$ и $|f(x_n) - A| \geqslant \varepsilon$. Отсюда следует, что последовательность $\{x_n\}$ является подходящей, но число A не является пределом функции f в точке x_0. Получили противоречие. ∎

Доказательство. Пусть переменная y в точке y_0 получает приращение $\Delta y \neq 0$. Соответствующее ему приращение переменной x в точке x_0 обозначим как Δx, причем $\Delta x \neq 0$ в силу строгой монотонности функции $y = f(x)$. Запишем отношение приращений в виде

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Допустим, что $\Delta y \to 0$, тогда $\Delta x \to 0$, поскольку обратная функция $x = \phi(y)$ является непрерывной в точке y_0. В пределе, при $\Delta x \to 0$, правая часть записанного соотношения становится равной

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

В таком случае левая часть тоже стремится к пределу, который по определению равен производной обратной функции:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \phi'(y_0)$$

Таким образом,

$$\phi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

∎

2. **Производные функций, графики которых заданы параметрически.**

Теорема. Зависимость между аргументом x и функцией y может быть задана в параметрическом виде с помощью двух уравнений:

$$\begin{cases} x = \phi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

Пусть $x = \phi(t)$ и $y = \psi(t)$ определены и дифференцируемы при $t \in (a, b)$, причем $x'_t = \phi'(t) \neq 0$ и $x = \phi(t)$ имеет обратную функцию $t = \theta(x)$, то

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}$$

Доказательство. Перейдем от параметрического задания к явному. При этом получаем сложную функцию $y = \psi(t) = \psi(\theta(x))$, аргументов которой является x.

По правилу нахождения производной сложной функции имеем

$$y'_x = (\psi(\theta(x)))' = \psi'(\theta(x)) \cdot \theta'(x)$$

По теореме об обратной функции $\theta'(x) = \dfrac{1}{\phi'(t)}$. А значит

$$y'_x = \psi'(\theta(x)) \cdot \theta'(x) = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}$$

∎

3. **Геометрический смысл дифференциала.**

Дифференциал функции численно равен приращению ординаты касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в данной точке, когда аргумент x получает приращение Δx.

Подробнее тут