Линейная алгебра, Коллоквиум II

Бобень Вячеслав
@darkkeks, GitHub
Благодарность выражается Левину Александру (@azerty1234567890)
и Милько Андрею (@andrew_milko) за видеозаписи лекций.

2019 — 2020

"К коллоку можете даже не готовиться".

— Роман Сергеевич Авдеев

Содержание

1 Определения и формулировки

1. **Сумма двух подпространств векторного пространства**

   Пусть V – векторное пространство над F.

   $U, W \subseteq V$ – подпространства.

   Определение. *Суммой* подпространств U, W называется множество

   $$U + W := \{u + w \mid v \in U, w \in W\}.$$

2. **Теорема о связи размерности суммы двух подпространств с размерностью их пересечения**

   Теорема. $\dim(U \cap W) + \dim(U + W) = \dim U + \dim W$.

   Пример. Всякие две плоскости в $\mathbb{R}^3$ (содержащие 0) имеют общую прямую.

   Здесь $V = \mathbb{R}^3$, $\dim U = 2$, $\dim W = 2$.

   При этом $\dim(U + W) \leqslant 3$.

   Тогда, $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) \geqslant 2 + 2 - 3 = 1$.

3. **Сумма нескольких подпространств векторного пространства**

   Пусть $U_1, \ldots U_k \subseteq V$ – подпространства.

   Определение. *Суммой* подпространств $U_1, \ldots U_k$ называется множество

   $$U_1 + \cdots + U_k = \{u_1 + \cdots + u_k \mid u_i \in U_i\}.$$

   Замечание. $\dim(U_1 + \cdots + U_k) \leqslant \dim U_1 + \cdots + \dim U_k$.

4. **Линейная независимость нескольких подпространств векторного пространства**

   Определение. Подпространства $U_1, \ldots, U_k$ называются *линейно независимыми*, если $\forall u_1 \in U_1, \ldots, u_k \in U_k$ из условия $u_1 + \cdots + u_k = 0$ следует $u_1 = \cdots = u_k = 0$.

   Пример. Если $\dim U_i = 1$ и $U_i = \langle u_i \rangle$ $\forall i$, то $U_1, \ldots, U_k$ линейно независимы $\iff$ $u_1, \ldots, u_k$ линейно независимы.

5. **Разложение векторного пространства в прямую сумму подпространств**

   Определение. Говорят, что векторное пространство V разлагается в *прямую сумму* $U_1, \ldots, U_k$, если

   1. $V = U_1 + \cdots + U_k$,
   2. $U_1, \ldots, U_k$ линейно независимы.

   Обозначение: $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k$.

   Пример. Если $e_1, \ldots, e_n$ – базис V, то $V = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle e_n \rangle$

6. **При каких условиях на подпространства U_1, U_2 векторного пространства V имеет место разложение $V = U_1 \oplus U_2$?**

7. **Матрица перехода от одного базиса векторного пространства к другому**

8. **Формула преобразования координат вектора при замене базиса**

9. **Линейное отображение векторных пространств, его простейшие свойства**

   Пусть V, W — векторные пространства над F.

   Определение. Отображение $\varphi\colon V \to W$ называется *линейным*, если

   1. $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$,
   2. $\varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v)$.

   $\forall v_1, v_2, v \in V$, $\forall \lambda \in F$.

Простейшие свойства

1. $\varphi(\overrightarrow{0_V}) = \overrightarrow{0_W}$.
   Доказательство: $\varphi(\overrightarrow{0_V}) = \varphi(0 \cdot \overrightarrow{0_V}) = 0 \cdot \varphi(\overrightarrow{0_V}) = \overrightarrow{0_W}$.
2. $\varphi(-v) = -\varphi(v)$.
   Доказательство: $\varphi(-v) + \varphi(v) = \varphi(-v + v) = \varphi(0) = \varphi(\overrightarrow{0_V}) = \overrightarrow{0_W} \implies \varphi(-v) = -\varphi(v)$.

10. Изоморфизм векторных пространств, изоморфные векторные пространства

Определение. Отображение $\varphi\colon V \to W$ называется *изоморфизмом* если оно линейно и биективно.

Обозначение: $\varphi\colon V \xrightarrow{\sim} W$.

Определение. Два векторных пространства V, W называются *изоморфными*, если существует изоморфизм $\varphi\colon V \xrightarrow{\sim} W$.

Обозначается: $V \simeq W$ (либо $V \cong W$).

11. Какими свойствами обладает отношение изоморфности на множестве всех векторных пространств?

Теорема. *Отношение изоморфности является отношением эквивалентности на множестве всех векторных пространств над фиксированным полем F.*

12. Критерий изоморфности двух конечномерных векторных пространств

Теорема. *Пусть V, W — два конечномерных векторных пространства над F.*

Тогда, $V \simeq W \iff \dim V = \dim W$.

13. Матрица линейного отображения

Пусть V, W — векторные пространства над F.

$\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V,

$\mathbb{f} = (f_1, \dots, f_m)$ — базис W.

Пусть $\varphi\colon V \to W$ — линейное отображение.

$\forall j = 1, \dots, n$

$$\varphi(e_j) = a_{1j} f_1 + a_{2j} f_2 + \dots + a_{mj} f_m = (f_1, \dots, f_m) \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

Тогда, $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = (f_1, \dots, f_m) \cdot A$, где $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(F)$.

Определение. A называется матрицей линейного отображения φ в базисах $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$.

Обозначение: $A = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$.

В j-м столбце матрицы A стоят координаты вектора $\varphi(e_j)$ в базисе $\mathbb{f}$.

14. Связь между координатами вектора и его образа при линейном отображении

Предложение. Пусть $\varphi\colon V \to W$ — линейное отображение,

$\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V,

$\mathbb{f} = (f_1, \dots, f_m)$ — базис W,

$A = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$.

$v \in V \implies v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$,

$\qquad \varphi(v) = y_1 f_1 + \dots + y_m f_m$.

Тогда,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

15. Формула изменения матрицы линейного отображения при замене базисов

Пусть теперь $\mathbb{e}'$ — другой базис в V, $\mathbb{f}'$ — другой базис в W.

$\mathbb{e}' = \mathbb{e} \cdot C_{\in M_n}$,

$\mathbb{f}' = \mathbb{f} \cdot D_{\in M_m}$.

$A = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$,

$A' = A(\varphi, \mathbb{e}', \mathbb{f}')$.

Предложение. $A' = D^{-1}AC$.

16. Сумма двух линейных отображений и её матрица. Произведение линейного отображения на скаляр и его матрица

Пусть $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(V, W)$, $\lambda \in F$.

Определение.

1. *Суммой* линейных отображений φ и ψ называется линейное отображение $\varphi + \psi \in \mathrm{Hom}(V, W)$, такое что $(\varphi + \psi)(v) := \varphi(v) + \psi(v)$.
2. Произведение φ на λ — это линейное отображение $\lambda\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$, такое что $(\lambda\varphi)(v) := \lambda\varphi(v)$.

Зафиксируем базисы $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ в V и $\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ в W.

Предложение.

1. $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(V, W)$, $A_\varphi = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$
$$A_\psi = A(\psi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$$
$$A_{\varphi+\psi} = A(\varphi + \varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) \quad \Longrightarrow \quad A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$$
2. $\lambda \in F, \varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$, $A_\varphi = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$
$$A_{\lambda\varphi} = A(\lambda\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) \quad \Longrightarrow \quad A_{\lambda\varphi} = \lambda A_\varphi$$

17. Композиция двух линейных отображений и её матрица

Пусть $U \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{\varphi} W$ — цепочка линейных отображений, а $\varphi \circ \psi : U \to W$ — их композиция,

$\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V,

$\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ — базис W,

$\mathbb{g} = (g_1, \ldots, g_k)$ — базис U.

$A_\varphi = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$,

$A_\psi = A(\psi, \mathbb{g}, \mathbb{e})$,

$A_{\varphi\circ\psi} = A(\varphi \circ \psi, \mathbb{g}, \mathbb{f})$.

Тогда, $A_{\varphi\circ\psi} = A_\varphi \cdot A_\psi$.

18. Ядро и образ линейного отображения. Являются ли они подпространствами в соответствующих векторных пространствах?

Пусть $\varphi\colon V \to W$.

Определение. *Ядро* линейной оболочки φ — это $\ker \varphi := \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\} \subseteq V$.

Образ линейного отображения φ — это $\mathrm{Im}\,\varphi := \varphi(V) \subseteq W$.

Пример. $\Delta\colon \mathbb{R}[x]_{\leqslant n} \to \mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$, $f \mapsto f'$,

$\ker \Delta = \{f \mid f = \mathrm{const}\}$,

$\mathrm{Im}\,\Delta = \mathbb{R}[x]_{\leqslant n-1}$.

Предложение.

1. Ядро — подпространство в V.
2. Образ — подпространство в W.

19. Критерий инъективности линейного отображения в терминах его ядра

Пусть V, W — векторные пространства над F,

$\varphi\colon V \to W$ — линейное отображение.

Ядро: $\ker \varphi := \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\} \subseteq V$.

Образ: $\mathrm{Im}\,\varphi := \varphi(V) \subseteq W$.

Предложение.

(a) φ инъективно $\iff \ker\varphi = \{0\}$,

(b) φ сюръективно $\iff \operatorname{Im}\varphi = W$.

20. Связь между рангом матрицы линейного отображения и размерностью его образа

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V,
$\mathbb{f} = (f_1, \dots, f_m)$ — базис W,
$A = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$.

Теорема. $\operatorname{rk} A = \dim \operatorname{Im}\varphi$.

Замечание. Число $\dim\operatorname{Im}\varphi$ называется *рангом* линейного отображения φ, обозначается $\operatorname{rk}\varphi$.

Следствие. $\operatorname{rk} A$ не зависит от выбора пары базисов $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$.

21. Каким свойством обладает набор векторов, дополняющих базис ядра линейного отображения до базиса всего пространства?

Предложение. Пусть $e_1, \dots, e_k$ — базис $\ker\varphi$ и векторы $e_{k+1}, \dots, e_n$ дополняют его до базиса всего V.
Тогда, $\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)$ образуют базис в $\operatorname{Im}\varphi$.

22. Теорема о связи размерностей ядра и образа линейного отображения

Теорема. $\dim\operatorname{Im}\varphi + \dim\ker\varphi = \dim V$.

23. К какому простейшему виду можно привести матрицу линейного отображения путём замены базисов?

Предложение. Пусть $\operatorname{rk}\varphi = r$. Тогда существует базис $\mathbb{e}$ в V и базис $\mathbb{f}$ в W, такие что

$$A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) = \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} & r & & & & n-r & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ r \\ \\ \\ \\ m-r \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

24. Линейная функция на векторном пространстве

Определение. *Линейной функцией* (или *линейной формой*, или *линейным функционалом*) на V называется всякое линейное отображение $\alpha \colon V \to F$.

Обозначение. $V^* := \operatorname{Hom}(V, F)$ — множество всех линейных функций на V.

25. Сопряжённое (двойственное) векторное пространство и его размерность

Из общей теории линейных отображений:

1. V^* — векторное пространство (оно называется *сопряженным* или *двойственным*).
2. Если $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — фиксированный базис в V, то есть изоморфизм $V^* \simeq \operatorname{Mat}_{1\times n}(F)$ (а это ни что иное, как строки длины n).
   $\alpha \to (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$
   $v = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$
   $$\alpha(v) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \alpha_1x_1 + \dots + \alpha_nx_n.$$
   $\alpha_i = \alpha(e_i)$ — коэффициенты линейной функции α в базисе $\mathbb{e}$.

Следствие. $\dim V^* = \dim V$ ($\implies V^* \simeq V$).

26. Базис сопряжённого пространства, двойственный к данному базису исходного векторного пространства

При $i = 1, \dots, n$ рассмотрим линейную функцию $\varepsilon_i \in V^*$, соответствующую строке $(0 \dots 1 \dots 0)$. Тогда $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ — базис V^*, он однозначно определяется условием $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$. ($\delta_{ij}$ — символ Кронекера)

Определение. Базис $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ пространства V^*, определенный условием выше, называется базисом, *двойственным* (сопряженным) к базису $\mathbb{e}$.

Удобная запись условия:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} (e_1, \dots, e_n) = E.$$

27. Билинейная форма на векторном пространстве

Пусть V — векторное пространство над F.

Определение. *Биленейная форма* на V — это отображение $\beta \colon V \times V \to F$, линейное по каждому аргументу.

Линейность по 1-му аргументу

- $\beta(x_1 + x_2, y) = \beta(x_1, y) + \beta(x_2, y) \quad \forall x_1, x_2, y \in V,$
- $\beta(\lambda x, y) = \lambda \beta(x, y) \quad \forall x, y \in V,\ \lambda \in F.$

Линейность по 2-му аргументу

- $\beta(x, y_1 + y_2) = \beta(x, y_1) + \beta(x, y_2) \quad \forall x, y_1, y_2 \in V,$
- $\beta(x, \lambda y) = \lambda \beta(x, y) \quad \forall x, y \in V,\ \lambda \in F.$

28. Матрица билинейной формы

Считаем, что $\dim V = n < \infty$.

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V.

Определение. Матрицей билинейной формы β в базисе $\mathbb{e}$ называется такая матрица $B \in M_n$, что $b_{ij} = \beta(e_i, e_j)$.

Обозначение: $B(\beta, \mathbb{e})$.

29. Формула для вычисления значений билинейной формы в координатах

Пусть $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$,

$y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$.

Тогда,

$$\begin{aligned} \beta(x, y) &= \beta\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i,\ \sum_{j=1}^n y_j e_j \right) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \beta\left(e_i,\ \sum_{j=1}^n y_j e_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \underbrace{\beta(e_i, e_j)}_{\beta_{ij}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \beta_{ij} y_j \\ &= (x_1, \dots, x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

30. Формула изменения матрицы билинейной формы при переходе к другому базису

$B = B(\beta, \mathbb{e})$.

Пусть $\mathbb{e}' = (e'_1, \dots e'_n)$ — другой базис V.

$\mathbb{e}' = \mathbb{e} \cdot C$.

$B' := B(\beta, \mathbb{e}')$.

Предложение. $B' = C^T B C$.

31. Симметричная билинейная форма. Критерий симметричности билинейной формы в терминах её матрицы

Определение. Билинейная форма β называется *симметричной*, если $\beta(x,y) = \beta(y,x)\ \forall x, y \in V$.

Пусть $\mathbb{e}$ — произвольный базис V.

Предложение. β симметрична $\iff B = B^T$.

32. Квадратичная форма

Пусть $\beta\colon V \times V \to F$ — билинейная форма на V.

Определение. Отображение $Q_\beta\colon V \to F$, $Q_\beta(x) = \beta(x,x)$, называется *квадратичной формой*, ассоциированной с билинейной формой β.

Пусть $\mathbb{e}$ — базис V, $x = x_1e_1 + \ldots x_ne_n$, $B = B(\beta, \mathbb{e})$.

Тогда,

$$Q_\beta(x) = (x_1 \ldots x_n)B\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (b_{ij} + b_{ji})x_ix_j.$$

33. Соответствие между симметричными билинейными формами и квадратичными формами

Предложение. Пусть в поле F выполнено условие $1 + 1 \neq 0$ (то есть $2 \neq 0$). Тогда отображение $\beta \mapsto Q_\beta$ является биекцией между симметричными билинейными формами на V и квадратичным формами на V.

34. Симметризация билинейной формы

Билинейная форма $\sigma(x,y) = \frac{1}{2}\left(\beta(x,y) + \beta(y,x)\right)$ называется *симметризацией* билинейной формы β.

Если B и S — матрицы билинейных форм β и σ в некотором базисе, то $S = \frac{1}{2}(B + B^T)$.

35. Поляризация квадратичной формы

Симметричная билинейная форма $\beta(x,y) = \frac{1}{2}\left[Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\right]$ называется *поляризацией* квадратичной формы Q.

36. Матрица квадратичной формы

Определение. Матрицей квадратной формы Q в базисе $\mathbb{e}$ называется матрица соответствующей симметричной билинейной формы (поляризации) в базисе $\mathbb{e}$.

Обозначение: $B(Q, \mathbb{e})$.

Пример. Пусть $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$.

Если $\mathbb{e}$ — стандартный базис, то $B(Q, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

37. Канонический вид квадратичной формы

Определение. Квадратичная форма Q имеет в базисе $\mathbb{e}$ *канонический вид*, если $B(Q, \mathbb{e})$ диагональна.

Если $B(Q, \mathbb{e}) = \operatorname{diag}(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, то $Q(x_1, \ldots, x_n) = b_1x_1^2 + b_2x_2^2 + \cdots + b_nx_n^2$.

38. Нормальный вид квадратичной формы над $\mathbb{R}$

Определение. Квадратичная форма над $\mathbb{R}$ имеет *нормальный вид* в базисе $\mathbb{e}$, если в этом базисе

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \varepsilon_1x_1^2 + \cdots + \varepsilon_nx_n^2,$$

где $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$.

39. Индексы инерции квадратичной формы над $\mathbb{R}$

Пусть $F = \mathbb{R}$.

Пусть $Q\colon V \to \mathbb{R}$ — квадратичная форма.

Можно привести к нормальному виду

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \cdots - x_{s+t}^2.$$

Здесь $i_+ := s$ — положительный индекс инерции квадратичной формы Q,
$i_- := t$ — отрицательный индекс инерции квадратичной формы Q.

40. Закон инерции для квадратичной формы над $\mathbb{R}$

Теорема. *Числа i_+ и i_- не зависят от базиса в котором Q принимает нормальный вид.*

41. Положительно/неотрицательно определённая квадратичная форма над $\mathbb{R}$

42. Отрицательно/неположительно определённая квадратичная форма над $\mathbb{R}$

43. Неопределённая квадратичная форма над $\mathbb{R}$

Определение. Квадратичная форма Q над $\mathbb{R}$ называется

Термин	Обозначение	Условие	Нормальный вид	Индексы инерции
Положительно определённой	$Q > 0$	$Q(x) > 0\ \forall x \neq 0$	$x_1^2 + \dots + x_n^2$	$i_+ = n, i_- = 0$
Отрицательно определённой	$Q < 0$	$Q(x) < 0\ \forall x \neq 0$	$-x_1^2 - \dots - x_n^2$	$i_+ = 0, i_- = n$
Неотрицательно определённой	$Q \geqslant 0$	$Q(x) \geqslant 0\ \forall x$	$x_1^2 + \dots + x_k^2,\ k \leqslant n$	$i_+ = k, i_- = 0$
Неположительно определённой	$Q \leqslant 0$	$Q(x) \leqslant 0\ \forall x$	$-x_1^2 - \dots - x_k^2,\ k \leqslant n$	$i_+ = 0, i_- = k$
Неопределённой	—	$\exists x : Q(x) > 0$ $\exists y : Q(y) < 0$	$x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - x_{s+t}^2$ $s, t \geqslant 1$	$i_+ = s, i_- = t$

44. Способ нахождения индексов инерции квадратичной формы над $\mathbb{R}$, вытекающий из метода Якоби

Пусть $Q\colon V \to \mathbb{R}$ — квадратичная форма,

$\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис,

$B = B(Q, \mathbb{e})$,

δ_k — k-й угловой минор матрицы B.

Следствие (из метода Якоби)**.** Пусть $\delta_k \neq 0\ \forall k$. Тогда:

Число i_+ равно количеству сохранений знака в последовательности $1, \delta_1, \dots, \delta_n$.

Число i_- равно количеству перемен знака в последовательности $1, \delta_1, \dots, \delta_n$.

45. Критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы над $\mathbb{R}$

Пусть V — векторное пространство над $\mathbb{R}$, $\dim V = n$,

$\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V,

$B = B(Q, \mathbb{e})$,

B_k — левый верхний $k \times k$ блок,

$\delta_k = \det B_k$.

Теорема (Критерий Сильвестра положительной определенности)**.**

$$Q > 0 \iff \delta_k > 0\ \forall k = 1 \dots n.$$

46. Критерий отрицательной определённости квадратичной формы над $\mathbb{R}$

Следствие.

$$Q < 0 \iff \delta_k \begin{cases} > 0 & \text{при } k \not\vdots\, 2, \\ < 0 & \text{при } k \,\vdots\, 2. \end{cases}$$

47. Евклидово пространство

Определение. *Евклидово пространство* — это векторное пространство $\mathbb{E}$ над $\mathbb{R}$, на котором задано *скалярное произведение*, то есть такое отображение $(\bullet, \bullet)\colon \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R}$, что

1. $(\bullet, \bullet)$ — симметричная билинейная форма,
2. Квадратичная форма (x, x) положительно определённая.

48. Длина вектора в евклидовом пространстве

Определение. *Длина* вектора $x \in \mathbb{E}$ — это $|x| := \sqrt{(x, x)}$.

Свойство: $|x| \geqslant 0$, причем $|x| = 0 \iff x = 0$.

Пример. Если $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением, то $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.

49. Неравенство Коши–Буняковского

Предложение (неравенство Коши-Буняковского)**.** $\forall x, y \in \mathbb{E}$ верно $|(x,y)| \leqslant |x| \cdot |y|$, причём равенство $\iff$ x, y пропорциональны.

Пример. Пусть $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением, тогда

$$|x_1y_1 + \dots + x_ny_n| \leqslant \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}.$$

50. Угол между ненулевыми векторами евклидова пространства

Пусть $x, y \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$, тогда $-1 \leqslant \frac{(x,y)}{|x| \cdot |y|} \leqslant 1$.

Определение. Угол между ненулевыми векторами $x, y \in \mathbb{E}$, это такой $\alpha \in [0, \pi]$, что $\cos\alpha = \frac{(x,y)}{|x| \cdot |y|}$.

Тогда $(x, y) = |x||y|\cos\alpha$.

51. Матрица Грама системы векторов евклидова пространства

Пусть $v_1, \dots, v_k$ — произвольная система векторов.

Определение. *Матрица Грама* этой системы — это

$$G(v_1, \dots, v_k) = \begin{pmatrix} (v_1, v_1) & (v_1, v_2) & \dots & (v_1, v_k) \\ (v_2, v_1) & (v_2, v_2) & \dots & (v_2, v_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (v_k, v_1) & (v_k, v_2) & \dots & (v_k, v_k) \end{pmatrix}.$$

Пример. $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением.

$a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n \rightsquigarrow A := (a_1, \dots, a_k) \in \mathrm{Mat}_{n \times k}(\mathbb{R})$.

Тогда, $G(a_1, \dots, a_k) = A^T \cdot A$.

52. Свойства определителя матрицы Грама

Предложение. $\forall v_1, \dots, v_k \in \mathbb{E} \implies \det G(v_1, \dots, v_k) \geqslant 0$.

Более того, $\det G(v_1, \dots, v_k) > 0 \iff v_1, \dots, v_k$ линейно независимы.

53. Ортогональная система векторов евклидова пространства. Ортогональный базис

54. Ортонормированная система векторов евклидова пространства. Ортонормированный базис

Определение. Система ненулевых векторов $v_1, \dots, v_k$ называется

1. *ортогональной*, если $(v_i, v_j) = 0$ $\forall i \neq j$ (то есть $G(v_1, \dots, v_k)$ диагональна),
2. *ортонормированной*, если $(v_i, v_j) = 0$ $\forall i \neq j$ и $(v_i, v_i) = 1$ ($\iff |v_i| = 1$). То есть $G(v_1, \dots, v_k) = E$.

Замечание. Всякая ортогональная (и в частности ортонормированная) система векторов автоматически линейно независима.

$$\det G(v_1, \dots, v_k) = |v_1|^2 \dots |v_k|^2 \neq 0.$$

Определение. Базис пространства называется *ортогональным* (соответственно *ортонормированным*), если он является ортогональной (ортонормированной) системой векторов.

55. Описание всех ортонормированных базисов евклидова пространства в терминах одного такого базиса и матриц перехода

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — ортонормированный базис в E.

Пусть $\mathbb{e}' = (e_1', \dots, e_n')$ — какой-то другой базис.

$(e_1', \dots, e_n') = (e_1, \dots, e_n) \cdot C$, $C \in M_n^0(\mathbb{R})$.

Предложение. $\mathbb{e}'$ — ортонормированный базис $\iff C^T \cdot C = E$.

Доказательство. $G(e_1', \dots, e_n') = C^T \underbrace{G(e_1, \dots, e_n)}_{E} C = C^T C$.

$\mathbb{e}'$ ортонормированный $\iff G(e_1', \dots, e_n') = E \iff C^T C = E$. ■

56. Ортогональная матрица

Определение. Матрица $C \in M_n(\mathbb{R})$ называется *ортогональной* если $C^T C = E$.

Замечание. $C^T C = E \iff CC^T = E \iff C^{-1} = C^T$.

Свойства.

1. $C^T C = E \implies$ система столбцов $C^{(1)}, \ldots, C^{(n)}$ — это ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$,
2. $CC^T = E \implies$ система строк $C_{(1)}, \ldots, C_{(n)}$ — это тоже ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$,

В частности, $|c_{ij}| \leqslant 1$.

3. $\det C = \pm 1$.

Пример. $n = 2$. Ортогональный матрицы:

$$\underset{\det = 1}{\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}} \qquad \underset{\det = -1}{\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}}.$$

57. Формула для координат вектора в ортогональном и ортонормированном базисах евклидова пространства

Пусть $\mathbb{E}$ — евклидово пространство, $(e_1, \ldots, e_n)$ — ортогональный базис.

$v \in \mathbb{E}$.

Предложение. $v = \dfrac{(v, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 + \dfrac{(v, e_2)}{(e_2, e_2)} e_2 + \cdots + \dfrac{(v, e_n)}{(e_n, e_n)} e_n$.

В частности, если $e_1, \ldots, e_n$ ортонормирован, то $v = (v, e_1)e_1 + \cdots + (v, e_n)e_n$.

58. Ортогональное дополнение подмножества евклидова пространства

Определение. *Ортогональное дополнение* множества $S \subseteq \mathbb{E}$ — это множество $S^\perp := \{x \in \mathbb{E} \mid (x, y) = 0 \ \forall y \in S\}$.

59. Чему равна размерность ортогонального дополнения к подпространству евклидова пространства?

60. Каким свойством обладают подпространство евклидова пространства и его ортогональное дополнение?

Считаем, что $\dim \mathbb{E} = n < \infty$.

Предложение. Пусть $S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство. Тогда:

1. $\dim S^\perp = n - \dim S$.
2. $\mathbb{E} = S \oplus S^\perp$.
3. $(S^\perp)^\perp = S$.

61. Ортогональная проекция вектора на подпространство

62. Ортогональная составляющая вектора относительно подпространства

S — подпространство $\implies \mathbb{E} = S \oplus S^\perp$

$\forall v \in \mathbb{E} \exists! x \in S, y \in S^\perp$, такие что $x + y = v$.

Определение.

1. x называется *ортогональной проекцией* вектора v на подпространство S.
   Обозначение: $x = \operatorname{pr}_S v$.
2. y называется *ортогональной составляющей* вектора v относительно подпространства S.
   Обозначение: $y = \operatorname{ort}_S v$.

63. Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в $\mathbb{R}^n$, заданное своим базисом

Пусть $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением.

$S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство, $a_1, \ldots, a_k$ — базис S.

Пусть $A := (a_1, \ldots, a_k) \in \operatorname{Mat}_{n \times k}(\mathbb{R})$, $A^{(i)} = a_i$.

Предложение. $\forall v \in \mathbb{R}^n \quad \operatorname{pr}_S v = A(A^T A)^{-1} A^T v$.

64. Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в терминах его ортогонального базиса

Пусть $S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство.

$e_1, \ldots, e_k$ — ортогональный базис в S.

Предложение. $\forall v \in \mathbb{E} \quad \operatorname{pr}_S v = \sum_{i=1}^k \dfrac{(v, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i.$

В частности, если $e_1, \ldots, e_k$ ортонормирован, то $\operatorname{pr}_S v = \sum_{i=1}^k (v, e_i) e_i$.

65. Теорема Пифагора в евклидовом пространстве

Теорема. *Пусть* $x, y \in \mathbb{E}$, $(x, y) = 0$. *Тогда* $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$.

66. Расстояние между векторами евклидова пространства

Определение. *Расстояние* между векторами $x, y \in \mathbb{E}$ — это $\rho(x, y) = |x - y|$.

67. Неравенство треугольника в евклидовом пространстве

Предложение. $\forall a, b, c \in \mathbb{E} \implies \rho(a, b) + \rho(b, c) \geqslant \rho(a, c)$.

68. Теорема о расстоянии между вектором и подпространством в терминах ортогональной составляющей

Теорема. *Пусть* $x \in \mathbb{E}$, $S \subseteq \mathbb{E}$ *— подпространство. Тогда,* $\rho(x, S) = |\operatorname{ort}_S x|$, *причем* $\operatorname{pr}_S x$ *— это ближайший к* x *вектор из* S.

69. Псевдорешение несовместной системы линейных уравнений

СЛУ $Ax = b$, $A \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$.

$$x_0 \text{ — решение системы} \iff Ax_0 = b \iff Ax_0 - b = 0 \iff |Ax_0 - b| = 0 \iff \rho(Ax_0, b) = 0.$$

Если СЛУ несовместна, то x_0 называется *псевдорешением*, если $\rho(Ax_0, b)$ минимально.

$$\rho(Ax_0, b) = \min_{x \in R^n} \rho(Ax, b).$$

x_0 — решение задачи оптимизации $\rho(Ax, b) \xrightarrow[x \in \mathbb{R}^n]{} \min$.

70. Формула для расстояния от вектора до подпространства в терминах матриц Грама

Пусть $\mathbb{E}$ — евклидово пространство, $\dim \mathbb{E} = n < \infty$.

$S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство, $e_1, \ldots, e_k$ — базис в S.

Теорема. $\forall x \in \mathbb{E} \quad \rho(x, S)^2 = \dfrac{\det G(e_1, \ldots, e_k, x)}{\det G(e_1, \ldots, e_k)}.$

71. k-мерный параллелепипед и его объём

Определение. *k-мерный параллелепипед*, натянутый на векторы $a_1, \ldots, a_k$, это множество

$$P(a_1, \ldots, a_k) := \left\{ \sum_{i=1}^k x_i a_i \mid 0 \leqslant x_1 < 1 \right\}.$$

Основание: $P(a_1, \ldots, a_{k-1})$.

Высота: $h := |\operatorname{ort}_{\langle a_1, \ldots, a_{k-1} \rangle} a_k|$.

Пример.

$k = 1$ $h = |a_1|$ здесь картинка, тоже лень :(

$k = 2$ основание — $P(a_1)$, высота — h дада, люблю картинки делать

Пример. k-мерный объем k-мерного параллелепипеда $P(a_1, \ldots, a_k)$ — это величина $\operatorname{vol} P(a_1, \ldots, a_k)$, определяемая индуктивно:

$k = 1 \implies \operatorname{vol} P(a_1) := |a_1|$.

$k > 1 \implies \operatorname{vol} P(a_1, \dots, a_k) := \operatorname{vol} P(a_1, \dots, a_{k-1}) \cdot h.$

72. Формула для объёма k-мерного параллелепипеда в n-мерном евклидовом пространстве

Теорема. $\operatorname{vol} P(a_1, \dots, a_k)^2 = \det G(a_1, \dots, a_k).$

73. Формула для объёма n-мерного параллелепипеда в n-мерном евклидовом пространстве в терминах координат в ортонормированном базисе

Пусть $(e_1, \dots, e_n)$ — ортонормированный базис в $\mathbb{E}$,

$(a_1, \dots, a_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot A$, $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Предложение. $\operatorname{vol} P(a_1, \dots, a_n) = |\det A|$.

74. В каком случае два базиса евклидова пространства называются одинаково ориентированными?

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ и $\mathbb{e}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ — два базиса в $\mathbb{E}$.

$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C$, $C \in M_n^0(\mathbb{R})$.

Определение. Говорят, что $\mathbb{e}$ и $\mathbb{e}'$ одинаково ориентированы, если $\det C > 0$.

75. Векторное произведение в трёхмерном евклидовом пространстве

Теорема. *Пусть $a, b \in \mathbb{R}^3$. Тогда $\exists! v \in \mathbb{E}$, такой что $(v, x) = \operatorname{Vol}(a, b, x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$.*

Определение. Вектор v из теоремы выше называется *векторным произведением* векторов a и b.

Обозначение: $[a, b]$ или $a \times b$.

76. Критерий коллинеарности двух векторов трёхмерного евклидова пространства

Предложение. $a, b \in \mathbb{E}$ коллинеарны $\iff [a, b] = 0$.

77. Формула для вычисления векторного произведения в терминах координат в положительно ориентированном ортонормированном базисе

Если $\mathbb{e} = (e_1, e_2, e_3)$ — положительно ориентированный базис и $a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$, то
$b = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$

$$[a, b] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} := \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} e_3.$$

78. Смешанное произведение векторов трёхмерного евклидова пространства

Определение. $\forall a, b, c \in \mathbb{E}$ число $(a, b, c) := ([a, b], c)$ называется *смешанным произведением* векторов a, b, c.

Замечание. $(a, b, c) = \operatorname{Vol}(a, b, c)$.

79. Формула для вычисления смешанного произведения в терминах координат в положительно ориентированном ортонормированном базисе

Если e_1, e_2, e_3 — положительно ориентированный ортонормированный базис, то

$$\left.\begin{aligned} a &= a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \\ b &= b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 \\ c &= c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3 \end{aligned}\right| \implies (a, b, c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

80. Критерий компланарности трёх векторов трёхмерного евклидова пространства

a, b, c компланарны $\iff (a, b, c) = 0$.

81. Линейное многообразие. Характеризация линейных многообразий как сдвигов подпространств

Определение. *Линейное многообразие* в $\mathbb{R}^n$ — это множество решений некоторой совместной СЛУ.

Пусть $Ax = b$ — СЛУ, $\varnothing \neq L \subseteq \mathbb{R}^n$ — множество решений, $x_z \in L$ — частное решение.

Было: Лемма: $L = x_z + S$, где S — множество решений ОСЛУ $Ax = 0$.

Предложение. Множество $L \subseteq \mathbb{R}^n$ является линейны многообразием $\iff L = v_0 + S$ для некоторых $v_0 \in \mathbb{R}^n$ и подпространства $S \subseteq \mathbb{R}^n$.

82. **Критерий равенства двух линейных многообразий. Направляющее подпространство и размерность линейного многообразия**

Предложение. Пусть $L_1 = v_1 + S_1$ и $L_2 = v_2 + S_2$ — два линейных многообразия в $\mathbb{R}^n$. Тогда,

$$L_1 = L_2 \iff \begin{cases} S_1 = S_2 \ (= S) \\ v_1 - v_2 \in S \end{cases}.$$

Если L — линейное многообразие, то $L = v_0 + S$, где S определено однозначно.

Определение. S называется *направляющим подпространством* линейного многообразия L.

Определение. *Размерностью* линейного многообразия называется размерность его направляющего подпространства.

83. **Теорема о плоскости, проходящей через $k+1$ точку в $\mathbb{R}^n$**

84. **Три способа задания прямой в $\mathbb{R}^2$. Уравнение прямой в $\mathbb{R}^2$, проходящей через две различные точки**

85. **Три способа задания плоскости в $\mathbb{R}^3$. Уравнение плоскости в $\mathbb{R}^3$, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой**

86. **Три способа задания прямой в $\mathbb{R}^3$. Уравнения прямой в $\mathbb{R}^3$, проходящей через две различные точки**

87. **Случаи взаимного расположения двух прямых в $\mathbb{R}^3$**

88. **Формула для расстояния от точки до прямой в $\mathbb{R}^3$**

89. **Формула для расстояния от точки до плоскости в $\mathbb{R}^3$**

90. **Формула для расстояния между двумя скрещивающимися прямыми в $\mathbb{R}^3$**

91. **Линейный оператор**

92. **Матрица линейного оператора**

93. **Связь между координатами вектора и его образа при действии линейного оператора**

94. **Формула изменения матрицы линейного оператора при переходе к другому базису**

95. **Подобные матрицы**

96. **Подпространство, инвариантное относительно линейного оператора**

97. **Вид матрицы линейного оператора в базисе, дополняющем базис инвариантного подпространства**

98. **Вид матрицы линейного оператора в базисе, согласованном с разложением пространства в прямую сумму двух инвариантных подпространств**

99. **Собственный вектор линейного оператора**

100. **Собственное значение линейного оператора**

101. **Спектр линейного оператора**

102. **Диагонализуемый линейный оператор**

103. **Критерий диагонализуемости линейного оператора в терминах собственных векторов**

104. **Собственное подпространство линейного оператора**

105. **Характеристический многочлен линейного оператора**

106. **Связь спектра линейного оператора с его характеристическим многочленом**

107. **Алгебраическая кратность собственного значения линейного оператора**

108. **Геометрическая кратность собственного значения линейного оператора**

109. **Связь между алгебраической и геометрической кратностями собственного значения линейного оператора**

110. **Критерий диагонализуемости линейного оператора в терминах его характеристического многочлена и кратностей его собственных значений**

111. Линейное отображение евклидовых пространств, сопряжённое к данному

112. Линейный оператор в евклидовом пространстве, сопряжённый к данному

113. Самосопряжjнный линейный оператор в евклидовом пространстве

114. Теорема о каноническом виде самосопряжjнного линейного оператора

115. Каким свойством обладают собственные подпространства самосопряжённого линейного оператора, отвечающие попарно различным собственным значениям?

116. Приведение квадратичной формы к главным осям

2 Вопросы на доказательство