Второй коллоквиум по МА-2

Денис Козлов
Telegram

Версия от 17.12.2020 19:56

0.1

0.2

0.3

0.4

0.5 Докажите, что простые множества в $\mathbb{R}^m$ образуют кольцо

Утв.: Класс всех простых множеств образует кольцо.
Док-во:

1. $\varnothing = [a; a)$ - пустой полуинтервал является простым множеством.
2. $E_1 \cup E_2 = E$ - объединение простых множеств является простым множеством. Так как каждое из простых множеств представимо в виде объединения конечного количества полуинтервалов, то их объединение представимо в виде объединения всех полуинтервалов входящих в каждое из простых, а значит является простым множеством.
3. $E_1 \cap E_2 = E$ - пересечение простых множеств является простым множеством. Пересечение представимо в виде объединения пересечений всех возможных пар из первого и второго множества. Так как пересечение полуинтервалов является полуинтервалом, то пересечение простых множеств, является простым множеством.
4. $E_1 \backslash E_2 = E$ - разность простых множеств является простым множеством. Пусть есть некоторый полуинтервал $[a; b)$ покрывающий E_1 и E_2, тогда $[a; b) \backslash E_2$ очевидно является простым множеством. В таком случае исходную разность можно записать в виде $E_1 \cap ([a; b) \backslash E_2)$, что будет пересечением простых множеств, а значит является полуинтервалом.

■

0.6 Дайте определение внешней меры Жордана в $\mathbb{R}^m$

Опр.: Пусть $A \subset \mathbb{R}^m$ - произвольное ограниченное множество. *Внешней мерой Жордана* множества A называется

$$\overline{\mu}(A) = \inf_{E \supseteq A} \mu(A),$$

где точная нижняя грань берется по всем простым множествам, содержащим A.

0.7 Сформулируйте и докажите основные свойства внешней меры Жордана: монотонность и полуаддитивность

Св-во: Монотонность внешней меры означает, что при $A \subseteq B$ выполняется $\overline{\mu}(A) \leqslant \overline{\mu}(B)$.
Док-во: Обозначим через $\mathcal{E}_A$ класс простых множеств, покрывающих заданное ограниченное множество A. Так как $A \subseteq B$, то класс $\mathcal{E}_A$ шире чем $\mathcal{E}_B$, а значит в нем найдется простое множество которое не больше любого из $\mathcal{E}_B$, а отсюда из определения внешней меры следует, что $\overline{\mu}(A) \leqslant \overline{\mu}(B)$

■

Св-во: Полуаддитивностью внешней меры называется

$$\overline{\mu}(A \sqcup B) \leqslant \overline{\mu}(A) + \overline{\mu}(B),$$

где A и B - произвольные ограниченные множества.
Док-во: Для любых E_A и E_B покрывающих A и B соответственно, верно что $E_A \cup E_B$ - покрывает $A \cup B$. По свойствам меры верно

$$\mu(E_A \cup E_B) \leqslant \mu(E_A) + \mu(E_B)$$

Далее по определению точной нижней грани, для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие E_A и E_B, что

$$\mu(E_A) \leqslant \overline{\mu}(A) + \varepsilon, \quad \mu(E_B) \leqslant \overline{\mu}(B) + \varepsilon$$

Отсюда имеем

$$\overline{\mu}(A \cup B) \leqslant \mu(E_A \cup E_B) \leqslant \overline{\mu}(A) + \overline{\mu}(B) + 2\varepsilon$$

Переходя к пределу $\varepsilon \to 0$ имеем

$$\overline{\mu}(A \cup B) \leqslant \overline{\mu}(A) + \overline{\mu}(B)$$

(Искомое свойство выполняется как частный случай)

■

0.8 Что такое измеримое по Жордану (= жорданово) множество? Как определяестя его мера? Приведите примеры измеримого и неизмеримого множества

Опр.: Ограниченное множество $A \subset \mathbb{R}^m$ называется *измеримым по Жордану*, если

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists E, E \supseteq A \quad \overline{\mu}(E \backslash A) < \varepsilon$

ПРОВЕРИТЬ, НАДО ЛИ ЧТО-ТО ДОБАВИТЬ
Заметим, что так как измеримые множества образуют кольцо, а также внешняя мера на кольце измеримых множеств обладает свойством аддитивности, то выполняются все свойства меры, а значит можно дать следующее определение
Опр.: *Мерой Жордана* измеримого множества называется его внешняя мера Жордана.
Пример: Любое просто множество является измеримым по Жордану.
Пример: Пусть $Q = \{q_1, q_2, ...\}$ - множество всех рациональных чисел отрезка $[0; 1]$ и $A_n = [0; 1] \backslash \{q_1, ..., q_n\}$. Множество $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n = [0; 1] \backslash Q$ не является измеримым

0.9 Докажите, что измеримые по Жордану множества образуют кольцо

Утв.: Измеримые по Жордану множества образуют кольцо
Док-во:

1. $\varnothing$ - пустое множество является простым, а значит измеримо.
2. A, B - измеримы, $A \cup B$ - объединение измеримых множеств измеримо.
   Пусть $A_i \subseteq E_i$ и $\overline{\mu}(E_i \backslash A_i) < \dfrac{\varepsilon}{2}$, при $i = 1, 2$.
   Тогда так как

   $$(E_1 \cup E_2) \backslash (A_1 \cup A_2) \subseteq (E_1 \backslash A_1) \cup (E_2 \backslash A_2)$$

   в силу монотонности имеем

   $$\overline{\mu}((E_1 \cup E_2) \backslash (A_1 \cup A_2)) \leqslant \overline{\mu}((E_1 \backslash A_1) \cup (E_2 \backslash A_2)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

   а из этого следует, что объединение измеримо.
3. A, B - измеримы, $A \cap B$ - пересечение измеримых множеств измеримо.
   Проведем рассуждения аналогично предыдущему пункту.
   Так как

   $$(E_1 \cap E_2) \backslash (A_1 \cap A_2) \subseteq (E_1 \backslash A_1) \cup (E_2 \backslash A_2)$$

   в силу монотонности имеем

   $$\overline{\mu}((E_1 \cap E_2) \backslash (A_1 \cap A_2)) \leqslant \overline{\mu}((E_1 \backslash A_1) \cup (E_2 \backslash A_2)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

   а из этого следует, что пересечение измеримо.
4. A, B - измеримы, $A \backslash B$ - разность измеримых множеств измерима.
   Пусть $A_i \subseteq E_i$, при $i = 1, 2$ и простые множества E_i таковы, что $\overline{\mu}(E_1 \backslash A_1) < \dfrac{\varepsilon}{2}$, а $E_2 \backslash A_2 \subseteq E_2'$, где $\mu(E_2') < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
   Обозначим

   $$A = A_1 \backslash A_2, \text{ и } E = (E_1 \backslash E_2) \cup E_2'$$

Докажем, что $A \subseteq E$. Из всех возможных вариантов рассмотрим следующий. Пусть $x \in A_1$ и $x \notin A_2$. Тогда $x \in E_1$, а если $x \in E_2$, то $x \in E_2'$. Все прочие случаи тривиальны.
Теперь докажем, что

$$(E \backslash A) \subseteq (E_1 \backslash A_1) \cup E_2'$$

Снова из всех возможных вариантов рассмотрим следующее. Пусть $x \in E$ и $x \notin A$. Отсюда пусть $x \in E_1$ и $x \notin E_2$. Если $x \in A_1$, то либо $x \in A$, что противоречит первоначальному условию, либо $x \in A_1 \cap A_2$, что также невозможно, так как $x \notin E_2$. Отсюда следует, что $x \notin A_1$. Все прочие случаи тривиальны.
Далее имеем

$$\overline{\mu}(E \backslash A) \leqslant \overline{\mu}(E_1 \backslash A_1) + \overline{\mu}(E_2') = \varepsilon$$

Из чего следует, что разность измеримых множеств измерима.

Все необходимые условия выполнены а это значит, что измеримые множества образуют кольцо.

■

0.10 Докажите, что множество измеримо по Жордану ровно тогда, когда его граница имеет Жорданову меру нуль

МУТНАЯ ТЕМА, ЕСТЬ ВОПРОСЫ
Теор.: Пусть $A \subseteq \mathbb{R}^m$ - произвольное множество, тогда множество измеримо тогда и только тогда, когда $\overline{\mu}(\partial A) = 0$, где ∂A - граница множества A.
Док-во:
$\Rightarrow$ Пусть множество A - измеримо по Жордану. Пусть $E_1 \subseteq A$ - простое множество, такое что $\mu(E_1) = \underline{\mu}(A)$, а также $E_2 \supseteq A$ - такое, что $\mu(E_2) = \overline{\mu}(A)$
По определению границы знаем, что $\partial A \subseteq E_2 \backslash E_1$. Можно заметить, что так как $E_1 \subseteq A \subseteq E_2$, то $E_2 \backslash E_1 = (E_2 \backslash A) \cup (A \backslash E_1)$

0.11 Что такое разбиение Жорданова множества? Как вводится произведение разбиений? В каком случае говорят, что одно разбиение является измельчением другого?

Пусть $E \supseteq D$ - простое множество покрывающее D. Пусть $E = \sqcup Q_i$, где Q_i - m-мерные полуинтервалы составляющие простое множество E.
Опр.: *Разбиением* τ множества D, соответствующим данному простому множеству E, назовем представление D в виде

$$D = \sqcup (D \cap Q_i) = \sqcup D_i, \qquad D_i = D \cap Q_i$$

Опр.: *Произведение разбиений* $\tau = \{D_i \mid i = 1, ..., n\}$ и $\tau' = \{D_j' \mid j = 1, ..., k\}$ называется система множеств

$$\tau \cdot \tau' = \{D_i \cap \mid i = 1, ..., n, \ j = 1, ..., k\}$$

Опр.: Разбиение τ называется *измельчением* разбиения τ' (пишется $\tau \leqslant \tau'$), если для любого $D_j' \in \tau'$ найдутся такие $D_1, ..., D_m \in \tau$, что

$$D_j' = D_1 \sqcup ... \sqcup D_m$$

0.12 Докажите, что произведение разбиений является измельчением и одного, и другого разбиения

Утв.: Пусть τ и τ' - произвольные разбиения некоторого множества, тогда $\tau \cdot \tau'$ является измельчением τ и τ'
Док-во: Пусть $D_i \subseteq \tau$ и $D_i' \subseteq \tau'$, тогда так как

$$\forall i \in \{1, ..., n\} \ D_i = D_i \cap D = D_i \cap (\bigsqcup_j D_j) = \bigsqcup_j (D_i \cap D_j')$$

По определению произведения $D_i \cap D_j' \subseteq \tau \cdot \tau'$, а значит по определению измельчения $\tau \cdot \tau'$ является измельчением τ (τ' также является измельчением; доказывается симметрично)

■

0.13 Что такое диаметр разбиения? Покажите, что при измельчении разбиения диаметр не увеличивается.

Опр.: Пусть τ - некоторое разбиение, тогда *диаметром* разбиения называют

$$\Delta(\tau) = \max_i \sup_{x,y \in D_i} |x-y|$$

Утв.: При измельчении разбиения его диаметр не увеличивается.
Док-во: Пусть τ и τ' - некоторые разбиения, причем $\tau \leqslant \tau'$
Тогда пусть $D_i' \in \tau'$ - некоторое множество. По определению измельчения

$$D_i' = D_{i_1} \sqcup ... \sqcup D_{i_k}$$

где $D_{i_1}, ..., D_{i_k} \in \tau$. Очевидно, что так как $\forall j\ D_{i_j} \in D_i'$, то диаметр D_{i_j} не превосходит диаметр D_i'. Данное утверждение верно для любого i, а значит, что при измельчении разбиения диаметр не увеличивается.

$\blacksquare$

0.14 Сформулируйте определение интеграла Римана от функции по жордановому множеству. Что такое интегрируемая функция?

Пусть $f : D \to \mathbb{R}$ - заданная на D числовая функция и $\tau = \{D_i\}$ - разбиение множества D. Выберем произвольно точки $\xi_i \in D_i$. Систему выбранных точек будем обозначать $p = \{\xi_i\}$
Опр.: *Интегральной суммой* функции f на жордановом множестве D, соответствующей разбиению τ и выбору точек p, называется

$$I_D(f, \tau, p) = \sum_i f(\xi_i)\mu(D_i)$$

Опр.: Функция f называется *интегрируемой по Риману* на D, если существует такое число I, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \ |I_D(f, \tau, p) - I| < \varepsilon \text{ при } \Delta(\tau) < \delta$$

Причем это число I называется *интегралом Римана* функции f на D и обозначается

$$I = \int\limits_D f(x)dx$$

Множество всех функций, интегрируемых по Риману на жордановом множестве D, обозначается $\mathcal{R}(D)$

0.15 Сформулируйте и докажите критерий Коши интегрируемости функции по Риману.

Теор.: Пусть f - некоторая функция. Если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, что при любом выборе разбиений τ, τ', с диаметрами $\Delta(\tau), \Delta(\tau)$ и при любом выборе систем точек p, p' выполняется

$$|I_D(f, \tau, p) - I_D(f, \tau', p')| < \varepsilon,$$

то функция интегрируема по Риману.
ПРОВЕРИТЬ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО
Док-во:
$\Leftarrow$ Пусть $f \in \mathcal{R}(D)$, тогда существует I, такое что

$$|I_D(f, \tau, p) - I| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|I_D(f, \tau', p') - I| < \frac{\varepsilon}{2}$$

отсюда имеем

$$|I_D(f, \tau, p) - I_D(f, \tau', p')| \leqslant |I_D(f, \tau, p) - I| + |I_D(f, \tau', p') - I| < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ Возьмем последовательности τ_n и p_n, причем $\Delta(\tau_n) \to 0$
С помощью данных последовательностей образуем последовательность интегральных сумм $I_D(f, \tau_n, p_n)$.
Теперь положим, что выполнен критерий Коши

$$|I_D(f, \tau_m, p_m) - I_D(f, \tau_n, p_n)| < \varepsilon$$

из чего следует, что $I_D(f, \tau_n, p_n) \to I$, где I - некоторое число.
Теперь в исходное неравенство подставим $I_D(f, \tau_n, p_n)$ и устримим его к I

$$|I_D(f, \tau, p) - I_D(f, \tau_n, p_n)| < \varepsilon$$

$$|I_D(f, \tau, p) - I| < \varepsilon$$

из чего следует, что функция интегрируема по Риману.

■

0.16

0.17 Покажите, что на жордановом множестве меры нуль любая функция интегрируема

Имеем D - жорданово множество, причем $\mu(D) = 0$
Рассмотрим некоторое разбиение $\tau = \{D_i\}$
Очевидно, что так как $\forall i \ D_i \subseteq D$, то $\mu(D_i) = 0$
Теперь пусть задана некоторая система точек p
Рассмотрим интегральную сумму

$$I_D(f, \tau, p) = \sum_i f(\xi_i)\mu(D_i)$$

отсюда заметим, что так как $\forall i \ \mu(D_i) = 0$, то и интегральная сумма также будет равна 0, вне зависимости от функции.
Теперь пусть имеем $I = 0$, рассмотрим

$$|I_D(f, \tau, p) - I| = |0 - 0| < \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$$

Таким образом любая функция f интегрируема на жордановом множестве меры нуль, причем значение интеграла равно нулю.

0.18 Выведите формулу для интеграла константы

$$\int \cdots \int_D C dx_1 ... dx_n = C\mu(D), \quad \text{где } C \text{ - константа}$$

Док-во: Пусть имеем некоторое разбиение τ и систему точек p, рассмотрим интегральную сумму

$$I_D(f, \tau, p) = \sum_i f(\xi_i)\mu(D_i) = C \sum_i \mu(D_i)$$

Так как $\forall i \neq j, \ D_i \cap D_j = \varnothing$, а также в силу аддитивности меры имеем

$$C \sum_i \mu(D_i) = C\mu(D)$$

очевидно, что в данном случае

$$I = \int \cdots \int_D C dx_1 ... dx_n = C\mu(D)$$

■

0.19 Дайте определение верхней и нижней сумм Дарбу для ограниченной функции

Пусть $\tau = \{D_i\}$ - некоторое разбиение жорданова множества D. Предполагая функцию f ограниченной на D, введем следующие обозначения

$$m_i = \inf_{x \in D_i} f(x), \qquad M_i = \sup_{x \in D_i} f(x)$$

Опр.: *Нижней* и *верхней суммами Дарбу* ограниченной функции f на D, соответствующими разбиению τ, называются

$$s_D(f, \tau) = \sum_i m_i \mu(D_i), \qquad S_D(f, \tau) = \sum_i M_i \mu(D_i)$$

0.20 Сформулируйте и докажите основные свойства сумм Дарбу

ПРОВЕРИТЬ ВСЕ ЛИ НУЖНЫЕ СВОЙСТВА ТУТ
Св-во: При измельчении разбиения $\tau \leqslant \tau'$ нижняя сумма Дарбу не уменьшается $s_D(f,\tau) \geqslant s_D(f,\tau')$
Док-во: Рассмотрим $D'_j = D_{j1} \sqcup ... \sqcup D_{jk}$. Тогда $\forall i,\ m'_j \leqslant m_{ji}$ и в силу аддитивности меры $\mu(D'_j) = \mu(D_{j1}) + ... + \mu(D_{jk})$
Из этого следует, что

$$m'_j \mu(D'_j) \leqslant m_{j1}\mu(D_{j1}) + ... + m_{jk}\mu(D_{jk})$$

Данное неравенство верно при всех j, из чего как и раз и следует искомое.

■

Св-во: При измельчении разбиения $\tau \leqslant \tau'$ верхняя сумма Дарбу не увеличивается $S_D(f,\tau) \leqslant S_D(f,\tau')$
Док-во: Аналогично предыдущему пункту.

■

Св-во: Для любых разбиений τ и τ' выполняется $s_D(f,\tau) \leqslant S_D(f,\tau')$
Док-во: Рассмотрим измельчение $\tau'' = \tau \cdot \tau'$
Из двух предыдущих пунктов имеем

$$s_D(f,\tau) \leqslant s_D(f,\tau'')$$

$$S_D(f,\tau') \geqslant S_D(f,\tau'')$$

так как $s_D \leqslant S_D$ при каком либо фиксированном разбиении, а также из этих двух неравенств имеем

$$s_D(f,\tau) \leqslant s_D(f,\tau'') \leqslant S_D(f,\tau'') \leqslant S_D(f,\tau')$$

■

0.21 Что такое верхний и нижний интегралы Дарбу для ограниченной функции?

Опр.: *Нижним* и *верхним интегралами Дарбу* называются

$$\overline{s}_D(f) = \sup_\tau s_D(f,\tau), \qquad \underline{S}_D(f) = \inf_\tau S_D(f,\tau)$$

0.22 Сформулируйте и докажите критерий Дарбу интегрируемости ограниченной функции

Разность точных граней ограниченной функции f на множестве D_i называется колебанием функции и обозначается:

$$\omega_i = M_i - m_i = \sup_{x,y \in D_i} |f(x) - f(y)| \geqslant 0$$

используя это обозначение сформулируем теорему
Теор.: *Критерий Дарбу интегрируемости* функции по Риману.
Пусть f - ограниченная функция, тогда f - интегрируема на жордановом множестве D тогда и только тогда когда выполнено следующее

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ \Delta(\tau) < \delta \Rightarrow\ S_D(f,\tau) - s_D(f,\tau) = \sum_i \omega_i \mu(D_i) < \varepsilon$$

Док-во:
Необходимость: Пусть $f \in \mathcal{R}(D)$, тогда выполнено следующее

$$|I_D(f,\tau,p') - I_D(f,\tau,p'')| < \frac{\varepsilon}{3},\ \text{ при } \Delta(\tau) < \delta$$

(доказывается элементарно)
Выбором p интегральная сумма ограниченной функции может быть сделана сколь угодно близкой к нижней (верхней) сумме Дарбу

$$I_D(f,\tau,p') - s_D(f,\tau) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad S_D(f,\tau) - I_D(f,\tau,p'') < \frac{\varepsilon}{3}$$

(также доказывается элементарно)
из этих 3 неравенств следует

$$\varepsilon > |S_D(f,\tau) - I_D(f,\tau,p'')| + |I_D(f,\tau,p'') - I_D(f,\tau,p')| +$$
$$+ |I_D(f,\tau,p') - s_D(f,\tau)| \geqslant$$
$$\geqslant |S_D(f,\tau) - I_D(f,\tau,p'') + I_D(f,\tau,p'') - I_D(f,\tau,p')| +$$
$$+ |I_D(f,\tau,p') - s_D(f,\tau)| =$$
$$= |S_D(f,\tau) - I_D(f,\tau,p')| + |I_D(f,\tau,p') - s_D(f,\tau)| \geqslant$$
$$\geqslant |S_D(f,\tau) - I_D(f,\tau,p') + I_D(f,\tau,p') - s_D(f,\tau)| =$$
$$= |S_D(f,\tau) - s_D(f,\tau)| < \varepsilon$$

Достаточность: Пусть критерий Дарбу выполнен. Сперва докажем, что $\overline{s}_D(f) = \underline{S}_D(f)$. Пусть это не так, тогда $\overline{s}_D(f) < \underline{S}_D(f)$, в таком случае для какого либо τ

$$s_D(f,\tau) \leqslant \overline{s}_D(f) < \underline{S}_D(f) \leqslant S_D(f,\tau)$$

В таком случае можно подобрать такой ε, что критерий выполнятся не будет $\Rightarrow$ противоречие.
Теперь пусть $I = \overline{s}_D(f) = \underline{S}_D(f)$
Очевидно, что для любого разбиения τ и системы точек p выполняется

$$s_D(f,\tau) \leqslant I, I(f,\tau,p) \leqslant S_D(f,\tau)$$

Принимая во внимание данное неравенство, а также критерий Дарбу можно утверждать что

$$|I_D(f,\tau,p) - I|\varepsilon, \quad \text{причем } \Delta(\tau) < \delta$$

что как раз значит, что функция Интегриурема по Риману на D

■

0.23

0.24 Сформулируйте критерий Дюбуа-Реймона интегрируемости ограниченной функции

<u>**Теор.:**</u> *Критерий Дюбуа-Реймона* интегрируемости ограниченной функции. Для любых $\alpha, \nu > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех разбиений τ, удовлетворяющих условию $\Delta(\tau) < \delta$, выполняется

$$\sum_{i:\omega_i \geqslant \alpha} \mu(D_i) < \nu$$

где $\omega_i = \sup\limits_{x\in D_i} f(x) - \inf\limits_{x\in D_i} f(x)$, а D_i - жорданово множество

0.25 Что такое множество лебеговой меры нуль? В каком случае функция называется непрерывной почти всюду на множестве?

<u>**Опр.:**</u> Множество $A \subset \mathbb{R}^m$ имеет m-мерную *меру Лебега нуль*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует счетный набор m-мерных полуинтервалов

$$Q_i = [a_i^1; b_i^1) \times ... \times [a_i^m; b_i^m), \quad i \in \mathbb{N}$$

имеющий сумму мер

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(Q_i) < \varepsilon$$

и объединение которых покрывает A

$$A \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} Q_i$$

<u>**Опр.:**</u> Функция f, определенная на множестве D, называется непрерывной на D *почти всюду*, если существует такое множество A лебеговой меры нуль, что f непрерывна на $D \backslash A$

0.26 Сформулируйте критерий Лебега интегрируемости ограниченной функции

Опр.: Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману. Функция f ограниченная на D, интегрируема на D ровно в том случае, когда она непрерывна на D почти всюду.

0.27 Сформулируйте и докажите свойство линейности интеграла

Св-во: Из того, что $f, g \in \mathcal{R}(D)$ следует, что $f + g \in \mathcal{R}(D)$, причем

$$\int\limits_D (f(x) + g(x))dx = \int\limits_D f(x)dx + \int\limits_D g(x)dx$$

Док-во: Рассмотрим интегральную сумму

$$I_D(f + g, \tau, p) = \sum_i (f + g)(\xi_i)\mu(D_i) = \sum_i f(\xi_i)\mu(D_i) + \sum_i g(\xi_i)\mu(D_i) =$$
$$= I_D(f, \tau, p) + I_D(g, \tau, p)$$

Обе интегральные суммы имеют предел при $\Delta(\tau) \to 0$, а значит и интегральная сумма от $f + g$ имеет предел. Следовательно $f + g \in \mathcal{R}(D)$

■

0.28 Сформулируйте и докажите теорему об интегрируемости произведения ограниченных интегрируемых функций

Теор.: Пусть функции f, g ограничены и интегрируемы на D. Покажите, что

$f \cdot g \in \mathcal{R}(D)$

Док-во: Воспользуемся критерием Дарбу. Заметим, что

$$f(x)g(x) - f(y)g(y) = (f(x) - f(y)) \cdot g(x) + f(y) \cdot (g(x) - g(y))$$

Сл-но, можно оценить колебание произведения функций на D_i

$$w_i(f \cdot g) = \sup_{x,y \in D_i} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| \leqslant C_g w_i(f) + C_f w_i(g)$$

где $C_f = sup|f(x)|$ и $C_g = sup|g(x)|$. Поэтому $\sum w_i(f \cdot g)\mu(D_i)$ мала при малых $\sum w_i(f)\mu(D_i)$ и $\sum w_i(g)\mu(D_i)$

■

0.29 Сформулируйте и докажите утверждение об интеграле от модуля функции.

Теор.: Если ограниченная функция f интегрируема на D, то и $|f| \in \mathcal{R}(D)$
Док-во: Поскольку

$$|f(x) - f(y)| \geqslant |f(x)| - |f(y)|,$$

то колебание функции $w_i(f)$ связано с колебанием функции $|w_i(f)|$ неравенством

$$w_i(f) = \sup_{x,y \in D_i} |f(x) - f(y)| \leqslant \sup_{x,y \in D_i} ||f(x)| - |f(y)|| = w_i(|f|)$$

Остается воспользоваться критерием Дарбу интегрируемости функции

■

0.30 Сформулируйте и докажите теорему о среднем значении.

Теор.: Пусть f, g ограничены и интегрируемы на D, причем $g \geqslant 0$. Покажите, что

$$m \int\limits_D g(x)dx \leqslant \int\limits_D f(x)g(x)dx \leqslant M \int\limits_D g(x)dx,$$

где $m = \inf\limits_{x \in D} f(x)$ и $M = \sup\limits_{x \in D} f(x)$
Док-во: Произведение ограниченных интегрируемых функций - интегрируемая функция. Остается воспользоваться монотонностью интеграла.

■

0.31 Сформулируйте свойство непрерывности интеграла (о предельном переходе под знаком интеграла).

Теорема. Пусть все функции f_n ограничены и интегрируемы на D, а также $f_n \rightrightarrows f$ на D. Тогда функция f будет интегрируема на D и

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_D f_n(x)dx = \int\limits_D f(x)dx.$$

0.32 Сформулируйте свойство аддитивности интеграла.

Теорема. Пусть D — жорданово множество, а функция f — ограничена и интегрируема на D. Пусть A и B это дизъюнктные (непересекающиеся) жордановы подмножества D. Тогда:

$$\int\limits_{A\sqcup B} f(x)dx = \int\limits_A f(x)dx + \int\limits_B f(x)dx.$$

0.33 Как вводится понятие заряда на кольце множеств? Покажите, что для заряда справедлива формула включения-исключения.

Определение. Функция ν, определенная на некотором кольце множеств, называется зарядом, если

a) $\nu(\varnothing) = 0$;

b) $\nu(A \sqcup B) = \nu(A) + \nu(B)$ (аддитивность).

Таким образом, мера — это неотрицательный заряд.

Пример. Пусть f это ограниченная интегрируемая функция на множестве D. В силу свойства аддитивности интеграла имеем

$$\nu(A) = \int\limits_A f(x)dx.$$

Теорема. Для заряда справедлива формула включений-исключений:

$$\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B) - \nu(A \cap B).$$

Доказательство. Заметим, что $A \cup B = A \sqcup (B \setminus A)$ и $B = (B \setminus A) \sqcup (A \cap B)$.

- С одной стороны имеем

$$\nu(A \cup B) = \nu(A \sqcup (B \setminus A)) = \nu(A) + \nu(B \setminus A).$$

- С другой стороны имеем

$$\nu(A)+\nu(B)-\nu(A\cap B) = \nu(A)+\nu((B\setminus A)\sqcup(A\cap B))-\nu(A\cap B) = \nu(A)+\nu(B\setminus A)+\nu(A\cap B)-\nu(A\cap B) = \nu(A)+\nu(B\setminus A).$$

То есть оба выражения равны $\nu(A) + \nu(B \setminus A)$, из чего делаем вывод:

$$\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B \setminus A) = \nu(A) + \nu(B) - \nu(A \cap B).$$

∎

0.34

0.35

0.36

0.37

0.38

0.39

0.40

0.41

0.42

0.43

0.44

0.45 Дайте определение цилиндрических координат (формулы, область задания, координатные линии, матрица Якоби перехода, якобиан)

Цилиндрические координаты (r, φ, z) в пространстве (x, y, z) вводятся формулами

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

$$z = z$$

При этом $U = (0; +\infty) \times [0; 2\pi) \times \mathbb{R}$ и $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) | z \in \mathbb{R}\}$ Выколотая ось z при этом называется полярной осью. Угол φ называется азимутом или азимутальным углом.

Координатные линии r – лучи, выходящие из точки на полярной оси перпендикулярно полярной оси. Координатные линии φ – окружности с центром на полярной оси, расположенные в плоскостях, перпендикулярных полярной оси. Координатные линии z – прямые, параллельные полярной оси.

Матрица Якоби перехода имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Якобиан равен r.

0.46 Дайте определение сферических координат (формулы, область задания, координатные линии, матрица Якоби перехода, якобиан)

Сферические координаты (r, θ, φ) в пространстве (x, y, z) вводятся формулами

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$

$$z = r\cos\theta$$

При этом $U = (0; +\infty) \times (0; \pi) \times [0; 2\pi)$ и $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) | z \in \mathbb{R}\}$ Выколотая ось z при этом называется полярной осью. Угол θ называется полярным углом, а угол φ называется азимутальным углом.

Координатные линии r – лучи, выходящие из начала координат. Координатные линии θ – полуокружности с центром в начале координат, и концами, расположенными на полярной оси. Координатные линии φ – окружности с центром на полярной оси, расположенные в плоскостях, перпендикулярных полярной оси.

Матрица Якоби перехода имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

Якобиан равен $r^2\sin\theta$.

0.47

0.48

0.49

0.50

0.51

0.52

0.53

0.54

0.55

0.56

0.57

0.58

0.59

0.60

0.61

0.62

0.63

0.64 Выведите формулу для площади гладкой поверхности в $\mathbb{R}^3$, заданной уравнением $z = f(x, y)$, f – непрерывно дифференцируемая функция.

Простейший способ задать поверхность D – это задать её как график функции $f(x, y)$. Параметризацией такой поверхности будет

$$z = f(x, y),\ (x, y) \in G$$

Получим формулу для её площади. Вычислислим матрицу Якоби:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f'_x & f'_y \end{pmatrix}$$

Найдём матрицу Грама:

$$\left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x, y)}\right)^T \cdot \left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x, y)}\right) = \begin{pmatrix} (f'_x)^2 + 1 & f'_x f'_y \\ f'_x f'_y & (f'_y)^2 + 1 \end{pmatrix}$$

и её определитель:

$$((f'_x)^2 + 1)((f'_y)^2 + 1) - (f'_x f'_y)^2 = (f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1$$

Получаем площадь графика функции $z = f(x, y)$

$$\mu(D) = \iint_G \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1}\ dxdy$$

0.65 Выведите формулу для площади гладкой поверхности вращения в $\mathbb{R}^3$, заданной в цилиндрических координатах (r, φ, z) уравнением $z = \rho(z)$, где ρ – непрерывно дифференцируемая функция.

Поверхность D называется поверхностью вращения, если она может быть задана в цилиндрических координатах уравнением

$$r = \rho(z)$$

Параметризация поверхности вращения имеет вид

$$x = \rho(z)\cos\varphi,\ y = \rho(z)\sin\varphi,\ z \in [a;b],\ \varphi \in [0;2\pi)$$

Получим формулу для площади поверхности вращения. Вычислислим матрицу Якоби:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(z,\varphi)} = \begin{pmatrix} \rho'(z)\cos\varphi & -\rho(z)\sin\varphi \\ \rho'(z)\sin\varphi & \rho(z)\cos\varphi \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдём матрицу Грама:

$$\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(z,\varphi)}\right)^T \cdot \left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(z,\varphi)}\right) = \begin{pmatrix} (\rho'(z))^2+1 & 0 \\ 0 & \rho^2(z) \end{pmatrix}$$

и её определитель:

$$((\rho'(z))^2+1)\rho^2(z)$$

Получаем площадь поверхности вращения

$$\mu(D) = \iint_G \sqrt{(\rho'(z))^2+1}\,\rho(z)\ dzd\varphi = \int_a^b d\varphi \int_0^{2\pi} \sqrt{(\rho'(z))^2+1}\,\rho(z)\ dz = 2\pi \int_a^b \sqrt{(\rho'(z))^2+1}\,\rho(z)\ dz$$

0.66 Что такое исчерпание $\{D_n\}$ множества $D \subseteq \mathbb{R}^m$? Что можно утверждать в случае, когда D – жорданово множество?

Пусть множество $D \subseteq R^m$ таково, что существует последовательность жордановых множеств $D_n \subseteq D$ такая, что

$$D_1 \subseteq D_2 \subseteq \dots,\ \text{а также}\ D_1 \cup D_2 \cup \dots = D$$

Тогда последовательность $\{D_n\}$ называется *исчерпанием* множества D, а само множество D называется *пределом* возрастающей последовательности $\{D_n\}$.

Теорема. Если D – жорданово, то $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu(D_n) = \mu(D)$

Доказательство. Последовательность жордановых множеств $A_n = D \setminus D_n$ убывает и сходится к пустому множеству. ■

0.67

0.68 Дайте определения понятиям: несобственный интеграл от функции f по множеству D; сходящийся несобственный интеграл; расходящийся несобственный интеграл; функция, интегрируемая на D в несобственном смысле.

Пусть $f : D \to \mathbb{R}$. Исчерпание $\{D_n\}$ множества D называем допустимым для функции f, если $\forall n$ f ограничена и интегрируема на D_n. Рассмотрим последовательность $\int_{D_n} f(x)dx$. Если эта последовательность сходится и её предел не зависит от выбора допустимого исчерпания, то несобственный интеграл $\int_D dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int_{D_n} f(x)dx \in \mathbb{R}$ называется сходящимся, а функцию f называем интегрируемой на D в несобственном смысле. Если предел бесконечен или для различных допустимых исчерпаний получаются разные значения предела, то несобственный интеграл называется расходящимся.

0.69 Что можно утверждать о несобственном интеграле по множеству D от функции, ограниченной и интегрируемой на D в обычном (собственном) смысле?

Если f - ограничена и интегрируема на жордановом множестве D, то $\int_D f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int_{D_n} f(x)dx$.

0.70 Каким основным свойством обладает несобственный интеграл от неотрицательной функции?

Если $f : D \to [0;+\infty)$, т.е. $f \leqslant 0$, то предел $\lim \int_{D_n} f(x)dx$ - существует на $[0;+\infty]$ и не зависит от выбора исчерпания. Следовательно, несобственный интеграл $\int_D f(x)dx$ существует.

0.71 Что можно утверждать о несобственном интеграле от функции, если известно, что несобственный интеграл от ее модуля расходится?

Если для некоторого исчерпания множества D, допустимого для f, $\int_{D_n} |f(x)|dx \to \infty$, то несобственный интеграл $\int_D f(x)dx$ не может быть сходящимся.

0.72

0.73 Сформулируйте мажорантный признак сравнения для несобственного кратного интеграла.

Пусть $g : D \to [0; +\infty)$ - такая, что для любое исчерпание множества D, допустимое для f, будет допустимым для g и $|f(x) \geqslant g(x)|\forall x \in D$. Тогда из сходимости $\int_D g(x)dx \implies$ сходимость $\int_D |f(x)|dx$ и $\int_D f(x)dx$.

0.74

0.75