Математический Анализ - 2

Серёжа Рахманов | telegram, website
Максим Николаев | telegram

Версия от 29.09.2020 13:34

Содержание

1 Лекция 1 - 01.09.2020 - Ряды

1.1 Определение ряда

Определение 1. Пусть a_n – последовательность, т.е. $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Формальная бесконечная сумма: $a_1+a_2+a_3+\dots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется рядом. $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n$ – частичная сумма, сумма ряда: $S = \lim\limits_{N\to\infty} S_N$

Возможны 3 случая:

1. $\exists S \in \mathbb{R}$
2. $\exists S = \infty$
3. $\nexists S$

В первом случае говорят, что ряд сходится, иначе – что ряд расходится.

Пример.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 0 = 0 + 0 + \dots + 0 = 0$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + \dots + 1 = \infty$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - \dots$ не существует

Определение 2. Если ряд сходится, т.е. $S_N \to S$ при $N \to \infty$, то $S - S_N = r_N$ – остаток ряда

$r_N = \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} a_n$, $r_N \to 0$ при $N \to \infty$

1.2 Необходимое условие сходимости

Замечание. Если ряд сходится, то $a_n \to 0$

Доказательство. $a_n = S_n - S_{n-1} \to 0$, т.к. $S_n \to S$ и $S_{n-1} \to S$ ∎

1.3 Критерий Коши

Определение 3. a_n называется фундаментальной, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > m > N \implies |S_n - S_m| < \varepsilon$

Теорема 1.1. *S_n – сходится $\Leftrightarrow$ S_n – фундаментальная*

Доказательство. $S_n - S_m = \sum\limits_{k=m+1}^{n} a_k$ Тогда $\sum a_n$ – сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > m > N\ |a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n| < \varepsilon$ ∎

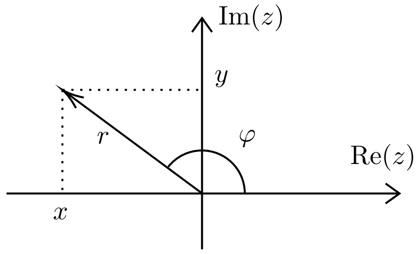
Пример.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

   Заметим, что $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum\limits_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1} \to 1$

   Этот ряд сходится при $N \to \infty$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

2. $z \in \mathbb{C}$, $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$



Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots$

$S_N = 1 + z + z^2 + \dots + z^N = \dfrac{1 - z^{N+1}}{1 - z}$

Ряд сходится $\Leftrightarrow |z| < 1$

$|z| < 1 \Rightarrow z^n \to 0$, $S_N = \dfrac{1 - z^{N+1}}{1 - z} \to \dfrac{1}{1 - z}$

1.4 Положительные ряды

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \geqslant 0$, $S_n \uparrow$, т.к. $S_{n+1} \geqslant S_n$

Возможны 2 случая:

1. $\exists S \in \mathbb{R}$
2. $\exists S = \infty$

Обозначение 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ – ряд сходится, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ – ряд расходится.

1.5 Признаки сравнения

1. Сравнение с помощью неравенства.

   $a_n \leqslant b_n$ при всех $n \geqslant n_0$

   Ряд $\sum b_n$ сходится $\implies$ ряд $\sum a_n$ сходится

   Ряд $\sum a_n$ расходится $\implies$ ряд $\sum b_n$ расходится

2. Сравнение отношений.

   $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ при всех $n \geqslant n_0$

   Ряд $\sum b_n$ сходится $\implies$ ряд $\sum a_n$ сходится

   Ряд $\sum a_n$ расходится $\implies$ ряд $\sum b_n$ расходится

   Доказательство.

   $a_{n_0+1} \leqslant \dfrac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+1}$

   $a_{n_0+2} \leqslant \dfrac{a_{n_0+1}}{b_{n_0+1}} \cdot b_{n_0+2} \leqslant \dfrac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+2}$

   $\vdots$

   $a_{n_0+k} \leqslant \dfrac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+k} \implies \sum\limits_{n=n_0}^{N} a_n \leqslant \dfrac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot \sum\limits_{n=n_0}^{N} b_n$ ■

3. Сравнение с помощью предела.

   $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} \in (0; +\infty) \implies$ сходимость $\sum a_n \iff$ сходимость $\sum b_n$

   Доказательство.

   $c = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} > 0$

   $\forall \varepsilon\ \exists n_0 :\ c - \varepsilon \leqslant \dfrac{a_n}{b_n} \leqslant c + \varepsilon, \forall n \geqslant n_0$

   Возьмём $\varepsilon : c - \varepsilon > 0 \implies (c - \varepsilon) \cdot b_n \leqslant a_n \leqslant (c + \varepsilon) \cdot b_n$

   Сходимость следует из правой части неравенства, а расходимость из левой. ■

1.6 Отсутствие универсального ряда сравнения

Предложение. Не существует ряда $\sum c_n$, $c_n > 0$:

1) $\dfrac{a_n}{c_n} \to 0 \implies$ ряд $\sum a_n$ сходится.

2) $\dfrac{b_n}{c_n} \to \infty \implies$ ряд $\sum b_n$ расходится.

Доказательство.

1. Если ряд $\sum c_n$ расходится, то пусть $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} c_n \to \infty, S_0 = 0$, тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\underbrace{\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}}}_{a_n})$ расходится так как:

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{N}(\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}}) = \sqrt{S_1} - \sqrt{S_0} + \sqrt{S_2} - \sqrt{S_1} + \dots + \sqrt{S_N} - \sqrt{S_{N-1}} = \sqrt{S_N} - \sqrt{S_0} = \sqrt{S_N} \to \sqrt{S}$

   (b) $\dfrac{\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}}}{c_n} = \dfrac{\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}}}{S_n - S_{n-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}}} \implies \dfrac{a_n}{c_n} \to 0$

   Ряд расходится, но по предположению сходится, получили противоречие.

2. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, то рассмотрим r_n - его n-ный остаток, тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\underbrace{\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}}_{b_n})$, $r_0 = S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, так как:

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{N}(\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}) = \sqrt{r_0} - \sqrt{r_1} + \sqrt{r_1} - \sqrt{r_2} + \dots + \sqrt{r_{N-1}} - \sqrt{r_N} = \sqrt{r_0} - \sqrt{r_N} = \sqrt{S} - \sqrt{r_N} \to \sqrt{S}$, т.к. $r_N \to 0$

   (b) $\dfrac{\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}}{c_n} = \dfrac{\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}}{r_{n-1} - r_n} = \dfrac{1}{\sqrt{r_{n-1}} + \sqrt{r_n}} \to \infty$, т.к. $\sqrt{r_{n-1}} \to 0$ и $\sqrt{r_n} \to 0$

   Ряд сходится, но по предположению расходится, получили противоречие.

■

2 Лекция 2 - 08.09.2020 - Положительные ряды

2.1 Признак Лобачевского-Коши

Предложение. Пусть $a_n > 0$ и $a_n \downarrow$

Тогда ряды $\sum a_n$ и $\sum 2^n \cdot a_{2^n}$ ведут себя одинаково

Доказательство. $a_1 + (a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + \dots + a_8) + \dots$

$a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_2$

$2a_2 \geqslant a_3 + a_4 \geqslant 2a_4$

$4a_4 \geqslant a_5 + \dots + a_8 \geqslant 4a_8$

$\vdots$

$a_1 + \sum\limits_{n=0}^{m-1} 2^n a_{2^n} \geqslant \sum\limits_{n=1}^{2^m} a_n \geqslant a_1 + \frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{m} 2^n a_{2^n}$

■

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ – обобщённый гармонический ряд, $p > 0$

$a_n = \frac{1}{n^p} \downarrow \qquad a_{2^n} = \frac{1}{(2^n)^p}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^p} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2^n)^{p-1}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n$

Это сумма геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{2^{p-1}}$

$q < 1 \iff p > 1$ – ряды сходятся, например: $\sum \frac{1}{n^{1,001}}, \ \sum \frac{1}{n^2}$

$q \geqslant 1 \iff p \leqslant 1$ – ряды расходятся, например: $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}, \ \sum \frac{1}{n}$

Пример. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^p n}, p > 0$

$\frac{1}{n \cdot \ln^p n} \downarrow, a_{2^n} = \frac{1}{2^n \cdot \ln^p 2^n} = \frac{1}{2^n \cdot n^p \cdot \ln^p 2}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \cdot n^p \cdot \ln^p 2} = \frac{1}{\ln^p 2} \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

2.2 Теорема Штольца и оценка частичных сумм гармонического ряда

Гармонический ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$

$A_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} - \ln n$

$B_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$

$A_n \uparrow, B_n \downarrow$

$B_n > A_n$

$B_1 > \dots > B_{n-1} > B_n > A_n > A_{n-1} > \dots > A_1, \forall n \in \mathbb{N}$

$B_n - A_n = \frac{1}{n} \to 0$

Значит, $\exists \lim A_n = \lim B_n = \gamma \approx 0.5772\dots$ – число Эйлера-Маскерони

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N} = \ln N + \gamma + o(1)$$

Теорема 2.1. *(Штольца.) Если $p_n, q_n \to 0, q_n \downarrow$ и $\exists lim \frac{p_{n+1} - p_n}{q_{n+1} - q_n}$, то $\lim \frac{p_n}{q_n} = \lim \frac{p_{n+1} - p_n}{q_{n+1} - q_n}$*

Теперь с помощью теоремы Штольца уточним остаточный член у гармонического ряда:

$$\lim \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n - \gamma}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{\frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}} = \lim \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} - 1\right)} \overset{\heartsuit}{=}$$

$\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}} = 1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

$\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

Получаем, что $\overset{\heartsuit}{=} \lim \dfrac{-\dfrac{1}{2n^2}}{-\dfrac{1}{n^2}} = \dfrac{1}{2}$

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + \underbrace{\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}_{o(1)}$$

Так как

$$\frac{1 + \dfrac{1}{2} + \dots + \dfrac{1}{n} - \ln n - \gamma - \dfrac{1}{2n}}{\dfrac{1}{n}} \to 0$$

2.3 Признак Даламбера и радикальный признак Коши

Теорема 2.2. *Признак Дарамбера. Пусть $a_n > 0$.*

$\overline{\lim}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies$ *ряд* $\sum a_n$ *сходится.*

$\underline{\lim}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies$ *ряд* $\sum a_n$ *расходится.*

Теорема 2.3. *Радикальный признак Коши. Пусть $a_n \geqslant 0$.*

$\overline{\lim}\sqrt[n]{a_n} < 1 \implies$ *ряд* $\sum a_n$ *сходится.*

$\underline{\lim}\sqrt[n]{a_n} > 1 \implies$ *ряд* $\sum a_n$ *расходится.*

Пример. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{n!}, \quad p > 0$

$a_n = \dfrac{p^n}{n!}, \quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{p^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \dfrac{n!}{p^n} = \dfrac{p}{n+1} \to 0 < 1 \implies$ ряд сходится по признаку Даламбера.

$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\dfrac{p^n}{n!}} = \dfrac{p}{\sqrt[n]{n!}} \to 0 < 1 \implies$ ряд сходится по радикальному признаку Коши. ($\sqrt[n]{n!} \to \infty$)

2.4 Радикальный признак сильнее признака Даламбера

Пусть $a_n > 0$. Тогда:

$$\underline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \underline{\lim}\sqrt[n]{a_n} \leqslant \overline{\lim}\sqrt[n]{a_n} \leqslant \overline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Если $\overline{\lim}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \overline{\lim}\sqrt[n]{a_n} < 1$

Если $\underline{\lim}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies \underline{\lim}\sqrt[n]{a_n} > 1$

Если $\exists \lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, то $\overline{\lim}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \underline{\lim}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow \exists \lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

2.5 Признак Гаусса

(Сравнение с $\sum \dfrac{1}{n^p}$)

Если $\exists \delta > 0, p{:} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \dfrac{p}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^{1+\delta}}\right)$ то:

$p > 1 \implies$ ряд $\sum a_n$ сходится.

$p \leqslant 1 \implies$ ряд $\sum a_n$ расходится.

2.6 Сравнение с интегралом

Рассмотрим $f(x)\downarrow$ при $x \geqslant n_0 - 1$ и ряд $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$, где $a_n = f(n)$

$$f(n+t) \leqslant a_n \leqslant f(n-1+t), t \in [0;1]$$

$$\int_0^1 dt: \qquad \int_n^{n+1} f(x)dx \leqslant a_n \leqslant \int_{n-1}^{n} f(x)dx$$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}: \qquad \int_{n_0}^{N+1} f(x)dx \leqslant \sum_{n=n_0}^{N} a_n \leqslant \int_{n_0-1}^{N} f(x)dx$$

$\implies \sum a_n$ ведёт себя так же как несобственный интеграл $\int^{\infty} f(x)dx$

2.7 Улучшение сходимости ряда

Пример. $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+2} \approx \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$

Для улучшения сходимости будем пользоваться рядами такого типа:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}, \quad \dots$$

Такие ряды достаточно легко считаются, в нашем примере воспользуемся первым т.к. $\dfrac{1}{n(n+1)} \sim \dfrac{1}{n^2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2+2} - \frac{1}{n(n+1)}\right) = S - 1 \implies S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2+2} - \frac{1}{n(n+1)}\right)$$

$$\frac{1}{n^2+2} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{2}{n^2}} - \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n^2} \cdot \left(1 - \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) = \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Слагаемые убывают быстрее, чтобы получить число с определённой точностью потребуется значительно меньше сложений.

Получили, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+2} \approx 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$

3 Лекция 3 - 15.09.2020 - Знакопеременные ряды

3.1 Абсолютная и условная сходимость

Определение 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \in \mathbb{R}$

Если $a_n \cdot a_{n+1} < 0$, то ряд называется знакочередующимся.

Пусть $\sum a_n$ сходится

Определение 5. Рассмотрим дополнительный ряд $\sum |a_n|$ (*)

Если (*) сходится, то $\sum a_n$ называется сходящимся абсолютно

Если (*) расходится, то $\sum a_n$ называется сходящимся условно

Определение 6. Введём $a_n^+ = \begin{cases} a_n, a_n > 0 \\ 0 \end{cases}$ $\quad a_n^+ = \begin{cases} |a_n|, a_n < 0 \\ 0 \end{cases}$

Ряды $\sum a_n^+$, $\sum a_n^-$ называются положительной и отрицательной частью исходного ряда $\sum a_n$

$S_N^+ = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n^+$, $S_N^- = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n^-$

$a_n = a_n^+ - a_n^-$, $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S_N^+ - S_N^-$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S_N^+ + S_N^-$

Замечание. Ряд $\sum a_n$ сходится абсолютно $\iff$ оба ряда $\sum a_n^+$, $\sum a_n^-$ сходятся Ряд $\sum a_n$ сходится условно $\implies$ оба ряда $\sum a_n^+$, $\sum a_n^-$ расходятся

3.2 Мажорантный признак Вейерштрасса

Теорема 3.1. *Если $|a_n| \leqslant b_n$ при $n > n_0$ и положительный ряд $\sum b_n$ сходится, то $\sum a_n$ сходится, причём абсолютно.*

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(nx)}{n^p}$, $p > 0$

$|sin(nx)| \leqslant 1 \implies \left|\dfrac{sin(nx)}{n^P}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^p}$

$\sum \dfrac{1}{n^p}$ сходится $(p > 1) \implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(nx)}{n^p}$ сходится абсолютно.

3.3 Группировка членов ряда

Говорят, что ряд $\sum b_k$ получен из $\sum a_n$ группировкой членов, если $\exists n_1 < n_2 < \dots$:

$b_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1}$

$b_2 = a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \dots + a_{n_2}$

$\dots$

Замечание. Если $\sum a_n$ сходится, то ряд $\sum b_k$ сходится к той же сумме.

Доказательство. $\sum\limits_{k=1}^{m} b_k = \sum\limits_{n=1}^{n_m} a_n$ ■

Обратное утверждение неверно: $(1-1)+(1-1)+\dots$

Знакопеременный ряд при помощи группировки сводится к знакочередующемуся:

$a_1 \leqslant 0, \dots, a_{n_1} \leqslant 0$; $b_1 = \sum\limits_{i=1}^{n_1} a_i \leqslant 0$

$a_{n_1+1} \geqslant 0, \dots, a_{n_2} \geqslant 0$; $b_1 = \sum\limits_{i=n_1+1}^{n_2} a_i \leqslant 0$

При такой группировке сходимость исходного ряда $\iff$ сходимость $\sum b_n$

Пример. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} b_k$, где $b_k=(-1)^k$

$$|b_k|=\sum_{n=[e^k]+1}^{[e^{k+1}]}\frac{1}{n}\leqslant\frac{1}{[e^k]+1}\cdot([e^{k+1}]-[e^k])\approx\frac{e^{k+1}-e^k}{e^k}\to e-1>0$$

3.4 Знакочередующиеся ряды, пр-к Лейбница

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n=(-1)^n\cdot u_n$, $u_n>0$

Теорема 3.2. *Признак Лейбница. Если* $u_n\downarrow 0$, *то ряд сходится, причём* $|r_n|\leqslant u_{n+1}$

Пример. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$, $p>0$

$\dfrac{1}{n^p}\downarrow 0\implies$ ряд сходится (при $\forall p>0$)

При этом $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^p}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ – сходится при $p>1$ и расходится при $p\leqslant 1$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$: $p\in(0;1]$ – сходится условно, $p\in(1;+\infty)$ – абсолютно

3.5 О неприменимости эквивалентности

Рассмотрим 2 ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n}\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n}\approx\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

При этом правый ряд сходится по признаку Лейбница, а левый – расходится:

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n}-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}-(-1)^n)}\approx\frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n}=\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}-(-1)^n)}\to\infty$$

3.6 Признаки Дирихле и Абеля

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot b_n$

Теорема 3.3. *Признак Дирихле. Если* $a_n\downarrow 0$, *а частичные суммы* $\displaystyle\left|\sum_{n=1}^{N} b_n\right|\leqslant C$ *ограничены, то* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot b_n$ *сходится.*

Теорема 3.4. *Признак Абеля. Если* a_n *монотонна и ограничена, а ряд* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходится, то* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot b_n$ *сходится.*

$a_n\to a$, $a_n=a+-\alpha_n$, $\alpha_n\downarrow 0$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot b_n=a\sum_{n=1}^{\infty} b_n+-\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cdot b_n$

Пример. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^p}$, $p>0$

$a_n=\dfrac{1}{n^p}\downarrow 0$, $b_n=\sin nx$

$$b_1+b_2+b_3+\dots+b_N=\sin x+\sin 2x+\dots+\sin Nx=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left((N+1/2)x\right)}{2\sin\frac{x}{2}};\ \left|\sum_{n=1}^{N} b_n\right|\leqslant\frac{2}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}$$

Ряд сходится по признаку Дирихле

3.7 Влияние перестановки членов ряда на его сумму

Пусть $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ – биекция

Говорят, что ряд $\sum b_n$ получен из $\sum a_n$ перестановкой членов, если $b_n = a_{f(n)}$

Если ряд $\sum a_n$ сходится абсолютно, то $\forall$ ряд, полученный из него перестановкой членов, сходится абсолютно к той же сумме.

Теорема 3.5. *(Римана) Если ряд* $\sum a_n$ *сходится условно, то для* $\forall S \in [-\infty; +\infty]$ *то* $\exists$ *перестановка* f *такая, что* $\sum a_{f(n)} = S$

4 Лекция 5 - 29.09.2020 - Исследование сходимости функциональных рядов

4.1 Свойства равномерно сходящейся последовательности

1. $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, рассмотрим $D = (a;b)$, $D = [a;b]$

   Пусть $f_n \to f$, $x \in D$, $y_n = \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)$, $\{y_n\}$ – сход., $y_n \to y$

   Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y$, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0}(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)) = \lim\limits_{n\to\infty}(\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x))$

   Доказательство. $|y - f(x)| \leqslant |y - y_n| + |y_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|$

   Пусть n такое, что $|y - y_n| < \dfrac{\varepsilon}{3}, ||f_n - f|| < \dfrac{\varepsilon}{3}$, $|x - x_0| < \delta, |f(x) - y| < \dfrac{\varepsilon}{3}$

   Тогда $|y - f(x)| \leqslant |y - y_n| + |y_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ ■

2. $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, рассмотрим $D = (a;b)$, $D = [a;b]$

   Пусть f_n дифференцируемы на D, $f'_n \overset{D}{\rightrightarrows} g, \exists c \in D : \{f_n(c)\}$ сход

   Тогда $\exists f : f_n \to f$ (причем, если D огр., то сходимость равномерная)

   f – дифференцируема, $f' = g$.

   $(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x))' = \lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x)$

3. $-\infty < a < b < +\infty$, $D = [a;b]$

   Пусть f_n непрерывны на D, $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f$ ($\implies$ fнепрерывна наD)

   Тогда $\displaystyle\int_a^x f_n(t)dt \to^D \int_a^x f(t)dt$

4.2 Равномерная сходимость функционального ряда

$D \subseteq \mathbb{R}$, $a_n : D \to R$

Функциональный ряд: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$

Частичные суммы: $S_N(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} a_n(x)$

Множество абсолютной сходимости – множество всех тех значений x, при которых ряд сходится абсолютно.

4.3 Необходимое условие равномерной сходимости

Если $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномерно сходится к сумме $S(x)$, то $a_n \overset{D}{\rightrightarrows} 0$

Доказательство. $S_n(x) = a_1(x) + \dots + a_n(x)$, $a_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x)$

$S_n \overset{D}{\rightrightarrows} S \implies a_n \overset{D}{\rightrightarrows} (S - S) = 0$ ■

Пример. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, D = \mathbb{R}$ – не является сходящейся равномерно, т.к. $\dfrac{x^n}{n!}! \to^{\mathbb{R}} 0$

4.4 Критерий Коши равномерной сходимости

Теорема 4.1. Функциональный ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *сходится равномерно на* $D \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)$, $\forall n \geqslant N$, $\forall m$:

$$||a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+m}|| < \varepsilon$$

Т.е. $|a_n(x) + a_{n+1}(x) + \dots + a_{n+m}(x)| < \varepsilon\ \forall x \in D$.

Отрицание: если $\exists\{x_n\} \subset D$, $\exists\{m_n\} \in \mathbb{N}$, $\exists\varepsilon_0$:

$$|a_n(x_n) + a_{n+1}(x_n) + \dots + a_{m_n}(x_n)| > \varepsilon_0$$

То ряд не является сходящимся равномерно.

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{x^2+n^2}$, $D = \mathbb{R}$ – сходится, т.к. $\approx \sum \dfrac{1}{n^2}$ Докажем, что сходится неравномерно. Возьмём $x_n = n$, $m_n = 2n$:

$$\frac{n}{n^2+n^2} + \frac{n}{n^2+(n+1)^2} + \dots + \frac{n}{n^2+(2n)^2} > \frac{n}{5n^2} \cdot n = \frac{1}{5}$$

4.5 Признаки Вейерштрасса и Даламбера

Теорема 4.2. (Признак Вейерштрасса) Если $|a_n(x)| \leqslant b_n$ *при* $\forall n \geqslant n_0$, $\forall x \in D$, *а ряд* $\sum b_n$ *сходится, то* $\sum a_n(x)$ *сходится на* D *абсолютно и равномерно.*

Доказательство. $|a_n(x) + a_{n+1}(x) + \dots + a_{n+m}(x)| \leqslant b_n + b_{n+1} + \dots + b_{n+m} < \varepsilon$ ■

Теорема 4.3. (Признак Даламбера) Если $\exists q < 1$*:* $|a_{n+1}(x)| \leqslant q \cdot |a_n(x)|$ *при* $\forall n \geqslant n_0$, $\forall x \in D$, *причём* $a_{n_0}(x)$ *– ограничена на* D, *то* $\sum a_n(x)$ *сходится на* D *абсолютно и равномерно.*

Пример. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$, $D = [-r; r]$, $r > 0$

$\left|\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \leqslant q \cdot \left|\dfrac{x^n}{n!}\right|$

$\left|\dfrac{x}{n+1}\right| \leqslant q$. Пусть $n_0 : \dfrac{r}{n_0+1} < 1$, берём $q = \dfrac{r}{n_0+1}$. Значит, ряд абсолютно и равномерно сходится.

4.6 Признак Лейбница

Знакочередующийся функциональный ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot u_n(x)$, $u_n(x) \geqslant 0$ на D.

Теорема 4.4. (Признак Лейбница) Если $u_n(x) \downarrow_{(n)}$ *и* $u_n \overset{D}{\rightrightarrows} 0$, *то ряд сходится равномерно.*

Пример. $\sum \dfrac{(-1)^n}{(n+x)^p} \downarrow_{(n)}$, $|u_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n^p} \to 0 \implies u_n \to^0 0$

4.7 Признаки Дирихле и Абеля

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) \cdot b_n x$

Теорема 4.5. (Признак Дирихле) Если $a_n(x) \downarrow_{(n)}$ *и* $a_n \overset{D}{\rightrightarrows} 0$, *а* $||b_1 + \dots + b_n|| \leqslant C$ $\forall n$, *то ряд равномерно сходится на* D.

Теорема 4.6. (Признак Абеля) Если $a_n(x)$ *монотонна по* n *(при* $\forall x \in D$*), и* $||a_n|| \leqslant C$ *при всех* n, *а ряд* $\sum b_n(x)$ *сходится равномерно, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) \cdot b_n(x)$ *сходится равномерно.*

4.8 Свойства равномерно сходящегося ряда

1. $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, $D = (a; b)$, $D = [a; b]$

   Пусть функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(x)$ сходится равномерно на D, $x_0 \in D$, $\exists \lim\limits_{x \to x_0} c_n(x) = y_n$ и $\exists \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n = y$.

   Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lim\limits_{x \to x_0} c_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n = y$

2. $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, $D = (a; b)$, $D = [a; b]$

   Пусть $c_n(x)$ дифференцируемы на D и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c'_n(x)$ сходится равномерно на D.

   Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(x)$ сходится на D (а если D огр, то сходится равномерно), а его сумма будет дифференцируемой функцией на D и $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(x)\right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c'_n(x)$

3. $-\infty < a < b < +\infty$, $D = (a; b)$, $D = [a; b]$

$$\int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x c_n(t) dt$$ – сходится равномерно на D.