

# Линейная алгебра, Коллоквиум II

Бобень Вячеслав

@darkkeks, GitHub

Благодарность выражается Левину Александру (@azerty1234567890)

и Милько Андрею (@andrew\_milko) за видеозаписи лекций.

2019 — 2020

“К коллоку можете даже не готовиться”.

— Роман Сергеевич Авдеев

## Содержание

<b>1</b>	<b>Определения и формулировки</b>	<b>4</b>
1.1	Сумма двух подпространств векторного пространства	4
1.2	Теорема о связи размерности суммы двух подпространств с размерностью их пересечения	4
1.3	Сумма нескольких подпространств векторного пространства	4
1.4	Линейная независимость нескольких подпространств векторного пространства	4
1.5	Разложение векторного пространства в прямую сумму подпространств	4
1.6	При каких условиях на подпространства $U_1, U_2$ векторного пространства $V$ имеет место разложение $V = U_1 \oplus U_2$ ?	4
1.7	Матрица перехода от одного базиса векторного пространства к другому	4
1.8	Формула преобразования координат вектора при замене базиса	4
1.9	Линейное отображение векторных пространств, его простейшие свойства	4
1.10	Изоморфизм векторных пространств, изоморфные векторные пространства	5
1.11	Какими свойствами обладает отношение изоморфности на множестве всех векторных пространств?	5
1.12	Критерий изоморфности двух конечномерных векторных пространств	5
1.13	Матрица линейного отображения	5
1.14	Связь между координатами вектора и его образа при линейном отображении	5
1.15	Формула изменения матрицы линейного отображения при замене базисов	6
1.16	Сумма двух линейных отображений и её матрица. Произведение линейного отображения на скаляр и его матрица	6
1.17	Композиция двух линейных отображений и её матрица	6
1.18	Ядро и образ линейного отображения. Являются ли они подпространствами в соответствующих векторных пространствах?	6
1.19	Критерий инъективности линейного отображения в терминах его ядра	6
1.20	Связь между рангом матрицы линейного отображения и размерностью его образа	7
1.21	Каким свойством обладает набор векторов, дополняющих базис ядра линейного отображения до базиса всего пространства?	7
1.22	Теорема о связи размерностей ядра и образа линейного отображения	7
1.23	К какому простейшему виду можно привести матрицу линейного отображения путём замены базисов?	7
1.24	Линейная функция на векторном пространстве	7
1.25	Сопряжённое (двойственное) векторное пространство и его размерность	7
1.26	Базис сопряжённого пространства, двойственный к данному базису исходного векторного пространства	8
1.27	Билинейная форма на векторном пространстве	8
1.28	Матрица билинейной формы	8
1.29	Формула для вычисления значений билинейной формы в координатах	8
1.30	Формула изменения матрицы билинейной формы при переходе к другому базису	8
1.31	Симметричная билинейная форма. Критерий симметричности билинейной формы в терминах её матрицы	8
1.32	Квадратичная форма	9
1.33	Соответствие между симметричными билинейными формами и квадратичными формами	9
1.34	Симметризация билинейной формы	9

1.35	Поляризация квадратичной формы . . . . .	9
1.36	Матрица квадратичной формы . . . . .	9
1.37	Канонический вид квадратичной формы . . . . .	9
1.38	Нормальный вид квадратичной формы над $\mathbb{R}$ . . . . .	9
1.39	Индексы инерции квадратичной формы над $\mathbb{R}$ . . . . .	9
1.40	Закон инерции для квадратичной формы над $\mathbb{R}$ . . . . .	9
1.41	Положительно/неотрицательно определённая квадратичная форма над $\mathbb{R}$ . . . . .	10
1.42	Отрицательно/неположительно определённая квадратичная форма над $\mathbb{R}$ . . . . .	10
1.43	Неопределённая квадратичная форма над $\mathbb{R}$ . . . . .	10
1.44	Способ нахождения индексов инерции квадратичной формы над $\mathbb{R}$ , вытекающий из метода Якоби . . . . .	10
1.45	Критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы над $\mathbb{R}$ . . . . .	10
1.46	Критерий отрицательной определённости квадратичной формы над $\mathbb{R}$ . . . . .	10
1.47	Евклидово пространство . . . . .	10
1.48	Длина вектора в евклидовом пространстве . . . . .	10
1.49	Неравенство Коши–Буняковского . . . . .	11
1.50	Угол между ненулевыми векторами евклидова пространства . . . . .	11
1.51	Матрица Грама системы векторов евклидова пространства . . . . .	11
1.52	Свойства определителя матрицы Грама . . . . .	11
1.53	Ортогональная система векторов евклидова пространства. Ортогональный базис . . . . .	11
1.54	Ортонормированная система векторов евклидова пространства. Ортонормированный базис . . . . .	11
1.55	Описание всех ортонормированных базисов евклидова пространства в терминах одного такого базиса и матриц перехода . . . . .	11
1.56	Ортогональная матрица . . . . .	11
1.57	Формула для координат вектора в ортогональном и ортонормированном базисах евклидова пространства . . . . .	12
1.58	Ортогональное дополнение подмножества евклидова пространства . . . . .	12
1.59	Чему равна размерность ортогонального дополнения к подпространству евклидова пространства? . . . . .	12
1.60	Каким свойством обладают подпространство евклидова пространства и его ортогональное дополнение? . . . . .	12
1.61	Ортогональная проекция вектора на подпространство . . . . .	12
1.62	Ортогональная составляющая вектора относительно подпространства . . . . .	12
1.63	Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в $\mathbb{R}^n$ , заданное своим базисом . . . . .	12
1.64	Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в терминах его ортогонального базиса . . . . .	13
1.65	Теорема Пифагора в евклидовом пространстве . . . . .	13
1.66	Расстояние между векторами евклидова пространства . . . . .	13
1.67	Неравенство треугольника в евклидовом пространстве . . . . .	13
1.68	Теорема о расстоянии между вектором и подпространством в терминах ортогональной составляющей . . . . .	13
1.69	Псевдорешение несовместной системы линейных уравнений . . . . .	13
1.70	Формула для расстояния от вектора до подпространства в терминах матриц Грама . . . . .	13
1.71	$k$ -мерный параллелепипед и его объём . . . . .	13
1.72	Формула для объёма $k$ -мерного параллелепипеда в $n$ -мерном евклидовом пространстве . . . . .	14
1.73	Формула для объёма $n$ -мерного параллелепипеда в $n$ -мерном евклидовом пространстве в терминах координат в ортонормированном базисе . . . . .	14
1.74	В каком случае два базиса евклидова пространства называются одинаково ориентированными? . . . . .	14
1.75	Векторное произведение в трёхмерном евклидовом пространстве . . . . .	14
1.76	Критерий коллинеарности двух векторов трёхмерного евклидова пространства . . . . .	14
1.77	Формула для вычисления векторного произведения в терминах координат в положительно ориентированном ортонормированном базисе . . . . .	14
1.78	Смешанное произведение векторов трёхмерного евклидова пространства . . . . .	14
1.79	Формула для вычисления смешанного произведения в терминах координат в положительно ориентированном ортонормированном базисе . . . . .	14
1.80	Критерий компланарности трёх векторов трёхмерного евклидова пространства . . . . .	14
1.81	Линейное многообразие. Характеризация линейных многообразий как сдвигов подпространств . . . . .	14
1.82	Критерий равенства двух линейных многообразий. Направляющее подпространство и размерность линейного многообразия . . . . .	15
1.83	Теорема о плоскости, проходящей через $k + 1$ точку в $\mathbb{R}^n$ . . . . .	15
1.84	Три способа задания прямой в $\mathbb{R}^2$ . Уравнение прямой в $\mathbb{R}^2$ , проходящей через две различные точки . . . . .	15
1.85	Три способа задания плоскости в $\mathbb{R}^3$ . Уравнение плоскости в $\mathbb{R}^3$ , проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой . . . . .	15
1.86	Три способа задания прямой в $\mathbb{R}^3$ . Уравнения прямой в $\mathbb{R}^3$ , проходящей через две различные точки . . . . .	15
1.87	Случаи взаимного расположения двух прямых в $\mathbb{R}^3$ . . . . .	15
1.88	Формула для расстояния от точки до прямой в $\mathbb{R}^3$ . . . . .	15
1.89	Формула для расстояния от точки до плоскости в $\mathbb{R}^3$ . . . . .	15
1.90	Формула для расстояния между двумя скрещивающимися прямыми в $\mathbb{R}^3$ . . . . .	15
1.91	Линейный оператор . . . . .	15

1.92	Матрица линейного оператора . . . . .	15
1.93	Связь между координатами вектора и его образа при действии линейного оператора . . . . .	15
1.94	Формула изменения матрицы линейного оператора при переходе к другому базису . . . . .	15
1.95	Подобные матрицы . . . . .	15
1.96	Подпространство, инвариантное относительно линейного оператора . . . . .	15
1.97	Вид матрицы линейного оператора в базисе, дополняющем базис инвариантного подпространства . . . . .	15
1.98	Вид матрицы линейного оператора в базисе, согласованном с разложением пространства в прямую сумму двух инвариантных подпространств . . . . .	15
1.99	Собственный вектор линейного оператора . . . . .	15
1.100	Собственное значение линейного оператора . . . . .	15
1.101	Спектр линейного оператора . . . . .	15
1.102	Диагонализуемый линейный оператор . . . . .	15
1.103	Критерий диагонализуемости линейного оператора в терминах собственных векторов . . . . .	15
1.104	Собственное подпространство линейного оператора . . . . .	15
1.105	Характеристический многочлен линейного оператора . . . . .	15
1.106	Связь спектра линейного оператора с его характеристическим многочленом . . . . .	15
1.107	Алгебраическая кратность собственного значения линейного оператора . . . . .	15
1.108	Геометрическая кратность собственного значения линейного оператора . . . . .	15
1.109	Связь между алгебраической и геометрической кратностями собственного значения линейного оператора . . . . .	15
1.110	Критерий диагонализуемости линейного оператора в терминах его характеристического многочлена и кратностей его собственных значений . . . . .	15
1.111	Линейное отображение евклидовых пространств, сопряжённое к данному . . . . .	16
1.112	Линейный оператор в евклидовом пространстве, сопряжённый к данному . . . . .	16
1.113	Самосопряжённый линейный оператор в евклидовом пространстве . . . . .	16
1.114	Теорема о каноническом виде самосопряжённого линейного оператора . . . . .	16
1.115	Каким свойством обладают собственные подпространства самосопряжённого линейного оператора, отвечающие попарно различным собственным значениям? . . . . .	16
1.116	Приведение квадратичной формы к главным осям . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Вопросы на доказательство</b>	<b>16</b>

# 1 Определения и формулировки

## 1. Сумма двух подпространств векторного пространства

Пусть  $V$  – векторное пространство над  $F$ .

$U, W \subseteq V$  – подпространства.

**Определение.** Суммой подпространств  $U, W$  называется множество

$$U + W := \{u + w \mid u \in U, w \in W\}.$$

## 2. Теорема о связи размерности суммы двух подпространств с размерностью их пересечения

**Теорема.**  $\dim(U \cap W) + \dim(U + W) = \dim U + \dim W$ .

*Пример.* Всякие две плоскости в  $\mathbb{R}^3$  (содержащие 0) имеют общую прямую.

Здесь  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $\dim U = 2$ ,  $\dim W = 2$ .

При этом  $\dim(U + W) \leq 3$ .

Тогда,  $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) \geq 2 + 2 - 3 = 1$ .

## 3. Сумма нескольких подпространств векторного пространства

Пусть  $U_1, \dots, U_k \subseteq V$  – подпространства.

**Определение.** Суммой подпространств  $U_1, \dots, U_k$  называется множество

$$U_1 + \dots + U_k = \{u_1 + \dots + u_k \mid u_i \in U_i\}.$$

**Замечание.**  $\dim(U_1 + \dots + U_k) \leq \dim U_1 + \dots + \dim U_k$ .

## 4. Линейная независимость нескольких подпространств векторного пространства

**Определение.** Подпространства  $U_1, \dots, U_k$  называются *линейно независимыми*, если  $\forall u_1 \in U_1, \dots, u_k \in U_k$  из условия  $u_1 + \dots + u_k = 0$  следует  $u_1 = \dots = u_k = 0$ .

*Пример.* Если  $\dim U_i = 1$  и  $U_i = \langle u_i \rangle \forall i$ , то  $U_1, \dots, U_k$  линейно независимы  $\iff u_1, \dots, u_k$  линейно независимы.

## 5. Разложение векторного пространства в прямую сумму подпространств

**Определение.** Говорят, что векторное пространство  $V$  разлагается в *прямую сумму*  $U_1, \dots, U_k$ , если

1.  $V = U_1 + \dots + U_k$ ,
2.  $U_1, \dots, U_k$  линейно независимы.

Обозначение:  $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k$ .

*Пример.* Если  $e_1, \dots, e_n$  – базис  $V$ , то  $V = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle e_n \rangle$

## 6. При каких условиях на подпространства $U_1, U_2$ векторного пространства $V$ имеет место разложение $V = U_1 \oplus U_2$ ?

## 7. Матрица перехода от одного базиса векторного пространства к другому

## 8. Формула преобразования координат вектора при замене базиса

## 9. Линейное отображение векторных пространств, его простейшие свойства

Пусть  $V, W$  – векторные пространства над  $F$ .

**Определение.** Отображение  $\varphi: V \rightarrow W$  называется *линейным*, если

1.  $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$ ,
2.  $\varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v)$ .

$\forall v_1, v_2, v \in V, \forall \lambda \in F$ .

## Простейшие свойства

1.  $\varphi(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$ .

Доказательство:  $\varphi(\vec{0}_V) = \varphi(0 \cdot \vec{0}_V) = 0 \cdot \varphi(\vec{0}_V) = \varphi(\vec{0}_W)$ .

2.  $\varphi(-v) = -\varphi(v)$ .

Доказательство:  $\varphi(-v) + \varphi(v) = \varphi(-v + v) = \varphi(0) = \varphi(\vec{0}_V) = \vec{0}_W \implies \varphi(-v) = -\varphi(v)$ .

## 10. Изоморфизм векторных пространств, изоморфные векторные пространства

**Определение.** Отображение  $\varphi: V \rightarrow W$  называется *изоморфизмом* если оно линейно и биективно.

Обозначение:  $\varphi: V \xrightarrow{\sim} W$ .

**Определение.** Два векторных пространства  $V, W$  называются *изоморфными*, если существует изоморфизм  $\varphi: V \xrightarrow{\sim} W$ .

Обозначается:  $V \simeq W$  (либо  $V \cong W$ ).

## 11. Какими свойствами обладает отношение изоморфности на множестве всех векторных пространств?

**Теорема.** Отношение изоморфности является отношением эквивалентности на множестве всех векторных пространств над фиксированным полем  $F$ .

## 12. Критерий изоморфности двух конечномерных векторных пространств

**Теорема.** Пусть  $V, W$  — два конечномерных векторных пространства над  $F$ .

Тогда,  $V \simeq W \iff \dim V = \dim W$ .

## 13. Матрица линейного отображения

Пусть  $V, W$  — векторные пространства над  $F$ .

$\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ ,

$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$  — базис  $W$ .

Пусть  $\varphi: V \rightarrow W$  — линейное отображение.

$\forall j = 1, \dots, n$

$$\varphi(e_j) = a_{1j}f_1 + a_{2j}f_2 + \dots + a_{mj}f_m = (f_1, \dots, f_m) \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

Тогда,  $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = (f_1, \dots, f_m) \cdot A$ , где  $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{m \times n}(F)$ .

**Определение.**  $A$  называется матрицей линейного отображения  $\varphi$  в базисах  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{f}$ .

Обозначение:  $A = A(\varphi, \mathbf{e}, \mathbf{f})$ .

В  $j$ -м столбце матрицы  $A$  стоят координаты вектора  $\varphi(e_j)$  в базисе  $\mathbf{f}$ .

## 14. Связь между координатами вектора и его образа при линейном отображении

**Предложение.** Пусть  $\varphi: V \rightarrow W$  — линейное отображение,

$\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ ,

$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$  — базис  $W$ ,

$A = A(\varphi, \mathbf{e}, \mathbf{f})$ .

$v \in V \implies v = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$ ,

$\varphi(v) = y_1f_1 + \dots + y_mf_m$ .

Тогда,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

### 15. Формула изменения матрицы линейного отображения при замене базисов

Пусть теперь  $\mathbf{e}'$  — другой базис в  $V$ ,  $\mathbf{f}'$  — другой базис в  $W$ .

$$\mathbf{e}' = \mathbf{e} \cdot C_{\in M_n},$$

$$\mathbf{f}' = \mathbf{f} \cdot D_{\in M_m}.$$

$$A = A(\varphi, \mathbf{e}, \mathbf{f}),$$

$$A' = A(\varphi, \mathbf{e}', \mathbf{f}').$$

**Предложение.**  $A' = D^{-1}AC$ .

### 16. Сумма двух линейных отображений и её матрица. Произведение линейного отображения на скаляр и его матрица

Пусть  $\varphi, \psi \in \text{Hom}(V, W)$ ,  $\lambda \in F$ .

**Определение.**

1. Суммой линейных отображений  $\varphi$  и  $\psi$  называется линейное отображение  $\varphi + \psi \in \text{Hom}(V, W)$ , такое что  $(\varphi + \psi)(v) := \varphi(v) + \psi(v)$ .
2. Произведение  $\varphi$  на  $\lambda$  — это линейное отображение  $\lambda\varphi \in \text{Hom}(V, W)$ , такое что  $(\lambda\varphi)(v) := \lambda\varphi(v)$ .

Зафиксируем базисы  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  в  $V$  и  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$  в  $W$ .

**Предложение.**

1.  $\varphi, \psi \in \text{Hom}(V, W)$ ,  $A_\varphi = A(\varphi, \mathbf{e}, \mathbf{f})$   
 $A_\psi = A(\psi, \mathbf{e}, \mathbf{f})$   
 $A_{\varphi+\psi} = A(\varphi + \psi, \mathbf{e}, \mathbf{f}) \implies A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$
2.  $\lambda \in F, \varphi \in \text{Hom}(V, W)$ ,  $A_\varphi = A(\varphi, \mathbf{e}, \mathbf{f})$   
 $A_{\lambda\varphi} = A(\lambda\varphi, \mathbf{e}, \mathbf{f}) \implies A_{\lambda\varphi} = \lambda A_\varphi$

### 17. Композиция двух линейных отображений и её матрица

Пусть  $U \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{\varphi} W$  — цепочка линейных отображений, а  $\varphi \circ \psi : U \rightarrow W$  — их композиция,

$\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ ,

$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$  — базис  $W$ ,

$\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_k)$  — базис  $U$ .

$$A_\varphi = A(\varphi, \mathbf{e}, \mathbf{f}),$$

$$A_\psi = A(\psi, \mathbf{g}, \mathbf{e}),$$

$$A_{\varphi \circ \psi} = A(\varphi \circ \psi, \mathbf{g}, \mathbf{f}).$$

Тогда,  $A_{\varphi \circ \psi} = A_\varphi \cdot A_\psi$ .

### 18. Ядро и образ линейного отображения. Являются ли они подпространствами в соответствующих векторных пространствах?

Пусть  $\varphi : V \rightarrow W$ .

**Определение.** Ядро линейной оболочки  $\varphi$  — это  $\ker \varphi := \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\} \subseteq V$ .

Образ линейного отображения  $\varphi$  — это  $\text{Im } \varphi := \varphi(V) \subseteq W$ .

*Пример.*  $\Delta : \mathbb{R}[x]_{\leq n} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq n}, f \mapsto f'$ ,

$$\ker \Delta = \{f \mid f = \text{const}\},$$

$$\text{Im } \Delta = \mathbb{R}[x]_{\leq n-1}.$$

**Предложение.**

1. Ядро — подпространство в  $V$ .
2. Образ — подпространство в  $W$ .

### 19. Критерий инъективности линейного отображения в терминах его ядра

Пусть  $V, W$  — векторные пространства над  $F$ ,

$\varphi : V \rightarrow W$  — линейное отображение.

Ядро:  $\ker \varphi := \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\} \subseteq V$ .

Образ:  $\text{Im } \varphi := \varphi(V) \subseteq W$ .

**Предложение.**

- (a)  $\varphi$  инъективно  $\iff \ker \varphi = \{0\}$ ,  
 (b)  $\varphi$  сюръективно  $\iff \operatorname{Im} \varphi = W$ .

## 20. Связь между рангом матрицы линейного отображения и размерностью его образа

Пусть  $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ ,  
 $\mathfrak{f} = (f_1, \dots, f_m)$  — базис  $W$ ,  
 $A = A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f})$ .

**Теорема.**  $\operatorname{rk} A = \dim \operatorname{Im} \varphi$ .

**Замечание.** Число  $\dim \operatorname{Im} \varphi$  называется *рангом* линейного отображения  $\varphi$ , обозначается  $\operatorname{rk} \varphi$ .

**Следствие.**  $\operatorname{rk} A$  не зависит от выбора пары базисов  $\mathfrak{e}$  и  $\mathfrak{f}$ .

## 21. Каким свойством обладает набор векторов, дополняющих базис ядра линейного отображения до базиса всего пространства?

**Предложение.** Пусть  $e_1, \dots, e_k$  — базис  $\ker \varphi$  и векторы  $e_{k+1}, \dots, e_n$  дополняют его до базиса всего  $V$ .  
 Тогда,  $\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)$  образуют базис в  $\operatorname{Im} \varphi$ .

## 22. Теорема о связи размерностей ядра и образа линейного отображения

**Теорема.**  $\dim \operatorname{Im} \varphi + \dim \ker \varphi = \dim V$ .

## 23. К какому простейшему виду можно привести матрицу линейного отображения путём замены базисов?

**Предложение.** Пусть  $\operatorname{rk} \varphi = r$ . Тогда существует базис  $\mathfrak{e}$  в  $V$  и базис  $\mathfrak{f}$  в  $W$ , такие что

$$A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}) = \left( \begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) = \begin{matrix} & \begin{matrix} r & & & & n-r \end{matrix} \\ \begin{matrix} r \\ m-r \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

## 24. Линейная функция на векторном пространстве

**Определение.** *Линейной функцией* (или *линейной формой*, или *линейным функционалом*) на  $V$  называется всякое линейное отображение  $\alpha: V \rightarrow F$ .

**Обозначение.**  $V^* := \operatorname{Hom}(V, F)$  — множество всех линейных функций на  $V$ .

## 25. Сопряжённое (двойственное) векторное пространство и его размерность

Из общей теории линейных отображений:

- $V^*$  — векторное пространство (оно называется *сопряжённым* или *двойственным*).
- Если  $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$  — фиксированный базис в  $V$ , то есть изоморфизм  $V^* \simeq \operatorname{Mat}_{1 \times n}(F)$  (а это ни что иное, как строки длины  $n$ ).  
 $\alpha \rightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$   
 $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$   
 $\alpha(v) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n.$   
 $\alpha_i = \alpha(e_i)$  — коэффициенты линейной функции  $\alpha$  в базисе  $\mathfrak{e}$ .

**Следствие.**  $\dim V^* = \dim V$  ( $\implies V^* \simeq V$ ).

**26. Базис сопряжённого пространства, двойственный к данному базису исходного векторного пространства**

При  $i = 1, \dots, n$  рассмотрим линейную функцию  $\varepsilon_i \in V^*$ , соответствующую строке  $(0 \dots 1 \dots 0)$ . Тогда  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  — базис  $V^*$ , он однозначно определяется условием  $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$  ( $\delta_{ij}$  — символ Кронекера)

**Определение.** Базис  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  пространства  $V^*$ , определенный условием выше, называется базисом, *двойственным* (сопряженным) к базису  $e$ .

Удобная запись условия:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} (e_1, \dots, e_n) = E.$$

**27. Билинейная форма на векторном пространстве**

Пусть  $V$  — векторное пространство над  $F$ .

**Определение.** Билинейная форма на  $V$  — это отображение  $\beta: V \times V \rightarrow F$ , линейное по каждому аргументу.

**Линейность по 1-му аргументу**

- $\beta(x_1 + x_2, y) = \beta(x_1, y) + \beta(x_2, y) \quad \forall x_1, x_2, y \in V,$
- $\beta(\lambda x, y) = \lambda \beta(x, y) \quad \forall x, y \in V, \lambda \in F.$

**Линейность по 2-му аргументу**

- $\beta(x, y_1 + y_2) = \beta(x, y_1) + \beta(x, y_2) \quad \forall x, y_1, y_2 \in V,$
- $\beta(x, \lambda y) = \lambda \beta(x, y) \quad \forall x, y \in V, \lambda \in F.$

**28. Матрица билинейной формы**

Считаем, что  $\dim V = n < \infty$ .

Пусть  $e = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ .

**Определение.** Матрицей билинейной формы  $\beta$  в базисе  $e$  называется такая матрица  $B \in M_n$ , что  $b_{ij} = \beta(e_i, e_j)$ .

Обозначение:  $B(\beta, e)$ .

**29. Формула для вычисления значений билинейной формы в координатах**

Пусть  $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ ,

$$y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n.$$

Тогда,

$$\begin{aligned} \beta(x, y) &= \beta \left( \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \beta \left( e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \underbrace{\beta(e_i, e_j)}_{\beta_{ij}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \beta_{ij} y_j \\ &= (x_1, \dots, x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**30. Формула изменения матрицы билинейной формы при переходе к другому базису**

$$B = B(\beta, e).$$

Пусть  $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$  — другой базис  $V$ .

$$e' = e \cdot C.$$

$$B' := B(\beta, e').$$

**Предложение.**  $B' = C^T B C$ .

**31. Симметричная билинейная форма. Критерий симметричности билинейной формы в терминах её матрицы**



**Определение.** Билинейная форма  $\beta$  называется *симметричной*, если  $\beta(x, y) = \beta(y, x) \forall x, y \in V$ .

Пусть  $e$  — произвольный базис  $V$ .

**Предложение.**  $\beta$  симметрична  $\iff B = B^T$ .

### 32. Квадратичная форма

Пусть  $\beta: V \times V \rightarrow F$  — билинейная форма на  $V$ .

**Определение.** Отображение  $Q_\beta: V \rightarrow F$ ,  $Q_\beta(x) = \beta(x, x)$ , называется *квадратичной формой*, ассоциированной с билинейной формой  $\beta$ .

Пусть  $e$  — базис  $V$ ,  $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ ,  $B = B(\beta, e)$ .

Тогда,

$$Q_\beta(x) = (x_1 \dots x_n) B \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (b_{ij} + b_{ji}) x_i x_j.$$

### 33. Соответствие между симметричными билинейными формами и квадратичными формами

**Предложение.** Пусть в поле  $F$  выполнено условие  $1 + 1 \neq 0$  (то есть  $2 \neq 0$ ). Тогда отображение  $\beta \mapsto Q_\beta$  является биекцией между симметричными билинейными формами на  $V$  и квадратичными формами на  $V$ .

### 34. Симметризация билинейной формы

Билинейная форма  $\sigma(x, y) = \frac{1}{2} (\beta(x, y) + \beta(y, x))$  называется *симметризацией* билинейной формы  $\beta$ .

Если  $B$  и  $S$  — матрицы билинейных форм  $\beta$  и  $\sigma$  в некотором базисе, то  $S = \frac{1}{2}(B + B^T)$ .

### 35. Поляризация квадратичной формы

Симметричная билинейная форма  $\beta(x, y) = \frac{1}{2} [Q(x + y) - Q(x) - Q(y)]$  называется *поляризацией* квадратичной формы  $Q$ .

### 36. Матрица квадратичной формы

**Определение.** Матрицей квадратной формы  $Q$  в базисе  $e$  называется матрица соответствующей симметричной билинейной формы (поляризации) в базисе  $e$ .

Обозначение:  $B(Q, e)$ .

*Пример.* Пусть  $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$ .

Если  $e$  — стандартный базис, то  $B(Q, e) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ .

### 37. Канонический вид квадратичной формы

**Определение.** Квадратичная форма  $Q$  имеет в базисе  $e$  *канонический вид*, если  $B(Q, e)$  диагональна.

Если  $B(Q, e) = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n)$ , то  $Q(x_1, \dots, x_n) = b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + \dots + b_n x_n^2$ .

### 38. Нормальный вид квадратичной формы над $\mathbb{R}$

**Определение.** Квадратичная форма над  $\mathbb{R}$  имеет *нормальный вид* в базисе  $e$ , если в этом базисе

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \varepsilon_1 x_1^2 + \dots + \varepsilon_n x_n^2,$$

где  $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$ .

### 39. Индексы инерции квадратичной формы над $\mathbb{R}$

Пусть  $F = \mathbb{R}$ .

Пусть  $Q: V \rightarrow \mathbb{R}$  — квадратичная форма.

Можно привести к нормальному виду

$$Q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_{s+t}^2.$$

Здесь  $i_+ := s$  — положительный индекс инерции квадратичной формы  $Q$ ,

$i_- := t$  — отрицательный индекс инерции квадратичной формы  $Q$ .

### 40. Закон инерции для квадратичной формы над $\mathbb{R}$

**Теорема.** Числа  $i_+$  и  $i_-$  не зависят от базиса в котором  $Q$  принимает нормальный вид.

41. Положительно/неотрицательно определённая квадратичная форма над  $\mathbb{R}$

42. Отрицательно/неположительно определённая квадратичная форма над  $\mathbb{R}$

43. Неопределённая квадратичная форма над  $\mathbb{R}$

**Определение.** Квадратичная форма  $Q$  над  $\mathbb{R}$  называется

Термин	Обозначение	Условие	Нормальный вид	Индексы инерции
Положительно определённой	$Q > 0$	$Q(x) > 0 \forall x \neq 0$	$x_1^2 + \dots + x_n^2$	$i_+ = n, i_- = 0$
Отрицательно определённой	$Q < 0$	$Q(x) < 0 \forall x \neq 0$	$-x_1^2 - \dots - x_n^2$	$i_+ = 0, i_- = n$
Неотрицательно определённой	$Q \geq 0$	$Q(x) \geq 0 \forall x$	$x_1^2 + \dots + x_k^2, k \leq n$	$i_+ = k, i_- = 0$
Неположительно определённой	$Q \leq 0$	$Q(x) \leq 0 \forall x$	$-x_1^2 - \dots - x_k^2, k \leq n$	$i_+ = 0, i_- = k$
Неопределённой	—	$\exists x : Q(x) > 0$ $\exists y : Q(y) < 0$	$x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_{s+t}^2$ $s, t \geq 1$	$i_+ = s, i_- = t$

44. Способ нахождения индексов инерции квадратичной формы над  $\mathbb{R}$ , вытекающий из метода Якоби

Пусть  $Q: V \rightarrow \mathbb{R}$  — квадратичная форма,

$e = (e_1, \dots, e_n)$  — базис,

$B = B(Q, e)$ ,

$\delta_k$  —  $k$ -й угловой минор матрицы  $B$ .

**Следствие** (из метода Якоби). Пусть  $\delta_k \neq 0 \forall k$ . Тогда:

Число  $i_+$  равно количеству сохранений знака в последовательности  $1, \delta_1, \dots, \delta_n$ .

Число  $i_-$  равно количеству перемен знака в последовательности  $1, \delta_1, \dots, \delta_n$ .

45. Критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы над  $\mathbb{R}$

Пусть  $V$  — векторное пространство над  $\mathbb{R}$ ,  $\dim V = n$ ,

$e = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ ,

$B = B(Q, e)$ ,

$B_k$  — левый верхний  $k \times k$  блок,

$\delta_k = \det B_k$ .

**Теорема** (Критерий Сильвестра положительной определенности).

$$Q > 0 \iff \delta_k > 0 \forall k = 1 \dots n.$$

46. Критерий отрицательной определённости квадратичной формы над  $\mathbb{R}$

**Следствие.**

$$Q < 0 \iff \delta_k \begin{cases} > 0 & \text{при } k \not\equiv 2, \\ < 0 & \text{при } k \equiv 2. \end{cases}$$

47. Евклидово пространство

**Определение.** Евклидово пространство — это векторное пространство  $\mathbb{E}$  над  $\mathbb{R}$ , на котором задано *скалярное произведение*, то есть такое отображение  $(\cdot, \cdot): \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ , что

1.  $(\cdot, \cdot)$  — симметричная билинейная форма,
2. Квадратичная форма  $(x, x)$  положительно определённая.

48. Длина вектора в евклидовом пространстве

**Определение.** Длина вектора  $x \in \mathbb{E}$  — это  $|x| := \sqrt{(x, x)}$ .

Свойство:  $|x| \geq 0$ , причем  $|x| = 0 \iff x = 0$ .

*Пример.* Если  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$  со стандартным скалярным произведением, то  $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ .

#### 49. Неравенство Коши–Буняковского

**Предложение** (неравенство Коши–Буняковского).  $\forall x, y \in \mathbb{E}$  верно  $|(x, y)| \leq |x| \cdot |y|$ , причём равенство  $\iff x, y$  пропорциональны.

*Пример.* Пусть  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$  со стандартным скалярным произведением, тогда

$$|x_1 y_1 + \dots + x_n y_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}.$$

#### 50. Угол между ненулевыми векторами евклидова пространства

Пусть  $x, y \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$ , тогда  $-1 \leq \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|} \leq 1$ .

**Определение.** Угол между ненулевыми векторами  $x, y \in \mathbb{E}$ , это такой  $\alpha \in [0, \pi]$ , что  $\cos \alpha = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}$ .

Тогда  $(x, y) = |x| |y| \cos \alpha$ .

#### 51. Матрица Грама системы векторов евклидова пространства

Пусть  $v_1, \dots, v_k$  — произвольная система векторов.

**Определение.** Матрица Грама этой системы — это

$$G(v_1, \dots, v_k) = \begin{pmatrix} (v_1, v_1) & (v_1, v_2) & \dots & (v_1, v_k) \\ (v_2, v_1) & (v_2, v_2) & \dots & (v_2, v_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (v_k, v_1) & (v_k, v_2) & \dots & (v_k, v_k) \end{pmatrix}.$$

*Пример.*  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$  со стандартным скалярным произведением.

$a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n \rightsquigarrow A := (a_1, \dots, a_k) \in \text{Mat}_{n \times k}(\mathbb{R})$ .

Тогда,  $G(a_1, \dots, a_k) = A^T \cdot A$ .

#### 52. Свойства определителя матрицы Грама

**Предложение.**  $\forall v_1, \dots, v_k \in \mathbb{E} \implies \det G(v_1, \dots, v_k) \geq 0$ .

Более того,  $\det G(v_1, \dots, v_k) > 0 \iff v_1, \dots, v_k$  линейно независимы.

#### 53. Ортогональная система векторов евклидова пространства. Ортогональный базис

#### 54. Ортонормированная система векторов евклидова пространства. Ортонормированный базис

**Определение.** Система ненулевых векторов  $v_1, \dots, v_k$  называется

1. *ортогональной*, если  $(v_i, v_j) = 0 \ \forall i \neq j$  (то есть  $G(v_1, \dots, v_k)$  диагональна),
2. *ортонормированной*, если  $(v_i, v_j) = 0 \ \forall i \neq j$  и  $(v_i, v_i) = 1$  ( $\iff |v_i| = 1$ ). То есть  $G(v_1, \dots, v_k) = E$ .

**Замечание.** Всякая ортогональная (и в частности ортонормированная) система векторов автоматически линейно независима.

$$\det G(v_1, \dots, v_k) = |v_1|^2 \dots |v_k|^2 \neq 0.$$

**Определение.** Базис пространства называется *ортогональным* (соответственно *ортонормированным*), если он является ортогональной (ортонормированной) системой векторов.

#### 55. Описание всех ортонормированных базисов евклидова пространства в терминах одного такого базиса и матриц перехода

Пусть  $e = (e_1, \dots, e_n)$  — ортонормированный базис в  $E$ .

Пусть  $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$  — какой-то другой базис.

$$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C, \ C \in M_n^0(\mathbb{R}).$$

**Предложение.**  $e'$  — ортонормированный базис  $\iff C^T \cdot C = E$ .

$$\text{Доказательство. } G(e'_1, \dots, e'_n) = C^T \underbrace{G(e_1, \dots, e_n)}_E C = C^T C.$$

$$e' \text{ ортонормированный} \iff G(e'_1, \dots, e'_n) = E \iff C^T C = E. \quad \blacksquare$$

#### 56. Ортогональная матрица

**Определение.** Матрица  $C \in M_n(\mathbb{R})$  называется *ортогональной* если  $C^T C = E$ .

**Замечание.**  $C^T C = E \iff C C^T = E \iff C^{-1} = C^T$ .

**Свойства.**

1.  $C^T C = E \implies$  система столбцов  $C^{(1)}, \dots, C^{(n)}$  — это ортонормированный базис в  $\mathbb{R}^n$ ,
2.  $C C^T = E \implies$  система строк  $C_{(1)}, \dots, C_{(n)}$  — это тоже ортонормированный базис в  $\mathbb{R}^n$ ,

В частности,  $|c_{ij}| \leq 1$ .

3.  $\det C = \pm 1$ .

*Пример.*  $n = 2$ . Ортогональные матрицы:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}.$$

$\det = 1 \qquad \det = -1$

## 57. Формула для координат вектора в ортогональном и ортонормированном базисах евклидова пространства

Пусть  $\mathbb{E}$  — евклидово пространство,  $(e_1, \dots, e_n)$  — ортогональный базис.

$v \in \mathbb{E}$ .

**Предложение.**  $v = \frac{(v, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 + \frac{(v, e_2)}{(e_2, e_2)} e_2 + \dots + \frac{(v, e_n)}{(e_n, e_n)} e_n$ .

В частности, если  $e_1, \dots, e_n$  ортонормирован, то  $v = (v, e_1) e_1 + \dots + (v, e_n) e_n$ .

## 58. Ортогональное дополнение подмножества евклидова пространства

**Определение.** *Ортогональное дополнение* множества  $S \subseteq \mathbb{E}$  — это множество  $S^\perp := \{x \in \mathbb{E} \mid (x, y) = 0 \ \forall y \in S\}$ .

## 59. Чему равна размерность ортогонального дополнения к подпространству евклидова пространства?

## 60. Каким свойством обладают подпространство евклидова пространства и его ортогональное дополнение?

Считаем, что  $\dim \mathbb{E} = n < \infty$ .

**Предложение.** Пусть  $S \subseteq \mathbb{E}$  — подпространство. Тогда:

1.  $\dim S^\perp = n - \dim S$ .
2.  $\mathbb{E} = S \oplus S^\perp$ .
3.  $(S^\perp)^\perp = S$ .

## 61. Ортогональная проекция вектора на подпространство

## 62. Ортогональная составляющая вектора относительно подпространства

$S$  — подпространство  $\implies \mathbb{E} = S \oplus S^\perp$

$\forall v \in \mathbb{E} \exists! x \in S, y \in S^\perp$ , такие что  $x + y = v$ .

**Определение.**

1.  $x$  называется *ортогональной проекцией* вектора  $v$  на подпространство  $S$ .  
Обозначение:  $x = \text{pr}_S v$ .
2.  $y$  называется *ортогональной составляющей* вектора  $v$  относительно подпространства  $S$ .  
Обозначение:  $y = \text{ort}_S v$ .

## 63. Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в $\mathbb{R}^n$ , заданное своим базисом

Пусть  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$  со стандартным скалярным произведением.

$S \subseteq \mathbb{E}$  — подпространство,  $a_1, \dots, a_k$  — базис  $S$ .

Пусть  $A := (a_1, \dots, a_k) \in \text{Mat}_{n \times k}(\mathbb{R})$ ,  $A^{(i)} = a_i$ .

**Предложение.**  $\forall v \in \mathbb{R}^n \quad \text{pr}_S v = A(A^T A)^{-1} A^T v$ .

**64. Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в терминах его ортогонального базиса**

Пусть  $S \subseteq \mathbb{E}$  — подпространство.

$e_1, \dots, e_k$  — ортогональный базис в  $S$ .

**Предложение.**  $\forall v \in \mathbb{E} \quad \text{pr}_S v = \sum_{i=1}^k \frac{(v, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i$ .

В частности, если  $e_1, \dots, e_k$  ортонормирован, то  $\text{pr}_S v = \sum_{i=1}^k (v, e_i) e_i$ .

**65. Теорема Пифагора в евклидовом пространстве**

**Теорема.** Пусть  $x, y \in \mathbb{E}$ ,  $(x, y) = 0$ . Тогда  $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$ .

**66. Расстояние между векторами евклидова пространства**

**Определение.** Расстояние между векторами  $x, y \in \mathbb{E}$  — это  $\rho(x, y) = |x - y|$ .

**67. Неравенство треугольника в евклидовом пространстве**

**Предложение.**  $\forall a, b, c \in \mathbb{E} \implies \rho(a, b) + \rho(b, c) \geq \rho(a, c)$ .

**68. Теорема о расстоянии между вектором и подпространством в терминах ортогональной составляющей**

**Теорема.** Пусть  $x \in \mathbb{E}$ ,  $S \subseteq \mathbb{E}$  — подпространство. Тогда,  $\rho(x, S) = |\text{ort}_S x|$ , причем  $\text{pr}_S x$  — это ближайший к  $x$  вектор из  $S$ .

**69. Псевдорешение несовместной системы линейных уравнений**

СЛУ  $Ax = b$ ,  $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ .

$$x_0 \text{ — решение системы} \iff Ax_0 = b \iff Ax_0 - b = 0 \iff |Ax_0 - b| = 0 \iff \rho(Ax_0, b) = 0.$$

Если СЛУ несовместна, то  $x_0$  называется *псевдорешением*, если  $\rho(Ax_0, b)$  минимально.

$$\rho(Ax_0, b) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \rho(Ax, b).$$

$x_0$  — решение задачи оптимизации  $\rho(Ax, b) \xrightarrow{x \in \mathbb{R}^n} \min$ .

**70. Формула для расстояния от вектора до подпространства в терминах матриц Грама**

Пусть  $\mathbb{E}$  — евклидово пространство,  $\dim \mathbb{E} = n < \infty$ .

$S \subseteq \mathbb{E}$  — подпространство,  $e_1, \dots, e_k$  — базис в  $S$ .

**Теорема.**  $\forall x \in \mathbb{E} \quad \rho(x, S)^2 = \frac{\det G(e_1, \dots, e_k, x)}{\det G(e_1, \dots, e_k)}$ .

**71.  $k$ -мерный параллелепипед и его объём**

**Определение.**  $k$ -мерный параллелепипед, натянутый на векторы  $a_1, \dots, a_k$ , это множество

$$P(a_1, \dots, a_k) := \left\{ \sum_{i=1}^k x_i a_i \mid 0 \leq x_i < 1 \right\}.$$

Основание:  $P(a_1, \dots, a_{k-1})$ .

Высота:  $h := |\text{ort}_{\langle a_1, \dots, a_{k-1} \rangle} a_k|$ .

*Пример.*

$k = 1$   $h = |a_1|$  здесь картинка, тоже лень :(

$k = 2$  основание —  $P(a_1)$ , высота —  $h$  дада, люблю картинку делать

*Пример.*  $k$ -мерный объём  $k$ -мерного параллелепипеда  $P(a_1, \dots, a_k)$  — это величина  $\text{vol } P(a_1, \dots, a_k)$ , определяемая индуктивно:

$$k = 1 \implies \text{vol } P(a_1) := |a_1|.$$

$$k > 1 \implies \text{vol } P(a_1, \dots, a_k) := \text{vol } P(a_1, \dots, a_{k-1}) \cdot h.$$

**72. Формула для объёма  $k$ -мерного параллелепипеда в  $n$ -мерном евклидовом пространстве**

**Теорема.**  $\text{vol } P(a_1, \dots, a_k)^2 = \det G(a_1, \dots, a_k)$ .

**73. Формула для объёма  $n$ -мерного параллелепипеда в  $n$ -мерном евклидовом пространстве в терминах координат в ортонормированном базисе**

Пусть  $(e_1, \dots, e_n)$  — ортонормированный базис в  $\mathbb{E}$ ,

$$(a_1, \dots, a_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot A, \quad A \in M_n(\mathbb{R}).$$

**Предложение.**  $\text{vol } P(a_1, \dots, a_n) = |\det A|$ .

**74. В каком случае два базиса евклидова пространства называются одинаково ориентированными?**

Пусть  $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$  и  $\mathfrak{e}' = (e'_1, \dots, e'_n)$  — два базиса в  $\mathbb{E}$ .

$$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C, \quad C \in M_n^0(\mathbb{R}).$$

**Определение.** Говорят, что  $\mathfrak{e}$  и  $\mathfrak{e}'$  одинаково ориентированы, если  $\det C > 0$ .

**75. Векторное произведение в трёхмерном евклидовом пространстве**

**Теорема.** Пусть  $a, b \in \mathbb{R}^3$ . Тогда  $\exists! v \in \mathbb{E}$ , такой что  $(v, x) = \text{Vol}(a, b, x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$ .

**Определение.** Вектор  $v$  из теоремы выше называется *векторным произведением* векторов  $a$  и  $b$ .

Обозначение:  $[a, b]$  или  $a \times b$ .

**76. Критерий коллинеарности двух векторов трёхмерного евклидова пространства**

**Предложение.**  $a, b \in \mathbb{E}$  коллинеарны  $\iff [a, b] = 0$ .

**77. Формула для вычисления векторного произведения в терминах координат в положительно ориентированном ортонормированном базисе**

Если  $\mathfrak{e} = (e_1, e_2, e_3)$  — положительно ориентированный базис и  $a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$ , то

$$b = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$$

$$[a, b] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} := \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} e_3.$$

**78. Смешанное произведение векторов трёхмерного евклидова пространства**

**Определение.**  $\forall a, b, c \in \mathbb{E}$  число  $(a, b, c) := ([a, b], c)$  называется *смешанным произведением* векторов  $a, b, c$ .

**Замечание.**  $(a, b, c) = \text{Vol}(a, b, c)$ .

**79. Формула для вычисления смешанного произведения в терминах координат в положительно ориентированном ортонормированном базисе**

Если  $e_1, e_2, e_3$  — положительно ориентированный ортонормированный базис, то

$$\begin{vmatrix} a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \\ b = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 \\ c = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3 \end{vmatrix} \implies (a, b, c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

**80. Критерий компланарности трёх векторов трёхмерного евклидова пространства**

$a, b, c$  компланарны  $\iff (a, b, c) = 0$ .

**81. Линейное многообразие. Характеризация линейных многообразий как сдвигов подпространств**

**Определение.** *Линейное многообразие* в  $\mathbb{R}^n$  — это множество решений некоторой совместной СЛУ.

Пусть  $Ax = b$  — СЛУ,  $\emptyset \neq L \subseteq \mathbb{R}^n$  — множество решений,  $x_z \in L$  — частное решение.

Было: Лемма:  $L = x_z + S$ , где  $S$  — множество решений ОСЛУ  $Ax = 0$ .

**Предложение.** Множество  $L \subseteq \mathbb{R}^n$  является линейным многообразием  $\iff L = v_0 + S$  для некоторых  $v_0 \in \mathbb{R}^n$  и подпространства  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ .

**82. Критерий равенства двух линейных многообразий. Направляющее подпространство и размерность линейного многообразия**

**Предложение.** Пусть  $L_1 = v_1 + S_1$  и  $L_2 = v_2 + S_2$  — два линейных многообразия в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда,

$$L_1 = L_2 \iff \begin{cases} S_1 = S_2 (= S) \\ v_1 - v_2 \in S \end{cases}.$$

Если  $L$  — линейное многообразие, то  $L = v_0 + S$ , где  $S$  определено однозначно.

**Определение.**  $S$  называется *направляющим подпространством* линейного многообразия  $L$ .

**Определение.** *Размерностью* линейного многообразия называется размерность его направляющего подпространства.

- 83. Теорема о плоскости, проходящей через  $k + 1$  точку в  $\mathbb{R}^n$
- 84. Три способа задания прямой в  $\mathbb{R}^2$ . Уравнение прямой в  $\mathbb{R}^2$ , проходящей через две различные точки
- 85. Три способа задания плоскости в  $\mathbb{R}^3$ . Уравнение плоскости в  $\mathbb{R}^3$ , проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой
- 86. Три способа задания прямой в  $\mathbb{R}^3$ . Уравнения прямой в  $\mathbb{R}^3$ , проходящей через две различные точки
- 87. Случаи взаимного расположения двух прямых в  $\mathbb{R}^3$
- 88. Формула для расстояния от точки до прямой в  $\mathbb{R}^3$
- 89. Формула для расстояния от точки до плоскости в  $\mathbb{R}^3$
- 90. Формула для расстояния между двумя скрещивающимися прямыми в  $\mathbb{R}^3$
- 91. Линейный оператор
- 92. Матрица линейного оператора
- 93. Связь между координатами вектора и его образа при действии линейного оператора
- 94. Формула изменения матрицы линейного оператора при переходе к другому базису
- 95. Подобные матрицы
- 96. Подпространство, инвариантное относительно линейного оператора
- 97. Вид матрицы линейного оператора в базисе, дополняющем базис инвариантного подпространства
- 98. Вид матрицы линейного оператора в базисе, согласованном с разложением пространства в прямую сумму двух инвариантных подпространств
- 99. Собственный вектор линейного оператора
- 100. Собственное значение линейного оператора
- 101. Спектр линейного оператора
- 102. Диагонализуемый линейный оператор
- 103. Критерий диагонализуемости линейного оператора в терминах собственных векторов
- 104. Собственное подпространство линейного оператора
- 105. Характеристический многочлен линейного оператора
- 106. Связь спектра линейного оператора с его характеристическим многочленом
- 107. Алгебраическая кратность собственного значения линейного оператора
- 108. Геометрическая кратность собственного значения линейного оператора
- 109. Связь между алгебраической и геометрической кратностями собственного значения линейного оператора
- 110. Критерий диагонализуемости линейного оператора в терминах его характеристического многочлена и кратностей его собственных значений

- 111. Линейное отображение евклидовых пространств, сопряжённое к данному
- 112. Линейный оператор в евклидовом пространстве, сопряжённый к данному
- 113. Самосопряжённый линейный оператор в евклидовом пространстве
- 114. Теорема о каноническом виде самосопряжённого линейного оператора
- 115. Каким свойством обладают собственные подпространства самосопряжённого линейного оператора, отвечающие попарно различным собственным значениям?
- 116. Приведение квадратичной формы к главным осям

## 2 Вопросы на доказательство