Математический Анализ - 2

Серёжа Рахманов | telegram, website
Максим Николаев | telegram

Версия от 01.09.2020 18:16

Содержание

1 Лекция 1 - 01.09.2020 - Ряды

1.1 Определение ряда

Определение 1. Пусть a_n – последовательность, т.е. $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Формальная бесконечная сумма: $a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется рядом. $S_n = \sum_{n=1}^{N} a_n$ – частичная сумма, сумма ряда: $S = \lim_{n\to\infty} S_n$

Возможны 3 случая:

1. $\exists S \in \mathbb{R}$
2. $\exists S = \infty$
3. $\nexists S$

Пример.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0 + 0 + \dots + 0 = 0$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + \dots + 1 = \infty$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 + \dots$ не существует

Определение 2. Если ряд сходится, т.е. $S_N \to S$ при $n \to \infty$, то $S - S_N = r_N$ – остаток ряда

1.2 Необходимое условие сходимости

Замечание. Если ряд сходится, то $a_n \to 0$

Доказательство. $a_n = S_n - S_{n-1} \to 0$, т.к. $S_n \to S$ и $S_{n-1} \to S$ ■

1.3 Критерий Коши

Определение 3. a_n называется фундаментальной, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > m > N, |S_n - S_m| < \varepsilon$

Теорема 1.1. *S_n – сходится $\Leftrightarrow$ S_n – фундаментальная*

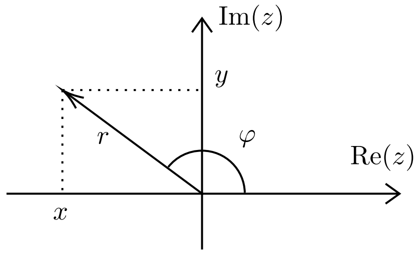
Доказательство. $S_n - S_m = \sum_{k=m+1}^{n} a_k$ Тогда $\sum a_n$ – сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > m > N\ |a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n| < \varepsilon$ ■

Пример.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$

   Заметим, что $S_n = \sum_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) = \left(1 - \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right) + \dots = 1 - \dfrac{1}{N+1} \to 1$

2. $z \in \mathbb{C}$, $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$

   Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots$

   $S_n = 1 + z + z^2 + \dots + z^n = \dfrac{1 - z^{N+1}}{1 - z}$

   Ряд сходится $\Leftrightarrow |z| < 1$

   $|z| < 1 \Rightarrow z^n \to 0$, $S_n \to S = \dfrac{1}{1 - z}$

1.4 Положительные ряды

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \geqslant 0$, $S_n \uparrow$, т.к. $S_{n+1} \geqslant S_n$
Возможны 2 случая:

1. $\exists S \in \mathbb{R}$
2. $\exists S = \infty$

Обозначение 1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ – ряд сходится, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ – ряд расходится.

1.5 Признаки сравнения

1. Сравнение с помощью неравенства.

   $a_n \leqslant b_n$ при всех $n \geqslant n_0$

   Ряд $\sum b_n$ сходится $\implies$ ряд $\sum a_n$ сходится

   Ряд $\sum a_n$ расходится $\implies$ ряд $\sum b_n$ расходится

2. Сравнение отношений.

   $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$

   Ряд $\sum b_n$ сходится $\implies$ ряд $\sum a_n$ сходится

   Ряд $\sum a_n$ расходится $\implies$ ряд $\sum b_n$ расходится

   Доказательство.

   $a_{n_0+1} \leqslant \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+1}$

   $a_{n_0+2} \leqslant \frac{a_{n_0+1}}{b_{n_0+1}} \cdot b_{n_0+2} \leqslant \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+2}$

   $\vdots$

   $a_{n_0+k} \leqslant \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+k} \implies \sum_{n=n_0}^{N} a_n \leqslant \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot \sum_{n=n_0}^{N} b_n$ ■

3. Сравнение с помощью предела.

   $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0; +\infty) \implies$ сходимость $\sum a_n \iff$ сходимость b_n

   Доказательство.

   $c = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$

   $\forall \varepsilon\ \exists n_0 :\ c - \varepsilon \leqslant \frac{a_n}{b_n} \leqslant c + \varepsilon$, при $n \geqslant n_0$

   Возьмём $c - \varepsilon > 0 \implies (c-\varepsilon) \cdot b_n \leqslant a_n \leqslant (c+\varepsilon) \cdot b_n$

   Сходимость следует из правой части неравенства, а расходимость из левой. ■

1.6 Отсутствие универсального ряда сравнения

Предложение. Не существует ряда $\sum c_n$, $c_n > 0$:
 1) $\frac{a_n}{c_n} \to 0 \implies$ ряд $\sum a_n$ сходится.
 2) $\frac{b_n}{c_n} \to \infty \implies$ ряд $\sum b_n$ расходится.

Доказательство.

1. Если ряд $\sum c_n$ расходится, тогда пусть $S_N = \sum_{n=1}^{N} c_n \to \infty, S_0 = 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}})$, где $\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}} = a_n$ расходится, так как

   (a) $\sum_{n=1}^{N}(\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}}) = \sqrt{S_N} - \sqrt{S_0} = \sqrt{S_N} \to \sqrt{S}$

   (b) $\frac{\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}}{c_n} = \frac{\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}}{S_n - S_{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}} \implies \frac{a_n}{c_n} \to 0$

   Ряд расходится, но по предположению сходится, получили противоречие

2. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, то рассмотрим r_n - его n' остаток, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n})$, где $\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n} = b_n, r_0 = S = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ - сходится, так как

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}) = \sqrt{r_0} - \sqrt{r_1} + \sqrt{r_1} - \sqrt{r_2} + ... = \sqrt{r_0} - \sqrt{r_n} = \sqrt{S} - \sqrt{r_n} \to \sqrt{S}$

   (b) $\frac{\sqrt{r_{n-1}}-\sqrt{r_n}}{c_n} = \frac{\sqrt{r_{n-1}}-\sqrt{r_n}}{r_{n-1}-r_n} = \frac{1}{\sqrt{r_{n-1}}+\sqrt{r_n}} \to \infty$

   Ряд сходится, но по предположению расходится, получили противоречие.

■