Математический анализ, Коллоквиум 2

Балюк Игорь

@lodthe, GitHub

Дата изменения: 2020.05.30 в 20:35

Содержание

1 Вопросы предварительной части коллоквиума

Список вопросов предварительной части коллоквиума, ответ на которые необходим для подготовки к основной части.

1. **Определение непрерывности функции в точке.**

   Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если она определена на некоторой окрестности этой точки и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Другими словами, $A = f(x_0)$ и справедливы следующие определения предела функции в точке x_0:

   - ***По Коши***:
   $$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 :\ \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$
   - ***По Гейне***:
   $$\forall\{x_n\} :\ x_n \in \overset{\circ}{U}(x_0), \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$$

2. **Точки разрыва, их классификация.**

   Пусть $f(x)$ определена в некоторой окрестности $U_\delta(a)$ и функция разрывна в a. Тогда этот разрыв является одним из следующих:

   - ***Устранимый разрыв***: пределы $f(x)$ справа и слева существуют и равны друг другу, но отличаются от значения функции в исследуемой точке:
   $$\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x) \neq f(a)$$
   - ***Неустранимый разрыв первого рода***: пределы $f(x)$ справа и слева существуют, но не равны друг другу
   - ***Неустранимый разрыв второго рода***: хотя бы один из односторонних пределов $f(x)$ не существует или равен бесконечности.

3. **Теорема о непрерывности сложной функции.**

   Теорема. Пусть функция $g(x)$ непрерывна в точке a_0 и функция $f(x)$ непрерывна в точке $b_0 = g(a_0)$. Тогда функция $f(g(x))$ непрерывна в точке a_0.

4. **Формулировки первой и второй теорем Вейерштрасса.**

   Теорема Вейерштрасса (первая) Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.

   Теорема Вейерштрасса (вторая) Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция f достигает на нем своих точных нижней и верхней граней. То есть существуют такие точки $x_1, x_2 \in [a, b]$, так что для любого $x \in [a, b]$, выполняются неравенства:
   $$f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$$

5. **Понятие производной функции в точке.**

   Рассмотрим функцию, область определения которой содержит точку x_0. Тогда функция $f(x)$ является дифференцируемой в точке x_0, и ее производная определяется $f'(x_0)$, если следующий предел существует:
   $$f'(x_0) = \lim_{\Delta\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta}$$

6. **Геометрический и физический смысл производной.**

   Геометрический смысл производной. Производная в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в этой точке.

   Физический смысл производной. Если точка движется вдоль оси OX и ее координата изменяется по закону $x(t)$, то мгновенная скорость точки: $v(t) = x'(t)$.

7. **Уравнение касательной к графику функции в точке.**

   Пусть дана функция f, которая в некоторой точке x_0 имеет конечную производную $f(x_0)$. Тогда прямая, проходящая через точку $(x_0; f(x_0))$, имеющая угловой коэффициент $f'(x_0)$, называется касательной.

   Итак, пусть дана функция $y = f(x)$, которая имеет производную $y = f'(x)$ на отрезке $[a, b]$. Тогда в любой точке $x_0 \in (a; b)$ к графику этой функции можно провести касательную, которая задается уравнением:
   $$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

   Подробнее тут

8. Понятие дифференцируемости функции в точке.

Функция $f(x)$ является дифференцируемой в точке x_0 своей области определения $D[f]$, если существует такая константа A, что:

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \bar{\bar{o}}(x - x_0)$$

и

$$A = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

9. Правила дифференцирования (производная суммы, произведения, частного).

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют производные в точке x_0. Тогда,

$$(g + f)'(x_0) = g'(x_0) + f'(x_0)$$
$$(g \cdot f)'(x_0) = g'(x_0) \cdot f(x_0) + g(x_0) \cdot f'(x_0)$$

Если $g(x_0) \neq 0$, то

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

10. Формула вычисления производной сложной функции.

Если $g(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $f(x)$ дифференцируема в точке $y_0 = g(x_0)$, тогда,

$$(f \circ g)'(x_0) = (f(g(x_0)))' = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

11. Таблица производных основных элементарных функций.

$f(x)$	$f'(x)$
$const$	0
x^a	$a \cdot x^{a-1}$
a^x	$a^x \cdot \ln a$
e^x	e^x
$\log_a x$	$\frac{1}{\ln a \cdot x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

12. Понятие дифференциала (первого) функции в точке.

Функция $f(x)$ является дифференцируемой в точке x_0 своей области определения $D[f]$, если существует такая константа A, что:

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \bar{\bar{o}}(x - x_0)$$
$$A = f'(x_0) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta}$$

Тогда выражение $f'(x_0)dx$ называют дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0. Обозначение: $df = df(x_0, dx)$. Обратите внимание, что df зависит и от точки, и от dx.

14. Определение локального экстремума. Необходимое условие для внутреннего локального экстремума (теорема Ферма).

Точка x_0 называется точкой локального максимума (минимума) функции f, если существует такая окрестность $U_\delta(x_0)$ точки x_0, что

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \implies f(x) \leqslant f(x_0) \text{ (для минимума соответственно } f(x) \geqslant f(x_0))$$

x_0 называется точкой строгого локального максимума (минимума), если

$$\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \implies f(x) < f(x_0) \text{ (для минимума соответственно } f(x) > f(x_0))$$

Теорема Ферма Если функция имеет в точке локального экстремума производную, то эта производная равна нулю.

15. Формулы Лагранжа и Коши.

Теорема Лагранжа. Формула конечных приращений Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b), то в этом интервале существует хотя бы одна точка x_0, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$$

Теорема Коши. Обобщает формулу конечных приращений Лагранжа. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемы на интервале (a, b), причем $g'(x) \neq 0$ при всех $x \in (a, b)$. Тогда в этом интервале существует точка $x = \xi$ такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

16. Многочлен Тейлора и формула Тейлора для функций одной переменной.

Предположим, что имеется некоторая функция $f(x)$ и надо исследовать ее поведение в некоторой точке x_0 или ее окрестности. Сама функция может быть при этом достаточно сложной, и поэтому непосредственное вычисление $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ (как пример того, что мы хотим узнать о функции в x_0) окажется крайне трудоемким. Идея в том, чтобы найти такой многочлен $P_n(x)$, что $f(x) \sim P_n(x - x_0)$ при $x \to x_0$, а затем исследовать его. Работать с многочленами практически всегда намного проще.

Предположим пока, что $x_0 = 0$. Тогда $P_n(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n$. $P_n(0) = c_0$, а $P'_n(x) = c_1 + 2c_2 x + \cdots + nc_n x^{n-1}$, из чего следует, что $c_1 = P'_n(0)$. По аналогии можно получить, что $c_2 = \dfrac{P''_n(0)}{2!}, \ldots, c_n = \dfrac{P^{(n)}_n(0)}{n!}$. Т.е. получаем, что $P_n(x) = P_n(0) + \dfrac{P'_n(0)}{1!}x + \cdots + \dfrac{P^{(n)}_n(0)}{n!}x^n$.

Пусть $\exists f^{(n)}(x_0)$, тогда справедлива формула:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(f, x)$$

Эта формула называется **формулой Тейлора** и обычно записывается в виде:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k}_{\text{многочлен Тейлора}} + \underbrace{r_n(f, x)}_{\text{остаточный член}}$$

17. Формулы Маклорена для основных элементарных функций.

При $x_0 = 0$ формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано называется формулой Маклорена

Приведем пример: $f(x) = \sin x$. Вспомним, что

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right) \implies f^{(n)}(0) = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k, \\ (-1)^k, & \text{если } n = 2k+1 \end{cases}$$

Тогда получаем следующее разложение:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \bar{\bar{o}}(x^{2n})$$

1. $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \bar{\bar{o}}(x^n), x \to 0$
2. $\ln(1 + x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{x^n}{n} + \bar{\bar{o}}(x^n), x \to 0$
3. $\underset{\alpha \in \mathbb{R}}{(1 + x)^\alpha} = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + \bar{\bar{o}}(x^n)$

   Например $(1 + x)^{\frac{1}{3}} - 1 = \dbinom{\frac{1}{3}}{1}x + \dbinom{\frac{1}{3}}{2}x^2 + \bar{\bar{o}}(x^2) = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3} - 1)}{2}x^2 + \bar{\bar{o}}(x^2)$
4. $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \bar{\bar{o}}(x^{2n})$

5. $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \bar{\bar{o}}(x^{2n+1})$

6. $\mathrm{tg}(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15}x^5 + \dots + \dfrac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!} \cdot x^{2n-1} + \bar{\bar{o}}(x^{2n-1})$, где B_{2n} — числа Бернулли

   Но достаточно помнить, что $\mathrm{tg}(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15}x^5 + \bar{\bar{o}}(x^5)$, т.е. общая формула для семинаров не нужна

7. $\arcsin(x) = x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3}{40}x^5 + \dots + \dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)} \cdot x^{2n+1} + \bar{\bar{o}}(x^{2n+1})$

   Достаточно знать $\arcsin(x) = x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3}{40}x^5 + \bar{\bar{o}}(x^5)$

8. $\arccos(x) = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin(x)$

9. $\mathrm{arctg}(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \dots + (-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1} + \bar{\bar{o}}(x^{2n-1})$

18. Правило Лопиталя.

Теорема Лопиталя (первое правило) Если функции $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что

1. $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в проколотой окрестности точки a
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$
3. $g'(x) \neq 0$ в окрестности U
4. Существует $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Тогда существует $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Теорема Лопиталя (второе правило) Если для функций $f(x)$ и $g(x)$ справедливо следующее:

1. $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на интервале (a, b)
2. $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} g(x) = \infty$
3. $g'(x) \neq 0$ при $x \in (a, b)$
4. Существует $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$

Тогда $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$

2 Вопросы на знание доказательств

1. Определение непрерывности функции в точке. Точки разрыва, их классификация.

Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если она определена на некоторой окрестности этой точки $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Другими словами, $A = f(x_0)$ и справедливы следующие определения предела функции в точке x_0:

- ***По Коши***:
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 :\ \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$
- ***По Гейне***:
$$\forall\{x_n\} :\ x_n \in \mathring{U}(x_0), \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$$

Классицифкация разрывов:

Пусть $f(x)$ определена в некоторой окрестности $U_\delta(a)$ и функция разрывна в a. Тогда говорят, что функция имеет

- ***Устранимый разрыв***: пределы $f(x)$ справа и слева существуют и равны друг другу, но отличаются от значения функции в исследуемой точке:
$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x) \neq f(a)$$
- ***Неустранимый разрыв первого рода***: пределы $f(x)$ справа и слева существуют, но не равны друг другу

- ***Неустранимый разрыв второго рода***: хотя бы один из односторонних пределов $f(x)$ не существует или равен бесконечности.

2. **Непрерывность элементарных функций.**

Многие элементарные функции непрерывны на своей области определения (например, $\sin x, \cos x$). Докажем для некоторых из них

$$\lim_{\Delta\to 0}\sin(x_0+\Delta)=\lim_{\Delta\to 0}(\sin x_0\cos\Delta+\cos x_0\sin\Delta)=\sin x_0\cdot 1+\cos x_0\cdot 0=\sin x_0$$

$$\lim_{\Delta\to 0}\cos(x_0+\Delta)=\lim_{\Delta\to 0}(\cos x_0\cos\Delta-\sin x_0\sin\Delta)=\cos x_0\cdot 1-\sin x_0\cdot 0=\cos x_0$$

Тангенс и котангенс выражаются через синус и косинус. Воспользуемся арифметическими свойствами непрерывных функций. Поскольку синус и косинус определены и непрерывны для всех x, то тангенс и котангенс определены и непрерывны для всех x, кроме точек, в которых знаменатель обращается в нуль:

$$y=\operatorname{tg}x,\quad x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$$
$$y=\operatorname{ctg}x,\quad x\neq\pi n, n\in\mathbb{Z}$$

$$\lim_{\Delta\to 0}a^{x_0+\Delta}=a^{x_0}\cdot a^0=a^{x_0}\cdot 1=a^{x_0}$$

3. **Арифметические свойства непрерывных функций.**

Теорема. Пусть $g(x)$ и $f(x)$ непрерывны в a, тогда функции $f\pm g, f\cdot g, \dfrac{f}{g}(g\neq 0)$ также непрерывны в точке a.

Доказательство. Рассмотрим сумму $(f(x)+g(x))$. Для остальных операций доказательство практически аналогично. По определению $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$ и $\lim\limits_{x\to a}g(x)=g(a)$. Но тогда, используя свойство суммы для пределов, получаем, что $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=f(a)+g(a)$, что означает, что $(f(x)+g(x))$ непрерывна в точке a. ∎

4. **Теорема о непрерывности сложной функции.**

Теорема. Если функция $g(t)$ непрерывна в точке t_0 и функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0=g(t_0)$, то $f(g(t))$ непрерывна в t_0.

Доказательство. Для доказательства этой теоремы воспользуемся формальным преобразованием двух выражений с кванторами.

$f(x)$ непрерывна в x_0:
$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall x:\ 0<|x-x_0|<\delta\implies|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

$g(t)$ непрерывна в t_0:
$$\forall\delta>0\ \exists\mu>0:\ \forall t:\ 0<|t-t_0|<\mu\implies|g(t)-g(t_0)|<\delta$$

Получается, $f(g(t))$ непрерывна в t_0:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\mu>0:\ \forall t:\ 0<|t-t_0|<\mu\implies|f(g(t))-f(g(t_0))|<\varepsilon$$

∎

5. **Свойства функций, непрерывных на отрезке (первая и вторая теоремы Вейерштрасса).**

Теорема Вейерштрасса (первая) Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она на нём ограничена, то есть $\exists A:\ \forall x\in[a,b]\implies|f(x)|\leqslant A$

Доказательство. Докажем от противного.

Пусть f не ограничена на отрезке $[a,b]$, тогда:

$$\forall A>0\ \exists x_A\in[a,b]:\ |f(x_A)|>A$$
$$A=1\implies\exists x_1\in[a,b]:\ |f(x_1)|>1$$
$$A=2\implies\exists x_2\in[a,b]:\ |f(x_2)|>2$$
$$\vdots$$
$$A=n\implies\exists x_n\in[a,b]:\ |f(x_n)|>n$$

Получим последовательность $\{x_n\} \subset [a, b]$, то есть последовательность $\{x_n\}$ ограничена.

По теореме Больцано-Вейерштрасса из неё можно выделить подпоследовательность, которая сходится к точке c, то есть

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c$$

Тогда $c \in [a, b]$. Но по условию функция непрерывна в точке c и тогда по определению непрерывности в точке по Гейне $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(c)$.

С другой стороны

$$|f(x_{n_k})| > n_k, n_k \geqslant k \implies \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \infty$$

А это противоречит единственности предела. ■

Теорема Вейерштрасса (вторая) Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция f достигает на нем своих точных нижней и верхней граней. То есть существуют такие точки $c_1, c_2 \in [a, b]$, так что для любого $x \in [a, b]$, выполняются неравенства:

$$f(c_2) \leqslant f(x) \leqslant f(c_1)$$

Доказательство. Докажем $\exists c_1 \in [a, b] : \ f(c_1) = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Пусть $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ (существование следует из первой теоремы Вейерштрасса). В силу определения точной верхней грани выполняется условие:

$$\begin{cases} \forall x \in [a, b] \implies f(x) \leqslant M \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x_\varepsilon \in [a, b] : \ M - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \end{cases}$$

Полагая $\varepsilon = 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots, \dfrac{1}{n}$ получим последовательность $\{x_n\}$ такую, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняются условия $M - \dfrac{1}{n} < f(x_n) \leqslant M$, откуда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$. Существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$ (она ограничена отрезком $[a, b]$, а значит является ограниченной) и точка c (по теореме Больцано-Вейерштрасса, из последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к точке c), такие что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = c$, где $c \in [a, b]$.

В силу непрерывности функции f в точке c, получаем $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(c)$.

С другой стороны, $\{f(x_{n_k})\}$ — подпоследовательность последовательности $\{f(x_n)\}$, сходящейся к числу M. Поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M$.

В силу единственности предела последовательности заключаем, что $f(c) = M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Утверждение $\exists c_1 \in [a, b] : \ f(c_1) = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ доказано.

Аналогично доказывается $\exists c_2 \in [a, b] : \ f(c_2) = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

Функция непрерывна на интервале может не достигать своих точных граней (требовать непрерывности на сегменте существенно). ■

6. **Теорема Коши о прохождении непрерывной функции через промежуточные значения.**

Теорема Больцано-Коши (первая), о нулях непрерывной функции Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и на своих концах принимает значение разных знаков, то существует такая точка, принадлежащая этому отрезку, в которой функция обращается в нуль.

Доказательство. Геометрически очень легко: функция пересечет ось OX.

Алгебраически: разделим отрезок $[a, b]$ точкой x_0 на два равных по длине отрезка, тогда либо $f(x_0) = 0$ и, значит, искомая точка x_0 найдена, либо $f(x_0) \neq 0$ и тогда на концах одного из полученных промежутков функция f принимает значения разных знаков, точнее, на левом конце значение меньше нуля, на правом — больше.

Обозначим этот отрезок $[a_1, b_1]$ и разделим его снова на два равных подлине отрезка и т.д. В результате, либо через конечное число шагов придем к искомой точке x, в которой $f(x) = 0$, либо получим последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$ по длине стремящихся к нулю и таких, что

$$f(a_n) < 0 < f(b_n)$$

Пусть γ — общая точка всех отрезков $[a_n, b_n]$. Тогда $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Поэтому, в силу непрерывности функции f

$$f(\gamma) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$$

Но тогда
$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \leqslant 0 \leqslant \lim_{n\to\infty} f(b_n)$$
Откуда следует, что $f(\gamma) = 0$. ■

Теорема Больцано-Коши (вторая), о промежуточном значении непрерывных функций Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $A = f(a) \neq f(b) = B$, число $C \in (A, B)$, тогда существует такая точка $c \in [a, b]$, что $f(c) = C$.

Другими словами, утверждается, что если непрерывная функция, принимает два значения, то она принимает и любое значение между ними.

Доказательство. Не нарушая общности будем считать, что $A = f(a) < f(b) = B$. Рассмотри функцию $h(x) = f(x) - C$, непрерывность на отрезке $[a, b]$ которой следует из непрерывности функции f. Очевидно что $h(a) = A - C < 0$ и $h(b) = B - C > 0$. Применяем к h первую теорему Больцано-Коши и находим точку c, в которой $h(c) = f(c) - C = 0$, то есть $f(c) = C$. Теорема доказана. ■

7. **Понятие производной функции в точке.**

Рассмотрим функцию, область определения которой содержит точку x_0. Тогда функция $f(x)$ является дифференцируемой в точке x_0, и ее производная $f'(x_0)$ определяется следующей формулой, если существует предел
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta\to 0} \frac{f(x_0+\Delta) - f(x_0)}{\Delta}$$

8. **Геометрический и физический смысл производной.**

Геометрический смысл производной. Производная в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в этой точке.

Физический смысл производной. Если точка движется вдоль оси OX и ее координата изменяется по закону $x(t)$, то мгновенная скорость точки: $v(t) = x'(t)$.

9. **Уравнение касательной к графику функции в точке.**

Пусть дана функция f, которая в некоторой точке x_0 имеет конечную производную $f'(x_0)$. Тогда прямая, проходящая через точку $(x_0; f(x_0))$, имеющая угловой коэффициент $f'(x_0)$, называется касательной.

Итак, пусть дана функция $y = f(x)$, которая имеет производную $y = f'(x)$ на отрезке $[a, b]$. Тогда в любой точке $x_0 \in (a; b)$ к графику этой функции можно провести касательную, которая задается уравнением:
$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

11. **Понятие дифференцируемости функции в точке.**

Функция $f(x)$ является дифференцируемой в точке x_0 своей области определения $D[f]$, если существует такая константа A, что:
$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \bar{\bar{o}}(x - x_0)$$
и
$$A = f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Теорема $f(x)$ дифференцируема в точке x только и только тогда, когда $\exists f'(x)$, причем $A = f'(x)$

Доказательство. Докажем необходимость и достаточность

- **Необходимость**. Пусть $f(x)$ дифференцируема в точке $x \implies \Delta y = A\Delta x + \bar{\bar{o}}(\Delta x) \implies \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A + \dfrac{\bar{\bar{o}}(\Delta x)}{\Delta x} = A + \bar{\bar{o}}(1)$

  Тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A \implies A = f'(x)$

- **Достаточность**. Пусть $\exists f'(x) \implies \exists \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$. Рассмотрим $\beta(\Delta x) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)$. $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \beta(\Delta x) = 0$, т.е. $\beta(\Delta x) = \bar{\bar{o}}(1) \implies \dfrac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = \bar{\bar{o}}(1) \implies \Delta y = f'(x)\Delta x + \bar{\bar{o}}(\Delta x)$

■

12. **Необходимое условие дифференцируемости.**

Теорема. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Тогда её приращение представимо в виде
$$\Delta y = A\Delta x + \bar{\bar{o}}(\Delta x)$$
Но тогда при $\Delta x \to 0$ будет $\Delta y \to 0$, а это означает непрерывность функции $y = f(x)$ в точке x_0. ∎

Обратите внимание, что из непрерывности не следует дифференцируемости (например, $f(x) = |x|$).

13. Правила дифференцирования.

Теорема. Если $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x, то $f \pm g$, $f \cdot g$, $\dfrac{f}{g}(g \neq 0)$ также дифференцируемы в точке x, причем $(f \pm g)' = f' \pm g'$, $(f \cdot g)' = f'g + fg'$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

Доказательство. Будем считать, что Δf отвечает приращению $f(x)$, Δg отвечает приращению $g(x)$, а Δh отвечает приращению $h(x)$.

1. $h(x) = f(x) \pm g(x)$
$$\begin{aligned}\Delta h = h(x+\Delta x) - h(x) &= (f(x+\Delta x) \pm g(x+\Delta x)) - (f(x) \pm g(x))\\ &= (f(x+\Delta x) - f(x)) \pm (g(x+\Delta x) - g(x))\\ &= \Delta f \pm \Delta g\end{aligned}$$
Таким образом,
$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} \pm \frac{\Delta g}{\Delta x}$$
При $\Delta x \to 0$ существует предел правой части, равный $f'(x) \pm g'(x)$, а значит, существует и предел левой части
$$h'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

2. $h(x) = f(x) \cdot g(x)$
$$\begin{aligned}\Delta h = h(x+\Delta x) - h(x) &= f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x)g(x)\\ &= (f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x) \cdot g(x)) + (f(x+\Delta x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x))\end{aligned}$$
Далее можно записать
$$\Delta h = f(x+\Delta x) \cdot (g(x+\Delta x) - g(x)) + g(x) \cdot (f(x+\Delta x) - f(x)) = f(x+\Delta x) \cdot \Delta g + g(x)\Delta f$$
Таким образом
$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = f(x+\Delta x)\frac{\Delta g}{\Delta x} + g(x) \cdot \frac{\Delta f}{\Delta x}$$
Возьмем теперь предел правой части при $\Delta x \to 0$. В силу непрерывности $f(x)$ в x (т.к. она дифференцируема в этой точке) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) = f(x)$. Тогда получаем, что
$$h'(x) = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

Лемма. Если $f(x)$ непрерывна в точке a и $f(a) > 0 (f(a) < 0)$, то $\exists \delta > 0 : f(x) > 0 (f(x) < 0) \forall x \in U_\delta(a)$

Доказательство. Так как $f(x) \in C(a)$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \in U_\delta(a) \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon \iff f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$. Положим $\varepsilon = \dfrac{|f(a)|}{2}$, тогда $f(a) - \varepsilon > 0$ при $f(a) > 0$ и $f(a) + \varepsilon < 0$ при $f(a) < 0$. Т.е. левая и правая части неравенства всегда одного знака, значит $\forall x \in U_\delta(a)$ выполнено требуемое. ∎

3. $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$. По лемме, $g(x) \neq 0$, то $g(x+\Delta x) \neq 0$ для малых Δx. Тогда
$$\begin{aligned}\Delta h = h(x+\Delta x) - h(x) &= \frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}\\ &= \frac{f(x+\Delta x)g(x) - g(x+\Delta x)f(x)}{g(x)g(x+\Delta x)}\\ &= \frac{(f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x)) - (g(x+\Delta x)f(x) - f(x)g(x))}{g(x)g(x+\Delta x)}\\ &= \frac{g(x)(f(x+\Delta x) - f(x)) - f(x)(g(x+\Delta x) - g(x))}{g(x)g(x+\Delta x)}\\ &= \frac{g(x)\Delta f - f(x)\Delta g}{g(x)g(x+\Delta x)}\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{g(x)\dfrac{\Delta f}{\Delta x} - f(x)\dfrac{\Delta g}{\Delta x}}{g(x)g(x+\Delta x)}$$

Снова используя непрерывность и беря предел правой и левой частей, получаем, что

$$h'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

■

14. Теорема о дифференцируемости и производной сложной функции.

Теорема. Пусть функцию $y = y(x)$ от переменной x можно представить как сложную функцию в следующем виде:

$$y(x) = f(u(x))$$

где $f(u)$ и $u(x)$ есть некоторые функции. Функция $u = u(x)$ дифференцируема при некотором значении переменной x. Функция $f(u)$ дифференцируема при значении переменной $u = u(x)$. Тогда сложная (составная) функция $y = f(u(x))$ дифференцируема в точке x и ее производная определяется по формуле:

$$y'(x) = f'(u) \cdot u'(x)$$

Доказательство. Введем следующие обозначения.

$$\Delta u = u(x+\Delta x) - u(x)$$
$$\Delta f = f(u+\Delta u) - f(u) = f(u(x+\Delta x)) - f(u(x))$$

Здесь Δu есть функция от переменных x и Δx, Δf есть функция от переменных u и Δu. Но мы будем опускать аргументы этих функций, чтобы не загромождать выкладки.

Поскольку функции u и f дифференцируемы в точках x и $u = u(x)$, соответственно, то в этих точках существуют производные этих функций, которые являются следующими пределами:

$$u'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$
$$f'(u) = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta u}$$

Рассмотрим следующую функцию:

$$\varepsilon(\Delta u) = \frac{\Delta f}{\Delta u} - f'(u)$$

При фиксированном значении переменной u, ε является функцией от Δu. Очевидно, что

$$\lim_{\Delta u \to 0} \varepsilon(\Delta u) = 0$$

Тогда

$$\Delta f = (f'(u) + \varepsilon(\Delta u)) \cdot \Delta u$$

Поскольку функция $u(x)$ является дифференцируемой функцией в точке x, то она непрерывна в этой точке. Поэтому

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta u) = \lim_{\Delta u \to 0} \varepsilon(\Delta u) = 0$$

Теперь находим производную.

$$\begin{aligned}
y'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \varepsilon(\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x} \right) \\
&= f'(u) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta u) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\
&= f'(u) \cdot u'(x) + 0 \cdot u'(x) \\
&= f'(u) \cdot u'(x)
\end{aligned}$$

Формула доказана. ■

16. Таблица производных основных элементарных функций.

$f(x)$	$f'(x)$
$const$	0
x^a	$a \cdot x^{a-1}$
a^x	$a^x \cdot \ln a$
e^x	e^x
$\log_a x$	$\frac{1}{\ln a \cdot x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

17. Понятие дифференциала (первого) функции в точке.

Функция $f(x)$ является дифференцируемой в точке x_0 своей области определения $D[f]$, если существует такая константа A, что:

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \bar{\bar{o}}(x - x_0)$$
$$A = f'(x_0) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta}$$

Тогда выражение $f'(x_0)dx$ называют дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0. Обозначение: $df = df(x_0, dx)$. Обратите внимание, что df зависит и от точки, и от dx.

20. [На коллоквиуме будет только производная высших порядков] Производные и дифференциалы высших порядков функции одной переменной в точке.

Рассмотрим функцию, дифференцируемую на множестве E. Т.е. $\exists f'(x)$, Если $f'(x)$ тоже дифференцируема на E, то $\exists (f'(x))' = f''(x)$.

Производной n-ого порядка будем считать $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$, причем $f^{(0)}(x) = f(x)$. Разумеется, для существования производной n-ого порядка должны существовать производные всех меньших порядков.

Множество функций, имеющих все производные до порядка n включительно на множестве E, обозначается $C^{(n)}(E)$. Рассмотрми несколько примеров

- $f(x) = \sin x$

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$
$$f''(x) = -\sin x = \sin\left(\frac{2\pi}{2} + x\right)$$
$$f'''(x) = -\cos x = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$$
$$f^{(4)}(x) = \sin x = \sin x$$

Докажем по индукции, что $f^{(n)}(x) = \sin\left(\frac{\pi n}{2} + x\right)$. При $n = 1$ уже было показано ранее. Пусть это верно при некотором n, покажем для $n = n + 1$.

$$f^{(n+1)}(x) = \sin\left(\frac{\pi(n+1)}{2} + x\right)$$
$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' = \left(\sin\left(\frac{\pi n}{2} + x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi n}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi(n+1)}{2} + x\right)$$

- $f(x) = e^x$. $f^{(n)}(x) = e^x$
- $f(x) = x^m$. Беря n раз производную, получаем, что $f^{(n)}(x) = m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n}$
- $f(x) = \ln x$. $f'(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$. $f^{(n)}(x^{-1}) = (-1)(-2)\ldots(-n)x^{-1-n} = (-1)^n \cdot n! \cdot x^{-1-n}$, Тогда получаем, что

$$f^{(n)}(x) = f^{(n-1)}(x-1) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot x^{-n}$$

Теорема (Формула Лейбница) Пусть $u(x)$ и $v(x)$ имеют не менее n производных на множестве E. Тогда

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot u^{(n-k)} \cdot v^{(k)}$$

Доказательство. Докажем по индукции. При $n = 1$

$$(u \cdot v)' = u'v + uv' = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} \cdot u^{(1-k)} \cdot v^{(k)}$$

Пусть равенство верно при некотором n, докажем его справедливость при $n = n + 1$. Беря по определению производную $(u \cdot v)^{(n+1)}$

$$\begin{aligned}
(u \cdot v)^{(n+1)} &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot u^{(n-k)} \cdot v^{(k)}\right)' \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot u^{(n-k+1)} \cdot v^{(k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot u^{(n-k)} \cdot v^{(k+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot u^{(n-k+1)} \cdot v^{(k)} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \cdot u^{(n-k+1)} \cdot v^{(k)} \\
&= \binom{n}{0} \cdot u^{(n+1)} \cdot v + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right) \cdot u^{(n-k+1)} \cdot v^{(k)} + \binom{n}{n} \cdot u \cdot v^{(n+1)} \\
&= \binom{n}{0} \cdot u^{(n+1)} \cdot v + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} \cdot u^{(n-k+1)} \cdot v^{(k)} + \binom{n}{n} \cdot u \cdot v^{(n+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot u^{(n-k+1)} \cdot v^{(k)}
\end{aligned}$$

Последний переход сделан при помощи следующего рассуждения:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

■

21. Понятие об экстремумах функции одной переменной.

Точка x_0 называется точкой локального максимума (минимума) функции f, если существует такая окрестность $U_\delta(x_0)$ точки x_0, что

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \implies f(x) \leqslant f(x_0)$$

и точкой локального минимума, если

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \implies f(x) \geqslant f(x_0)$$

Точка x_0 будет называться точкой строгого локального экстремума, если заменить окрестность на проколотую окрестность и нестрогий знак заменить на строгий.

Теорема Ферма Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то ее производная $f'(x_0)$ либо равна нулю, либо не существует.

22. Локальный экстремум. Необходимое условие для внутреннего локального экстремума (теорема Ферма).

Теорема Ферма Пусть функция f определена на интервале (a, b) и в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$ принимает наибольшее (наименьшее) значение на этом интервале. Если существует $f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Пусть x_0 — точка максимума функции f. Рассмотрим разностное отношение $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Так как $f(x) \leqslant f(x_0)$, то при $x > x_0$ имеем $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0$, и, следовательно, $f'_+(x_0) \leqslant 0$. Если же $x < x_0$, то $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$, и поэтому $f'_-(x_0) \geqslant 0$. Но из дифференцируемости функции f в точке x_0 следует, что $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$ (следует из равности предела справа и слева). ■

С геометрической точки зрения теорема Ферма означает, что если в точке экстремума у графика функции существует касательная, то она параллельна оси OX.

23. Основные теоремы о дифференцируемых функций на отрезке (теорема Ролля, формулы Лагранжа и Коши.

Теорема Ролля. О нуле производной функции, принимающей на концах отрезка равные значения Пусть функция $y = f(x)$

1. непрерывна на отрезке $[a, b]$;
2. дифференцируема на интервале (a, b);
3. $f(a) = f(b)$

Тогда на интервале (a, b) найдется, по крайней мере, одна точка x_0, в которой $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Если функция $f(x)$ постоянна на отрезке $[a, b]$ (а значит, её минимальное и максимальное значение совпадают), то производная равна нулю в любой точке интервала (a, b), в этом случае утверждение справедливо.

Иначе, минимальное и максимальное значение функции не совпадают. По второй теореме Вейерштрасса (о достижении функции значения точной верхней/нижней грани на отрезке), функция достигает своего наибольшего или наименьшего значения в точке ξ интервала (a, b), т.е. в точке ξ существует локальный экстремум. Тогда по теореме Ферма производная в этой точке равна нулю

$$f'(\xi) = 0$$

■

Теорема Лагранжа. Формула конечных приращений Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b), то в этом интервале существует хотя бы одна точка x_0, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию $F(x) = f(x) + \lambda x$.

Выберем число λ таким, чтобы выполнялось условие $F(a) = F(b)$, тогда

$$f(a) + \lambda a = f(b) + \lambda b \implies f(b) - f(a) = \lambda(a - b) \implies \lambda = -\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

В результате получаем

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot x$$

Функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и принимает одинаковые значения на концах отрезка. Следовательно, для неё выполнены все условия теоремы Ролля. Тогда в интервале (a, b) существует такая точка ξ, что $F'(\xi) = 0$.

Отсюда следует, что $0 = f'(\xi) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ или

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

■

Теорема Лагранжа имеет простой геометрический смысл. Хорда, проходящая через точки графика, соответствующие концам отрезка a и b имеет угловой коэффициент, равный

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Тогда внутри отрезка существует точка $x = \xi$, в которой касательная к графику параллельна хорде.

Теорема Коши. Обобщает формулу конечных приращений Лагранжа. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемы на интервале (a, b), причем $g'(x) \neq 0$ при всех $x \in (a, b)$. Тогда в этом интервале существует точка $x = \xi$ такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Доказательство. **Доказательство совпадает с доказательством теормы Лагранжа**.

Прежде всего заметим, что знаменатель в левой части формулы Коши не равен нулю: $g(b) - g(a) \neq 0$. Действительно, если $g(a) = g(b)$, то по теореме Ролля найдется точка $\mu \in (a, b)$, в которой $g'(\mu) = 0$. Это, однако, противоречит условию, где указано, что $\forall x \in (a, b) : \ g'(x) \neq 0$.

Введем вспомогательную функцию $F(x) = f(x) + \lambda g(x)$.

Выберем число λ таким, чтобы выполнялось условие $F(a) = F(b)$, тогда

$$f(a) + \lambda g(a) = f(b) + \lambda g(b) \implies f(b) - f(a) = \lambda(g(a) - g(b)) \implies \lambda = -\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

В результате получаем

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g(x)$$

Функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и при найденном значении λ принимает одинаковые значения на концах отрезка. Следовательно, для неё выполнены все условия теоремы Ролля. Тогда в интервале (a, b) существует такая точка ξ, что $F'(\xi) = 0$.

Отсюда следует, что

$$0 = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(\xi)$$

или

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

■

24. Многочлен Тейлора и формула Тейлора для функций одной переменной с остаточным членом в форме Пеано и Лагранжа.

Предположим, что имеется некоторая функция $f(x)$ и надо исследовать ее поведение в некоторой точке x_0 или ее окрестности. Сама функция может быть при этом достаточно сложной, и поэтому непосредственное вычисление $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ (как пример того, что мы хотим узнать о функции в x_0) окажется крайне трудоемким. Идея в том, чтобы найти такой многочлен $P_n(x)$, что $f(x) \sim P_n(x - x_0)$ при $x \to x_0$, а затем исследовать его. Работать с многочленами практически всегда намного проще.

Предположим пока, что $x_0 = 0$. Тогда $P_n(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n$. $P_n(0) = c_0$, а $P_n'(x) = c_1 + 2c_2 x + \dots + n c_n x^{n-1}$, из чего следует, что $c_1 = P_n'(0)$. По аналогии можно получить, что $c_2 = \dfrac{P_n''(0)}{2!}, \dots, c_n = \dfrac{P_n^{(n)}(0)}{n!}$. Т.е. получаем, что $P_n(x) = P_n(0) + \dfrac{P_n'(0)}{1!}x + \dots + \dfrac{P_n^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

Пусть $\exists f^{(n)}(x_0)$, тогда справедлива формула:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(f, x)$$

Эта формула называется **формулой Тейлора** и обычно записывается в виде:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k}_{\text{многочлен Тейлора}} + \underbrace{r_n(f, x)}_{\text{остаточный член}}$$

Лемма. Пусть $\exists f^{(n)}(x_0)$ и $\exists f'(x)$ на некоторой $U(x_0)$. Тогда $(r_n(f, x))' = r_{n-1}(f', x)$.

Доказательство.

$$r_n(f, x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

$$(r_n(f, x))' = f'(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x - x_0)^{k-1} = f'(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = r_{n-1}(f', x)$$

так как $f^{(k+1)}(x_0) = (f')^{(k)}(x_0)$. Следует также обратить внимание на то, что дифференцирование $r_n(f, x)$ происходит по x, поэтому все члены суммы, кроме $(x - x_0)^k$, — константы. ■

Теорема о локальной форме остаточного члена (Форма Пеано) Пусть $\exists f^{(n)}(x_0)$ и $\exists f^{(n-1)}(x)$ на некоторой $U(x_0)$. Тогда справедлива формула Тейлора, причем $r_n(f, x) = \bar{\bar{o}}((x - x_0)^n), x \to x_0$.

Доказательство. Докажем с помощью метода математической индукции. При $n = 1$, $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \bar{\bar{o}}(x - x_0)$, что верно, т.к. $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Предположим теперь, что теорема верна для **произвольной функции** f при $n = n - 1$, и докажем её при $n = n$.

Заметим сначала, что $r_n(f, x_0) = 0$ (следует из обычной формулы Тейлора). Тогда $r_n(f, x) = r_n(f, x) - r_n(f, x_0) = (r_n(f, \xi))'(x - x_0)$, где ξ принадлежит интервалу $(\min\{x, x_0\}, \max\{x, x_0\})$ по теореме Лагранжа.

По лемме получаем, что $(r_n(f, \xi))'(x - x_0) = r_{n-1}(f', \xi)(x - x_0)$. По предположению для произвольной функции f, у которой есть n-ая производная в x_0 и $(n-1)$-ая в окрестности x_0, можно выполнить индукционный переход для f', т.к. для r_{n-1} у $f'(x)$ существуют $(n - 1)$-ая производная в x_0 и $(n - 2)$-ая в окрестности x_0. Тогда $r_{n-1}(f', \xi)(x - x_0) = \bar{\bar{o}}((\xi - x_0)^{n-1})(x - x_0) = [|\xi - x_0| < |x - x_0| \implies \bar{\bar{o}}((\xi - x_0)^{n-1}) = \bar{\bar{o}}((x - x_0)^{n-1})] = \bar{\bar{o}}((x - x_0)^{n-1})(x - x_0) = \bar{\bar{o}}((x - x_0)^n)$ ■

Теорема о форме Лагранжа Пусть $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $\exists f^{(n)}(x)$, причем $f^{(n)}(x)$ непрерывна на отрезке $[x_0, x]$. Кроме того, $\exists f^{(n+1)}(x)$ на (x_0, x). Тогда справедлива формула Тейлора, причем $r_n(f, x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, где $\xi \in (x_0, x)$.

Доказательство. Снова воспользуемся методом математической индукции. При $n = 0$, $f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)$ — формула Лагранжа. Предположим теперь, что для произвольной функции f справедливо, что $r_{n-1}(f, x) = \dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n$, где $\xi \in (x_0, x)$. При $n = n$ имеем:

$$\frac{r_n(f, x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{r_n(f, x) - r_n(f, x_0)}{(x - x_0)^{n+1} - (x_0 - x_0)^{n+1}} \text{ [по формуле Коши] } =$$
$$= \frac{(r_n(f, \mu))'}{(n+1)(\mu - x_0)^n} \text{ [по лемме, доказанной выше] } =$$
$$= \frac{r_{n-1}(f', \mu)}{(n+1)(\mu - x_0)^n} = \frac{(f'(\xi))^{(n)}}{(n+1)n!} \implies r_n(f, x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

■

25. Формулы Маклорена для основных элементарных функций (без доказательства).

При $x_0 = 0$ формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано называется формулой Маклорена

Приведем пример: $f(x) = \sin x$. Вспомним, что

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right) \implies f^{(n)}(0) = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k, \\ (-1)^k, & \text{если } n = 2k+1 \end{cases}$$

Тогда получаем следующее разложение:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \bar{\bar{o}}(x^{2n})$$

1. $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dots + \dfrac{x^n}{n!} + \bar{\bar{o}}(x^n), x \to 0$
2. $\ln(1 + x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{x^n}{n} + \bar{\bar{o}}(x^n), x \to 0$
3. $\underset{\alpha \in \mathbb{R}}{(1 + x)^\alpha} = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dbinom{\alpha}{k} x^k + \bar{\bar{o}}(x^n)$

   Например $(1 + x)^{\frac{1}{3}} - 1 = \dbinom{\frac{1}{3}}{1} x + \dbinom{\frac{1}{3}}{2} x^2 + \bar{\bar{o}}(x^2) = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3} - 1)}{2} x^2 + \bar{\bar{o}}(x^2)$
4. $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \bar{\bar{o}}(x^{2n})$
5. $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \bar{\bar{o}}(x^{2n+1})$
6. $\operatorname{tg}(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15}x^5 + \dots + \dfrac{B_{2n}(-4)^n(1 - 4^n)}{(2n)!} \cdot x^{2n-1} + \bar{\bar{o}}(x^{2n-1})$, где B_{2n} — числа Бернулли

   Но достаточно помнить, что $\operatorname{tg}(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15}x^5 + \bar{\bar{o}}(x^5)$, т.е. общая формула для семинаров <u>не</u> нужна
7. $\arcsin(x) = x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3}{40}x^5 + \dots + \dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)} \cdot x^{2n+1} + \bar{\bar{o}}(x^{2n+1})$

   Достаточно знать $\arcsin(x) = x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3}{40}x^5 + \bar{\bar{o}}(x^5)$

8. $\arccos(x) = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin(x)$
9. $\operatorname{arctg}(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \dots + (-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1} + \bar{\bar{o}}(x^{2n-1})$

26. Правило Лопиталя.

Теорема Лопиталя (первое правило) Если функции $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что

1. $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в проколотой окрестности точки a
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$
3. $g'(x) \neq 0$ в окрестности $U(a)$
4. Существует $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Тогда существует $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Доказательство. Доопределим функции в точке a нулём (непрерывности не нарушится, так как предел этих функций при $x \to a$ равен 0). Из первого условия следует, что $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, x]$, где x принадлежит рассматриваемой окрестности точки a.

Применим обобщённую формулу конечных приращений (Коши) к $f(x)$ и $g(x)$ на отрезке $[a, x]$.

$$\exists \xi \in [a, x] : \ \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Так как $g(a) = f(a) = 0$ получим, что $\forall x \ \exists \xi \in [a, x] : \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

По определению предела, $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall x : \ a < x < a + \delta \implies \left|\dfrac{f'(x)}{g'(x)} - A\right| < \varepsilon$. Но для каждого x из указанного интервала найдется своё ξ_x, такое что $\dfrac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Но раз $\xi_x \in (a, x)$, то выполняется $\left|\dfrac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} - A\right| < \varepsilon \implies \left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - A\right|$, что и требовалось доказать. ■

Теорема Лопиталя (второе правило) Если для функций $f(x)$ и $g(x)$ справедливо следующее:

1. $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на интервале (a, b)
2. $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} g(x) = \infty$
3. $g'(x) \neq 0$ при $x \in (a, b)$
4. Существует $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$

то $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$

Доказательство. Для начала положим, что $A \leqslant 0$ (при $A > 0$ доказательство практически аналогично приведенному). Пусть $\varepsilon \in \left(0, \dfrac{1}{4}\right)$. Тогда по определению предела

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \iff \exists x_\varepsilon \in (a, b) : \ \forall x \in (a, x_\varepsilon) \implies \left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - A\right| < \varepsilon$$

Здесь мы просто приняли, что $x_\varepsilon = a + \delta$, в остальном же интерпретация определения предела не изменилась.

Выберем произвольное x из данного интервала (a, x_ε). Заметим, что выполняется теорема Коши (доопределим функции f и g в точке a, а в точке x_ε они уже определены):

$$\frac{f(x) - f(x_\varepsilon)}{g(x) - g(x_\varepsilon)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \text{ где } a < x < \xi < x_\varepsilon < b$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1 - \dfrac{f(x_\varepsilon)}{f(x)}}{1 - \dfrac{g(x_\varepsilon)}{g(x)}} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot \frac{1 - \dfrac{g(x_\varepsilon)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(x_\varepsilon)}{f(x)}}$$

Заметим теперь, что $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x_\varepsilon)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{g(x_\varepsilon)}{g(x)}=0$, т.к. $f(x_\varepsilon)$ и $g(x_\varepsilon)$ — константы (а знаменатели по условию стремятся к ∞). Тогда выберем для текущего закрепленного ε такое $\delta(\varepsilon)>0$:

$$\forall x\in(a,a+\delta),\delta+a<b \implies \left|\frac{f(x_\varepsilon)}{f(x)}\right|<\varepsilon,\left|\frac{g(x_\varepsilon)}{g(x)}\right|<\varepsilon$$

Тогда получаем следующую оценку:

$$\frac{1-\dfrac{g(x_\varepsilon)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(x_\varepsilon)}{f(x)}}\in\left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon},\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)$$

Поскольку $\varepsilon\in\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$, то $\dfrac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}=1-\dfrac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}>1-2\varepsilon$ и $\dfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}=1+\dfrac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}<1+\dfrac{8}{3}\varepsilon$. Учитывая, что $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}\in\overset{\circ}{U}_\varepsilon(A)$:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\cdot\frac{1-\dfrac{g(x_\varepsilon)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(x_\varepsilon)}{f(x)}}\in\left((A-\varepsilon)(1-2\varepsilon),(A+\varepsilon)\left(1+\frac{8}{3}\varepsilon\right)\right)=$$

$$=\left(A-(\varepsilon+2A\varepsilon-2\varepsilon^2),A+\left(\varepsilon+\frac{8}{3}\varepsilon A+\frac{8}{3}\varepsilon^2\right)\right)\implies$$

$$\implies\frac{f(x)}{g(x)}\in U_\mu(A),\ \text{где}\ \mu=\max\left\{\varepsilon+2A\varepsilon-2\varepsilon^2,\varepsilon+\frac{8}{3}\varepsilon A+\frac{8}{3}\varepsilon^2\right\}$$

Как видно, $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\mu=0$, а для любого сколько угодно малого μ всегда можно найти соответствующее ε, такое, что все значения отношения функций попадут в заданную μ-трубку. Это и означает, что предел отношения функции равен A. ■

27. Достаточное условие строгого возрастания (убывания) функции на промежутке.

Теорема. Для того чтобы дифференцируемая функция $f(x)$ на интервале (a,b) строго возрастала, достаточно, чтобы $\forall x\in(a,b):\ f'(x)>0$

Для того чтобы дифференцируемая функция $f(x)$ на интервале (a,b) строго убывала, достаточно, чтобы $\forall x\in(a,b):\ f'(x)<0$

Доказательство. Докажем для строгого возрастания. Пусть $f'(x)>0\ \forall x\in(a,b)$. Выберем произвольные точки $x_1,x_2\in(a,b)$, и, не ограничивая общности, скажем, что $x_1<x_2$.

Применим формулу конечных приращений Лагранжа. Так как $f'(\xi)>0$ и $x_2>x_1$, имеем

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)\cdot(x_2-x_1)>0\implies f(x_2)>f(x_1)$$

■

3 Вопросы, которые были убраны из программы коллоквиума

1. Эквивалентность определений предела функции по Коши и Гейне

Теорема. Определения предела функции в точке по Коши и Гейне эквивалентны

Доказательство. Пусть f определена на множестве X и число A является пределом функции f в точке x_0 в смысле Коши. Выберем произвольную подходящую последовательность $x_n, n\in\mathbb{N}$, т.е. такую, для которой $\forall n\in\mathbb{N}:\ x_n\in X$ и $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$. Покажем, что A является пределом в смысле Гейне.

Зададим произвольное число $\varepsilon>0$ и укажем для него такое $\delta>0$, что $\forall x\in X$ из условия $0<|x-x_0|<\delta$ следует неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$. В силу того, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$, для $\delta>0$ найдется такой номер $N\in\mathbb{N}$, что для всех $n\geqslant N$ будет выполняться неравенство $|f(x_n)-A|<\varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

Докажем теперь обратное утверждение: предположим, что $A=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ в смысле Гейне, и покажем, что число A является пределом функции f в точке x_0 в смысле Коши. Предположим, что это неверно, т.е.

$$\exists\varepsilon_0>0\ \forall\delta>0\ \exists x_\delta\in X:\ 0<|x_\delta-x_0|<\delta:\ |f(x_\delta)-A|\geqslant\varepsilon$$

В качестве δ рассмотрим $\delta=\dfrac{1}{n}$, а соответствующие значения x_δ будем обозначать x_n. Тогда при любом $n\in\mathbb{N}$ выполняются условия $x_n\neq x_0,|x_n-x_0|<\dfrac{1}{n}$ и $|f(x_n)-A|\geqslant\varepsilon$. Отсюда следует, что последовательность $\{x_n\}$ является подходящей, но число A не является пределом функции f в точке x_0. Получили противоречие. ■

2. Теорема о дифференцируемости обратной функции.

Теорема. Рассмотрим функцию $f(x)$, которая является строго монотонной на некотором интервале (a, b). Если в этом интервале существует такая точка x_0, что $f'(x_0) \neq 0$, то функция $x = \varphi(y)$, обратная к функции $y = f(x)$, также дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$ и её производная равна

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Доказательство. Пусть переменная y в точке y_0 получает приращение $\Delta y \neq 0$. Соответствующее ему приращение переменной x в точке x_0 обозначим как Δx, причем $\Delta x \neq 0$ в силу строгой монотонности функции $y = f(x)$. Запишем отношение приращений в виде

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Допустим, что $\Delta y \to 0$, тогда $\Delta x \to 0$, поскольку обратная функция $x = \varphi(y)$ является непрерывной в точке y_0. В пределе, при $\Delta x \to 0$, правая часть записанного соотношения становится равной

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

В таком случае левая часть тоже стремится к пределу, который по определению равен производной обратной функции:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \varphi'(y_0)$$

Таким образом,

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

■

3. Производные функций, графики которых заданы параметрически.

Теорема. Зависимость между аргументом x и функцией y может быть задана в параметрическом виде с помощью двух уравнений:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

Пусть $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ определены и дифференцируемы при $t \in (a, b)$, причем $x'_t = \varphi'(t) \neq 0$ и $x = \varphi(t)$ имеет обратную функцию $t = \theta(x)$, то

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

Доказательство. Перейдем от параметрического задания к явному. При этом получаем сложную функцию $y = \psi(t) = \psi(\theta(x))$, аргументов которой является x.

По правилу нахождения производной сложной функции имеем

$$y'_x = (\psi(\theta(x)))' = \psi'(\theta(x)) \cdot \theta'(x)$$

По теореме об обратной функции $\theta'(x) = \dfrac{1}{\varphi'(t)}$. А значит

$$y'_x = \psi'(\theta(x)) \cdot \theta'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

■

4. Геометрический смысл дифференциала.

Дифференциал функции численно равен приращению ординаты касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в данной точке, когда аргумент x получает приращение Δx.

Подробнее тут