

Математический Анализ - 2 - Коллоквиум 1

Серёжа Рахманов | [telegram](#), [website](#)

Денис Болонин | [telegram](#)

Версия от 10.10.2020 20:29

1. Дайте определения: числовой ряд, частичная сумма ряда, сумма ряда, сходящийся ряд, расходящийся ряд. Рассмотрим ряд с общим членом a_n . Докажите, что $a_n \rightarrow 0$.

Определение 1. Пусть a_n – последовательность, т.е. $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Формальная бесконечная сумма: $a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется рядом. $S_N = \sum_{n=1}^N a_n$ – частичная сумма, сумма ряда: $S = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N$

Возможны 3 случая:

- (a) $\exists S \in \mathbb{R}$
- (b) $\exists S = \infty$
- (c) $\nexists S$

В первом случае говорят, что ряд сходится, иначе – что ряд расходится.

Замечание. Если ряд сходится, то $a_n \rightarrow 0$

Доказательство. $a_n = S_n - S_{n-1} \rightarrow 0$, т.к. $S_n \rightarrow S$ и $S_{n-1} \rightarrow S$ ■

2. Сформулируйте критерий Коши сходимости числовой последовательности. Сформулируйте и докажите критерий Коши сходимости числового ряда.

Определение 2. a_n называется фундаментальной, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > m > N, |S_n - S_m| < \varepsilon$

Теорема 0.1. S_n – сходится $\Leftrightarrow S_n$ – фундаментальная

Доказательство. $S_n - S_m = \sum_{k=m+1}^n a_k$ Тогда $\sum a_n$ – сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > m > N |a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n| < \varepsilon$ ■

3. Сформулируйте и докажите признак сравнения положительных числовых рядов, основанный на неравенстве $a_n \leq b_n$.

$a_n \leq b_n$ при всех $n \geq n_0$

Ряд $\sum b_n$ сходится \Rightarrow ряд $\sum a_n$ сходится

Ряд $\sum a_n$ расходится \Rightarrow ряд $\sum b_n$ расходится

Доказательство. На основании того, что отбрасывание конечного числа элементов ряда не отражается на его поведении, мы можем считать, что $a_n \leq b_n$ при всех $n = 1, 2, 3, \dots$. Обозначив частные суммы через A и B соответственно, имеем $A_n \leq B_n$. Пусть ряд $\sum b_n$ сходится, тогда B_n ограничена, $B_n \leq S$ ($S = \text{const}, n = 1, 2, 3, \dots$). В таком случае A_n также меньше либо равна некоторому S , что даёт нам ограниченность $\sum a_n$. ■

4. Сформулируйте и докажите признак сравнения положительных числовых рядов, основанный на неравенстве $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$.

Ряд $\sum b_n$ сходится \Rightarrow ряд $\sum a_n$ сходится

Ряд $\sum a_n$ расходится \Rightarrow ряд $\sum b_n$ расходится

Доказательство.

$$a_{n_0+1} \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+1}$$

$$a_{n_0+2} \leq \frac{a_{n_0+1}}{b_{n_0+1}} \cdot b_{n_0+2} \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+2}$$

\vdots

$$a_{n_0+k} \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+k} \implies \sum_{n=n_0}^N a_n \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot \sum_{n=n_0}^N b_n$$

■

5. Сформулируйте и докажите признак сравнения положительных числовых рядов, основанный на пределе $\lim \frac{a_n}{b_n}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0; +\infty) \implies \text{сходимость } \sum a_n \iff \text{сходимость } \sum b_n$$

Доказательство.

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$$

$$\forall \varepsilon \exists n_0 : c - \varepsilon \leq \frac{a_n}{b_n} \leq c + \varepsilon, \text{ при } n \geq n_0$$

$$\text{Возьмём } c - \varepsilon > 0 \implies (c - \varepsilon) \cdot b_n \leq a_n \leq (c + \varepsilon) \cdot b_n$$

Сходимость следует из правой части неравенства, а расходимость из левой.

■

6. Пусть последовательности $\{a_n\}$, $\{A_n\}$ таковы, что $a_n - (A_n - A_{n-1}) = c_n$ и ряд $\sum c_n$ сходится. Докажите, что существует C такое, что $a_1 + a_2 + \dots + a_n = A_n + C + o(1)$.
7. Сформулируйте и докажите признак Лобачевского-Коши.

Предложение. Пусть $a_n > 0$ и $a_n \downarrow$

Тогда ряды $\sum a_n$ и $\sum 2^n \cdot a_{2^n}$ ведут себя одинаково

Доказательство. $a_1 + (a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + \dots + a_8) + \dots$

$$a_2 \leq a_1$$

$$a_2 \leq a_2$$

$$a_3 + a_4 \leq 2a_2$$

$$a_3 + a_4 \geq 2a_4$$

$$a_5 + \dots + a_8 \leq 4a_4$$

$$a_5 + \dots + a_8 \geq 4a_8$$

\dots

$$a_1 + \sum_{n=0}^{m-1} 2^n a_{2^n} \leq \sum_{n=1}^{2^m} a_n \leq a_1 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^m 2^n a_{2^n}$$

■

8. Сформулируйте теорему Штольца о пределе последовательности. Покажите на примере, как с помощью теоремы Штольца можно уточнить асимптотическую оценку для частичной суммы ряда. $\frac{p_n}{q_n}$, $p_n, q_n \rightarrow 0$.

Теорема 0.2. (Штольца.) Если $p_n, q_n \rightarrow 0, q_n \downarrow$ и $\exists \lim \frac{p_{n+1} - p_n}{q_{n+1} - q_n}$, то $\lim \frac{p_n}{q_n} = \lim \frac{p_{n+1} - p_n}{q_{n+1} - q_n}$

9. Пусть $\sum a_n, \sum a'_n$ - сходящиеся положительные ряды. Говорят, что ряд $\sum a'_n$ сходится быстрее ряда $\sum a_n$, если $a'_n = o(a_n)$. Докажите, что в этом случае также $r'_n = o(r_n)$, где r_n, r'_n - остатки соответствующих рядов.

Рассмотрим остатки каждого из рядов. $r_n = S - S_N$, где S_N - частичная сумма ряда $\sum a_n$ и $S_N \rightarrow S$ при $N \rightarrow \infty$. Для $\sum a'_n$ аналогично $r'_n = S' - S'_N$, где S'_N - частичная сумма ряда $\sum a'_n$ и $S'_N \rightarrow S'$ при $N \rightarrow \infty$. Идёт речь о том, что ряд a'_n сходится быстрее ряда a_n , т.е. оба ряда сходятся и $S = S'$. Но, поскольку члены рядов находятся в отношении $a'_n = o(a_n)$, то мы можем сделать выводы о частичных суммах S_N и S'_N . $\forall N, S'_N = o(S_N)$, что указывает нам в результате на отношение между остатками $r'_n = o(r_n)$.

10. Пусть $\sum a_n, \sum a'_n$ - расходящиеся положительные ряды. Говорят, что ряд $\sum a'_n$ расходится медленнее ряда $\sum a_n$, если $a'_n = o(a_n)$. Докажите, что в этом случае также $S'_n = o(S_n)$, где S_n, S'_n - частичные суммы соответствующих рядов.

Оба ряда расходятся, тогда $S_n \rightarrow \infty$ и $S'_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Мы понимаем, что $S_n = \sum_{n=1}^N a_n, S'_n = \sum_{n=1}^N a'_n$. Это

значит, что для некоторого n_1 мы имеем следующее: $S_{n_1} = \sum_{n=1}^{n_1} a_n, S'_{n_1} = \sum_{n=1}^{n_1} a'_n$, где для любого $n = 1, 2, 3, \dots, n_1$

выполняется отношение $a'_n = o(a_n)$. В таком случае для частичных сумм справедливо отношение $S'_{n_1} = o(S_{n_1})$. А так как и для всех последующих a_n и a'_n также справедливо отношение $a'_n = o(a_n)$, то мы можем сказать, что $S'_n = o(S_n)$.

11. Пусть положительный ряд $\sum a_n$ расходится и S_n его частичная сумма. Докажите, что ряд $\sum(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}})$ также расходится, причём медленнее, чем ряд $\sum a_{n+1}$.

$r_n = S - S_n$, тогда $\frac{\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}}}{a_{n+1}} = \frac{\sqrt{S - S_n} - \sqrt{S - S_{n+1}}}{a_{n+1}} = \frac{S_{n+1} - S_n}{(S_{n+1} - S_n)(\sqrt{S - S_n} + \sqrt{S - S_{n+1}})}$, где $(S_{n+1} - S_n)(\sqrt{S - S_n} + \sqrt{S - S_{n+1}}) \rightarrow \infty$, $\frac{S_{n+1} - S_n}{(S_{n+1} - S_n)(\sqrt{S - S_n} + \sqrt{S - S_{n+1}})} \rightarrow 0$. Тогда ряд $\sum(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}})$ расходится, причём медленнее, чем ряд $\sum a_{n+1}$.

12. Пусть положительный ряд $\sum a_n$ расходится и S_n его частичная сумма. Докажите, что ряд $\sum(\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n})$ также расходится, причём медленнее, чем ряд $\sum a_{n+1}$.

$\frac{\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n}}{a_{n+1}} = \frac{\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n}}{S_{n+1} - S_n} = \frac{1}{\sqrt{S_{n+1}} + \sqrt{S_n}}$, где $\sqrt{S_{n+1}} + \sqrt{S_n} \rightarrow \infty$, а значит $\frac{1}{\sqrt{S_{n+1}} + \sqrt{S_n}} \rightarrow 0$. Тогда ряд $\sum(\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n})$ расходится, причём медленнее, чем ряд $\sum a_{n+1}$.

13. Сформулируйте признак Даламбера для положительного ряда

Теорема 0.3. *Признак Даламбера. Пусть $a_n > 0$.*

$\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \text{ряд } \sum a_n \text{ сходится.}$

$\underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies \text{ряд } \sum a_n \text{ расходится.}$

14. Сформулируйте радикальный признак Коши для положительного ряда.

Теорема 0.4. *Радикальный признак Коши. Пусть $a_n \geq 0$.*

$\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} < 1 \implies \text{ряд } \sum a_n \text{ сходится.}$

$\underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} > 1 \implies \text{ряд } \sum a_n \text{ расходится.}$

15. Докажите, что всякий раз, когда признак Даламбера даёт ответ на вопрос о сходимости ряда, то радикальный признак Коши даёт (тот же) ответ на этот вопрос.

Пусть $a_n > 0$. Тогда:

$$\underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Если $\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} < 1$

Если $\underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies \underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} > 1$

Если $\exists \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$, то $\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} \implies \exists \lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$

16. -

17. -

18. Приведите пример ряда, который сходится медленнее любого ряда геометрической прогрессии, но быстрее любого обобщённого гармонического ряда (с обоснованием).

Рассмотрим $e^{-\sqrt{n}}$

$\sum q^n$ - ряд геометрической прогрессии, $0 < q < 1$; $q^n = e^{n \ln q}$, где $\ln q < 0$

$\sum \frac{1}{n^p}$ - обобщённый гармонический ряд. $\frac{1}{n^p} = e^{-p \ln n}$, $p > 1$.

$p \ln n < \sqrt{n} < n \ln \frac{1}{q}$, $\forall p, q$ при $n \geq n_0$.

$\frac{e^{-\sqrt{n}}}{q^n} = e^{-\sqrt{n} + n \ln \frac{1}{q}} \rightarrow +\infty$, где $-\sqrt{n} + n \ln \frac{1}{q} \rightarrow +\infty \Rightarrow \sum e^{-\sqrt{n}}$ сходится медленнее ряда геометрической прогрессии.

$\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^p}} = e^{-\sqrt{n} + p \ln n} \rightarrow 0$, где $-\sqrt{n} + p \ln n \rightarrow -\infty \Rightarrow \sum e^{-\sqrt{n}}$ сходится быстрее гармонического ряда.

19. Сформулируйте признак Гаусса для положительного ряда. Приведите пример применения признака Гаусса.

Если $\exists \delta > 0$, $p: \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right)$ то:

$p > 1 \Rightarrow$ ряд $\sum a_n$ сходится.

$p \leq 1 \Rightarrow$ ряд $\sum a_n$ расходится.

20. -

21. -

22. Что такое улучшение сходимости положительного ряда? Покажите на примере как можно улучшить сходимость ряда.

Пусть у нас есть некоторый ряд $\sum a_n$ и он сходится медленно. В таких случаях для расчёта суммы ряда с необходимой точностью потребуется взять больше членов, что неудобно. Мы можем преобразовать наш ряд для улучшения сходимости, т.е. получить некоторый ряд $\sum a'_n$, который будет сходиться быстрее, чем исходный $\sum a_n$.

Пример. Пусть у нас есть ряд $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Воспользуемся методом Куммера. Для улучшения сходимости будем брать ряды вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}, \dots$

В данном случае нам подойдёт первый ряд в этом списке, поскольку $\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n(n+1)}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2 + 2} - \frac{1}{n(n+1)} \right) = S - 1 \Rightarrow S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2 + 2} - \frac{1}{n(n+1)} \right).$$

$$\frac{1}{n^2 + 2} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2} \cdot \left(\frac{1}{\frac{n^2}{n^2} + \frac{2}{n^2}} - \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right) = \frac{1}{n^2} \cdot \left(1 - \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} - o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Получили ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, который сходится быстрее, $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2}$.

23. Дайте определения: знакопеременный ряд, знакопеременный ряд, абсолютно сходящийся ряд, условно сходящийся ряд, положительная часть ряда, отрицательная часть ряда.

Определение 3. Пусть существует ряд $\sum a_n$. такой, что $\forall i, a_i$ может быть, как больше 0, так и меньше 0. В таком случае ряд $\sum a_n$ называется знакопеременным.

Определение 4. Пусть существует ряд $\sum a_n$. такой, что $\forall i, a_i \cdot a_{i+1} < 0$. В таком случае ряд $\sum a_n$ называется знакопеременным.

Определение 5. Рассмотрим дополнительный ряд $\sum |a_n|$. В случае, когда он расходится, мы называем ряд $\sum a_n$ абсолютно сходящимся. Если $\sum |a_n|$ расходится, то $\sum a_n$ называется сходящимся условно.

Определение 6. Введем два ряда: $a_n^+ = \begin{cases} a_n, & a_n > 0 \\ 0 & \end{cases}$ и $a_n^- = \begin{cases} |a_n|, & a_n < 0 \\ 0 & \end{cases}$. Тогда ряды $\sum a_n^+$ и a_n^- соответственно называются положительной и отрицательной частью ряда $\sum a_n$.

24. Докажите, что ряд сходится абсолютно ровно в том случае, когда сходятся его положительная и отрицательная части.

Доказательство. Рассмотрим ряд $\sum a_n$, дополнительный ряд $\sum |a_n|$, а также положительную и отрицательную части $\sum a_n^+$ и $\sum a_n^-$.

1) Пусть ряд $\sum a_n$ сходится абсолютно. В таком случае ряд $\sum |a_n|$ сходится, а так как члены рядов $\sum a_n^+$ и $\sum a_n^-$ все содержатся в ряде $\sum |a_n|$, то для всех их частичных сумм справедливо следующее: $P_k \leq A'_n$ и $Q_m \leq A'_n$, где P_k и Q_m - частичные суммы положительной и отрицательной части соответственно, а A'_n - частичная сумма дополнительного ряда и $A'_n = P_k + Q_m, n = m + k$. Это значит, что оба ряда $\sum a_n^+$ и $\sum a_n^-$ сходятся.

2) Исходя из того, что $S_n = P_k - Q_m, n = m + k$ и положительных и отрицательных элементов в $\sum a_n$ бесконечное множество, мы получаем, что при $n \rightarrow \infty$ одновременно $m \rightarrow \infty$ и $k \rightarrow \infty$. Переходя к пределу получаем, что исходный ряд сходится абсолютно и его сумма будет равна $P - Q$. ■

25. Докажите, что если ряд сходится условно, то его положительная и отрицательная части расходятся (имеют бесконечные суммы).

Доказательство. Рассмотрим ряд $\sum a_n$, дополнительный ряд $\sum |a_n|$, а также положительную и отрицательную части $\sum a_n^+$ и $\sum a_n^-$. Поскольку ряд $\sum a_n$ сходится условно, то $\sum |a_n|$ расходится. Рассмотрим частичные суммы $\sum |a_n|$, $\sum a_n^+$ и $\sum a_n^-$ - A'_n, P_k, Q_m соответственно. Для любого $n = m + k$, $A'_n = P_k + Q_m$. При $n \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$ и $k \rightarrow \infty$. Так как ряд $\sum |a_n|$ расходится, то сумма $A'_n \rightarrow \infty$. Поскольку число положительных и отрицательных элементов бесконечно, то получаем $P_k \rightarrow \infty$ и $Q_m \rightarrow \infty$, а значит ряды $\sum a_n^+$ и $\sum a_n^-$ расходятся. ■

26. Сформулируйте мажорантный признак Вейерштрасса. Приведите пример применения признака

Теорема 0.5. Если $|a_n| \leq b_n$ при $n > n_0$ и положительный ряд $\sum b_n$ сходится, то $\sum a_n$ сходится, причём абсолютно.

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^p}, p > 0$

$$|\sin(nx)| \leq 1 \implies \left| \frac{\sin(nx)}{n^p} \right| \leq \frac{1}{n^p}$$

$$\sum \frac{1}{n^p} \text{ сходится } (p > 1) \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^p} \text{ сходится абсолютно.}$$

27. Что такое группировка членов ряда? Докажите, что любой ряд, полученный из сходящегося ряда группировкой его членов, сходится и имеет ту же сумму

Говорят, что ряд $\sum b_k$ получен из $\sum a_n$ группировкой членов, если $\exists n_1 < n_2 < \dots$:

$$b_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1}$$

$$b_2 = a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \dots + a_{n_2}$$

...

Замечание. Если $\sum a_n$ сходится, то ряд $\sum b_k$ сходится к той же сумме.

$$\text{Доказательство. } \sum_{k=1}^m b_k = \sum_{n=1}^{n_m} a_n$$

Обратное утверждение неверно: $(1 - 1) + (1 - 1) + \dots$

28. Как с помощью группировки преобразовать знакопеременный ряд в знакочередующийся? Что можно утверждать о сходимости полученного знакочередующегося ряда?

Знакопеременный ряд при помощи группировки сводится к знакочередующемуся:

$$a_1 \leq 0, \dots, a_{n_1} \leq 0; b_1 = \sum_{i=1}^{n_1} a_i \leq 0$$

$$a_{n_1+1} \geq 0, \dots, a_{n_2} \geq 0; b_1 = \sum_{i=n_1+1}^{n_2} a_i \leq 0$$

При такой группировке сходимость исходного ряда \iff сходимость $\sum b_n$

29. Приведите пример преобразования знакопеременного (но не знакочередующегося) ряда к знакочередующемуся.

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k, \text{ где } b_k = (-1)^k$$

$$|b_k| = \sum_{n=[e^k]+1}^{[e^{k+1}]} \frac{1}{n} \leq \frac{1}{[e^k]+1} \cdot ([e^{k+1}] - [e^k]) \approx \frac{e^{k+1} - e^k}{e^k} \rightarrow e - 1 > 0$$

30. -

31. Сформулируйте признак Лейбница для знакочередующегося ряда. Приведите пример применения признака Лейбница.

Теорема 0.6. *Признак Лейбница. Если $u_n \downarrow 0$, то ряд сходится, причём $|r_n| \leq u_{n+1}$*

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}, p > 0$

$$\frac{1}{n^p} \downarrow 0 \implies \text{ряд сходится (при } \forall p > 0)$$

32. -

33. Покажите, что для любых числовых последовательностей $\{a_n\}, \{B_n\}$ справедлива формула суммирования по частям:

$$\sum_{n=m+1}^N a_n(B_n - B_{n-1}) = (a_N B_N - a_m B_m) - \sum_{n=m+1}^N (a_n - a_{n-1}) B_{n-1}$$

Суммируем равенство по индексу n : $\sum_{n=m+1}^N \cdot \sum_{n=m+1}^N a_n(B_n - B_{n-1}) = \sum_{n=m+1}^N (a_n B_n - a_{n-1} B_{n-1}) - \sum_{n=m+1}^N (a_n - a_{n-1}) B_{n-1}$. Получаем из первой скобки путём сокращения элементов $a_N B_N - a_m B_m$. В итоге получаем $\sum_{n=m+1}^N a_n(B_n - B_{n-1}) = (a_N B_N - a_m B_m) - \sum_{n=m+1}^N (a_n - a_{n-1}) B_{n-1}$.

34. Сформулируйте признак Дирихле. Приведите пример его применения.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$$

Теорема 0.7. *Признак Дирихле. Если $a_n \downarrow 0$, а частичные суммы $\left| \sum_{n=1}^N b_n \right| \leq C$ ограничены, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ сходится.*

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^p}, p > 0$

$$a_n = \frac{1}{n^p} \downarrow 0, b_n = \sin nx$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_N = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin Nx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos((N+1/2)x)}{2 \sin \frac{x}{2}}; \left| \sum_{n=1}^N b_n \right| \leq \frac{2}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin \frac{x}{2}}$$

Ряд сходится по признаку Дирихле

35. Сформулируйте признак Абеля. Выведите утверждение признака Абеля из признака Дирихле.

Теорема 0.8. *Признак Абеля. Если a_n монотонна и ограничена, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ сходится.*

36. Что такое перестановка членов ряда? Приведите пример.

Пусть $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ – биекция

Говорят, что ряд $\sum b_n$ получен из $\sum a_n$ перестановкой членов, если $b_n = a_{f(n)}$

37. -

38. Сформулируйте свойство абсолютно сходящегося ряда, связанное с перестановкой членов. (теорема Римана)

Теорема 0.9. (Римана) *Если ряд $\sum a_n$ сходится условно, то для $\forall S \in [-\infty; +\infty]$ то \exists перестановка f такая, что $\sum a_{f(n)} = S$*

39. -

40. Как определяется произведение рядов? Что можно утверждать о произведении абсолютно сходящихся рядов?

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{m=1}^{\infty} b_m$$

$$\left(\sum_{k=1}^K a_k \right) \cdot \left(\sum_{m=1}^M b_m \right) = \sum_{1 \leq k \leq K, 1 \leq m \leq M} a_k \cdot b_m$$

Если эта сумма имеет предел при $K, M \rightarrow \infty$, не зависящий от порядка суммирования, то говорят, что определено произведение рядов.

Теорема 0.10. (Коши) *Если $\sum a_k, \sum b_m$ сходятся абсолютно, то определено их произведение.*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} \cdot b_{m_n}$$

41. Что такое произведение рядов в форме Коши? Приведите пример вычисления такого произведения.

Произведение рядов по Коши:

$$c_2 = a_1 \cdot b_1$$

$$c_3 = a_2 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_2$$

$$c_4 = a_3 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_3$$

...

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m \right) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n$$

42. Дайте определения: бесконечное произведение, частичное произведение, сходящееся бесконечное произведение, расходящееся бесконечное произведение

$$\prod_{n=1}^N a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_N - \text{частичное произведение.}$$

Бесконечным произведением называют формальную запись $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$

Значением бесконечного произведения является предел частичного произведения:

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N a_n$$

Если предел существует и он конечен – то бесконечное произведение сходится, иначе расходится.

43. Сформулируйте и докажите необходимое условие сходимости бесконечного произведения.

$$\text{Если } P_N = \prod_{n=1}^N a_n \text{ сходится, то } a_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} \rightarrow 1$$

44. -

45. Как определяется соответствующий бесконечному произведению ряд? Сформулируйте и докажите утверждение об их взаимосвязи.

$$\prod_{n=1}^N a_n = e^{\ln \prod_{n=1}^N a_n} = e^{\sum_{n=1}^N \ln a_n}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = P \iff \sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n = \ln P \quad (P \neq 0, a_n \rightarrow 1)$$

46. В каком случае бесконечное произведение называется сходящимся абсолютно? Сформулируйте и докажите критерий абсолютной сходимости бесконечного произведения

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n \text{ называется абсолютно сходящимся, если абсолютно сходится соответствующий ему ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n$$

Замечание. $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно $\iff \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 1)$ сходится абсолютно.

47. Напишите произведение Валлиса и его значение. Вычисление каких интегралов приводит к этой формуле?

Пример. (Произведение Валлиса) $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1} = \frac{\pi}{2}$ - получается из анализа интегралов $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$

Прим. ред.: есть отличное [видео](#) с интуитивно понятным доказательством.

48. Дайте определение дзета-функции (ζ -функция) Римана. Сформулируйте тождество Эйлера для ζ -функции.

Пример. (Дзета-функция Римана) $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, s > 1$

Тождество Эйлера:

$$\zeta(s) = \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{p_n^s})}, \text{ где } p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots$$