Математический анализ

Игорь Балюк, БПМИ193
@lodthe, github

2019 — 2020

Содержание

1 Пределы

1.1 Следствия первого замечательного предела

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$$

1.2 Следствия второго замечательного предела

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$
$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$$
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}=e^{ab}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x\ln a}=1, a>0, a\neq 1$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=a$$

1.3 Тригонометрические формулы

Сайт с многими остальными формулами

$$\begin{aligned}
&\sin 0 = 0, \cos 0 = 1\\
&\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1\\
&\sin 2x = 2\sin x \cos x\\
&\cos 2x = \cos(x)^2 - \sin(x)^2\\
&\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b\\
&\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b\\
&\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}\\
&\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \quad (\sin(-a) = -\sin(a))\\
&\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}\\
&\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\\
&\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2}\cdot(\cos(a-b) - \cos(a+b))\\
&\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2}\cdot(\sin(a-b) + \sin(a+b))\\
&\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}\cdot(\cos(a-b) + \cos(a+b))\\
&\cos a = 1 - 2\sin^2\left(\frac{a}{2}\right)
\end{aligned}$$

2 Коллоквиум 1

Информация о коллоквиуме
Ориентировочная дата проведения: 09.11.2019

2.1 В обязательный минимум входят

2.1.1 Определение предела числовой последовательности

Число a называется пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N(\varepsilon) \implies |x_n - a| < \varepsilon$$

2.1.2 Определение точной верхней и нижней грани

Верхняя (нижняя) грань числового множества X — число a такое, что $\forall x \in X \implies x \leqslant (\geqslant) a$

Точная верхняя грань (или супремум) — это наименьшая из всех верхних граней. Обозначается $\sup X$.

Точная нижняя грань (или инфинум) — это наибольшая из всех нижних граней. Обозначается $\inf X$.

$$a = \sup X \iff (\forall x \in X \implies x \leqslant a) \wedge (\nexists b : \ b < a, \forall x \in X \implies x \leqslant b)$$
$$a = \inf X \iff (\forall x \in X \implies x \geqslant a) \wedge (\nexists b : \ b > a, \forall x \in X \implies x \geqslant b)$$

2.1.3 Определение бесконечно малой и бесконечно большой последовательности

Последовательность $\{x_n\}$ называется

- бесконечно малой последовательностью, если
  $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) : \ \forall n \geqslant N(\varepsilon) \implies |x_n| < \varepsilon$
- бесконечно большой последовательностью, если
  $\forall A > 0 \ \exists N(A) : \ \forall n \geqslant N(A) \implies |x_n| > A$

2.1.4 Определение предела функции в точке и на бесконечности по Коши и по Гейне

Предел функции в точке:

- По Коши: A — предел функции $f(x)$ в точке a ($\lim_{x\to a} f(x) = A$), если
  $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x : \ 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$
- По Гейне: A называется пределом функции $f(x)$ в точке a, если $\forall \{x_n\} \to a, x_n \neq a$ (т.е. $\lim_{n\to\infty} x_n = a$), соответствующая последовательность значений $f(x_n) \to A$ (т.е. $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$)

Предел функции на бесконечности:

- По Коши:
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall x \in D(f) : \ |x| > \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$
- По Гейне:
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \iff \forall \{x_n\} : \ \lim_{n\to\infty} x_n = \infty \implies \lim_{n\to\infty} f(x) = A$$

2.1.5 Определение фундаментальной последовательности, критерий Коши сходимости последовательности

Критерий Коши: Для того, чтобы последовательность $\{x_n\}$ сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Последовательность называется фундаментальной, если
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) : \forall n, m > N(\varepsilon) : |x_n - x_m| < \varepsilon$

2.1.6 Первый и второй замечательный пределы

1. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$
2. $$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

2.1.7 Таблица производных элементарных функций

$$
\begin{aligned}
&(C)' = 0\\
&(x^a)' = a \cdot x^{a-1}\\
&(a^x)' = a^x \ln a\\
&(e^x)' = e^x\\
&(\ln x)' = \frac{1}{x}\\
&(\sin x)' = \cos x\\
&(\cos x)' = -\sin x\\
&(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}\\
&(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}
\end{aligned}
$$

2.2 Основные понятие и теоремы (с доказательствами)

2.2.1 Числовые последовательности. Примеры.

Определение из википедии: Пусть X — это либо множество вещественных чисел $\mathbb{R}$, либо множество комплексных чисел $\mathbb{C}$. Тогда последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов множества X называется **числовой последовательностью**.

Определение из Ёжика: Отображение $\mathbb{N} \mapsto X$ будем называть последовательностью и записывать как $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Отображение $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ будем называть **числовой последовательностью**.

Примеры:

- Функция, сопоставляющая каждому натуральному числу $n \leqslant 12$ одно из слов «январь», «февраль», «март», «апрель», «май», «июнь», «июль», «август», «сентябрь», «октябрь», «ноябрь», «декабрь» (в порядке их следования здесь) представляет собой последовательность вида $\{x_n\}_{n=1}^{12}$. Например, пятым элементом x_5 этой последовательности является слово «май».

- $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ является бесконечной последовательностью рациональных чисел. Элементы этой последовательности начиная с первого имеют вид $1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \ldots$.

- $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ является бесконечной последовательностью целых чисел. Элементы этой последовательности начиная с первого имеют вид $-1, 1, -1, 1, -1, \ldots$.

2.2.2 Понятие предела последовательности.

Число a называется пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N(\varepsilon) \implies |x_n - a| < \varepsilon$$

2.2.3 Ограниченные и неограниченные последовательности.

- Ограниченная сверху последовательность — это последовательность элементов множества $\mathbb{R}$, все члены которой не превышают некоторого элемента из этого множества. Этот элемент называется верхней гранью данной последовательности (говоря в общем, это верно и не только для $\mathbb{R}$).

$$\{x_n\} \text{ ограниченная сверху } \iff \exists M \in \mathbb{R}: \forall n \implies x_n \leqslant M$$

- Ограниченная снизу последовательность — это последовательность элементов множества $\mathbb{R}$, для которой в этом множестве найдётся элемент, не превышающий всех её членов. Этот элемент называется нижней гранью данной последовательности.

$$\{x_n\} \text{ ограниченная снизу } \iff \exists m \in \mathbb{R}: \forall n \implies x_n \geqslant m$$

- Ограниченная последовательность (ограниченная с обеих сторон последовательность) — это последовательность, ограниченная и сверху, и снизу.

$$\{x_n\} \text{ ограниченная } \iff \exists M, m \in \mathbb{R}: \forall n \implies m \leqslant x_n \leqslant M$$

- Неограниченная последовательность — это последовательность, которая не является ограниченной.

$$\{x_n\} \text{ неограниченная } \iff \forall M, m \in \mathbb{R}: \exists N \implies (x_N < m) \vee (x_N > M)$$

- Критерий ограниченности: Числовая последовательность является ограниченной тогда и только тогда, когда существует такое число, что модули всех членов последовательности не превышают его.

$$\{x_n\} \text{ ограниченная } \iff \exists A \in \mathbb{R}: \forall N \implies |x_N| \leqslant A$$

2.2.4 Теорема об ограниченности сходящейся последовательности.

Всякая сходящаяся последовательность ограничена.

Доказательство. Все члены последовательности, кроме конечного их числа, принадлежат окрестности предела — ограниченному множеству.

Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится к a, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N: \forall n \geqslant N \implies |x_n - a| < \varepsilon$$

Пусть $\varepsilon = 1$, тогда $A = \max\{|x_1|, \dots, |x_N|, |a-\varepsilon|, |a+\varepsilon|\}$. Тогда, $\forall n \in \mathbb{N}: |x_n| \leqslant A$. ■

2.2.5 Теорема о единственности предела сходящейся последовательности.

Теорема. Если предел числовой последовательности существует, то он единственный.

Доказательство. Доказательство теоремы проведем «методом от противного». Предположим, что теорема неверна. Тогда, пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = a = b$ и выполняется следующее:

$$\begin{cases} a < b, \\ \forall \varepsilon > 0, \exists N_1(\varepsilon): \forall n \geqslant N_1(\varepsilon) \implies |x_n - a| < \varepsilon, \\ \forall \varepsilon > 0, \exists N_2(\varepsilon): \forall n \geqslant N_2(\varepsilon) \implies |x_n - b| < \varepsilon, \end{cases}$$

Положим $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$ и $N = max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$. Тогда, $\forall n \geqslant N \implies |x_n - a| < \varepsilon \wedge |x_n - b| < \varepsilon$. Возьмём $n \geqslant N$, тогда,

$$b - a = |b-a| = |b - x_n + x_n - a| \leqslant |x_n - b| + |x_n - a| < \frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{2} = b - a$$

Пришли к противоречию ($b - a < b - a$). ■

2.2.6 Теорема о переходе к пределу в неравенствах.

Теорема. Если элементы сходящейся последовательности $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенству $x_n \geqslant b$ ($x_n \leqslant b$), то и предел a этой последовательности удовлетворяет неравенству $a \geqslant b$ ($a \leqslant b$).

Доказательство. Пусть все элементы x_n, по крайней мере начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенству $x_n \geqslant b$. Требуется доказать неравенство $a \geqslant b$.

Предположим, что $a < b$. Поскольку a - предел последовательности $\{x_n\}$, то для положительного $\varepsilon = b - a$ можно указать номер N такой, что при $n \geqslant N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < b - a$. Это неравенство эквивалентно следующим двум неравенствам: $-(b-a) < x_n - a < b - a$. Используя правое из этих неравенств, получим $x_n < b$, а это противоречит условию теоремы. Случай $x_n \leqslant b$ рассматривается аналогично.. ■

Замечание 1. Элементы сходящейся последовательности $\{x_n\}$ могут удовлетворять строгому неравенству $x_n > b$, однако при этом предел a может оказаться равным b. Например, если $x_n = \dfrac{1}{n}$, то $x_n > 0$, однако $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Следствие. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Если $a < b$, то $\exists N :\ \forall n \geqslant N \implies x_n < y_n$.

Доказательство. Из аксиомы полноты $\exists c :\ a < c < b$.

$$\forall \varepsilon_1 > 0\ \exists N_1 :\ \forall n \geqslant N_1 \implies |x_n - a| < \varepsilon_1$$
$$\forall \varepsilon_2 > 0\ \exists N_2 :\ \forall n \geqslant N_2 \implies |y_n - b| < \varepsilon_2$$

Тогда, $\forall n \geqslant N_1 \implies |x_n - a| < c - a$ и $\forall n \geqslant N_2 \implies |y_n - b| < b - c$. Отсюда $\forall n \geqslant \max\{N_1, N_2\} \implies x_n < c - a + a = c = c - b + b < y_n$. ■

2.2.7 Теорема о вынужденном пределе (Теорема о двух милиционерах).

Теорема. Если $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Доказательство. Из определения предела $\{x_n\}$, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 :\ \forall n \geqslant N_1 \implies |x_n - a| < \varepsilon \iff a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Аналогично для предела $\{z_n\}$, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2 :\ \forall n \geqslant N_2 \implies |z_n - a| < \varepsilon \iff a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$.

Тогда, $\forall n \geqslant \max\{N_1, N_2\} \implies a - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < a + \varepsilon \implies \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. ■

2.2.8 Теорема о сходимости монотонных ограниченных последовательностей.

Теорема. Неубывающая числовая последовательность имеет предел, причём он в точности равен точной верхней границе (нижней границе, для ограниченной невозрастающей ч.п.).

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — ограниченная неубывающая числовая последовательность. Тогда множество $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ограничено, следовательно, из определения супремума, имеет супремум. Обозначим его через S. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = S$. Действительно, так как $S = sup\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, то

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n \geqslant N \implies S-\varepsilon < x_N \leqslant x_n \leqslant S \implies |x_n - S| < \varepsilon$$

■

Аналогичное доказательство для ограниченной невозрастающей ч.п.

2.2.9 Определение числа e.

$$e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

Теорема. Последовательность с общим членом $e_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ имеет конечный предел при $n\to\infty$. Для обозначение этого предела используется символ e.

Доказательство. Докажем сначала, что $\{e_n\}$ представляет собой монотонно возрастающую последовательность. Согласно биному Ньютона,

$$\begin{aligned} e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + \dots + \frac{1}{n^n} \\ &= 2 + \frac{1}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right) + \frac{1}{n!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n-1}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\ &= 2 + \frac{1}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + \dots \end{aligned}$$

Сравним e_n и e_{n+1}:

- Оба выражения содержат только положительные слагаемые
- Начиная со второго слогаемого, каждый член в выражении e_{n+1} превышает соответствующий член в e_n, так как
$$\left(1-\frac{1}{n}\right) < \left(1-\frac{1}{n+1}\right), \left(1-\frac{2}{n}\right) < \left(1-\frac{2}{n+1}\right)\dots$$
- Выражение e_{n+1} состоит из большего числа слагаемых. Следовательно, $e_{n+1} > e_n$.

Далее докажем, что последовательность $\{e_n\}$ является ограниченной. Действительно, первый член любой монотонно возрастающей последовательности является ее наибольшей нижней границей и, таким образом, $e_n \geqslant 2\ \forall n\in\mathbb{N}$.

Перейдем к доказательству существования верхней границы. Очевидно, что

$$\begin{aligned} e_n = 2 + \frac{1}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right) + \frac{1}{n!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n-1}\right) < \\ < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots + \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

Кроме того, $\frac{1}{k!} < \frac{1}{2^k}\ \forall k > 3$. Тогда,

$$\frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots + \frac{1}{n!} < \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

Правая часть этого неравенства представляет собой сумму убывающей геометрической прогрессии, которая равна $\frac{\frac{1}{16}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$. Таким образом, последовательность

$$e_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} < 3$$

представляет собой ограниченную монотонно возрастающую последовательность и, следовательно, имеет конечный предел. ■

2.2.10 Бесконечно малые последовательности.

Последовательность $\{a_n\}$ называется бесконечно малой, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n \geqslant N \implies |a_n| < \varepsilon$$

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

2.2.11 Связь со сходящимися последовательностями.

Если предел последовательности равен 0, то это бесконечно малая последовательность. Бесконечно малые последовательности являются сходящимися последовательностями.

Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ имела предел b, необходимо и достаточно, чтобы $x_n = b + \alpha_n$, где α_n — бесконечно малая последовательность.

2.2.12 Арифметические свойства бесконечно малых и сходящихся последовательностей.

Пусть $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая числовая последвательность.

- $\{\alpha_n\}$ ограничена

  Доказательство. Как известно, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n > N \implies |\alpha_n| < \varepsilon$. Значит, для всех $n > N$ доказано. Но $\forall n < N \implies \alpha_n \leqslant \max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|, \ldots, |\alpha_{N-1}|\}$. Тогда выберем $\varepsilon = 1, A = \max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|, \ldots, |\alpha_{N-1}|, 1\} \implies \forall n \in \mathbb{N}, |\alpha_n| \leqslant A$. ■

- Если $\{y_n\}$ ограничена, то $\{y_n \cdot \alpha_n\}$ — бесконечно малая.

  Доказательство. $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая, поэтому $\forall \varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n \geqslant N \implies |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{A}$. Ввиду ограниченности $\{y_n\}, \exists A:\ \forall n \in \mathbb{N} \implies |y_n| \leqslant A$. Но тогда $\{y_n \cdot \alpha_n\}: \forall \varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n \geqslant N \implies |y_n \cdot \alpha_n| < \frac{\varepsilon}{A} \cdot A = \varepsilon$. ■

- Если $\{\beta_n\}$ — бесконечно малая, то $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ и $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ — бесконечно малые.

Доказательство.

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N_1:\forall n\geqslant N_1\implies|\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{2}\text{ и }\forall\varepsilon>0\ \exists N_2:\forall n\geqslant N_2\implies|\beta_n|<\frac{\varepsilon}{2}$$
$$\text{Тогда при }N=\max\{N_1,N_2\}\implies\forall n\geqslant N\implies|\alpha_n\pm\beta_n|\leqslant|\alpha_n|+|\beta_n|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

Аналогично для произведения:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N_1:\forall n\geqslant N_1\implies|\alpha_n|<\frac{1}{\varepsilon}\text{ и }\forall\varepsilon>0\ \exists N_2:\forall n\geqslant N_2\implies|\beta_n|<\varepsilon^2$$
$$\text{Тогда при }N=\max\{N_1,N_2\}\implies\forall n\geqslant N\implies|\alpha_n\cdot\beta_n|\leqslant|\alpha_n|\cdot|\beta_n|<\frac{1}{\varepsilon}\cdot\varepsilon^2=\varepsilon$$

■

2.2.13 Бесконечно большие последовательности, их связь с бесконечно малыми.

- Если $\{x_n\}$ — бесконечно малая и $\forall n\in\mathbb{N}\implies x_n\neq0$, то $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ — бесконечно большая.

  Доказательство. $\forall\varepsilon>0\ \exists N:\ \forall n\geqslant N\implies|x_n|<\varepsilon\iff\dfrac{1}{|x_n|}>\dfrac{1}{\varepsilon}=A$ ■

- Если $\{x_n\}$ — бесконечно большая и $\forall n\in\mathbb{N}\implies x_n\neq0$, то $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ — бесконечно малая.

  Доказательство. $\forall A>0\ \exists N:\ \forall n\geqslant N\implies|x_n|>A\iff\dfrac{1}{|x_n|}<\dfrac{1}{A}=\varepsilon$ ■

2.2.14 Арифметические свойства для последовательностей, имеющих конечные и бесконечные пределы.

Если $\exists\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$, то $\exists\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=a\pm b$, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=a\cdot b$, а также $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{a}{b}$, если $b\neq0$.

Доказательство.

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a,\lim_{n\to\infty}y_n=b\iff x_n=a+\alpha_n,y_n=b+\beta_n,\ \text{где }\{\alpha_n\}\{\beta_n\}\text{— бесконечно малые.}$$
$$x_n\pm y_n=(a+\alpha_n)\pm(b+\beta_n)=(a\pm b)+\underbrace{(\alpha_n\pm\beta_n)}_{\text{б. м.}}$$
$$x_n\cdot y_n=(a+\alpha_n)\cdot(b+\beta_n)=a\cdot b+\underbrace{(\alpha_n\cdot\beta_n+\alpha_n\cdot b+\beta_n\cdot a)}_{\text{б.м.}}$$

Лемма. Пусть $\exists\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b\neq0$. Тогда $\exists r>0:\exists N\in\mathbb{N}:\forall n\geqslant N\implies|y_n|>r>0$.

Доказательство. $\forall\varepsilon>0\exists N:\forall n\geqslant N\implies|y_n-b|<\varepsilon\implies b-\varepsilon<y_n<b+\varepsilon$. Пусть $\varepsilon=\left|\dfrac{b}{2}\right|$, тогда $r<\left|\dfrac{b}{2}\right|<|y_n|<\left|\dfrac{3b}{2}\right|$. ■

Рассмотрим последовательность $\left\{\dfrac{x_n}{y_n} - \dfrac{a}{b}\right\}$ — бесконечно малая.

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{b\cdot a + b\cdot\alpha_n - b\cdot a - \beta_n\cdot a}{y_n\cdot b} = (\alpha_n\cdot b - \beta_b\cdot a)\cdot\frac{1}{y_n\cdot b}$$

По лемме $\left|\dfrac{1}{y_n\cdot b}\right| \leqslant max\left\{\left|\dfrac{1}{y_1\cdot b}\right|,\ldots,\left|\dfrac{1}{y_N\cdot b}\right|,\dfrac{1}{rb}\right\} \implies \left\{\dfrac{1}{y_n\cdot b}\right\}$ ограничена. Но тогда имеем произведение бесконечно малой и ограниченной последовательностей, значит, $\left\{\dfrac{x_n}{y_n} - \dfrac{a}{b}\right\}$ — бесконечно малая. ■

2.2.15 Неопределенности. [В списке вопросов к коллоквиуму отсутствует]

Не очень понятно, что именно требуется в этом пункте

Основные виды неопределенностей: $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty, \infty-\infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$

Раскрывать неопределенность помогает:

- упрощение вида функции (преобразование выражения с использованием формул сокращенного умножения,
- тригонометрических формул, домножением на сопряженные выражения с последующим сокращением и т.п.); использование замечательных пределов;

2.2.16 Определение подпоследовательности.

Подпоследопоследовательность последовательности $\{x_n\}$ — это последовательность $\{x_{n_k}\} = \{x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}\}$, полученная из $\{x_n\}$, удалением ряда её членов без изменения порядка следования членов.

То есть подпоследовательность состоит из членов исходной последовательности $\{x_n\}$ с номерами n_k, где $\{n_k\}$ — строго монотонная последовательность натуральных чисел.

Замечание 2. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, тогда $\forall\{a_{n_k}\} : \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$

2.2.17 Теорема Больца́но-Ве́йерштрасса.

Теорема. Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Для понимания происходящего следует ознакомиться с 2.2.35 Системой стягивающихся отрезков (ССО)

$\{x_n\}$ ограничена $\implies \exists[a,b] : \forall n\in N \implies a\leqslant x_n\leqslant b$. Поделим $[a;b]$ на две равные части. Хотя бы одна из частей (пусть это $[a_1;b_1]$) содержит бесконечно много элементов $\{x_n\}$.

Выберем на $[a_1;b_1]$ произвольный элемент $\{x_n\}$. Назовем его x_{n_1}. Далее делим $[a_1;b_1]$ на две равные части. Хотя бы одна из этих частей содержит бесконечно много элементов $\{x_n\}$. Обозначим ее $[a_2;b_2]$. Выберем $x_{n_2}\in[a_2;b_2]$. Будем продолжать выполнять указанные действия. Обозначим за x_{n_k} число, полученное на k-ом шаге, т.е. $x_{n_k}\in[a_k;b_k]$.

$\{[a_k;b_k]\}$ — система стягивающихся отрезков. Тогда, существует единственное $c : \forall k \implies c\in[a_k;b_k]$.

$\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k = c \implies \exists \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = c$ (по теореме о двух милиционерах) ■

2.2.18 Критерий Коши сходимости последовательности.

Критерий Коши: Для того, чтобы последовательность $\{x_n\}$ сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Последовательность называется фундаментальной, если
$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N : \forall n, m \geqslant N : |x_n - x_m| < \varepsilon$

Доказательство. Докажем необходимость и достаточность.

- Необходимость:

  Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ по определению:
  $$\forall \varepsilon > 0 : \ \exists N : \ \forall p \geqslant N \implies |x_p - a| < \varepsilon$$
  Поскольку ε произвольное, можно взять вместо него $\dfrac{\varepsilon}{2}$
  $$p = m \geqslant N \implies |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$
  $$p = n \geqslant N \implies |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$
  $$|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leqslant |x_n - a| + |a - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
  То есть $|x_n - x_m| < \varepsilon$, а значит $\{x_n\}$ фундаментальная по определению. Необходимость доказана

- Достаточность:

  Пусть $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность, докажем, что она имеет предел. Сначала покажем, что $\{x_n\}$ — ограничена. По определению фундаментальной последовательности
  $$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N : \forall n, m \geqslant N : |x_n - x_m| < \varepsilon$$
  Так как ε произвольное, возьмём $\varepsilon = 1$.
  $$|x_n| = |(x_n - x_N) + x_N| \leqslant \underbrace{|x_n - x_N|}_{\leqslant \varepsilon} + |x_N| \leqslant 1 + |x_N|$$
  $$\forall n \geqslant N \implies |x_n| \leqslant (1 + |x_N|) \ = const \leqslant A \implies |x_n| \leqslant A$$
  $$A = \max\{1 + |x_N|; |x_1|; |x_2|; \ldots; |x_N|\}$$
  $$\forall n \geqslant N \implies |x_n| \leqslant A$$
  По теореме 2.2.17 Больцано-Вейерштрасса, так как $\{x_n\}$ — ограниченная, $\{x_n\}$ имеет сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$.

  Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$, покажем, что число a и будет пределом всей последовательности $\{x_n\}$.

  Так как $\{x_n\}$ фундаментальная:
  $$\forall \varepsilon > 0 : \ \exists N_1 : \ \forall m, n \geqslant N_1 \implies |x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$
  Так как $\{x_{n_k}\}$ сходящаяся:
  $$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a : \ \forall \varepsilon > 0 \, \exists N_2 : \ \forall n_k \geqslant n_{N_2} \implies |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$
  $$\forall \varepsilon > 0 : \ |x_n - a| = |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - a)| \leqslant |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
  $$\text{Возьмём } N = \max\{N_1, N_2\} : \ \forall \varepsilon > 0 \, \exists N : \ \forall n \geqslant N \implies |x_n - a| < \varepsilon$$
  Достаточность доказана.

$\blacksquare$

2.2.19 Определение предела функции в точке по Коши и по Гейне.

- По Коши (или на языке $\varepsilon - \delta$):
  A — предел функции $f(x)$ в точке a ($\lim_{x\to a} f(x) = A$), если
  $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x :\ 0 < |x-a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$
- По Гейне:
  A называется пределом функции $f(x)$ в точке a, если $\forall \{x_n\} \to a, x_n \neq a$ (т.е. $\lim_{n\to\infty} x_n = a$), соответствующая последовательность значений $f(x_n) \to A$ (т.е. $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$)

2.2.20 Теорема об эквивалентности этих определений.

- Из определения по Коши следует определение по Гейне:

  Выберем произвольную $\{x_n\} \to a, x_n \neq a$. По определению предела последовательности
  $$\forall \delta > 0\ \exists N :\ \forall n \geqslant N \implies |x_n - a| < \delta$$
  Указанное неравенство выполняется для любого $\delta > 0$. Тогда какое бы $\varepsilon > 0$ мы бы ни выбрали, можно найти $\delta > 0$, такое, что по определению по Коши будет выполняться
  $$\forall x :\ 0 < |x-a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$
  т.е. $\{f(x_n)\} \to A$, а значит из сходимости по Коши следует сходимость по Гейне.

- Из определения по Гейне следует определение по Коши:

  Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$ По Гейне. От противного: если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ по Гейне, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq A$ по Коши. Напишем отрицание определения по Коши:
  $$\exists \varepsilon_0 :\ \forall \delta > 0 :\ \exists x :\ 0 < |x-a| < \delta :\ |f(x) - A| \geqslant \varepsilon_0$$
  Так как δ может быть любым, можно выбрать последовательность $\{\delta_n\} = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}$, а соответствующие значения x будем обозначать как x_n. Тогда $0 < |x_n - a| < \delta_n = \dfrac{1}{n}$, и $|f(x_n) - A| \geqslant \varepsilon_0$. Отсюда следует, что последовательность $\{x_n\}$ является подходящей, но при этом число A не является пределом функции $f(x)$ в точке a (по Гейне). Пришли к противоречию.

2.2.21 Односторонние пределы, их связь с двусторонними. Пределы функции в бесконечности. [В списке вопросов к коллоквиуму отсутствует]

Назовём число A левым (правым) пределом f по Коши, если:
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \in (a - \delta; a)(x \in (a; a + \delta)) \implies |f(x) - a| < A$$
Назовём число A левым (правым) пределом f по Гейне, если:
$$\forall \{x_n\} :\ \forall n \in \mathbb{N}, x_n \neq a, x_n < a\ (x_n > a) \text{ и } \lim_{n\to\infty} x_n = a \implies \{f(x_n)\} \xrightarrow[n\to\infty]{} A$$

Обозначим односторонние пределы так: $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A = f(a-0)$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A = f(a+0)$. Таким образом, когда мы можем «подойти» к предельному значению функции, двигаясь по x к точке a слева, говорят, что существует левый предел. Аналогично следует понимать и определение правого предела. Поэтому если мы можем подойти к a и слева, и справа, то существует предел в точке a. В кванторах это значит следующее:

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = A \iff \exists f(a-0) = f(a+0) = A$$

$$(\text{т. к. } \forall x:\ a-\delta < x < a \ \text{ и } \forall x:\ a < x < a+\delta \iff \forall x:\ 0 < |x-a| < \delta)$$

Предел функции на бесконечности:

- По Коши:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ \forall x \in D(f):\ |x| > \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

- По Гейне:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \iff \forall \{x_n\}:\ \lim_{n\to\infty} x_n = \infty \implies \lim_{n\to\infty} f(x) = A$$

2.2.22 Неопределенности. Теоремы о переходе к пределу в неравенствах, о вынужденном пределе. [Не пройдено]

2.2.23 Теорема о пределе сложной функции. [Не пройдено]

2.2.24 Первый и второй замечательные пределы. [Не пройдено]

2.2.25 Сравнение функций, о-символика, главная часть функции, порядок малости и порядок роста функции. [Не пройдено]

2.2.26 Критерий Коши существования конечного предела функции. [Не пройдено]

2.2.27 Определения непрерывности функции в точке, их эквивалентность. [Не пройдено]

2.2.28 Точки разрыва, их классификация. Непрерывность основных элементарных функций. [Не пройдено]

2.2.29 Арифметические свойства непрерывных функций. [Не пройдено]

2.2.30 Теорема о непрерывности сложной функции. [Не пройдено]

2.2.31 Теоремы о локальной ограниченности и локальном сохранении знака для функций, непрерывных в точке. [Не пройдено]

2.2.32 Свойства функций, непрерывных на отрезке (первая и вторая теоремы Вейерштрасса, теорема Коши). Критерий существования и непрерывности обратной функции на промежутке. [Не пройдено]

2.2.33 Понятие равномерной непрерывности функции на множестве. [Не пройдено]

2.2.34 Теорема Кантора [Не пройдено]

2.2.35 Система стягивающихся отрезков [В списке вопросов к коллоквиуму отсутствует]

Множество отрезков $\{[a_n; b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ называется системой стягивающихся отрезков, если выполнено:

1. Каждый последовательный отрезок вложен в предыдущий, т.е. $a_1 \leqslant a_2 \leqslant ... \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant b_1$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$

Лемма. (Коши-Кантора) Для любой ССО существует, причем единственная, точка c, принадлежащая всем отрезками данной системы, т. е. $\exists! c : \forall n \in \mathbb{N} \implies c \in [a_n, b_n]$

Доказательство. Существование. Используем аксиому полноты: если $a \leqslant b$, то $\exists c : a \leqslant c \leqslant b$.

$$\exists c: \ \forall n \in \mathbb{N} \implies c \in [a_n, b_n]$$

Единственность. Предположим противное, пусть существуют две различные точки c, c', принадлежащие всем отрезкам последовательности $\{[a_n; b_n]\}_{n=1}^{\infty}$. Не теряя общности, предположим, что $c > c'$.

Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \implies a_n \leqslant c' < c \leqslant b_n \implies 0 \leqslant c - c' \leqslant b_n - a_n$. Т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0 \implies 0 \leqslant c - c' \leqslant 0 \implies c - c' = 0 \implies c = c'$

Пришли к противоречию. ■

3 Лекции

3.7 Лекция от 11 ноября 2019

$$\boxed{e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

3.7.1 Теорема о вынужденной сходимости

Теорема (о вынужденной сходимости)**.** Пусть существует $\lim\limits_{x\to x_0(\pm\infty)} f(x) = a$; $\lim\limits_{x\to x_0} \psi(x) = a$; и $\exists \delta > 0 : \ \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \implies f(x) \leqslant g(x) \leqslant \psi(x)$. Тогда $\exists \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a$

3.7.2 Предел в точке функции слева и справа

Определение 1 (Определение предела в точке функции справа по Коши)**.** $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = a$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \implies x_0 < x < x_0 + \delta \implies |f(x) - a)| < \varepsilon$

Определение 2 (Определение предела в точке функции слева по Коши)**.** $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = a$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \implies x_0 - \delta < x < x_0 \implies |f(x) - a)| < \varepsilon$

$$f(x) = sign(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$sign(x) = \frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} nx$$

У данной функции есть предел справа и слева

$$\lim_{x\to 0+0} sign(x) = 1$$

$$\lim_{x\to 0-0} sign(x) = -1$$

3.7.3 Второй замечательный предел

Утверждение.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Доказательство. Будем пользоваться тем фактом, что $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ (тут $n\in\mathbb{N}$, а x в утверждении — может быть не целым)

$[x]$ — целая часть от числа x. Тогда

$$[x]\leqslant x\leqslant [x+1]=[x]+1$$
$$\frac{1}{[x]+1}\leqslant\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{[x]}$$
$$1+\frac{1}{[x]+1}\leqslant 1+\frac{1}{x}\leqslant 1+\frac{1}{[x]}$$
$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}\leqslant\left(1+\frac{1}{x}\right)^{[x]}\leqslant\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}$$
$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}\leqslant\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\leqslant\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

Воспользуемся теоремой о вынужденной сходимости

$$\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\to e$$
$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}=\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1-1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}\to e$$
$$\text{Пояснение: }\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=e\cdot 1=e$$

■

Рассмотрим похожее утверждение

Утверждение.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Доказательство.

$$y=-x$$
$$x\to-\infty\iff y\to\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\iff\lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y}=$$
$$=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y-1+1}{y-1}\right)^{y}=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1+1}=e$$

■

3.7.4 Непрерывность функций

Определение 3. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 (функция должна быть определена в x_0), если

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Например, $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ непрерывна.

$$f(x) = x^2$$
$$x^2 - x_0^2 = (x - x_0)(x + x_0)$$

Определение 4 (Функция Дирихле)**.**

$$D(x) = \begin{cases} 1, x \text{ — рациональное} \\ 0, x \text{ — иррациональное} \end{cases}$$
$$D(x) = \lim_{n \to \infty} (\lim_{m \to \infty} \cos^{2m}(\pi n! x))$$

Теорема. $f(x)$ — непрерывна в точке x_0, $g(x)$ — непрерывна в точке x_0. Тогда

1. $f(x) + g(x)$ — непрерывна в точке x_0
2. $f(x)g(x)$ — непрерывна в точке x_0
3. $g(x_0) \neq 0 \implies \dfrac{f(x)}{g(x)}$ — непрерывна в точке x_0

Определение 5 (точки разрыва функции)**.** Если $f(x)$ не является непрерывной в точке x_0, то x_0 — точка разрыва

Классификация точек разрыва:

- $$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

  $\implies x_0$ — **точка устранимого разрыва**

  $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 100, & x = 0 \end{cases}$$
  $$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$
  $$g(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

- $$\exists \lim_{x \to x_0 + 0} f(x), \exists \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \text{ и } \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$$

  $\implies x_0$ — точка разрыва **первого рода**

  $$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

- $$\nexists \lim_{x \to x_0+0} f(x) \text{ или } \nexists \lim_{x \to x_0-0} f(x)$$

$\implies x_0$ — точка разрыва **второго рода**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, x \neq 0 \end{cases}$$

3.7.5 Теоремы Вейерштрасса

$$y = f(z)$$
$$f(z) \text{ определена в окресности точки } z_0 \text{ и непрерывна в точке } z_0$$
$$z = g(x) \text{ определена в окресности точки } x_0 \text{ и непрерывна в точке } x_0$$
$$y = \phi(x) = f(z) = f(g(x)) \implies f(g(x)) \text{ непрерывна в точке } x_0$$

Доказательство.

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0, x_n \neq x_0$$
$$z_n = g(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{z}{}_0 = g(x_0)$$
$$y_n = f(z_n) \xrightarrow[n\to\infty]{y}{}_0 = f(z_0)$$
$$f(z_0) = f(g(x_0))$$

■

Определение 6. $f(x)$ называется непрерывной на множестве $X \iff f(x) \in C(X)$
$\forall x \in X \implies f(x)$ непрерывна в точке x

Теорема (первая теорема Вейерштрасса: об ограниченности непрерывной на отрезке функции)**.** Пусть $f(x) \in C[a;b]$. Тогда

$$\exists A: \ \forall x \implies |f(x)| \leqslant A$$

Неверна для полуинтервалов
$f(x) \in C(a,b), \quad f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad X = (0;1)$