

# Математический Анализ - 2 - Коллоквиум 1

Серёжа Рахманов | [telegram](#), [website](#)

Денис Болонин | [telegram](#)

Максим Николаев | [telegram](#)

Версия от 14.10.2020 01:12

## Содержание

<b>1 Вопросы</b>	<b>4</b>
1.1 Дайте определения: числовой ряд, частичная сумма ряда, сумма ряда, сходящийся ряд, расходящийся ряд. Рассмотрим ряд с общим членом $a_n$ . Докажите, что если ряд сходится, то $a_n \rightarrow 0$ .	4
1.2 Сформулируйте критерий Коши сходимости числовой последовательности. Сформулируйте и докажите критерий Коши сходимости числового ряда.	4
1.3 Сформулируйте и докажите признак сравнения положительных числовых рядов, основанный на неравенстве $a_n \leq b_n$ .	4
1.4 Сформулируйте и докажите признак сравнения положительных числовых рядов, основанный на неравенстве $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ .	4
1.5 Сформулируйте и докажите признак сравнения положительных числовых рядов, основанный на пределе $\lim \frac{a_n}{b_n}$ .	5
1.6 Пусть последовательности $\{a_n\}, \{A_n\}$ таковы, что $a_n - (A_n - A_{n-1}) = c_n$ и ряд $\sum c_n$ сходится. Докажите, что существует $C$ такое, что $a_1 + a_2 + \dots + a_n = A_n + C + o(1)$ .	5
1.7 Сформулируйте и докажите признак Лобачевского-Коши.	5
1.8 Сформулируйте теорему Штольца о пределе последовательности. Покажите на примере, как с помощью теоремы Штольца можно уточнить асимптотическую оценку для частичной суммы ряда. $\frac{p_n}{q_n}, p_n, q_n \rightarrow 0$ .	5
1.9 Пусть $\sum a_n, \sum a'_n$ - сходящиеся положительные ряды. Говорят, что ряд $\sum a'_n$ сходится быстрее ряда $\sum a_n$ , если $a'_n = o(a_n)$ . Докажите, что в этом случае также $r'_n = o(r_n)$ , где $r_n, r'_n$ - остатки соответствующих рядов.	5
1.10 Пусть $\sum a_n, \sum a'_n$ - расходящиеся положительные ряды. Говорят, что ряд $\sum a'_n$ расходится медленнее ряда $\sum a_n$ , если $a'_n = o(a_n)$ . Докажите, что в этом случае также $S'_n = o(S_n)$ , где $S_n, S'_n$ - частичные суммы соответствующих рядов.	6
1.11 Пусть положительный ряд $\sum a_n$ сходится и $r_n$ его частичная сумма. Докажите, что ряд $\sum (\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}})$ также сходится, причём медленнее, чем ряд $\sum a_{n+1}$ .	6
1.12 Пусть положительный ряд $\sum a_n$ расходится и $S_n$ его частичная сумма. Докажите, что ряд $\sum (\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n})$ также расходится, причём медленнее, чем ряд $\sum a_{n+1}$ .	6
1.13 Сформулируйте признак Даламбера для положительного ряда	6
1.14 Сформулируйте радикальный признак Коши для положительного ряда.	6
1.15 Докажите, что всякий раз, когда признак Даламбера даёт ответ на вопрос о сходимости ряда, то радикальный признак Коши даёт (тот же) ответ на этот вопрос.	6
1.16 -	7
1.17 -	7
1.18 Приведите пример ряда, который сходится медленнее любого ряда геометрической прогрессии, но быстрее любого обобщённого гармонического ряда (с обоснованием).	7
1.19 Сформулируйте признак Гаусса для положительного ряда. Приведите пример применения признака Гаусса.	7
1.20 -	7
1.21 -	7
1.22 Что такое улучшение сходимости положительного ряда? Покажите на примере как можно улучшить сходимость ряда.	7

1.23	Дайте определения: знакопеременный ряд, знакочередующийся ряд, абсолютно сходящийся ряд, условно сходящийся ряд, положительная часть ряда, отрицательная часть ряда. . . . .	7
1.24	Докажите, что ряд сходится абсолютно ровно в том случае, когда сходятся его положительная и отрицательная части. . . . .	8
1.25	Докажите, что если ряд сходится условно, то его положительная и отрицательная части расходятся (имеют бесконечные суммы). . . . .	8
1.26	Сформулируйте мажорантный признак Вейерштрасса. Приведите пример применения признака. . . . .	8
1.27	Что такое группировка членов ряда? Докажите, что любой ряд, полученный из сходящегося ряда группировкой его членов, сходится и имеет ту же сумму. . . . .	8
1.28	Как с помощью группировки преобразовать знакопеременный ряд в знакочередующийся? Что можно утверждать о сходимости полученного знакочередующегося ряда? . . . . .	9
1.29	Приведите пример преобразования знакопеременного (но не знакочередующегося) ряда к знакочередующемуся. . . . .	9
1.30	- . . . . .	9
1.31	Сформулируйте признак Лейбница для знакочередующегося ряда. Приведите пример применения признака Лейбница. . . . .	9
1.32	- . . . . .	9
1.33	Покажите, что для любых числовых последовательностей $\{a_n\}$ , $\{B_n\}$ справедлива формула суммирования по частям: $\sum_{n=m+1}^N a_n(B_n - B_{n-1}) = (a_N B_N - a_m B_m) - \sum_{n=m+1}^N (a_n - a_{n-1})B_{n-1}$ . . . . .	9
1.34	Сформулируйте признак Дирихле. Приведите пример его применения. . . . .	9
1.35	Сформулируйте признак Абеля. Выведите утверждение признака Абеля из признака Дирихле. . . . .	10
1.36	Что такое перестановка членов ряда? Приведите пример. . . . .	10
1.37	- . . . . .	10
1.38	Сформулируйте свойство абсолютно сходящегося ряда, связанное с перестановкой членов (теорема Римана). . . . .	10
1.39	- . . . . .	10
1.40	Как определяется произведение рядов? Что можно утверждать о произведении абсолютно сходящихся рядов? . . . . .	10
1.41	Что такое произведение рядов в форме Коши? Приведите пример вычисления такого произведения. . . . .	10
1.42	Дайте определения: бесконечное произведение, частичное произведение, сходящееся бесконечное произведение, расходящееся бесконечное произведение. . . . .	10
1.43	Сформулируйте и докажите необходимое условие сходимости бесконечного произведения. . . . .	11
1.44	- . . . . .	11
1.45	Как определяется соответствующий бесконечному произведению ряд? Сформулируйте и докажите утверждение об их взаимосвязи. . . . .	11
1.46	В каком случае бесконечное произведение называется сходящимся абсолютно? Сформулируйте и докажите критерий абсолютной сходимости бесконечного произведения. . . . .	11
1.47	Напишите произведение Валлиса и его значение. Вычисление каких интегралов приводит к этой формуле? . . . . .	11
1.48	Дайте определение дзета-функции ( $\zeta$ -функция) Римана. Сформулируйте тождество Эйлера для $\zeta$ -функции. . . . .	11
1.49	Дайте определения: функциональная последовательность, точка сходимости функциональной последовательности, область (множество) сходимости функциональной последовательности, поточечная сходимость функциональной последовательности на данном множестве. . . . .	11
1.50	Что такое равномерная норма? Покажите (исходя из определения нормы), что равномерная норма является нормой в соответствующем линейном пространстве (всех числовых функций, определённых на заданном множестве). . . . .	11
1.51	Сформулируйте определения равномерной сходимости функциональной последовательности: в терминах нормы и на языке $\varepsilon - \delta$ . . . . .	12
1.52	Докажите, что из равномерной сходимости следует поточечная сходимость на данном множестве. . . . .	12
1.53	Приведите пример функциональной последовательности, сходящейся поточечно, но не сходящейся равномерно (с обоснованием). . . . .	12
1.54	- . . . . .	12
1.55	- . . . . .	12
1.56	- . . . . .	12
1.57	- . . . . .	12
1.58	- . . . . .	12
1.59	- . . . . .	12
1.60	- . . . . .	12
1.61	- . . . . .	12
1.62	Сформулируйте теорему Дини о монотонной сходимости. Приведите пример её применения для доказательства равномерной сходимости функциональной последовательности (с обоснованием). . . . .	12

1.63	Сформулируйте и докажите теорему о почленном переходе к пределу в функциональной последовательности.	12
1.64	Покажите на примере как доказать неравномерность сходимости функциональной последовательности с помощью локализации особенности (с обоснованием).	12
1.65	-	12
1.66	-	12
1.67	-	13
1.68	Как определяются множества абсолютной и условной сходимости функционального ряда? Как они связаны с множеством сходимости?	13
1.69	-	13
1.70	Сформулируйте и докажите необходимое условие равномерной сходимости функционального ряда.	13
1.71	Сформулируйте критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда.	13
1.72	Сформулируйте следствие критерия Коши – достаточное условие того, что функциональный ряд не является сходящимся равномерно.	13
1.73	-	13
1.74	Сформулируйте мажорантный признак Вейерштрасса абсолютной и равномерной сходимости функционального ряда.	13
1.75	Как применяются признаки Даламбера и Коши (радикальный) для исследования сходимости функционального ряда?	13
1.76	-	13
1.77	Сформулируйте признак Лейбница равномерной сходимости знакочередующегося функционального ряда.	13
1.78	Сформулируйте признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда.	14
1.79	Сформулируйте признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда.	14
1.80	Сформулируйте теорему о почленном переходе к пределу в функциональном ряде.	14
1.81	Сформулируйте теорему о почленном дифференцировании функционального ряда.	14
1.82	Сформулируйте теорему о почленном интегрировании функционального ряда.	14
1.83	Что такое степенной ряд? Как определяются радиус и интервал сходимости степенного ряда? Что можно утверждать о характере сходимости ряда на интервале сходимости?	14
1.84	Что можно утверждать про равномерную сходимост степенного ряда?	14
1.85	Сформулируйте и докажите теорему Абеля о сходимости степенного ряда.	14
1.86	-	15
1.87	Выведите формулу Коши-Адамара для радиуса сходимости степенного ряда.	15
1.88	-	15
1.89	-	15
1.90	-	15
1.91	-	15
1.92	Что можно утверждать о радиусе сходимости степенного ряда, полученного почленным дифференцированием исходного ряда?	15
1.93	Что можно утверждать о радиусе сходимости степенного ряда, полученного почленным интегрированием исходного ряда?	15
1.94	Сформулируйте и докажите теорему о почленном дифференцировании степенного ряда.	15
1.95	Сформулируйте и докажите теорему о почленном интегрировании степенного ряда.	15
1.96	Запишите формулу Тейлора для бесконечно дифференцируемой функции с остаточным членом в формах Лагранжа и Коши.	15
1.97	-	15
1.98	Что такое функция, аналитическая в данной точке? Каково соотношение между понятиями бесконечно дифференцируемости и аналитичности?	15
1.99	Приведите пример бесконечно дифференцируемой функции, не являющейся аналитической.	15
1.100	Запишите разложения в степенной ряд с центром в нуле для функций $e^x$ , $\sin x$ , $\cos x$ . Каково множество сходимости ряда? На каком множестве сумма ряда представляет собой исходную функцию?	16
1.101	Запишите разложение в степенной ряд с центром в нуле для функции $(1+x)^p$ . Каково множество сходимости ряда? На каком множестве сумма ряда представляет собой исходную функцию?	16
1.102	-	16

# 1 Вопросы

1. Дайте определения: числовой ряд, частичная сумма ряда, сумма ряда, сходящийся ряд, расходящийся ряд. Рассмотрим ряд с общим членом  $a_n$ . Докажите, что если ряд сходится, то  $a_n \rightarrow 0$ .

**Определение.** Пусть  $a_n$  – последовательность, т.е.  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . Формальная бесконечная сумма:  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  называется рядом.  $S_N = \sum_{n=1}^N a_n$  – частичная сумма, сумма ряда:  $S = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N$

Возможны 3 случая:

1.  $\exists S \in \mathbb{R}$
2.  $\exists S = \infty$
3.  $\nexists S$

В первом случае говорят, что ряд сходится, иначе – что ряд расходится.

**Замечание.** Если ряд сходится, то  $a_n \rightarrow 0$

*Доказательство.*  $a_n = S_n - S_{n-1} \rightarrow 0$ , т.к.  $S_n \rightarrow S$  и  $S_{n-1} \rightarrow S$  ■

2. Сформулируйте критерий Коши сходимости числовой последовательности. Сформулируйте и докажите критерий Коши сходимости числового ряда.

**Определение.**  $S_n$  называется фундаментальной, если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > m > N, |S_n - S_m| < \varepsilon$

**Теорема.**  $S_n$  – сходится  $\iff S_n$  – фундаментальная

*Доказательство.* Сходимость числового ряда – это сходимость последовательности  $\{S_n\}$ , его частичных сумм, а для сходимости последовательности  $\{S_n\}$  необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной. ■

3. Сформулируйте и докажите признак сравнения положительных числовых рядов, основанный на неравенстве  $a_n \leq b_n$ .

$0 \leq a_n \leq b_n$  при всех  $n \geq n_0$

Ряд  $\sum b_n$  сходится  $\implies$  ряд  $\sum a_n$  сходится

Ряд  $\sum a_n$  расходится  $\implies$  ряд  $\sum b_n$  расходится

*Доказательство.* На основании того, что отбрасывание конечного числа элементов ряда не отражается на его поведении, мы можем считать, что  $0 \leq a_n \leq b_n$  при всех  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Обозначив частные суммы через  $A$  и  $B$  соответственно, имеем  $A_n \leq B_n$ . Пусть ряд  $\sum b_n$  сходится, тогда  $B_n$  ограничена,  $B_n \leq S, S = \text{const}, \forall n$ . В таком случае  $A_n$  также меньше либо равна некоторому  $S$ , что даёт нам ограниченность  $\sum a_n$ . ■

4. Сформулируйте и докажите признак сравнения положительных числовых рядов, основанный на неравенстве  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ .

Ряд  $\sum b_n$  сходится  $\implies$  ряд  $\sum a_n$  сходится

Ряд  $\sum a_n$  расходится  $\implies$  ряд  $\sum b_n$  расходится

*Доказательство.*

$$a_{n_0+1} \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+1}$$

$$a_{n_0+2} \leq \frac{a_{n_0+1}}{b_{n_0+1}} \cdot b_{n_0+2} \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+2}$$

$\vdots$

$$a_{n_0+k} \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+k} \implies \sum_{n=n_0}^N a_n \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot \sum_{n=n_0}^N b_n$$
 ■

5. Сформулируйте и докажите признак сравнения положительных числовых рядов, основанный на пределе  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0; +\infty) \implies \text{сходимость } \sum a_n \iff \text{сходимость } \sum b_n$$

*Доказательство.*

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$$

$$\forall \varepsilon \exists n_0 : c - \varepsilon \leq \frac{a_n}{b_n} \leq c + \varepsilon, \text{ при } n \geq n_0$$

$$\text{Возьмём } c - \varepsilon > 0 \implies (c - \varepsilon) \cdot b_n \leq a_n \leq (c + \varepsilon) \cdot b_n$$

Сходимость следует из правой части неравенства, а расходимость из левой. ■

6. Пусть последовательности  $\{a_n\}$ ,  $\{A_n\}$  таковы, что  $a_n - (A_n - A_{n-1}) = c_n$  и ряд  $\sum c_n$  сходится. Докажите, что существует  $C$  такое, что  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = A_n + C + o(1)$ .

*Доказательство.*

$$\sum_{n=1}^N c_n = \sum_{n=1}^N a_n - \sum_{n=1}^N (A_n - A_{n-1}) = \sum_{n=1}^N a_n - A_N + A_0 \implies a_1 + a_2 + \dots + a_n = A_n + \left(-A_0 + \sum_{n=1}^N c_n\right).$$

$$\text{Получим требуемое, если возьмём } C = \lim_{N \rightarrow \infty} -A_0 + \sum_{n=1}^N c_n. \quad \blacksquare$$

7. Сформулируйте и докажите признак Лобачевского-Коши.

**Предложение.** Пусть  $a_n > 0$  и  $a_n \downarrow$

Тогда ряды  $\sum a_n$  и  $\sum 2^n \cdot a_{2^n}$  ведут себя одинаково

*Доказательство.*  $a_1 + (a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + \dots + a_8) + \dots$

$$a_2 \leq a_1$$

$$a_2 \geq a_2$$

$$a_3 + a_4 \leq 2a_2$$

$$a_3 + a_4 \geq 2a_4$$

$$a_5 + \dots + a_8 \leq 4a_4$$

$$a_5 + \dots + a_8 \geq 4a_8$$

...

$$a_1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^m 2^n a_{2^n} \leq \sum_{n=1}^{2^m} a_n \leq a_1 + \sum_{n=0}^{m-1} 2^n a_{2^n}$$

8. Сформулируйте теорему Штольца о пределе последовательности. Покажите на примере, как с помощью теоремы Штольца можно уточнить асимптотическую оценку для частичной суммы ряда.  $\frac{p_n}{q_n}$ ,  $p_n, q_n \rightarrow 0$ .

**Теорема.** (Штольца.) Если  $p_n, q_n \rightarrow 0$ ,  $q_n \downarrow$  и  $\exists \lim \frac{p_{n+1} - p_n}{q_{n+1} - q_n}$ , то  $\lim \frac{p_n}{q_n} = \lim \frac{p_{n+1} - p_n}{q_{n+1} - q_n}$

9. Пусть  $\sum a_n$ ,  $\sum a'_n$  - сходящиеся положительные ряды. Говорят, что ряд  $\sum a'_n$  сходится быстрее ряда  $\sum a_n$ , если  $a'_n = o(a_n)$ . Докажите, что в этом случае также  $r'_n = o(r_n)$ , где  $r_n, r'_n$  - остатки соответствующих рядов.

Рассмотрим остатки каждого из рядов.  $r_n = S - S_N$ , где  $S_N$  - частичная сумма ряда  $\sum a_n$  и  $S_N \rightarrow S$  при  $N \rightarrow \infty$ . Для  $\sum a'_n$  аналогично  $r'_n = S' - S'_N$ , где  $S'_N$  - частичная сумма ряда  $\sum a'_n$  и  $S'_N \rightarrow S'$  при  $N \rightarrow \infty$ . Идёт речь о том, что ряд  $a'_n$  сходится быстрее ряда  $a_n$ , т.е. оба ряда сходятся к  $S = S'$ . Но, поскольку члены рядов находятся в отношении  $a'_n = o(a_n)$ , то мы можем сделать выводы о частичных суммах  $S_N$  и  $S'_N$ .  $\forall N, S'_N = o(S_N)$ , что указывает нам в результате на отношение между остатками  $r'_n = o(r_n)$ .

10. Пусть  $\sum a_n, \sum a'_n$  - расходящиеся положительные ряды. Говорят, что ряд  $\sum a'_n$  расходится медленнее ряда  $\sum a_n$ , если  $a'_n = o(a_n)$ . Докажите, что в этом случае также  $S'_n = o(S_n)$ , где  $S_n, S'_n$  - частичные суммы соответствующих рядов.

Оба ряда расходятся, тогда  $S_n \rightarrow \infty$  и  $S'_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . Мы понимаем, что  $S_n = \sum_{n=1}^N a_n, S'_n = \sum_{n=1}^N a'_n$ . Это

значит, что для некоторого  $n_1$  мы имеем следующее:  $S_{n_1} = \sum_{n=1}^{n_1} a_n, S'_{n_1} = \sum_{n=1}^{n_1} a'_n$ , где для любого  $n = 1, 2, 3, \dots, n_1$

выполняется отношение  $a'_n = o(a_n)$ . В таком случае для частичных сумм справедливо отношение  $S'_{n_1} = o(S_{n_1})$ . А так как и для всех последующих  $a_n$  и  $a'_n$  также справедливо отношение  $a'_n = o(a_n)$ , то мы можем сказать, что  $S'_n = o(S_n)$ .

11. Пусть положительный ряд  $\sum a_n$  сходится и  $r_n$  его частичная сумма. Докажите, что ряд  $\sum(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}})$  также сходится, причём медленнее, чем ряд  $\sum a_{n+1}$ .

$r_n = S - S_n$ .

1. Сходимость

$$\sum_{n=0}^N (\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}}) = \sqrt{r_0} - \sqrt{r_1} + \sqrt{r_1} - \sqrt{r_2} + \dots + \sqrt{r_N} - \sqrt{r_{N+1}} = \sqrt{r_0} - \sqrt{r_{N+1}} = \sqrt{S} - \sqrt{r_{N+1}} \rightarrow \sqrt{S}, \text{ т.к. } r_{N+1} \rightarrow 0$$

2. Сходится медленнее

$$\frac{\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}}}{a_{n+1}} = \frac{\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}}}{r_n - r_{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{r_n} + \sqrt{r_{n+1}}} \rightarrow \infty, \text{ т.к. } \sqrt{r_n} \rightarrow 0 \text{ и } \sqrt{r_{n+1}} \rightarrow 0$$

12. Пусть положительный ряд  $\sum a_n$  расходится и  $S_n$  его частичная сумма. Докажите, что ряд  $\sum(\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n})$  также расходится, причём медленнее, чем ряд  $\sum a_{n+1}$ .

$$\sum_{n=0}^N (\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n}) = \sqrt{S_1} - \sqrt{S_0} + \sqrt{S_2} - \sqrt{S_1} + \dots + \sqrt{S_{N+1}} - \sqrt{S_N} = \sqrt{S_{N+1}} - \sqrt{S_0} = \sqrt{S_{N+1}} \rightarrow \sqrt{S} - \text{расходится.}$$

$$\frac{\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n}}{a_{n+1}} = \frac{\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n}}{S_{n+1} - S_n} = \frac{1}{\sqrt{S_{n+1}} + \sqrt{S_n}}, \text{ где } \sqrt{S_{n+1}} + \sqrt{S_n} \rightarrow \infty, \text{ а значит } \frac{1}{\sqrt{S_{n+1}} + \sqrt{S_n}} \rightarrow 0. \text{ Тогда ряд } \sum(\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n}) \text{ расходится, причём медленнее, чем ряд } \sum a_{n+1}.$$

13. Сформулируйте признак Даламбера для положительного ряда

**Теорема.** Признак Даламбера. Пусть  $a_n > 0$ .

$$\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \text{ряд } \sum a_n \text{ сходится.}$$

$$\underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies \text{ряд } \sum a_n \text{ расходится.}$$

14. Сформулируйте радикальный признак Коши для положительного ряда.

**Теорема.** Радикальный признак Коши. Пусть  $a_n \geq 0$ .

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} < 1 \implies \text{ряд } \sum a_n \text{ сходится.}$$

$$\underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} > 1 \implies \text{ряд } \sum a_n \text{ расходится.}$$

15. Докажите, что всякий раз, когда признак Даламбера даёт ответ на вопрос о сходимости ряда, то радикальный признак Коши даёт (тот же) ответ на этот вопрос.

Пусть  $a_n > 0$ . Тогда:

$$\underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$\text{Если } \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} < 1$$

$$\text{Если } \underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies \underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} > 1$$

$$\text{Если } \exists \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}, \text{ то } \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} \implies \exists \lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

16. -

17. -

18. Приведите пример ряда, который сходится медленнее любого ряда геометрической прогрессии, но быстрее любого обобщённого гармонического ряда (с обоснованием).

Рассмотрим  $e^{-\sqrt{n}}$

$\sum q^n$  - ряд геометрической прогрессии,  $0 < q < 1$ ;  $q^n = e^{n \ln q}$ , где  $\ln q < 0$

$\sum \frac{1}{n^p}$  - обобщённый гармонический ряд.  $\frac{1}{n^p} = e^{-p \ln n}$ ,  $p > 1$ .

$p \ln n < \sqrt{n} < n \ln \frac{1}{q}$ ,  $\forall p, q$  при  $n \geq n_0$ .

$\frac{e^{-\sqrt{n}}}{q^n} = e^{-\sqrt{n} + n \ln \frac{1}{q}} \rightarrow +\infty$ , где  $-\sqrt{n} + n \ln \frac{1}{q} \rightarrow +\infty \Rightarrow \sum e^{-\sqrt{n}}$  сходится медленнее ряда геометрической прогрессии.

$\frac{e^{-\sqrt{n}}}{1/n^p} = e^{-\sqrt{n} + p \ln n} \rightarrow 0$ , где  $-\sqrt{n} + p \ln n \rightarrow -\infty \Rightarrow \sum e^{-\sqrt{n}}$  сходится быстрее гармонического ряда.

19. Сформулируйте признак Гаусса для положительного ряда. Приведите пример применения признака Гаусса.

Если  $\exists \delta > 0$ ,  $p: \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right)$  то:

$p > 1 \Rightarrow$  ряд  $\sum a_n$  сходится.

$p \leq 1 \Rightarrow$  ряд  $\sum a_n$  расходится.

20. -

21. -

22. Что такое улучшение сходимости положительного ряда? Покажите на примере как можно улучшить сходимость ряда.

Пусть у нас есть некоторый ряд  $\sum a_n$  и он сходится медленно. В таких случаях для расчёта суммы ряда с необходимой точностью потребуется взять больше членов, что неудобно. Мы можем преобразовать наш ряд для улучшения сходимости, т.е. получить некоторый ряд  $\sum a'_n$ , который будет сходиться быстрее, чем исходный  $\sum a_n$ .

Пример. Пусть у нас есть ряд  $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ . Воспользуемся методом Куммера. Для улучшения сходимости будем брать ряды вида  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}, \dots$

В данном случае нам подойдёт первый ряд в этом списке, поскольку  $\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n(n+1)}$ .

$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2 + 2} - \frac{1}{n(n+1)} \right) = S - 1 \Rightarrow S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2 + 2} - \frac{1}{n(n+1)} \right)$   
 $\frac{1}{n^2 + 2} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2} \cdot \left( \frac{1}{1 + \frac{2}{n^2}} - \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right) = \frac{1}{n^2} \cdot \left( 1 - \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left( 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \right) = \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$

Получили ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ , который сходится быстрее,  $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2}$ .

23. Дайте определения: знакопеременный ряд, знакопеременный ряд, абсолютно сходящийся ряд, условно сходящийся ряд, положительная часть ряда, отрицательная часть ряда.

**Определение.** Пусть существует ряд  $\sum a_n$ . такой, что  $\forall i, a_i$  может быть, как больше 0, так и меньше 0. В таком случае ряд  $\sum a_n$  называется знакопеременным.

**Определение.** Пусть существует ряд  $\sum a_n$ . такой, что  $\forall i, a_i \cdot a_{i+1} < 0$ . В таком случае ряд  $\sum a_n$  называется знакопеременным.

**Определение.** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  называется абсолютно сходящимся, если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  также сходится.

Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится абсолютно, то он является сходящимся (в обычном смысле). Обратное утверждение неверно.

**Определение.** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  называется условно сходящимся, если сам он сходится, а ряд, составленный из модулей его членов, расходится.

**Определение.** Введем два ряда:  $a_n^+ = \begin{cases} a_n, & a_n > 0 \\ 0 & a_n \leq 0 \end{cases}$  и  $a_n^- = \begin{cases} |a_n|, & a_n < 0 \\ 0 & a_n \geq 0 \end{cases}$ . Тогда ряды  $\sum a_n^+$  и  $\sum a_n^-$  соответственно называются положительной и отрицательной частью ряда  $\sum a_n$ .

**24. Докажите, что ряд сходится абсолютно ровно в том случае, когда сходятся его положительная и отрицательная части.**

*Доказательство.* Рассмотрим ряд  $\sum a_n$ , дополнительный ряд  $\sum |a_n|$ , а также положительную и отрицательную части  $\sum a_n^+$  и  $\sum a_n^-$ .

1) Пусть ряд  $\sum a_n$  сходится абсолютно. В таком случае ряд  $\sum |a_n|$  сходится, а так как члены рядов  $\sum a_n^+$  и  $\sum a_n^-$  все содержатся в ряде  $\sum |a_n|$ , то для всех их частичных сумм справедливо следующее:  $0 \leq P_k \leq A'_n$  и  $0 \leq Q_m \leq A'_n$ , где  $P_k$  и  $Q_m$  - частичные суммы положительной и отрицательной части соответственно, а  $A'_n$  - частичная сумма дополнительного ряда и  $A'_n = P_k + Q_m, n = m + k$ . Это значит, что оба ряда  $\sum a_n^+$  и  $\sum a_n^-$  сходятся.

2) Исходя из того, что  $S_n = P_k - Q_m, n = m + k$  и положительных и отрицательных элементов в  $\sum a_n$  бесконечное множество, мы получаем, что при  $n \rightarrow \infty$  одновременно  $m \rightarrow \infty$  и  $k \rightarrow \infty$ . Переходя к пределу получаем, что исходный ряд сходится абсолютно и его сумма будет равна  $P - Q$ . ■

**25. Докажите, что если ряд сходится условно, то его положительная и отрицательная части расходятся (имеют бесконечные суммы).**

*Доказательство.* Рассмотрим ряд  $\sum a_n$ , дополнительный ряд  $\sum |a_n|$ , а также положительную и отрицательную части  $\sum a_n^+$  и  $\sum a_n^-$ . Поскольку ряд  $\sum a_n$  сходится условно, то  $\sum |a_n|$  расходится. Рассмотрим частичные суммы  $\sum |a_n|$ ,  $\sum a_n^+$  и  $\sum a_n^-$  -  $A'_n, P_k, Q_m$  соответственно. Для любого  $n = m + k$ ,  $A'_n = P_k + Q_m$ . При  $n \rightarrow \infty$ ,  $m \rightarrow \infty$  и  $k \rightarrow \infty$ . Так как ряд  $\sum |a_n|$  расходится, то сумма  $A'_n \rightarrow \infty$ . Поскольку число положительных и отрицательных элементов бесконечно, то получаем  $P_k \rightarrow \infty$  и  $Q_m \rightarrow \infty$ , а значит ряды  $\sum a_n^+$  и  $\sum a_n^-$  расходятся. ■

**26. Сформулируйте мажорантный признак Вейерштрасса. Приведите пример применения признака.**

**Теорема.** Если  $|a_n| \leq b_n$  при  $n > n_0$  и положительный ряд  $\sum b_n$  сходится, то  $\sum a_n$  сходится, причём абсолютно.

*Пример.*  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^p}, p > 0$

$$|\sin(nx)| \leq 1 \implies \left| \frac{\sin(nx)}{n^p} \right| \leq \frac{1}{n^p}$$

$\sum \frac{1}{n^p}$  сходится ( $p > 1$ )  $\implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^p}$  сходится абсолютно.

**27. Что такое группировка членов ряда? Докажите, что любой ряд, полученный из сходящегося ряда группировкой его членов, сходится и имеет ту же сумму.**

Говорят, что ряд  $\sum b_k$  получен из  $\sum a_n$  группировкой членов, если  $\exists n_1 < n_2 < \dots$ :

$$b_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1}$$

$$b_2 = a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \dots + a_{n_2}$$

...



**Замечание.** Если  $\sum a_n$  сходится, то ряд  $\sum b_k$  сходится к той же сумме.

*Доказательство.*  $\sum_{k=1}^m b_k = \sum_{n=1}^{n_m} a_n$  ■

Обратное утверждение неверно:  $(1-1) + (1-1) + \dots$

- 28. Как с помощью группировки преобразовать знакопеременный ряд в знакочередующийся? Что можно утверждать о сходимости полученного знакочередующегося ряда?**

Знакопеременный ряд при помощи группировки сводится к знакочередующемуся:

$$a_1 \leq 0, \dots, a_{n_1} \leq 0; b_1 = \sum_{i=1}^{n_1} a_i \leq 0$$

$$a_{n_1+1} \geq 0, \dots, a_{n_2} \geq 0; b_2 = \sum_{i=n_1+1}^{n_2} a_i \geq 0$$

При такой группировке сходимость исходного ряда  $\iff$  сходимость  $\sum b_n$

- 29. Приведите пример преобразования знакопеременного (но не знакочередующегося) ряда к знакочередующемуся.**

*Пример.*  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k, \text{ где } b_k = (-1)^k \cdot \sum_{e^k \leq n < e^{k+1}} \frac{1}{n}$$

$$|b_k| = \sum_{n=[e^k]+1}^{[e^{k+1}]} \frac{1}{n} \leq \frac{1}{[e^k]+1} \cdot ([e^{k+1}] - [e^k]) \approx \frac{e^{k+1} - e^k}{e^k} \rightarrow e - 1 > 0$$

**30. -**

- 31. Сформулируйте признак Лейбница для знакочередующегося ряда. Приведите пример применения признака Лейбница.**

**Теорема.** Признак Лейбница. Если  $u_n \downarrow 0$ , то ряд сходится, причём  $|r_n| \leq u_{n+1}$

*Пример.*  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}, p > 0$

$$\frac{1}{n^p} \downarrow 0 \implies \text{ряд сходится (при } \forall p > 0)$$

**32. -**

- 33. Покажите, что для любых числовых последовательностей  $\{a_n\}, \{B_n\}$  справедлива формула суммирования по частям:**

$$\sum_{n=m+1}^N a_n(B_n - B_{n-1}) = (a_N B_N - a_m B_m) - \sum_{n=m+1}^N (a_n - a_{n-1}) B_{n-1}.$$

Суммируем равенство по индексу  $n$ :  $\sum_{n=m+1}^N \cdot \sum_{n=m+1}^N a_n(B_n - B_{n-1}) = \sum_{n=m+1}^N (a_n B_n - a_{n-1} B_{n-1}) - \sum_{n=m+1}^N (a_n -$

$a_{n-1}) B_{n-1}$ . Получаем из первой скобки путём сокращения элементов  $a_N B_N - a_m B_m$ . В итоге получаем  $\sum_{n=m+1}^N a_n(B_n -$

$B_{n-1}) = (a_N B_N - a_m B_m) - \sum_{n=m+1}^N (a_n - a_{n-1}) B_{n-1}.$

- 34. Сформулируйте признак Дирихле. Приведите пример его применения.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$$

**Теорема.** Признак Дирихле. Если  $a_n \downarrow 0$ , а частичные суммы  $\left| \sum_{n=1}^N b_n \right| \leq C$  ограничены, то  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$  сходится.

Пример.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^p}, p > 0$

$a_n = \frac{1}{n^p} \downarrow 0, b_n = \sin nx$

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_N = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin Nx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos((N+1/2)x)}{2 \sin \frac{x}{2}}; \left| \sum_{n=1}^N b_n \right| \leq \frac{2}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin \frac{x}{2}}$$

Ряд сходится по признаку Дирихле

**35. Сформулируйте признак Абеля. Выведите утверждение признака Абеля из признака Дирихле.**

**Теорема.** Признак Абеля. Если  $a_n$  монотонна и ограничена, а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  сходится, то  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$  сходится.

**36. Что такое перестановка членов ряда? Приведите пример.**

Пусть  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  – биекция

Говорят, что ряд  $\sum b_n$  получен из  $\sum a_n$  перестановкой членов, если  $b_n = a_{f(n)}$

**37. -**

**38. Сформулируйте свойство абсолютно сходящегося ряда, связанное с перестановкой членов (теорема Римана).**

**Теорема.** (Римана) Если ряд  $\sum a_n$  сходится условно, то для  $\forall S \in [-\infty; +\infty]$  то  $\exists$  перестановка  $f$  такая, что  $\sum a_{f(n)} = S$

**39. -**

**40. Как определяется произведение рядов? Что можно утверждать о произведении абсолютно сходящихся рядов?**

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{m=1}^{\infty} b_m$$

$$\left( \sum_{k=1}^K a_k \right) \cdot \left( \sum_{m=1}^M b_m \right) = \sum_{1 \leq k \leq K, 1 \leq m \leq M} a_k \cdot b_m$$

Если эта сумма имеет предел при  $K, M \rightarrow \infty$ , не зависящий от порядка суммирования, то говорят, что определено произведение рядов.

**Теорема.** (Коши) Если  $\sum a_k, \sum b_m$  сходятся абсолютно, то определено их произведение.

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right) \cdot \left( \sum_{m=1}^{\infty} b_m \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} \cdot b_{m_n}$$

**41. Что такое произведение рядов в форме Коши? Приведите пример вычисления такого произведения.**

Произведение рядов по Коши:

$$c_2 = a_1 \cdot b_1$$

$$c_3 = a_2 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_2$$

$$c_4 = a_3 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_3$$

...

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right) \cdot \left( \sum_{m=1}^{\infty} b_m \right) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n$$

**42. Дайте определения: бесконечное произведение, частичное произведение, сходящееся бесконечное произведение, расходящееся бесконечное произведение.**

$$\prod_{n=1}^N a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_N - \text{частичное произведение.}$$

Бесконечным произведением называют формальную запись  $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$

Значением бесконечного произведения является предел частичного произведения:

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N a_n$$

Если предел существует и он конечен – то бесконечное произведение сходится, иначе расходится.

**43. Сформулируйте и докажите необходимое условие сходимости бесконечного произведения.**

Если  $P_N = \prod_{n=1}^N a_n$  сходится, то  $a_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} \rightarrow 1$

**44. -**

**45. Как определяется соответствующий бесконечному произведению ряд? Сформулируйте и докажите утверждение об их взаимосвязи.**

$$\prod_{n=1}^N a_n = e^{\ln \prod_{n=1}^N a_n} = e^{\sum_{n=1}^N \ln a_n}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = P \iff \sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n = \ln P \quad (P \neq 0, a_n \rightarrow 1)$$

**46. В каком случае бесконечное произведение называется сходящимся абсолютно? Сформулируйте и докажите критерий абсолютной сходимости бесконечного произведения.**

$\prod_{n=1}^{\infty} a_n$  называется абсолютно сходящимся, если абсолютно сходится соответствующий ему ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n$

**Замечание.**  $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится абсолютно  $\iff \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 1)$  сходится абсолютно.

**47. Напишите произведение Валлиса и его значение. Вычисление каких интегралов приводит к этой формуле?**

*Пример.* (Произведение Валлиса)  $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1} = \frac{\pi}{2}$  – получается из анализа интегралов  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$

Прим. ред.: есть отличное [видео](#) с интуитивно понятным доказательством.

**48. Дайте определение дзета-функции ( $\zeta$ -функция) Римана. Сформулируйте тождество Эйлера для  $\zeta$ -функции.**

*Пример.* (Дзета-функция Римана)  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, s > 1$

Тождество Эйлера:

$$\zeta(s) = \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{p_n^s})}, \text{ где } p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots$$

**49. Дайте определения: функциональная последовательность, точка сходимости функциональной последовательности, область (множество) сходимости функциональной последовательности, поточечная сходимость функциональной последовательности на данном множестве.**

**Определение.** Функциональным рядом (последовательностью) называется такой ряд (последовательность), что его элементами являются не числа, а функции  $f_n(x)$ .

**Определение.** Пусть  $\forall n, n \in \mathbb{N}, f_n : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$

Говорят, что  $a \in D$  - точка сходимости  $\{f_n(x)\}$ , если последовательность  $\{f_n(a)\}$  сходится.

**Определение.** Множество всех точек сходимости называется множеством сходимости.

**Определение.** Говорят, что последовательность сходится на  $D$  поточечно, если  $D$  – множество сходимости.

**50. Что такое равномерная норма? Покажите (исходя из определения нормы), что равномерная норма является нормой в соответствующем линейном пространстве (всех числовых функций, определённых на заданном множестве).**

**Определение.** Рассмотрим множество всех функций  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ .  $\|f\| = \sup_{x \in D} |f(x)|$  - равномерная норма в пространстве  $D$ .

51. Сформулируйте определения равномерной сходимости функциональной последовательности: в терминах нормы и на языке  $\varepsilon - \delta$ .

**Определение.** 1)  $f_n \xrightarrow{D} f \iff \|f_n - f\| \rightarrow 0$ .

2)  $\sum f_n(x) \Rightarrow S(x) \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) : \forall n \geq N(\varepsilon), |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$ .

52. Докажите, что из равномерной сходимости следует поточечная сходимость на данном множестве.

*Доказательство.* Рассмотрим определения поточечной сходимости и равномерной сходимости:

$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon, x) : \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$  - поточечная сходимость.

$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon, x) : \forall n \geq N, \forall x \in E, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$  - равномерная сходимость.

Заметим, что свойство равномерной сходимости не слабее, чем поточечной, а значит, из равномерной сходимости следует поточечная. ■

53. Приведите пример функциональной последовательности, сходящейся поточечно, но не сходящейся равномерно (с обоснованием).

Рассмотрим последовательность функций вида  $f_n(x) = \arctg(nx)$ . Поточечная сходимость в данном случае обусловлена тем, что при  $n \rightarrow \infty \arctg(nx) \rightarrow 0$ , если  $x = 0$  и  $|\arctg(nx)| \rightarrow \frac{\pi}{2}$ , если  $|x| > 0$ . Но при этом, так как при  $n \rightarrow \infty$  на точке  $x_0 = 0$  происходит разрыв, то функциональная последовательность  $f_n(x) = \arctg(nx)$  не сходится равномерно.

54. -  
55. -  
56. -  
57. -  
58. -  
59. -  
60. -  
61. -  
62. Сформулируйте теорему Дини о монотонной сходимости. Приведите пример её применения для доказательства равномерной сходимости функциональной последовательности (с обоснованием).

**Теорема.** Пусть  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x)$  монотонна по  $n$  при каждом  $x \in [a, b]$ ,  $f_n \rightarrow f$  на  $[a, b]$

Тогда  $f_n \xrightarrow{D} f$

*Пример.* См. №16-19 листка №4

63. Сформулируйте и докажите теорему о почленном переходе к пределу в функциональной последовательности.

**Теорема.** Если функциональная последовательность  $f_n(x)$  сходится равномерно на множестве  $x$  к предельной функции  $f(x)$  и все элементы этой последовательности имеют предел в точке  $x_0$ , то и предельная функция имеет предел в точке  $x_0$ , причём  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x))$ , т.е. символ  $\lim_{n \rightarrow \infty}$  предела последовательности и символ  $\lim_{x \rightarrow x_0}$  предела функции можно переставлять местами (или, как говорят, к пределу при  $x \rightarrow x_0$  можно переходить почленно).

64. Покажите на примере как доказать неравномерность сходимости функциональной последовательности с помощью локализации особенности (с обоснованием).

См. №20-25 листка №4

65. -  
66. -

67. -

68. Как определяются множества абсолютной и условной сходимости функционального ряда? Как они связаны с множеством сходимости?

**Определение.** Множество абсолютной сходимости – множество всех тех значений  $x$ , при которых ряд сходится абсолютно.

**Определение.** Множество условной сходимости – множество всех тех значений  $x$ , при которых ряд сходится условно.

Объединение множеств абсолютной сходимости и условной сходимости образует множество сходимости.

69. -

70. Сформулируйте и докажите необходимое условие равномерной сходимости функционального ряда.

**Теорема.** Если  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$  равномерно сходится к сумме  $S(x)$ , то  $a_n \xrightarrow{D} 0$

*Доказательство.*  $S_n(x) = a_1(x) + \dots + a_n(x)$ ,  $a_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x)$

$$S_n \xrightarrow{D} S \implies a_n \xrightarrow{D} (S - S) = 0$$

■

71. Сформулируйте критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда.

**Теорема.** Функциональный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$  сходится равномерно на  $D \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon), \forall n \geq N, \forall m:$

$$||a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+m}|| < \varepsilon$$

Т.е.  $|a_n(x) + a_{n+1}(x) + \dots + a_{n+m}(x)| < \varepsilon \forall x \in D$ .

72. Сформулируйте следствие критерия Коши – достаточное условие того, что функциональный ряд не является сходящимся равномерно.

**Следствие.** (Отрицание критерия Коши) Если  $\exists \{x_n\} \subset D, \exists \{m_n\} \in \mathbb{N}, \exists \varepsilon_0:$

$$|a_n(x_n) + a_{n+1}(x_n) + \dots + a_{m_n}(x_n)| > \varepsilon_0$$

73. -

74. Сформулируйте мажорантный признак Вейерштрасса абсолютной и равномерной сходимости функционального ряда.

**Теорема.** (Признак Вейерштрасса) Если  $|a_n(x)| \leq b_n$  при  $\forall n \geq n_0, \forall x \in D$ , а ряд  $\sum b_n$  сходится, то  $\sum a_n(x)$  сходится на  $D$  абсолютно и равномерно.

75. Как применяются признаки Даламбера и Коши (радикальный) для исследования сходимости функционального ряда?

**Теорема.** (Признак Даламбера) Если  $\exists q < 1: |a_{n+1}(x)| \leq q \cdot |a_n(x)|$  при  $\forall n \geq n_0, \forall x \in D$ , причём  $a_{n_0}(x)$  – ограничена на  $D$ , то  $\sum a_n(x)$  сходится на  $D$  абсолютно и равномерно.

*Пример.*  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, D = [-r; r], r > 0$

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq q \cdot \left| \frac{x^n}{n!} \right|$$

$$\left| \frac{x}{n+1} \right| \leq q. \text{ Пусть } n_0: \frac{r}{n_0+1} < 1, \text{ берём } q = \frac{r}{n_0+1}. \text{ Значит, ряд абсолютно и равномерно сходится.}$$

76. -

77. Сформулируйте признак Лейбница равномерной сходимости знакопеременного функционального ряда.

**Теорема.** (Признак Лейбница) Если  $u_n(x) \downarrow_{(n)}$  и  $u_n \xrightarrow{D} 0$ , то ряд сходится равномерно.

**78. Сформулируйте признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда.**

**Теорема.** (Признак Дирихле) Если  $a_n(x) \downarrow_{(n)}$  и  $a_n \xrightarrow{D} 0$ , а  $\|b_1 + \dots + b_n\| \leq C \forall n$ , то ряд равномерно сходится на  $D$ .

**79. Сформулируйте признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда.**

**Теорема.** (Признак Абеля) Если  $a_n(x)$  монотонна по  $n$  (при  $\forall x \in D$ ), и  $\|a_n\| \leq C$  при всех  $n$ , а ряд  $\sum b_n(x)$  сходится равномерно, то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \cdot b_n(x)$  сходится равномерно.

**80. Сформулируйте теорему о почленном переходе к пределу в функциональном ряде.**

**Теорема.**  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ ,  $D = (a; b)$ ,  $D = [a; b]$

Пусть функциональный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x)$  сходится равномерно на  $D$ ,  $x_0 \in D$ ,  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} c_n(x) = y_n$  и  $\exists \sum_{n=1}^{\infty} y_n = y$ .

Тогда  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} c_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n = y$

**81. Сформулируйте теорему о почленном дифференцировании функционального ряда.**

**Теорема.**  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ ,  $D = (a; b)$ ,  $D = [a; b]$

Пусть  $c_n(x)$  дифференцируемы на  $D$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} c'_n(x)$  сходится равномерно на  $D$ .

Тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x)$  сходится на  $D$  (а если  $D$  огр, то сходится равномерно), а его сумма будет дифференцируемой

функцией на  $D$  и  $\left( \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} c'_n(x)$

**82. Сформулируйте теорему о почленном интегрировании функционального ряда.**

**Теорема.**  $-\infty < a < b < +\infty$ ,  $D = (a; b)$ ,  $D = [a; b]$

$\int_a^x \left( \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x c_n(t) dt$  — сходится равномерно на  $D$ .

**83. Что такое степенной ряд? Как определяются радиус и интервал сходимости степенного ряда? Что можно утверждать о характере сходимости ряда на интервале сходимости?**

**Определение.** Степенной ряд —  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x - x_0)^n$

**Определение.** Пусть:

$R_{cv} = \sup\{|x - x_0| : \text{ряд сходится}\}$

$R_{dv} = \inf\{|x - x_0| : \text{ряд расходится}\}$  или  $+\infty$ , если ряд сходится всюду

$\exists R = R_{cv} = R_{dv}$  — радиус сходимости.

**Теорема.** На интервале сходимости степенной ряд сходится абсолютно.

**84. Что можно утверждать про равномерную сходимость степенного ряда?**

**Теорема.** Если  $R > 0$ , то степенной ряд сходится равномерно при  $|x - x_0| \leq r$ , где  $r < R$  (доказательство через признак Вейерштрасса).

**85. Сформулируйте и докажите теорему Абеля о сходимости степенного ряда.**

**Теорема.** (Абеля)

1. Если степенной ряд сходится в точке  $x_1 \neq x_0$ , то он сходится при всех  $x : |x - x_0| < |x_1 - x_0|$

2. Если степенной ряд расходится в точке  $x_2 \neq x_0$ , то он расходится при всех  $x : |x - x_0| > |x_2 - x_0|$

*Доказательство.* 1. 
$$\left| \sum_{n=m}^N c_n (x - x_0)^n \right| = \left| \sum_{n=m}^N c_n \cdot (x_1 - x_0)^n \cdot \left( \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right)^n \right| \leq \sum_{n=m}^N |c_n \cdot (x_1 - x_0)^n| \cdot \left| \left( \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right)^n \right| \leq \varepsilon (q^m + \dots + q^N) \leq \varepsilon \cdot q^m \cdot \frac{1}{1 - q} \rightarrow 0$$

■

86. -
87. Выведите формулу Коши-Адамара для радиуса сходимости степенного ряда.
88. -
89. -
90. -
91. -
92. Что можно утверждать о радиусе сходимости степенного ряда, полученного почленным дифференцированием исходного ряда?  
Радиус сходимости при дифференцировании степенного ряда не изменяется.
93. Что можно утверждать о радиусе сходимости степенного ряда, полученного почленным интегрированием исходного ряда?  
Радиус сходимости при интегрировании степенного ряда не изменяется.
94. Сформулируйте и докажите теорему о почленном дифференцировании степенного ряда.

**Теорема.** 
$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x - x_0)^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot n \cdot (x - x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} (n+1) (x - x_0)^n$$

95. Сформулируйте и докажите теорему о почленном интегрировании степенного ряда.

**Теорема.** 
$$\int_{x_0}^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t - x_0)^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}$$

96. Запишите формулу Тейлора для бесконечно дифференцируемой функции с остаточным членом в формах Лагранжа и Коши.

Если функция  $f(x)$  бесконечно дифференцируема в точке  $x_0$ , то функции  $f(x)$  можно сопоставить её ряд Тейлора:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

При этом 
$$f(x) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + r_N(x)$$

$$r_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(x_0 + \theta)(x - x_0)}{(N+1)!} (x - x_0)^{N+1}, \theta \in (0; 1) - \text{формула Лагранжа}$$

$$r_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(x_0 + \theta)(x - x_0)}{N!} (1 - \theta)^N (x - x_0)^{N+1}, \theta \in (0; 1) - \text{формула Коши}$$

97. -
98. Что такое функция, аналитическая в данной точке? Каково соотношение между понятиями бесконечно дифференцируемости и аналитичности?  
Функция называется аналитической в т.  $x_0$ , если она представима в окрестности этой точки в виде степенного ряда. Не всякая бесконечно дифференцируемая функция будет аналитической.
99. Приведите пример бесконечно дифференцируемой функции, не являющейся аналитической.

*Пример.* 
$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = 0$ , ряд Тейлора при  $x_0 = 0$  равен 0

100. Запишите разложения в степенной ряд с центром в нуле для функций  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ . Каково множество сходимости ряда? На каком множестве сумма ряда представляет собой исходную функцию?

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

101. Запишите разложение в степенной ряд с центром в нуле для функции  $(1+x)^p$ . Каково множество сходимости ряда? На каком множестве сумма ряда представляет собой исходную функцию?

$$(1+x)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(p)_n}{n!} x^n, \text{ где } (p)_n = p(p-1) \dots (p-n+1), R=1$$

102. -