Математический анализ, Коллоквиум 4

Балюк Игорь
@lodthe, GitHub
Основано на материалах Егора Косова.

Дата изменения: 2020.05.05 в 01:59

Содержание

Оригинальный список вопросов

1 Метрические и нормированные пространства.

Оригинальный конспект.

Определение. Пусть X — множество. Функция $d : X \times X \to [0; +\infty)$ называется метрикой, если

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x) \forall x, y \in X$;
3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall x \in X$;
4. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \, \forall x, y \in X$.

Пара $(X, \|\cdot\|)$ называется нормированным пространством.

Нормой является привычнам нам длина вектора. Аналогично матрике, мы будем часто работать с Евклидовой нормой: пусть $x \in \mathbb{R}^n$, тогда $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.

Всякое нормированное пространство является метрическим с метрикой $d(x, y) = \|x - y\|$.

Определение. Пусть X — линейное пространство. Функция $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ называется скалярным произведением, если для всех $x, y, z \in X$ и всех $a, b \in \mathbb{R}$ выполнены следующие условия:

1. $\langle x, x \rangle \geqslant 0$ и $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$;
2. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;
3. $\langle ax + by, z \rangle = a\langle x, z \rangle + b\langle y, z \rangle$.

Линейное пространство X со скалярным произведением называется Евклидовым.

Мы будем часто работать со следующим скалярным произведением: пусть $x, y \in \mathbb{R}^n$, тогда $\langle x, y \rangle = x_1 \cdot y_1 \ldots x_n \cdot y_n$.

Лемма. (Неравенство Коши-Буняковского) Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скалярное произведение на линейном пространстве X, тогда $\forall x, y \in X$

$$|\langle x, y \rangle| \leqslant \sqrt{\langle x, x \rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y \rangle}.$$

Доказательство. Заметим, что для $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнено

$$0 \leqslant \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \lambda^2 \langle y, y \rangle + 2\lambda\langle x, y \rangle + \rangle x, x \rangle.$$

Не ограничивая общности, считаем, что $\langle y, y \rangle > 0$ (иначе y — нулевой вектор, доказательство тривиально). Это означает, что ветви параболы смотрят вверх. Но парабола не касается оси Ox, поэтому дискриминант этого трехчлена неположителен, т.е. $4|\langle x, y \rangle| - 4\langle y, y \rangle \langle x, x \rangle \leqslant 0$. ∎

Следствие. На евклидовом пространстве функция $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ является нормой.

Доказательство. Первые два свойства следуют из определения скалярного произведения. Неравенство треугольника следует из неравенства Коши-Буняковского:

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle \leqslant \|x\|^2 + 2 \cdot |\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

∎

Пример. На линейном пространстве $\mathbb{R}^k$ всех упорядоченных наборов $(x_1, \ldots, x_k)$ задано скалярное произведение $\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^{k} x_j y_j$. Тем самым, на $\mathbb{R}^k$ задана естественная евклидова метрика $\|x - y\| := \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \cdots + |x_k - y_k|^2}$.

Определение. Пусть (X, d) метрическое пространство.

1. Множество
$$B_r(x_0) := \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$$
называется **открытым шаром** радиуса r.

2. Множество
$$\overline{B_r}(x_0) := \{x \in X \mid d(x, x_0) \leqslant r\}$$
называется **замкнутым шаром** радиуса r.

3. Последовательность точек $x_n \in X$ называется **сходящейся к точке** x, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N(\varepsilon)$, что $d(x, x_n) < \varepsilon$ для каждого $n \geqslant N(\varepsilon)$.

4. Последовательность точек $x_n \in X$ называется **фундаментальной**, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N(\varepsilon)$, что $d(x_k, x_n) < \varepsilon$ для всех $k, n \geqslant N(\varepsilon)$.

5. Точка x называется **предельной** для множества $M \subset X$, если для всякого $\varepsilon > 0$ выполнено $B_\varepsilon(x) \cap (M \setminus \{x\}) \neq \varnothing$.

6. Множество $U \subset X$ называется **открытым**, если для всякого $x \in U$ найдется такое $\varepsilon > 0$, что $B_\varepsilon(x) \subset U$.

7. Множество $F \subset X$ называется **замкнутым**, если множество $X \setminus F$ открыто.

Лемма. Пусть (X, d) метрическое пространство. Тогда

1. если $x_n \to x, y_n \to y$, то $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$;

2. предел сходящейся последовательности единственный;

3. любой открытый шар является открытым множеством;

4. множество F замкнуто тогда и только тогда, когда множество F содержит все свои предельные точки.

Доказательство.

1. Следует из оценки
$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leqslant |d(x_n, y_n) - d(x_n, y)| + |d(x_n, y) - d(x, y)| \leqslant d(y_n, y) + d(x_n, x).$$

2. Следует из пункта 1).

3. Если $x \in B_r(x_0)$, то по неравенству треугольника $B_\varepsilon(x) \subset B_r(x_0)$ при $\varepsilon + d(x, x_0) < r$.

4. Множество F замкнуто тогда и только тогда, когда $\forall x \notin F \ \exists \varepsilon > 0 : \ B_\varepsilon \cap F = \varnothing \iff$ всякая точка $x \notin F$ — не предельная для F.

■

Определение. Метрическое пространство называется полным, если каждая фундаментальная последовательность в нем сходится.

Замечание. На $\mathbb{R}^k$ справедливы соотношения
$$\max_{1 \leqslant j \leqslant k} |x_j| \leqslant \|x_j\| \leqslant \sqrt{k} \cdot \max_{1 \leqslant j \leqslant k} |x_j|$$
для векторов $x = (x_1, \ldots, x_k)$. Тем самым, последовательность $x_n \to x$ в $\mathbb{R}^k$ тогда и только тогда, когда $(x_n)_j \to x_j$.

Пример. Пространство $\mathbb{R}^k$ со стандартной евклидовой метрикой полное. Действительно. если последовательность векторов $x_n \in \mathbb{R}^k$ фундаментальна, то фундаментальны и последовательности координат $\{(x_n)_j\}_{j=1}^\infty$ для всякого $j \in \{1, \ldots, k\}$.

Тем самым, у j-ой координаты есть предел x_j для каждого $j \in \{1, \ldots, k\}$. То есть $|(x_n)_j - x_j| \to 0$. Значит, $x_n \to x := (x_1, \ldots, x_k)$.

Пример. Пусть $X = [0; \pi/2)$. Пространство X не является полным с метрикой $d_1(x, y) = |x - y|$, но является полным с метрикой $d_2(x, y) = |\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y|$.

Определение. Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) — два метрических пространства. Отображение $f : X \to Y$ называется непрерывным в точке $x_0 \in X$, если для всякой последовательности $x_n \to x_0$ выполнено $f(x_n) \to f(x_0)$.

Лемма. Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) — два метрических пространства.

1. Отображение $f : X \to Y$ является непрерывным в точке $x \in X$ тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$, если $d_X(x, x_0) < \delta$.

2. Отображение $f : X \to Y$ является непрерывным в каждой точке $x \in X$ тогда и только тогда, когда прообраз каждого открытого множества в Y будет открытым множеством в X (такие отображения будем называть просто непрерывными).

Доказательство.

1. Отображение f разрывно в точке $x_0 \iff$ найдется последовательность $x_n \to x_0$, для которой $f(x_n)$ не сходится к $f(x_0) \iff$ найдется число $\varepsilon > 0$ и последовательность $x'_n \to x_0$, для которой $d_Y(f(x'_n), f(x_0)) \geqslant \varepsilon \iff$ найдется такое число $\varepsilon > 0$, что для произвольного $\delta > 0$ существует $x_\delta \in B_\delta(x_0)$, для которого $d_Y(f(x_\delta), f(x_0)) \geqslant \varepsilon$.

2. Если прообраз любого открытого множества открыт, то для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0))) \supset B_\delta(x_0)$, и значит отображение f непрерывно в точке x_0. Наоборот: пусть U — открыто в Y и $x_0 \in f^{-1}(U)$. Тогда в силу открытости найдется $\varepsilon > 0$, для которого $B_\varepsilon(f(x_0)) \subset U$. Из-за непрерывности в точке x_0 найдется такое $\delta > 0$, что $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0))) \supset B_\delta(x_0)$, что дает открытость множества $f^{-1}(U)$.

■

Предложение. Пусть $f : X \to Y$ непрерывна в точке $a \in X$, $g : Y \to Z$ непрерывна в точке $f(a) \in Y$. Тогда композиция $g \circ f : X \to Z$ непрерывна в точке a.

Доказательство. Следует из определения непрерывности. TODO() ■

Следствие. Пусть $f, g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ — непрерывные в точке a функции. Тогда $f + g$ и $f \cdot g$ — непрерывны в точке a.

Доказательство. Следует из того, что отображение $(x_1, x_2) \to x_1 + x_2$ и $(x_1, x_2) \to x_1 \cdot x_2$ непрерывны на $\mathbb{R}^2$. ■

Определение. Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) — метрические пространства и пусть x_0 — предельная точка в X. Скажем, что предел функции $f : X \to Y$ в точке x_0 равен y_0, если функция g, определенная соотношением $g(x) = f(x)$ при $x \neq x_0$ и $g(x_0) = y_0$ иначе, непрерывна в точке x_0.

2 Компакты в метрических пространствах

Определение. Множество K в метрическом пространстве называется компактным тогда и только тогда, когда из произвольной последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \to x \in K$.

Лемма. Пусть K — компакт. Тогда

1. K — ограниченное множество;

2. K — замкнутое множество;

3. образ K при непрерывном отображении компактен.

Доказательство.

1. Зафиксируем произвольную точку $x_0 \in K$. Если K — неограниченное множество, то найдется последовательность $x_n \in K$, $d(x_n, x_0) \to \infty$. Переходя к подпоследовательности, имеем $x_{n_k} \to x$, $d(x_{n_k}, x_0) \to d(x, x_0)$. Противоречие.

2. Если $x_n \in K$, $x_n \to x_0$, то переходя к подпоследовательности $x_{n_k} \to x \in K$, в силу единственности предела $x_0 = x \in K$.

3. Рассмотрим последовательность $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in K$. Переходя к подпоследовательности имеем $x_{n_k} \to x \in K$. Так как f — непрерывное отображение, то $f(x_{n_k}) \to f(x) \in f(K)$.

■

Предложение. Множество K в $\mathbb{R}^k$ со стандартной евклидовой метрикой компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.

Доказательство. Необходимость этого условия следует из предыдущей леммы. Проверим достаточность. Пусть множество K — замкнуто и ограничено, и пусть $x_n \in K$. В силу ограниченности K ограниченными будут и все координаты $(x_n)_j$ последовательности x_n. Тогда найдется сходящаяся подпоследовательность первых координат $(x_{n_m})_1$. Далее, из последовательности $(x_{n_m})_2$ можно также извлечь сходящуюся подпоследовательность. Повторяя процедуру, получим подпоследовательность x'_n, у которой каждая координата сходится, то есть $(x'_n)_j \to x_j$ для некоторого x_j. Тем самым, $x'_n \to x = (x_1, \dots, x_k)$. В силу замкнутости K, вектор $x \in K$. ∎

Следствие. Пусть K — компакт, $f : K \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Тогда образ $f(K)$ — ограниченное множество и найдутся точки $x_m, x_M \in K$, для которых $f(x_m) = \inf\limits_{x\in K} f(x), f(x_M) = \sup\limits_{x\in K} f(x)$.

3 Дифференцируемость отображений

Определение. Отображение $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ называется дифференцируемым в точке x, если для каждого $h \in \mathbb{R}^k$

$$f(x+h) = f(x) + Lh + \alpha(h) \|h\|,$$

где $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ — линейное отображение, $\lim\limits_{\|h\|\to 0} \|\alpha(h)\| = 0$. Линейное отображение L называют дифференциалом f в точке x и обозначают df.

Замечание. Напомним, что отображение $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ называется линейным, если

$$L(a_1 h_1 + a_2 h_2) = a_1 L h_1 + a_2 L h_2$$

для произвольных векторов $h_1, h_2, \in \mathbb{R}^k$ и произвольных чисел $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

Если в $\mathbb{R}^k$ фиксирован базис $e := \{e_1, \dots, e_k\}$, а в $\mathbb{R}^m$ фиксирован $e' := \{e'_1, \dots, e'_m\}$, то линейное отображение L представимо в виде $L(h) = L(e_1)h_1 + \dots + L(e_k)h_k$, где $h = (h_1, \dots, h_k)$ в базисе e, а векторы $L(e_j) = (e_{1,j}, \dots, a_{m,j})$ в базисе e'.

В частности, каждое линейное отображение при фиксированных базисах e и e' в $\mathbb{R}^k$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно записывается с помощью матрицы $A = (a_{ij})$. Кроме того,

$$\|Lh\| \leqslant (\|L(e_1)\| + \dots + \|L(e_k)\|) \cdot \max_{1\leqslant j\leqslant k} |h_j| \leqslant C\|h\|$$

и каждое линейное отображение непрерывно на $\mathbb{R}^k$.

Следствие. Если отображение $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке x, то оно непрерывно в точке x.

Доказательство. Действительно, $\|f(x+h) - f(x)\| = \|df(h) + \alpha(h)\|h\|\| \leqslant C\|h\|$ при h из некоторой окрестности нуля. ∎

Замечание. Так как дифференцируемость f в точке x равносильна тому, что

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Lh\|}{\|h\|} = 0,$$

и так как сходимость по норме равносильна покоординатной сходимости, то при фиксирвоанном базисе $e' := \{e'_1, \dots, e'_m\}$ в $\mathbb{R}^m$ дифференцируемость отображения f равносильна дифференцируемости каждой координаты f_j в точке x. В этом случае $Lh = (L_1 h, \dots, L_m h)$ в базисе e', где $L_j = df_j$ — дифференциал j-ой координаты.

Лемма. Если отображение $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке x, то для каждого вектора $h \in \mathbb{R}^k$ функция $t \to f(x+th)$ дифференцируема в точке 0 и $\left.\dfrac{d}{dt} f(x+th)\right|_{t=0} = df(h)$.

Доказательство. По определению

$$f(x+th) - f(x) = t\,df(h) + t\alpha(th)\|h\|.$$

Разделив на t и перейдя к пределу при $t \to 0$, получаем требуемое соотношение. ∎

Определение. Производная $\dfrac{\partial f}{\partial h}(x) := \left.\dfrac{d}{dt} f(x+th)\right|_{t=0}$ называется производной вдоль вектора h и может существовать и в случае, когда сама функция f не дифференцируема в точке x.

Как мы уже поняли, для дифференцируемости отображения достаточно исследовать дифференцируемость его координат, то есть дифференцируемость функции $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$. Зафиксировав базис $e := \{e_1, \ldots, e_k\}$ в $\mathbb{R}^n$, условие дифференцируемости в точке $x = (x_1, \ldots, x_k)$ переписывается в виде

$$f(x_1 + h_1, \ldots, x_k + h_k) f(x_1, \ldots, x_k) + c_1 h_1 + \cdots + c_k h_k + \bar{\bar{o}}(\|h\|),$$

то есть $df(h) = c_1 h_1 + \cdots + c_k h_k$. Из уже доказанного ясно, что $\dfrac{\partial f}{\partial e_j}(x) = df(e_j) = c_j$.

Определение. Частной производной $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ функции $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ в точке $x = (x_1, \ldots, x_k)$ называется производная вдоль вектора e_j, то есть

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \frac{d}{dt} f(x_1, \ldots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \ldots, x_k)\bigg|_{t = x_j}.$$

Замечание. При фиксированно базисе $e = \{e_1, \ldots, e_k\}$ в $\mathbb{R}^k$ линейные функционалы $dx_1, \ldots, dx_k$ оказываются сопряженным базисом к e. То есть $dx_i(e_j) = \delta_{i,j}$. Таким образом, $df = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_k} dx_k$.

Замечание. В случае отображения $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ при фиксированных базисах e и e' в $\mathbb{R}^k$ и в $\mathbb{R}^m$ соответственно, компоненты матрицы дифференциала df имеют вид $a_{i,j} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$, то есть по строкам написаны градиенты $\nabla f_i(x)$.

Определение. При фиксированных базисах e в $\mathbb{R}^k$ и e' в $\mathbb{R}^m$ матрицу, соответствующую линейному отображению df, называют матрицей Якоби отображения f в точке x и обозначают $J_f(x)$.