

Теория вероятностей и математическая статистика, Коллоквиум III

Версия от 02.04.2021 11:48

Содержание

1.	Неравенство Чебышева и закон больших чисел в слабой форме для общих случайных величин. Усиленный закон больших чисел Колмогорова (б/д). Сходимости случайных величин: почти наверное и по вероятности. Взаимосвязь сходимостей по вероятности и почти наверное.	3
1.1.	Неравенство Чебышева и закон больших чисел в слабой форме для общих случайных величин. .	3
1.2.	Усиленный закон больших чисел Колмогорова (б/д).	4
1.3.	Сходимости случайных величин: почти наверное и по вероятности.	4
1.4.	Взаимосвязь сходимостей по вероятности и почти наверное.	4
2.	Сходимость случайных величин по распределению. Лемма о достаточном условии сходимости ожиданий функций из заданного семейства от последовательности случайных величин (лемма 2 из лекции 2). Эквивалентное описание сходимости по распределению.	5
3.	Абсолютная непрерывность математического ожидания. Теорема Лебега о мажорируемой сходимости. Подстановка сходящейся по вероятности последовательности случайных величин в непрерывную функцию. Взаимосвязь сходимостей по вероятности и по распределению.	5
4.	Характеристические функции: определение и свойства. Вычисление характеристической функции нормальной случайной величины. Производные характеристических функций.	5
4.1.	Характеристические функции: определение и свойства.	5
4.2.	Вычисление характеристической функции нормальной случайной величины.	7
4.3.	Производные характеристических функций.	7
5.	Переформулировка сходимости по распределению в терминах характеристических функций. Однозначность задания распределения случайной величины ее характеристической функцией. Центральная предельная теорема.	8
6.	Подстановка сходящейся по распределению последовательности случайных величин в непрерывную функцию. Сходимость суммы и произведения сходящихся по распределению последовательностей случайных величин в случае, когда одна из предельных случайных величин постоянная. Примеры применения: выборочная дисперсия и взаимосвязь с ЦПТ. Теорема о сходимости последовательности вида $\frac{f(a + h_n X_n) - f(a)}{h_n}$ для сходящейся по распределению последовательности X_n . Взаимосвязь с ЦПТ. . .	8
6.1.	Подстановка сходящейся по распределению последовательности случайных величин в непрерывную функцию.	8
6.2.	Сходимость суммы и произведения сходящихся по распределению последовательностей случайных величин в случае, когда одна из предельных случайных величин постоянная.	9
6.3.	Примеры применения: выборочная дисперсия и взаимосвязь с ЦПТ.	11
6.4.	Теорема о сходимости последовательности вида $\frac{f(a + h_n X_n) - f(a)}{h_n}$ для сходящейся по распределению последовательности X_n	12
6.5.	Взаимосвязь с ЦПТ.	12
7.	Неравенство типа Хефдинга-Чернова. Пример применения.	13

8.	Многомерная характеристическая функция. Сходимость по распределению последовательности случайных векторов. Эквивалентное описание сходимости по распределению через сходимость характеристических функций (без доказательства). Независимость случайных величин в терминах характеристической функции совместного распределения. Матрица ковариаций, смысл задаваемой ей билинейной формы, ее изменение при линейных преобразованиях. Многомерная ЦПТ.	13
9.	Многомерное нормальное распределение. Свойства нормального вектора: линейный образ нормального распределения нормален, характеристика через одномерные распределения, значение параметров нормального вектора, равносильность независимости и некоррелированности компонент. Представление нормального вектора, как линейный образ стандартного нормального вектора, ортогонализация. Плотность нормального вектора.	13
10.	Условное математическое ожидание в дискретном случае относительно разбиения и относительно случайной величины. Основные свойства: линейность, монотонность, формула полной вероятности, условное ожидание величины, независимой с разбиением, вынесение случайной величины из под знака условного ожидания. Эквивалентное определение условного математического ожидания и геометрическая интерпретация.	13
11.	Условное математическое ожидание в общем случае: определение и свойства. Формула для вычисления условного математического ожидания при известной плотности совместного распределения, условная плотность. Аналог формулы Байеса.	13

1. **Неравенство Чебышева и закон больших чисел в слабой форме для общих случайных величин. Усиленный закон больших чисел Колмогорова (б/д). Сходимости случайных величин: почти наверное и по вероятности. Взаимосвязь сходимостей по вероятности и почти наверное.**

1.1. **Неравенство Чебышева и закон больших чисел в слабой форме для общих случайных величин.**

Теорема (Неравенство Маркова). Пусть X это случайная величина и $X \geq 0$ почти наверное. Тогда для любого $t > 0$ выполняется

$$P[X \geq t] \leq \frac{E[X]}{t}$$

почти наверное.

Доказательство. Заметим, что для любого $t > 0$ выполняется $t \cdot I[x \geq t] \leq X$ почти наверное (здесь I это индикатор), так как в левой части будут учтены $t \leq X$, с суммарным коэффициентом не больше 1.

Возьмем математическое ожидание от обеих сторон и получим то, что нас просили:

$$t \cdot I[x \geq t] \leq X \iff t \cdot P[x \geq t] \leq E[X] \iff P[x \geq t] \leq \frac{E[X]}{t}.$$

■

Теорема (Неравенство Чебышева). Пусть у случайной величины X конечный второй момент, то есть $E[X^2] < \infty$. Тогда

$$P[|X - E[X]| \geq \varepsilon] \leq \frac{D[X]}{\varepsilon^2}.$$

Доказательство. Для доказательства рассмотрим случайную величину $Y = |X - E[X]|^2$ и применим неравенство Маркова.

Для любого ε выполняется

$$P[Y \geq \varepsilon^2] \leq \frac{E[Y]}{\varepsilon^2} \iff P[|X - E[X]|^2 \geq \varepsilon^2] \leq \frac{D[X]}{\varepsilon^2} \iff P[|X - E[X]| \geq \varepsilon] \leq \frac{D[X]}{\varepsilon^2}.$$

■

Теорема (Закон Больших Чисел в слабой форме). Рассмотрим последовательность $\{X_n\}_n$ случайных независимых величин, что $E[X_n^2] < \infty$ для любого n .

Обозначим $E[X_n] = a_n$ и $D[X_n] = \sigma_n^2$. Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2}{n^2} = 0,$$

то для всякого $\varepsilon > 0$ выполняется

$$P\left[\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right] \leq \frac{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2}{n^2 \varepsilon^2}.$$

Доказательство. Рассмотрим случайную величину $X = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$.

По линейности математического ожидания получаем

$$E[X] = \frac{E[X_1] + \dots + E[X_n]}{n} = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}.$$

Теперь необходимо найти дисперсию случайной величины X :

- Константа из дисперсии выносится с возведением в квадрат, поэтому

$$D[X] = D\left[\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right] = \frac{D[X_1 + \dots + X_n]}{n^2}.$$

- Так как $\{X_n\}_n$ это последовательность **независимых** случайных величин, дисперсия суммы может быть раскрыта как сумма дисперсий:

$$D[X] = \frac{D[X_1 + \dots + X_n]}{n^2} = \frac{D[X_1] + \dots + D[X_n]}{n^2} = \frac{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2}{n^2}.$$

Воспользуемся неравенством Чебышева для случайной величины X и подставим найденное математическое ожидания и дисперсию:

$$P[|X - E[X]| \geq \varepsilon] \leq \frac{D[X]}{\varepsilon^2} \iff P\left[\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right] \leq \frac{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2}{n^2 \varepsilon^2}$$

■

Закон больших чисел удобно применять, когда X_n это независимые одинаково распределенные случайные величины (с конечным вторым моментом). В частности это означает, что у всех величин одно и то же математическое ожидания и одна и та же математическая дисперсия: $E[X_n] = a$ и $D[X_n] = \sigma^2$.

Тогда дисперсия среднего арифметического $\frac{D[X_1] + \dots + D[X_n]}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$ стремится к нулю и получаем

$$P\left[\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - a\right| \geq \varepsilon\right] \rightarrow 0.$$

То есть в каком-то смысле среднее арифметическое приближается к математическому ожиданию.

1.2. Усиленный закон больших чисел Колмогорова (б/д).

Теорема (Усиленный закон больших чисел Колмогорова). Пусть $\{X_n\}_n$ — это последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, у которых есть математическое ожидания и пусть $E[X_n] = a$.

Тогда

$$P\left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = a\right] = 1.$$

Заметьте, что мы не требуем наличия второго момента, в отличие ЗБЧ в слабой форме. Также, эта сходимости более сильная, так как предел находится внутри условия вероятности, это будет объяснено позже.

1.3. Сходимости случайных величин: почти наверное и по вероятности.

Определение. Последовательность случайных величин X_n сходится к случайной величине X **по вероятности**, если для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[|X_n - X| \geq \varepsilon] = 0.$$

Записывают в следующем виде: $X_n \xrightarrow{P} X$.

Определение. Последовательность случайных величин X_n сходится к случайной величине X **почти наверное**, если

$$P[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X] = 1.$$

Записывают в следующем виде: $X_n \xrightarrow{\text{п. н.}} X$.

То есть в законе больших чисел в слабой форме речь идет о сходимости по вероятности, а в усиленном законе больших чисел Колмогорова — о сходимости почти наверное.

Из сходимости почти наверное следует сходимости по вероятности, поэтому усиленный закон больших чисел называется усиленным.

1.4. Взаимосвязь сходимостей по вероятности и почти наверное.

Теорема. Если последовательность случайных величин X_n сходится к X почти наверное, то X_n сходится к X и по вероятности.

Доказательство. Хотим доказать, что $P[|X_n - X| > \varepsilon] \rightarrow 0$, что равносильно $P[|X_n - X| < \varepsilon] \rightarrow 1$, что мы и будем доказывать.

Переформулируем выражение «множество исходов, что для любого $\varepsilon > 0$ существует N , что для любого $n > N$ выполняется $|X_n - X| < \varepsilon$ » с помощью множеств:

$$\bigcup_N \bigcap_{n=N+1}^{\infty} \{w : |X_n - X| < \varepsilon\}.$$

Но это множество включает в себя множество исходов, для которых $\lim X_n = X$:

$$\bigcup_N \bigcap_{n=N+1}^{\infty} \{w : |X_n - X| < \varepsilon\} \supseteq \{w : \lim X_n = X\}.$$

Но по условию $P[\lim X_n = X] = 1$, поэтому

$$P\left[\bigcup_N \bigcap_{n=N+1}^{\infty} \{w : |X_n - X| < \varepsilon\}\right] = 1.$$

Обозначим $B_N = \bigcap_{n=N+1}^{\infty} \{w : |X_n - X| < \varepsilon\}$. Тогда

$$B_{N+2} \supseteq B_{N+1} \supseteq B_N \supseteq \dots \supseteq B_1,$$

так как чем больше номер множества, тем из меньшего числа пересечения оно состоит.

Из второго модуля про вероятность вложенных событий мы знаем (теорема о непрерывности вероятностных мер), что

$$P\left[\bigcup_{N=1}^{\infty} B_N\right] = \lim_{N \rightarrow \infty} P[B_N].$$

Но мы уже доказали, что $P\left[\bigcup_{N=1}^{\infty} B_N\right] = 1$, тогда

$$P\left[\bigcap_{n=N+1}^{\infty} \{w : |X_n - X| < \varepsilon\}\right] \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1,$$

Заметим, что вероятность одного множества событий не меньше вероятности пересечения, поэтому о лемме о двух миллионерах:

$$P[\{w : |X_n - X| < \varepsilon\}] \rightarrow 1.$$

■

2. Сходимость случайных величин по распределению. Лемма о достаточном условии сходимости ожиданий функций из заданного семейства от последовательности случайных величин (лемма 2 из лекции 2). Эквивалентное описание сходимости по распределению.

3. Абсолютная непрерывность математического ожидания. Теорема Лебега о мажорируемой сходимости. Подстановка сходящейся по вероятности последовательности случайных величин в непрерывную функцию. Взаимосвязь сходимостей по вероятности и по распределению.

4. Характеристические функции: определение и свойства. Вычисление характеристической функции нормальной случайной величины. Производные характеристических функций.

4.1. Характеристические функции: определение и свойства.

Определение. Пусть X это случайная величина. Тогда характеристическая функция случайной величины X это

$$\varphi_X(t) := E[e^{itX}] = E[\cos(t \cdot X)] + i \cdot E[\sin(t \cdot X)].$$

Теорема (Свойства характеристических функций). У характеристической функции есть следующие свойства:

1. Для любой случайной величины X выполняется $\varphi_X(0) = 1$.

2. Для любой случайной величины и любого $t \in \mathbb{R}$ выполняется $|\varphi_X(t)| \leq 1$.

3. Для чисел a и b выполняется

$$\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb} \cdot \varphi_X(at).$$

4. Если X_n это последовательность **независимых** случайных величин, то

$$\varphi_{X_1+X_2+\dots+X_n}(t) = \varphi_{X_1}(t) \cdot \varphi_{X_2}(t) \cdot \dots \cdot \varphi_{X_n}(t).$$

Доказательство. Для доказательства будем пользоваться следующей формулой:

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[\cos(t \cdot X)] + i \cdot \mathbb{E}[\sin(t \cdot X)],$$

которая следует из формулы Эйлера $e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x$.

Докажем свойства:

1. Для любой случайной величины X выполняется $\varphi_X(0) = 1$.

Проверяется подстановкой:

$$\varphi_X(0) = \mathbb{E}[e^{i \cdot 0 \cdot X}] = \mathbb{E}[e^0] = \mathbb{E}[1] = 1.$$

2. Для любой случайной величины и любого $t \in \mathbb{R}$ выполняется $|\varphi_X(t)| \leq 1$.

Рассмотрим случайную величину Y . Знаем, что ее дисперсия неотрицательна, то есть $D[Y] = \mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2 \geq 0$, откуда следует, что для любой случайной величины Y справедливо $\mathbb{E}[Y^2] \geq (\mathbb{E}[Y])^2$.

Значение характеристической функции это комплексное число. Квадрат модуля комплексного числа это сумма квадратов его мнимой и действительной частей:

$$|\varphi_X(t)|^2 = (\mathbb{E}[\cos(t \cdot X)])^2 + (\mathbb{E}[\sin(t \cdot X)])^2.$$

С помощью знаний о $\mathbb{E}[Y^2] \geq (\mathbb{E}[Y])^2$ оценим квадрат модуля характеристической функции:

$$|\varphi_X(t)|^2 = (\mathbb{E}[\cos(t \cdot X)])^2 + (\mathbb{E}[\sin(t \cdot X)])^2 \leq \mathbb{E}[\cos^2(t \cdot X)] + \mathbb{E}[\sin^2(t \cdot X)] = \mathbb{E}[\cos^2(t \cdot X) + \sin^2(t \cdot X)] = \mathbb{E}[1] = 1.$$

3. Для чисел a и b выполняется

$$\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb} \cdot \varphi_X(at).$$

Заметим, что если y это некоторое число, то $\mathbb{E}[y \cdot X] = y \cdot \mathbb{E}[X]$ по линейности математического ожидания.

Запишем по определению:

$$\varphi_{aX+b}(t) = \mathbb{E}[e^{it \cdot aX + it \cdot b}] = \mathbb{E}[e^{it \cdot aX} \cdot e^{it \cdot b}] = e^{it \cdot b} \cdot \mathbb{E}[e^{it \cdot aX}] = e^{it \cdot b} \cdot \varphi_{aX}(t).$$

4. Если X_n это последовательность **независимых** случайных величин, то

$$\varphi_{X_1+X_2+\dots+X_n}(t) = \varphi_{X_1}(t) \cdot \varphi_{X_2}(t) \cdot \dots \cdot \varphi_{X_n}(t).$$

Пусть $Y_n = e^{i \cdot t \cdot X_n}$. Тогда Y_1, \dots, Y_n это последовательность независимых случайных величин (в силу независимости X_n) и $\mathbb{E}[Y_1 \cdot \dots \cdot Y_n] = \mathbb{E}[Y_1] \cdot \dots \cdot \mathbb{E}[Y_n]$.

Запишем по определению:

$$\varphi_{X_1+X_2+\dots+X_n}(t) = \mathbb{E}[e^{itX_1+\dots+itX_n}] = \mathbb{E}[e^{itX_1} \cdot \dots \cdot e^{itX_n}] = \mathbb{E}[Y_1 \cdot \dots \cdot Y_n] = \mathbb{E}[Y_1] \cdot \dots \cdot \mathbb{E}[Y_n] = \varphi_{X_1}(t) \cdot \dots \cdot \varphi_{X_n}(t).$$

■

4.2. Вычисление характеристической функции нормальной случайной величины.

Хотим вычислить $\varphi_\xi(t)$, где $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Запишем по определению:

$$\varphi_\xi(t) = \mathbb{E}[e^{it\xi}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(tx) \exp[-x^2/2] dx + \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(tx) \exp[-x^2/2] dx.$$

Заметим, что второе слагаемое $\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(tx) \exp[-x^2/2] dx$ равно нулю, так как это интеграл нечетной функции по симметричному промежутку. Тогда

$$\varphi_\xi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(tx) \exp[-x^2/2] dx.$$

Возьмем производную по t (считаем, что она берется):

$$\begin{aligned} \varphi'_\xi(t) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \sin(tx) \exp[-x^2/2] dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(tx) d(\exp[-x^2/2]) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sin(tx) \exp[-x^2/2] \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{t}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(tx) \exp[-x^2/2] dx \\ &= 0 - \frac{t}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(tx) \exp[-x^2/2] dx = -t \cdot \varphi_\xi(t). \end{aligned}$$

Пришли к дифференциальному уравнению:

$$\varphi'_\xi(t) = -t \cdot \varphi_\xi(t) \implies \frac{\varphi'_\xi(t)}{\varphi_\xi(t)} = -t.$$

Интегрируем обе части:

$$\int \frac{d(\varphi_\xi(t))}{\varphi_\xi(t)} = \ln |\varphi_\xi(t)| + C = \int -tdt = -\frac{t^2}{2}.$$

Теперь берем экспоненту от обеих частей:

$$\varphi_\xi(t) = C' \cdot \exp[-t^2/2],$$

где C' это некоторая константа.

Про характеристическую функцию мы знаем, что $\varphi_\xi(0) = 1$. Тогда

$$\varphi_\xi(0) = 1 = C' \cdot \exp[0] = C',$$

откуда находим $C' = 1$.

Тогда характеристическая функция стандартной нормальной величины имеет следующий вид:

$$\varphi_\xi(t) = \exp[-t^2/2].$$

4.3. Производные характеристических функций.

Теорема. Пусть X это случайная величина с конечным k -ым моментом ($\mathbb{E}[|X|^k] < \infty$). Тогда φ_X k раз дифференцируема и

$$\varphi_X^{(k)}(0) = i^k \cdot \mathbb{E}[X^k].$$

Доказательство. Докажем для $k = 1$, для остальных порядков аналогично.

Мы хотим найти производную:

$$\lim_{h_n \rightarrow 0} \frac{\varphi_X(t + h_n) - \varphi_X(t)}{h_n} = \lim_{h_n \rightarrow 0} \frac{1}{h_n} \cdot (\mathbb{E}[e^{i(t+h_n)X}] - \mathbb{E}[e^{itX}]) = \lim_{h_n \rightarrow 0} E \left[\frac{e^{i(t+h_n)X} - e^{itX}}{h_n} \right] =: \lim_{h_n \rightarrow 0} E[g_n],$$

то есть обозначили $g_n = \frac{e^{i(t+h_n)X} - e^{itX}}{h_n}$.

Поймем, что мы знаем про функцию g_n :

- У нее есть поточечный предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(X) = (e^{itX})'_t = iX e^{itX}.$$

- Надо как-то оценить $|g_n|$.

Знаем, что модуль комплексной экспоненты равен 1, то есть $|e^{itX}| = 1$. Тогда

$$|g_n(X)| = \left| \frac{e^{itX} \cdot (e^{ih_n X} - 1)}{h_n} \right| = |e^{itX}| \cdot \left| \frac{e^{ih_n X} - 1}{h_n} \right| = \left| \frac{e^{ih_n X} - 1}{h_n} \right| = \left| \frac{e^{ih_n X} - e^{i \cdot 0 \cdot X}}{h_n} \right| = (e^{itX})'_t(\xi) = |iX e^{i\xi X}|$$

для некоторого $\xi \in (0; h_n)$.

Предпоследний переход выполнен по теореме Лагранжа, которая гласит следующее:

$$\exists \xi \in (a; b) : \frac{f'(b) - f'(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Опять же воспользуемся тем, что модуль комплексной экспоненты равен 1:

$$|g_n(X)| = |iX e^{i\xi X}| = |i| \cdot |X| \cdot |e^{i\xi X}| = 1 \cdot |X| \cdot 1 = |X|.$$

Мы получили, что

- $|g_n(X)| \leq |X|$ и $E[|X|] < \infty$ (для этого и нужна конечность моментов);
- $g_n(X) \xrightarrow{п. н.} i \cdot X \cdot e^{itX}$.

Тогда по теореме Лебега предел ожиданий есть ожидание предела:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[g_n(X)] = E[i \cdot X \cdot e^{itX}].$$

Возвращаемся в самое начало:

$$\varphi_X(t)' = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n = i \cdot E[X \cdot e^{itX}].$$

■

5. Переформулировка сходимости по распределению в терминах характеристических функций. Однозначность задания распределения случайной величины ее характеристической функцией. Центральная предельная теорема.

6. Подстановка сходящейся по распределению последовательности случайных величин в непрерывную функцию. Сходимость суммы и произведения сходящихся по распределению последовательностей случайных величин в случае, когда одна из предельных случайных величин постоянная. Примеры применения: выборочная дисперсия и взаимосвязь с ЦПТ. Теорема о сходимости последовательности вида $\frac{f(a + h_n X_n) - f(a)}{h_n}$ для сходящейся по распределению последовательности X_n . Взаимосвязь с ЦПТ.

6.1. Подстановка сходящейся по распределению последовательности случайных величин в непрерывную функцию.

Теорема. Если последовательность случайных величин X_n сходится по распределению к X , то для всякой непрерывной функции f случайные величины $f(X_n)$ сходятся по распределению к $f(X)$.

Доказательство.

Из лекции 2 мы знаем, что

$$X_n \xrightarrow{d} X \Leftrightarrow \forall g \in \mathcal{G} \quad \mathbb{E}g(X_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}g(X), \text{ где } g - \text{непрерывная, ограниченная функция}$$

$g \circ f := h$ – непрерывная функция (т.к. композиция непрерывных функция), ограниченная (т.к. g ограниченная)

$$\mathbb{E}g(f(X_n)) = \mathbb{E}h(X_n), \mathbb{E}g(f(X)) = \mathbb{E}h(X)$$

Значит из утверждения выше

$$X_n \xrightarrow{d} X \Rightarrow \mathbb{E}h(X_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}h(X)$$

Снова применяем утверждение

$$\mathbb{E}g(f(X_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}g(f(X)) \Rightarrow f(X_n) \xrightarrow{d} f(X)$$

■

6.2. Сходимость суммы и произведения сходящихся по распределению последовательностей случайных величин в случае, когда одна из предельных случайных величин постоянная.

Лемма. Пусть X, Y, Z случайные величины. Тогда $\forall t \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0$ выполнено

$$P(X + Z \leq t - \varepsilon) - P(|Y - Z| \geq \varepsilon) \leq P(X + Y \leq t) \leq P(X + Z \leq t + \varepsilon) + P(|Y - Z| \geq \varepsilon)$$

Доказательство.

$$P(X + Y \leq t) \leq P(X + Y \leq t, |Y - Z| \geq \varepsilon) + P(X + Y \leq t, |Y - Z| < \varepsilon) \leq P(X + Y \leq t, |Y - Z| \geq \varepsilon) + P(|Y - Z| < \varepsilon)$$

Расскроем модуль

$$-\varepsilon \leq Y - Z \Rightarrow Z - \varepsilon \leq Y$$

Подставим вместо Y $Z - \varepsilon$

Событие $X + Z - \varepsilon \leq t$ вложено в событие $X + Y \leq t \cap |Y - Z| \geq \varepsilon$

$$\leq P(X + Z - \varepsilon \leq t) + P(|Y - Z| \geq \varepsilon)$$

Ищем другую оценку

Заменяем в получившемся неравенстве Y на Z , Z на Y

$$\begin{aligned} P(X + Z \leq t) &\leq P(X + Y - \varepsilon \leq t) + P(|Z - Y| \geq \varepsilon) = \\ &= P(X + Y \leq t + \varepsilon) + P(|Y - Z| \geq \varepsilon) \end{aligned}$$

Обозначим $t + \varepsilon := t$

$$P(X + Z \leq t - \varepsilon) \leq P(X + Y \leq t) + P(|Y - Z| \geq \varepsilon)$$

$$P(X + Y \leq t) \geq P(X + Z \leq t - \varepsilon) - P(|Y - Z| \geq \varepsilon)$$

■

Теорема. Если $X_n \xrightarrow{d} X$ и $Y_n \xrightarrow{d} C = \text{const}$ то

$$X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + C$$

$$X_n \cdot Y_n \xrightarrow{d} X \cdot C$$

Доказательство. Вспомним доказательство того что

$$Y_n \xrightarrow{d} C = \text{const} \Rightarrow Y_n \xrightarrow{p} C$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - C| \geq \varepsilon) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n - C \geq \varepsilon \text{ or } -X_n + C \geq \varepsilon) \leq \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n - C \geq \varepsilon) + \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n \leq C - \varepsilon) = \\ &= 1 - F_{X_n}(\varepsilon + C) + F_{X_n}(C - \varepsilon) \underbrace{\xrightarrow{n \rightarrow \infty}}_0 = 0 \end{aligned}$$

Используем лемму

$$P(X_n + C \leq t - \varepsilon) - P(|Y_n - C| \geq \varepsilon) \leq P(X_n + Y_n \leq t) \leq P(X_n + C \leq t + \varepsilon) + P(|Y_n - C| \geq \varepsilon)$$

$$F_{X_n}(t - \varepsilon - C) - P(|Y_n - C| \geq \varepsilon) \leq F_{X_n + Y_n}(t) \leq F_{X_n}(t + \varepsilon - C) + P(|Y_n - C| \geq \varepsilon)$$

1) $n \rightarrow \infty$

Заметим, что мы всегда можем выбрать точки $t - \varepsilon - C, t + \varepsilon - C$ в которых функция F_X непрерывна, т.к. точек разрыва счетное количество, а ε континуальная переменная.

Т.к. $Y_n \xrightarrow{p} C \Leftrightarrow_{def} \lim_{n \rightarrow \infty} P(|Y_n - C| \geq \varepsilon) = 0$

$$F_X(t - \varepsilon - C) \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} F_{X_n + Y_n}(t) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} F_{X_n + Y_n}(t) \leq F_X(t + \varepsilon - C)$$

2) $\varepsilon \rightarrow 0$

Заметим, что $t - C$ точка непрерывности функции F_X тогда и только тогда, когда t точка непрерывности функции F_{X+C} .

$$F_X(t - C) \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} F_{X_n + Y_n}(t) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} F_{X_n + Y_n}(t) \leq F_X(t - C)$$

Так как слева и справа у нас одно и тоже значение $\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n + Y_n}(t) = F_X(t - C) = F_{X+C}(t)$

1) $C = 0$

$$\{|X_n \cdot Y_n \geq \varepsilon\} \subset \{|X_n| > R\} \cup \{|Y_n| \geq \frac{\varepsilon}{R}\}$$

$$P(|X_n \cdot Y_n \geq \varepsilon) \leq P(|X_n| > R) + P(|Y_n| \geq \frac{\varepsilon}{R})$$

$$P(|X_n| \geq R) = P(X_n \geq R) + P(X_n \leq -R) \leq P(X_n > \frac{R}{2}) + F_{X_n}(-R) = 1 - F_{X_n}(\frac{R}{2}) + F_{X_n}(-R)$$

$$P(|X_n \cdot Y_n \geq \varepsilon) \leq P(|X_n| > R) + P(|Y_n| \geq \frac{\varepsilon}{R}) \leq 1 - F_{X_n}(\frac{R}{2}) + F_{X_n}(-R) + P(|Y_n| \geq \frac{\varepsilon}{R})$$

a) $n \rightarrow \infty$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P(|X_n \cdot Y_n \geq \varepsilon) \leq 1 - F_X(\frac{R}{2}) + F_X(-R) + 0$$

b) $R \rightarrow \infty$

R – точка непрерывности F_X

$$0 \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P(|X_n \cdot Y_n \geq \varepsilon) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P(|X_n \cdot Y_n \geq \varepsilon) \leq 1 - F_X(\frac{R}{2}) + F_X(-R) \leq 0$$

$$\Rightarrow X_n \cdot Y_n \xrightarrow{p} 0 \Rightarrow_{\text{Лекция 1}} X_n \cdot Y_n \xrightarrow{d} 0$$

2) Общий случай

$$X_n(Y_n - C) \xrightarrow{d} 0 \text{ по 1)}$$

$$CX_n \xrightarrow{d} CX$$

$$CX + 0 \xrightarrow{d} CX \text{ сумму разбирали выше}$$

■

6.3. Примеры применения: выборочная дисперсия и взаимосвязь с ЦПТ.

Пример 1 (Выборочная дисперсия)

Пусть задана последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин X_j , причем $\mathbb{E}X_j = a$ и $\mathbb{D}X_j = \sigma^2$. Тогда последовательность случайных величин

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \overline{X_n})^2, \text{ где } \overline{X_n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

Проверим это

$$\begin{aligned} \overline{X_n} &\xrightarrow{p} a \text{ (ЗБЧ)} \\ s_n^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \overline{X_n})^2 = \frac{n}{n-1} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^2 - \frac{1}{n-1} \left(-2 \underbrace{\sum_{j=1}^n X_j \cdot \overline{X_n}}_{n\overline{X_n}^2} + n\overline{X_n}^2 \right) = \frac{n}{n-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^2 - \overline{X_n}^2 \right) \\ &\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^2 \xrightarrow{p} \mathbb{E}X_1^2 \text{ (ЗБЧ)} \\ \overline{X_n}^2 &\xrightarrow{p} (\mathbb{E}X_1)^2 \\ \frac{n}{n-1} &\rightarrow 1 \\ &\xrightarrow{p} \mathbb{D}X_1 = \sigma^2 \\ \mathbb{E}s_n^2 &= \frac{n}{n-1} \left(\frac{1}{n} \cdot n \cdot \mathbb{E}X_1^2 - \mathbb{E}(\overline{X_n})^2 \right) = \\ \mathbb{E}(\overline{X_n})^2 &= \mathbb{E}(\overline{X_n} - a + a)^2 = \mathbb{E}(\overline{X_n} - a)^2 + a^2 - 2a \underbrace{\mathbb{E}(\overline{X_n} - a)}_0 = a^2 + \mathbb{D}\overline{X_n} = a^2 + \frac{1}{n^2} \mathbb{D}(X_1 + \dots + X_n) = a^2 + \frac{\sigma^2}{n} \\ &= \frac{n}{n-1} (\sigma^2 + a^2 - a^2 - \frac{\sigma^2}{n}) = \sigma^2 \end{aligned}$$

Пример 2 (Взаимосвязь с ЦПТ)

Обозначения сохраняются с прошлого примера

Хотим показать, что

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{n}(\overline{X_n} - a)}{\sqrt{s_n^2}} &\rightarrow Z \sim \mathcal{N}(0, 1) \\ \frac{\sqrt{n}(\overline{X_n} - a)}{\sqrt{s_n^2}} &= \frac{\sqrt{n}(\overline{X_n} - a)}{\sigma} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{s_n^2}} \\ \frac{\sqrt{n}(\overline{X_n} - a)}{\sigma} &\rightarrow Z \sim \mathcal{N}(0, 1) \text{ из лекции 4} \\ \sqrt{\frac{\sigma^2}{s_n^2}} &\xrightarrow{p} \sqrt{\frac{\sigma^2}{\sigma^2}} = 1 \text{ (Обсуждали выше)} \end{aligned}$$

Значит

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X_n} - a)}{\sqrt{s_n^2}} \rightarrow Z \cdot 1 \xrightarrow{d} Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

6.4. Теорема о сходимости последовательности вида $\frac{f(a + h_n X_n) - f(a)}{h_n}$ для сходящейся по распределению последовательности X_n .

Теорема. Пусть $a, h_n \in \mathbb{R}, h_n \rightarrow 0$ и f непрерывная на \mathbb{R} и дифференцируемая в точке a функция. Если последовательность случайных величин $X_n \xrightarrow{d} X$, то

$$\frac{f(a + h_n X_n) - f(a)}{h_n} \xrightarrow{d} f'(a)X$$

Доказательство. Введем функция

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(a+x) - f(a)}{x} & x \neq 0 \\ f'(a) & x = 0 \end{cases}$$

g – непрерывная

$$h_n \xrightarrow{d} 0$$

$$X_n \xrightarrow{d} X$$

$$h_n X_n \xrightarrow{d} 0 \text{ (теорема про произведения)} \Rightarrow$$

$$g(h_n X_n) \xrightarrow{d} g(0) \text{ (первая теорема в билете 6)} = f'(a)$$

$$\frac{f(a + h_n X_n) - f(a)}{h_n} = X_n \cdot g(h_n X_n) = X_n \cdot \frac{f(a + h_n X_n) - f(a)}{h_n X_n} \xrightarrow{d} f'(a)X \text{ (теорема про произведения)}$$

■

6.5. Взаимосвязь с ЦПТ.

Пример

Обозначения сохраняются с прошлого примера

Пусть задана последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин X_j , причем $\mathbb{E}X_j = a$ и $\mathbb{D}X_j = \sigma^2 > 0$. Если f дифференцируемая функция, то

$$\sqrt{n}(f(\overline{X_n}) - f(a)) \xrightarrow{d} Y \sim \mathcal{N}(0, q^2), q = \sigma f'(a)$$

Докажем это

Введем

$$Z_n = \frac{\sqrt{n}(\overline{X_n} - a)}{\sigma} \xrightarrow{d} Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Тогда

$$\frac{\sqrt{n}(f(\overline{X_n}) - f(a))}{\sigma} = \frac{f(a + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_n) - f(a)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \xrightarrow{d} f'(a)Z$$

$$\sqrt{n}(f(\overline{X_n}) - f(a)) = \sigma \cdot \frac{\sqrt{n}(f(\overline{X_n}) - f(a))}{\sigma} \xrightarrow{d} \sigma f'(a)Z \sim \mathcal{N}(0, q^2)$$

7. Неравенство типа Хефдинга-Чернова. Пример применения.
8. Многомерная характеристическая функция. Сходимость по распределению последовательности случайных векторов. Эквивалентное описание сходимости по распределению через сходимость характеристических функций (без доказательства). Независимость случайных величин в терминах характеристической функции совместного распределения. Матрица ковариаций, смысл задаваемой ей билинейной формы, ее изменение при линейных преобразованиях. Многомерная ЦПТ.
9. Многомерное нормальное распределение. Свойства нормального вектора: линейный образ нормального распределения нормален, характеристика через одномерные распределения, значение параметров нормального вектора, равносильность независимости и некоррелированности компонент. Представление нормального вектора, как линейный образ стандартного нормального вектора, ортогонализация. Плотность нормального вектора.
10. Условное математическое ожидание в дискретном случае относительно разбиения и относительно случайной величины. Основные свойства: линейность, монотонность, формула полной вероятности, условное ожидание величины, независимой с разбиением, вынесение случайной величины из под знака условного ожидания. Эквивалентное определение условного математического ожидания и геометрическая интерпретация.
11. Условное математическое ожидание в общем случае: определение и свойства. Формула для вычисления условного математического ожидания при известной плотности совместного распределения, условная плотность. Аналог формулы Байеса.