

# Дискретная математика 2. Конспект

Сергей Пилипенко

2020 – 2021

## Содержание

<b>1</b>	<b>Лекция 1</b>	<b>3</b>
1.1	Алгоритм и его неформальное определение	3
1.2	Равносильные определения перечислимости	4
<b>2</b>	<b>Лекция 2</b>	<b>6</b>
2.1	Универсальный алгоритм	6
2.2	T-предикаты	7
2.3	Альтернативный взгляд на перечислимые неразрешимые множества	7
2.4	Главные универсальные вычислимые функции	8
<b>3</b>	<b>Лекция 3</b>	<b>10</b>
3.1	Отношение m-сводимости	10
3.2	Рекурсия	11
<b>4</b>	<b>Лекция 4</b>	<b>12</b>
4.1	Теорема о рекурсии	12
4.2	Теорема о совместной рекурсии	13
4.3	Теорема Райса-Успенского	15
<b>5</b>	<b>Лекция 5</b>	<b>17</b>
5.1	Неформальное описание машины Тьюринга	17
5.2	Формальное описание машины Тьюринга	19
5.3	Тезис Тьюринга	20
5.4	Свойства алгоритмов в терминах машин Тьюринга	21
<b>6</b>	<b>Лекция 6</b>	<b>22</b>
6.1	Формулы и термы языка первого порядка	22
6.2	Сигнатуры	23
6.3	Доказательства индукцией по построению	25
<b>7</b>	<b>Лекция 7</b>	<b>27</b>
7.1	Интерпретация сигнатуры	27
7.2	Оценка переменных	28
7.3	Значение терма в интерпретации при оценке	28
7.4	Значение формулы в интерпретации при оценке	29
<b>8</b>	<b>Лекция 8</b>	<b>32</b>
8.1	Изоморфизм структур	32
8.2	Значение терма и формулы при изоморфизме	33
8.3	Аutomорфизмы	34
8.4	Сохранение выражимых множеств автоморфизмами	34
8.5	Элементарная эквивалентность структур	35
8.6	Изоморфные структуры элементарно эквивалентны	35
<b>9</b>	<b>Лекция 9</b>	<b>36</b>
9.1	Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы	39
<b>10</b>	<b>Лекция 10</b>	<b>41</b>
10.1	Теорема о ДНФ и КНФ	41
10.2	Корректные подстановки	42
10.3	Предварённая нормальная форма	44

<b>11 Лекция 11</b>	<b>46</b>
11.1 Логическое (семантическое) следствие . . . . .	46
11.2 Теорема компактности (без доказательства) . . . . .	47
11.3 Невозможность аксиоматизации класса конечных нормальных структур . . . . .	48
11.4 Сколемизация . . . . .	48
<b>12 Лекция 12</b>	<b>50</b>
12.1 Обобщение логического следования и выполнимости на теории со свободными переменными . . .	50
12.2 Сведение задачи установления логического следования к проверке выполнимости . . . . .	50
12.3 Сколемизация: теорема о сохранении равновыполнимости . . . . .	50
12.4 Исчисление резолюций . . . . .	51
12.4.1 Правила резолюции и подстановки . . . . .	51
12.4.2 Выводимость в ИР . . . . .	52

# 1 Лекция 1

## 1.1 Алгоритм и его неформальное определение

1. Алгоритмов счетно много;
2. Алгоритм выполняется по шагам;
3. Алгоритм работает конечно много шагов или заикливается;
4. Алгоритм принимает вход и может выдавать что-то на выход<sup>1</sup>;

**Утверждение 1.1.** *Слов конечного непустого алфавита лишь счетно много.*

Удобно считать, что на вход подаются конечные пары натуральных чисел. Алгоритм может вычислять частичные функции  $f : \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$ .

**Определение 1.1.** Алгоритм  $\mathcal{F}$  вычисляет функцию  $f : \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$ , если для любого  $x \in \mathbb{N}$

- $x \in \text{dom } f \implies$  алгоритм  $\mathcal{F}$  на входе  $x$  останавливается за конечное число шагов и выводит  $f(x)$ ;  
 $x \notin \text{dom } f \implies$  алгоритм  $\mathcal{F}$  на входе  $x$  не останавливается ни за какое конечное число шагов.

**Определение 1.2.** Функция  $f$  называется *вычислимой*, если существует алгоритм, который ее вычисляет.

Рассмотрим следующую тотальную функцию:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если бог есть,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Утверждается, что  $f$  — вычислима. Действительно, рассмотрим следующие два алгоритма:

```
1 int f(int x) {  
2     return 0;  
3 }
```

```
1 int f(int x) {  
2     return 1;  
3 }
```

Какой-то из них вычисляет  $f$ , однако мы точно не можем сказать какой.

**Определение 1.3.** Множество  $A \subseteq \mathbb{N}$  называется *разрешимым*, если существует алгоритм  $\mathcal{A}$  такой, что  $\forall x \in \mathbb{N}$

- $x \in A \implies \mathcal{A}$  выводит 1 и останавливается;  
 $x \notin A \implies \mathcal{A}$  выводит 0 и останавливается.

**Утверждение 1.2.**  $A$  разрешимо  $\iff$  вычислима характеристическая функция  $\chi_A : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$  множества  $A$ :

$$\chi_A(n) = \begin{cases} 1, & n \in A; \\ 0, & n \notin A. \end{cases}$$

Характеристическая функция существует у любого подмножества натуральных чисел, но не для всякого подмножества она вычислима.

**Утверждение 1.3.** *Существует неразрешимое множество.*

*Доказательство.* Алгоритмов лишь счетно много, в то время как подмножеств  $\mathbb{N}$  несчетно много. □

**Следствие 1.1.** *Существует невычислимая функция.*

**Утверждение 1.4.** *Если  $A$  конечно, то  $A$  разрешимо.*

*Доказательство.* Положим  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ , тогда следующий алгоритм вычисляет  $\chi_A$ :

```
1 int in_A(x) {  
2     return (x == a_1) || (x == a_2) || ... || (x == a_n);  
3 }
```

□

**Утверждение 1.5.**  $A, B$  разрешимы  $\implies$  разрешимы  $A \cup B, A \cap B, A^c, A \times B$ .

<sup>1</sup>Вход и выход — слова конечного алфавита.

Доказательство.

$$\begin{aligned}\chi_{A \cap B}(n) &= \chi_A(n) \cdot \chi_B(n); \\ \chi_{A \cup B}(n) &= \chi_A(n) + \chi_B(n); \\ \chi_{A^c}(n) &= 1 - \chi_A(n); \\ \chi_{A \times B}(n) &= \chi_A(n) \cdot \chi_B(m).\end{aligned}$$

□

**Определение 1.4.** Множество  $A \subseteq \mathbb{N}$  называется *перечислимым*, если существует алгоритм  $\mathcal{A}$  такой, что, работая на пустом входе,  $\mathcal{A}$  никогда не останавливается, но в процессе работы выводит все элементы множества  $A$  и только их.

**Утверждение 1.6.** Если  $A$  разрешимо, то оно перечислимо.

Доказательство.

```

1  n = 0;
2  while (1) {
3      if (in_A(n)) {
4          print(n);
5      }
6      ++n;
7  }
```

□

Докажем, что из перечислимости не следует конечность. Рассмотрим  $A = \mathbb{N}$  — бесконечное множество,  $\chi_A(n) = \chi_{\mathbb{N}}(n) = 1$  — вычислима.

**Теорема 1.1** (Поста).  $A$  разрешимо  $\iff A$  и  $A^c$  перечислимы.

Доказательство.

$\implies$   $A$  разрешимо  $\implies A^c$  разрешимо  $\implies A^c$  перечислимо,  $A$  разрешимо  $\implies A$  перечислимо.

$\Leftarrow$  Пусть  $\mathcal{A}$  перечисляет  $A$ , и  $\mathcal{B}$  перечисляет  $A^c$ . Мы хотим по заданному  $n$  посчитать  $\chi_A(n)$ . Поочередно будем делать по шагу алгоритмов  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ . Если на каком-то шаге  $\mathcal{A}$  выведет  $n$ , то  $n \in A \implies$  выведем 1 и остановимся. Если на каком-то шаге  $\mathcal{B}$  выведет  $n$ , то  $n \notin A \implies$  выведем 0 и остановимся. Поскольку  $A \cup A^c = \mathbb{N}$ , то одно из этих событий обязательно случится и алгоритм остановится. □

**Определение 1.5.** Пусть  $A \subseteq \mathbb{N}^k$ ,  $(a_1, \dots, a_k) \in A$ . Проекцией множества  $A$  на координату  $i$  называется

$$\text{pr}^i A = \{b \in \mathbb{N} \mid (a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_k) \in A\}.$$

**Утверждение 1.7.**  $A, B$  перечислимы  $\implies A \cup B, A \cap B, A \times B, \text{pr}^i A$  перечислимы.

Доказательство. Пусть  $\mathcal{A}$  перечисляет  $A$  и  $\mathcal{B}$  перечисляет  $B$ .

$\text{pr}^i A$ : Запустим  $\mathcal{A}$ , и для каждого напечатанного набора  $(a_1, \dots, a_k)$  будем брать  $a_i$ .

$A \cup B$ : Будем поочередно делать шаги перечислителей  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ . Все напечатанные кем-то из них числа отправляем на вывод.

$A \cap B$ : Будем поочередно делать шаги перечислителей  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ . Будем добавлять весь вывод  $\mathcal{A}$  в буффер  $A'$ ; аналогично для  $\mathcal{B}$  и  $B'$ . Пусть  $A'_i$  — состояние буффера  $A'$  после  $i$ -ого шага  $\mathcal{A}$ . После того, как мы сделали  $i$ -ый шаг  $\mathcal{A}$  и  $i$ -ый шаг  $\mathcal{B}$ , выведем элементы *конечного* множества  $A'_i \cap B'_i$  и перейдем к  $i+1$  шагу  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ .

$A \times B$ : Аналогично  $A \cap B$ , только выводим  $A'_i \times B'_i$ . □

## 1.2 Равносильные определения перечислимости

**Определение 1.6.** Пусть есть функция  $f: \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$ . Определим для функции ее график:

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid f(x) = y\}.$$

**Теорема 1.2.** Пусть  $f: \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$ . Тогда  $f$  вычислима  $\iff \Gamma_f$  перечислим.

Доказательство.

$\Leftarrow$  Дано  $x$  и требуется вывести  $f(x)$ , если оно существует. Запустим перечислитель  $\Gamma_f$  и дождемся первой пары вида  $(x, y)$ . Так как  $(x, y) \in \Gamma_f$ , то  $y = f(x)$ . Выводим  $y$  и завершаемся. Если же  $x$  не принадлежит  $\text{dom } f$ , то алгоритм будет ждать такой пары бесконечно.

⇒ Дано  $f$  и вычисляющий её алгоритм  $\mathcal{F}$ . Хотим получить перечислитель  $\Gamma_f$ . Запустим перечислитель  $\mathbb{N}^3$  и для каждой выведенной тройки  $(x, y, k) \in \mathbb{N}^3$  сделаем  $k$  шагов алгоритма  $\mathcal{F}$  на входе  $x$ . Если он вывел  $y$  и остановился, то  $f(x) = y$ ; напечатаем пару  $(x, y)$ .

Допустим  $(x, y) \in \Gamma_f$ . Тогда  $f(x) = y$ , а значит существует такое число шагов  $k$ , что  $\mathcal{F}$  на входе  $x$  выведет  $y$  за  $k$  шагов. Мы когда-нибудь рассмотрим тройку  $(x, y, k)$  и выведем  $(x, y)$ . □

**Следствие 1.2.** Если  $f$  вычислима и  $A$  перечислимо, то  $f(A)$  перечислимо.

*Доказательство.*  $f(A) = \text{pr}^2(\Gamma_f \cap (A \times \mathbb{N}))$ .

Так как  $f$  вычислима, то  $\Gamma_f$  перечислим. Так как  $A$  перечислимо, то  $A \times \mathbb{N}$  перечислимо. Тогда,  $\Gamma_f \cap (A \times \mathbb{N})$  перечислимо, а значит перечислимо и  $\text{pr}^2(\Gamma_f \cap (A \times \mathbb{N}))$ . Аналогично  $f^{-1}(A) = \text{pr}^1(\Gamma_f \cap (\mathbb{N} \times A))$  □

**Следствие 1.3.** Если  $f: \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$  вычислима, то  $\text{dom } f$  и  $\text{range } f$  перечислимы.

*Доказательство.*  $\text{dom } f = f^{-1}(\mathbb{N})$ ,  $\text{range } f = f(\mathbb{N})$ . □

**Определение 1.7.**  $f(x) \simeq g(x)$  («совпадает»), если или  $f(x)$  и  $g(x)$  оба определены и равны, либо оба не определены для любого  $x$ .

**Определение 1.8.** Если  $A \subseteq \mathbb{N}$ , то *полухарактеристическая функция*  $\omega_A: \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$  множества  $A$ :

$$\omega_A(n) \simeq \begin{cases} 1, & n \in A, \\ \text{undefined}, & n \notin A. \end{cases}$$

**Замечание.**  $\text{dom } \omega_A = A$ .

**Утверждение 1.8.**  $A$  перечислимо  $\iff \omega_A$  вычислима ( $A$  полуразрешимо).

*Доказательство.*

⇒ Дано число  $n$ , хотим вывести 1 если оно есть в  $A$ . Запустим алгоритм, перечисляющий  $A$ . Если он вывел  $n$ , то выводим 1 и завершаемся. Если чисто  $n$  не встречается в  $A$ , то алгоритм будет работать бесконечно.

⇐  $A = \text{dom } \omega_A$ . □

**Утверждение 1.9.** Если  $A$  перечислимо и  $A \neq \emptyset$ , то существует вычислимая тотальная  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , такая что  $A = \text{range } f$  (то есть  $A = \{f(0), f(1), \dots\}$ ).

*Доказательство.* Пусть  $\mathcal{A}$  перечисляет  $A$ . Так как  $A \neq \emptyset$ , то  $\mathcal{A}$  напечатает какое-то число  $a \in A$ . Пусть впервые  $a$  будет напечатано на шаге  $k$ . Тогда положим  $f(0) := a$ , а  $f(n+1) :=$  «последнее число, которое  $\mathcal{A}$  напечатает за  $n+k+1$  шагов». Очевидно, что  $f$  вычислима. □

**Следствие 1.4.** Если  $A$  перечислимо, то существует вычислимая  $f: \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$ , такая что  $A = \text{range } f$ .

**Утверждение 1.10.** Если  $A \subseteq \mathbb{N}$  перечислимо, то существует разрешимое  $B \subseteq \mathbb{N}^2$ , такое что  $A = \text{pr}^1 B$ .

*Доказательство.* Пусть  $\mathcal{A}$  перечисляет  $A$ . Пусть  $B := \{(n, k) \in \mathbb{N}^2 \mid \text{алгоритм } \mathcal{A} \text{ выводит } n \text{ на шаге } k\}$ .

Тогда  $\text{pr}^1 B = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k: \text{алгоритм } \mathcal{A} \text{ выводит } n \text{ на шаге } k\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \in A\} = A$ . □

**Теорема 1.3.**  $\forall A \subseteq \mathbb{N}$  следующие утверждения раносильны:

1.  $A$  перечислимо;
2.  $A$  полуразрешимо;
3.  $\exists$  вычислимая  $f: \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$ , такая что  $A = \text{dom } f$ ;
4.  $\exists$  вычислимая  $f: \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$ , такая что  $A = \text{range } f$ ;
5.  $A = \emptyset$  или  $\exists$  вычислимая  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , такая что  $A = \text{range } f$ ;
6.  $\exists$  разрешимое  $B \subseteq \mathbb{N}^2$ , такое что  $A = \text{pr}^1 B$ .

## 2 Лекция 2

### 2.1 Универсальный алгоритм

**Определение 2.1.** Универсальной вычислимой функцией (у. в. ф.) называется такая вычислимая  $U: \mathbb{N}^2 \xrightarrow{p} \mathbb{N}$ , что для любой вычислимой  $f: \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$  существует  $n \in \mathbb{N}$  («программа») такая, что

$$\forall x \in \mathbb{N} \quad U(n, x) \simeq f(x).$$

Пусть  $\mathcal{U}$  — некоторый алгоритм, который вычисляет у. в. ф.  $U$ . Тогда, по существу,  $\mathcal{U}$  — интерпретатор универсального языка программирования, где программами являются натуральные числа. Если имеется какая-то функция от двух аргументов  $V: \mathbb{N}^2 \xrightarrow{p} \mathbb{N}$ , то мы можем построить ее график (поверхность в  $\mathbb{N}^3$ ). Зафиксируем ее первый аргумент  $n$ , и получим функцию  $V_n: \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$  такую, что для любых  $n$  и  $x$  верно  $V_n(x) \simeq V(n, x)$ . Функция  $V_n$  называется  $n$ -ым сечением функции  $V$  по первому аргументу. Например, если была  $V(x, y) = x + y$ , то зафиксировав первый аргумент мы получим функцию «прибавить  $x$ » от одного аргумента. В таком случае, можно переписать условие универсальности следующим образом:

**Утверждение 2.1.** Функция  $U$  является универсальной в классе вычислимых функций  $\iff$  для любой вычислимой  $f: \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$  существует  $n \in \mathbb{N}$  такое, что  $U_n = f$ .

Тогда можно сформулировать следующее свойство:

**Свойство 2.1** (алгоритмов). Существует универсальная вычислимая функция.

Данное утверждение эквивалентно тому, что на Python можно написать интерпретатор Python.

**Определение 2.2.** Функция  $W: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  называется универсальной вычислимой тотальной функцией, если

1.  $W$  вычислима.
2. Для любой вычислимой тотальной  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  существует  $m$  такое, что  $W_m = g$ .

**Утверждение 2.2.** Не существует универсальной вычислимой тотальной функции  $W$ .

*Доказательство.* Рассмотрим функцию  $D: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $D(x) = W(x, x)$ . Она является вычислимой и тотальной. Рассмотрим теперь функцию  $g$  такую, что  $g(x) = D(x) + 1$ . Она также будет вычислимой и тотальной. Раз  $W$  универсальна, то существует  $m$  такое, что  $W_m = g$ , то есть

$$\exists m: \forall x \quad W(m, x) = g(m).$$

Положим  $x = m$ , тогда

$$W(m, m) = D(m) + 1 = W(m, m) + 1 \implies 0 = 1.$$

Получили противоречие, значит такой  $W$  не существует.  $\square$

В случае для частично определенной у. в. ф. равенство  $U(m, m) \simeq U(m, m) + 1$  допустимо, так как означает, что на  $m$  функция  $U$  не определена.

**Теорема 2.1.** Существует перечислимое неразрешимое множество.

*Доказательство.* Пусть  $U$  — универсальная вычислимая функция (мы знаем, что такая существует). Рассмотрим  $K_U = \{n \in \mathbb{N} \mid U(n, n) \text{ определена}\} = \text{dom } d_U$ , где  $d_U(x) \simeq U(x, x)$  — диагональ у. в. ф.  $U$ . Ясно, что  $d_U$  вычислима  $\implies K_U = \text{dom } d_U$  перечислимо.

Допустим, что  $K_U$  разрешимо. Рассмотрим функцию  $r: \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$  такую, что

$$r(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \notin K_U, \\ \text{undefined}, & \text{если } x \in K_U. \end{cases}$$

Функция  $r$  является полухарактеристической функцией  $K_U^c$ ,  $r = w_{K_U^c}$ .  $K_U$  разрешимо  $\implies K_U^c$  разрешимо  $\implies K_U^c$  перечислимо  $\implies w_{K_U^c}$  вычислима.

Тогда существует  $n \in \mathbb{N}$  такое, что  $\forall x \quad U(n, x) \simeq r(x) \implies$  положим  $x = n \implies U(n, n) = r(n)$ . Рассмотрим несколько случаев:

1.  $U(n, n)$  определено  $\implies n \in K_U \implies r(n)$  не определено  $\implies U(n, n)$  не определено.
2.  $U(n, n)$  не определено  $\implies n \in K_U \implies r(n) = 1 \implies U(n, n) = 1 \implies U(n, n)$  определено.

Ни один из случаев не приводит к чему-то разумному  $\implies$  противоречие  $\implies K_U$  не разрешимо.  $\square$

Определение  $K_U$  можно сформулировать следующим образом:

$$K_U = \{n \in \mathbb{N} \mid U \text{ останавливается на входе } (n, n)\},$$

или

$$K_U = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{программа } n \text{ на входе } n \text{ останавливается}\}.$$

Поэтому вся эта теория называется «Проблемой самоприменимости»: остановится ли программа, если ей на вход передать ее же. Оказывается, что эта проблем не разрешима, что мы сейчас и доказали.

Рассмотрим  $S_U = \{(n, x) \in \mathbb{N}^2 \mid U(n, x) \text{ определена}\} = \text{dom } U$ . Поскольку  $U$  вычислима, то  $S_U$  перечислимо. Заметим, что  $n \in K_U \iff (n, n) \in S_U$ , но тогда  $S_U$  разрешимо  $\implies K_U$  разрешимо  $\implies$  противоречие  $\implies S_U$  не разрешимо. Это называется «Проблемой остановки»: остановка программы  $n$  на входе  $x$ .

## 2.2 Т-предикаты

Зафиксируем универсальную вычислимую функцию  $U$  и алгоритм  $\mathcal{U}$ , ее вычисляющий. Рассмотрим следующее множество:

$$T'_{(U)} = \{(n, x, y, k) \mid \text{алгоритм } \mathcal{U} \text{ на входе } (n, x) \text{ остановится за } k \text{ шагов и выведет } y\}.$$

То свойство, что алгоритм можно исполнить по шагам отражено в том, что  $T'$  разрешимо. Рассмотрим также множество

$$T = \{(n, x, k) \in \mathbb{N}^3 \mid \text{алгоритм } \mathcal{U} \text{ на входе } (n, x) \text{ остановится за } k \text{ шагов}\}.$$

Множество  $T$  также разрешимо.

## 2.3 Альтернативный взгляд на перечислимые неразрешимые множества

Пусть  $U$  — универсальная вычислимая функция, и  $d(x) \simeq U(x, x)$ .

**Утверждение 2.3.** Для любой вычислимой  $f: \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$  существует  $n$  такое, что  $f(n) \simeq d(n)$ .

*Доказательство.* Поскольку  $U$  универсальна, то существует  $n$  такое, что  $\forall x \ U(n, x) \simeq f(x)$ .

Положим  $n = x \implies U(n, n) \simeq f(n) \simeq d(n)$ . □

**Определение 2.3.** Пусть дана  $f: \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$ . Будем говорить, что функция  $g$  *продолжает*  $f$ , если  $\text{dom } f \subseteq \text{dom } g$  и для любого  $x \in \text{dom } f$  верно  $f(x) = g(x)$ .

**Утверждение 2.4.** У функции  $d$  не существует вычислимого тотального продолжения.

*Доказательство.* Пусть  $g: \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$  — вычислимое тотальное продолжение  $d$ . То есть, для любого  $x \in \text{dom } d$   $d(x) = g(x)$ . Рассмотрим  $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $h(x) = g(x) + 1$ . Ясно, что  $h$  вычислима и тотальна, однако  $h$  всюду отличается от  $d$ , поскольку

$$\begin{aligned} x \in \text{dom } d &\implies h(x) = g(x) + 1 = d(x) + 1 \neq d(x); \\ x \notin \text{dom } d &\implies h(x) \text{ определена } \not\simeq d(x) \text{ не определена.} \end{aligned}$$

Так как любая вычислимая функция где-то совпадает с  $d$ , то  $h$  не вычислима. □

**Утверждение 2.5.** Если функция  $f$  вычислима, но не имеет вычислимого тотального продолжения, то  $\text{dom } f$  *перечислимо*, но не разрешимо.

*Доказательство.* Если  $f$  вычислима, то  $\text{dom } f$  перечислимо. Пусть  $\text{dom } f$  разрешимо. Тогда рассмотрим тотальную вычислимую функцию

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \text{dom } f, \\ 2020, & x \notin \text{dom } f. \end{cases}$$

Заметим, что  $g$  — это вычислимое тотальное продолжение  $f$ , но его не существует  $\implies$  противоречие.

Альтернативно,  $g(x)$  можно задать следующим образом:  $g(x) = \chi_{\text{dom } f}(x) \cdot f(x) + (1 - \chi_{\text{dom } f}(x)) \cdot 2020$ . □

**Утверждение 2.6.** Существует вычислимая  $f: \mathbb{N} \xrightarrow{p} \{0, 1\}$  такая, что у  $f$  нет вычислимого тотального продолжения.

*Доказательство.* Определим  $f$  следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \text{dom } d \text{ и } d(x) > 0, \\ 1, & x \in \text{dom } d \text{ и } d(x) = 0, \\ \text{undefined}, & x \notin \text{dom } d. \end{cases}$$

Такая  $f$  вычислима, поскольку  $f \simeq h(d(x))$ , где

$$h(y) = \begin{cases} 0, & y > 0, \\ 1, & y = 0. \end{cases}$$

$h$  является вычислимой функцией  $\implies f$  вычислима как композиция вычислимых функций. Тогда для любого  $x \in \text{dom } d$   $f(x) \neq d(x) \implies y$   $f$  нет вычислимого тотального продолжения (см. утверждение 2.3).  $\square$

**Определение 2.4.** Пусть  $A, B, C \subseteq \mathbb{N}$ . Будем говорить, что  $C$  отделяет  $A$  от  $B$ , если  $A \subseteq C$  и  $B \subseteq C^c$ .

**Следствие 2.1.** Существуют перечислимые множества  $A$  и  $B$  такие, что  $A \cap B = \emptyset$ , но не существует разрешимого  $C$  такого, что  $C$  отделяет  $A$  от  $B$ .

Отсюда следует, что  $A$  перечислимо, но не разрешимо, так как иначе разрешимое  $A$  отделяло бы  $A$  от  $B$ .

*Доказательство.* Пусть  $f$  — функция из предыдущего утверждения, то есть

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \text{dom } d \text{ и } d(x) > 0, \\ 1, & x \in \text{dom } d \text{ и } d(x) = 0, \\ \text{undefined}, & x \notin \text{dom } d. \end{cases}$$

Положим  $A = f^{-1}(\{1\})$ ,  $B = f^{-1}(\{0\})$ . Очевидно, что  $A \cap B = \emptyset$ .  $A$  и  $B$  перечислимы как прообразы перечислимых множеств  $\{1\}$ ,  $\{0\}$  под действием вычислимой функции  $f$ . Положим, что  $\exists C$ , отделяющее  $A$  от  $B$ . Рассмотрим характеристическую функцию множества  $C$ :

$$\begin{aligned} x \in A &\implies \chi_C(x) = 1 = f(x); \\ x \in B &\implies \chi_C(x) = 0 = f(x). \end{aligned}$$

Но тогда для любого  $x \in \text{dom } f$   $f(x) = \chi_C(x)$ , то есть  $\chi_C$  — тотальное вычислимое продолжение  $f \implies \chi_C$  не вычислима  $\implies C$  не разрешимо.  $\square$

## 2.4 Главные универсальные вычислимые функции

**Определение 2.5.** Функция  $U: \mathbb{N}^2 \xrightarrow{p} \mathbb{N}$  называется главной универсальной вычислимой функцией, если

1.  $U$  вычислима;
2. Для любой вычислимой функции  $V: \mathbb{N}^2 \xrightarrow{p} \mathbb{N}$  существует вычислимая тотальная функция  $S: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  такая, что

$$\forall x \ U(S(n), x) \simeq V(n, x) \iff \forall n \ U_{S(n)} = V_n.$$

**Утверждение 2.7.** Если  $U$  — главная универсальная вычислимая функция, то  $U$  является у. в. ф.

*Доказательство.* Мы хотим, чтобы для любой вычислимой  $f: \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$  существовало  $n \in \mathbb{N}$  такое, что  $U_n = f$ . Рассмотрим функцию  $V$  такую, что  $\forall k, x \ V(k, x) \simeq f(x)$ , и  $\forall k \ V_k = f$ . Тогда, по свойству (2) из определения главной у. в. ф., существует вычислимая тотальная функция  $S$  такая, что  $\forall k \ U_{S(k)} = V_k$ . Положив  $k$  равным любому числу (например, 2020), получим  $U_{S(2020)} = V_{2020} = f \implies n = S(2020)$ .  $\square$

**Утверждение 2.8.** Существует вычислимая биекция  $h: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ .

Введем обозначение для кода пары натуральных чисел  $\langle n, m \rangle = h(n, m)$ .

**Утверждение 2.9.** Существует вычислимые тотальные функции  $\pi_1$  и  $\pi_2$  такие, что  $\forall n \ \forall m \ \pi_1(\langle n, m \rangle) = n$  и  $\pi_2(\langle n, m \rangle) = m$ .

*Доказательство.* Без ограничений общности предъявим алгоритм только для  $\pi_1$ .

1. Получаем на вход некоторое  $z = \langle n, m \rangle$  — код некоторой пары;
2. Перечисляем все пары  $(k, l) \in \mathbb{N}^2$  и для каждой проверяем равенство  $z$  и  $\langle k, l \rangle$ .
3. Если да, вернем  $k$ .

Такой алгоритм корректен, потому что любой код, который нам подадут на вход корректен в силу сюръективности  $h$ , а в силу инъективности такая пара — единственная.  $\square$

**Теорема 2.2.** Если существует универсальная вычислимая функция  $U$ , то существует и главная универсальная вычислимая функция.



*Доказательство.* Рассмотрим функцию  $W: \mathbb{N}^2 \xrightarrow{p} \mathbb{N}$  такую, что

$$\forall n \forall x \ W(n, x) \simeq U(\pi_1(n), \langle \pi_2(n), x \rangle).$$

Функция  $W$  вычислима как композиция вычислимых функций. Покажем, что  $W$  является искомой главной универсальной вычислимой функцией. Пусть дана вычислимая  $V: \mathbb{N}^2 \xrightarrow{p} \mathbb{N}$ . Рассмотрим  $V': \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$  такую, что  $V' \simeq V(\pi_1(x), \pi_2(x))$ .  $V'$  также вычислима, а значит  $\exists m$  такое, что  $U_m = V'$ . Теперь для любого  $n$  положим  $S(n) = \langle m, n \rangle$ , она будет вычислимой и тотальной. Проверим, что она подходит:

$$\begin{aligned} \forall n \forall x \ W(S(n), x) &\simeq W(\langle m, n \rangle, x) \simeq \\ &\simeq U(\pi_1(\langle m, n \rangle), \langle \pi_2(\langle m, n \rangle), x \rangle) \simeq U(m, \langle n, x \rangle) \simeq U_m(\langle n, x \rangle) \simeq \\ &\simeq V'(\langle n, x \rangle) \simeq V(\pi_1(\langle n, x \rangle), \pi_2(\langle n, x \rangle)) \simeq V(n, x). \end{aligned}$$

Таким образом,  $\forall n \ W_{S(n)} = V_n \implies W$  — главная у. в. ф. □

### 3 Лекция 3

#### 3.1 Отношение $m$ -сводимости

**Определение 3.1.** Пусть  $A, B \subseteq \mathbb{N}$ . Говорят, что  $A$   $m$ -сводится к  $B$  (обозн.  $A \leq_m B$ ) тогда и только тогда, когда существует вычислимая тотальная  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  такая, что

$$\forall n \ n \in A \iff f(n) \in B.$$

В таком случае можно написать  $A \leq_m^f B$ .

**Лемма 3.1.** Для любых  $A, B, C \subseteq \mathbb{N}$  справедливо следующее:

1.  $A \leq_m^{Id} A$ ;
2.  $A \leq_m^f B$  и  $B \leq_m^g C \implies A \leq_m^{g \circ f} C$ ;
3.  $A \leq_m^f B \implies A^c \leq_m^f B^c$ .
4.  $A \leq_m B$  и  $B$  разрешимо  $\implies A$  разрешимо.
5.  $A \leq_m B$  и  $B$  перечисливо  $\implies A$  перечисливо.
6. Для любого  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\omega_A(n) = 1 \iff \omega_B(f(n)) = 1$ .

**Следствие 3.1.** Если  $A$  неразрешимо (неперечисливо), и  $A \leq_m B$ , то  $B$  неразрешимо (неперечисливо).

*Доказательство.* Записать контрапозицию для пунктов (4), (5) леммы 3.1. □

**Утверждение 3.1.** Если  $A$  разрешимо и  $\emptyset \neq B \neq \mathbb{N}$ , то  $A \leq_m B$ .

*Доказательство.* В силу ограничений на множество  $B$ ,  $\exists b \in B$  и  $\exists a \in B^c$ . Тогда определим  $f$  следующим образом:

$$f(n) = \begin{cases} b, & n \in A, \\ a, & n \notin A. \end{cases}$$

Функция  $f$  является вычислимой  $\implies \forall n \ n \in A \iff f(n) \in B$ . □

**Следствие 3.2** (Отсутствие антисимметричности у отношения  $m$ -сводимости). Пусть  $A$  — множество всех четных чисел,  $B$  — множество всех нечетных чисел. Тогда  $A \leq_m B$ ,  $B \leq_m A$ , однако  $A \neq B$ .

**Следствие 3.3** (Несводимость к дополнению). Существует множество  $A$  такое, что  $A \not\leq_m A^c$ .

*Доказательство.* Рассмотрим множество  $K$  — перечислимое, но неразрешимое. Тогда  $K^c$  неперечисливо (иначе по теореме Поста  $K$  разрешимо). Если  $K \leq_m K^c$ , то  $K^c \leq_m K^{cc} \implies K^c \leq_m K$ , то есть неперечислимое множество  $m$ -сводится к перечислимому, противоречие. □

**Утверждение 3.2** (отсутствие универсального множества сводимости).  $\nexists A$  такое что,  $\forall B \ B \leq_m A$ .

*Доказательство.*  $B \leq_m A \iff$  существует тотальная вычислимая  $f$  такая, что  $\forall n \in \mathbb{N} \ n \in B \iff f(n) \in A$ . Тогда всякое множество  $B$  однозначно определяется сводящей функцией:

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \in A\}.$$

Поэтому, таких множеств  $B$  не больше, чем сводящих функций, но, поскольку все сводящие функции вычислимы, то их не более чем счетно, а подмножеств  $\mathbb{N}$  континуум. □

**Лемма 3.2.** Пусть  $U$  — главная универсальная вычислимая функция, и

$$K_U = \{n \in \mathbb{N} \mid U(n, n) \text{ определено}\}.$$

Тогда любое перечислимое множество  $A$   $m$ -сводится к  $K_U$ .

*Доказательство.* Рассмотрим функцию

$$V(n, x) \simeq \begin{cases} 1, & n \in A, \\ \text{undefined}, & n \notin A. \end{cases}$$

То есть,  $V(n, x) \simeq \omega_A(n) \implies V$  вычислима. Так как  $U$  главная, существует вычислимая тотальная  $S: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  такая, что

$$\forall n \ U_{S(n)} = V_n \iff \forall n \ \forall x \ U(S(n), x) \simeq V(n, x).$$

Если  $n \in A$ , то  $V_n$  всюду определена  $\implies U_{S(n)}$  всюду определена  $\implies$  определено  $U_{S(n)}(S(n)) \implies$  определено  $U(S(n), S(n)) \implies S(n) \in K_U$ .

Если  $n \notin A$ , то  $V_n$  нигде не определена  $\implies U_{S(n)}$  нигде не определена  $\implies$  не определено  $U_{S(n)}(S(n)) \implies S(n) \notin K_U$ .

Таким образом, существует вычислимая тотальная  $S$  такая, что  $\forall n \ n \in A \iff S(n) \in K \iff A \leq_m^S K_U$ . □

**Пример 3.1.** Существует неперечислимое множество такое, что все его элементы четные.

*Доказательство.* Рассмотрим множество  $X = \{2n : n \in K^{\mathbb{C}}\}$ . Заметим, что  $\forall n \ n \in K^{\mathbb{C}} \iff 2n \in X$ , что равносильно  $K^{\mathbb{C}} \leq_m X$ . С другой стороны, все элементы  $X$  четны, и, поскольку  $K^{\mathbb{C}}$  не перечислимо, то и  $X$  не перечислимо.  $\square$

**Пример 3.2.** Пусть  $U$  — главная у. в. ф. и пусть  $Z = \{n \in \mathbb{N} : U_n \text{ нигде не определена}\}$ . Рассмотрим функцию

$$V(n, x) = \begin{cases} 1, & n \in K, \\ \text{undefined}, & n \notin K; \end{cases}$$

Поскольку  $K$  перечислимо, то  $\omega_K$  вычислима, но так как  $V(n, x) \simeq \omega_K(n)$ , то  $V$  вычислима.

Так как  $U$  — главная, то существует вычислимая тотальная  $S$  такая, что

$$\forall n \ U_{S(n)} = V_n.$$

Мы видим, что если  $n \in K \implies V_n$  всюду определено. Иначе  $V_n$  нигде не определено. То есть  $n \in K^{\mathbb{C}} \iff V_n$  нигде не определено  $\iff U_{S(n)}$  нигде не определена  $\iff S(n) \in Z$ . Тогда  $\forall n \ n \in K^{\mathbb{C}} \iff S(n) \in Z$ . Отсюда  $K^{\mathbb{C}} \leq_m^S Z$ , но поскольку  $K^{\mathbb{C}}$  не перечислимо, то и  $Z$  не перечислимо.

По определению,  $Z^{\mathbb{C}} = \{n \in \mathbb{N} : U_n \text{ где-то определена}\} = \{n \in \mathbb{N} : \exists x \ U(n, x) \text{ определена}\}$ . Вспомним про  $T$ -предикат  $T(n, x, k) \iff \mathcal{U}$  останавливается на входе  $(n, x)$  за  $k$  шагов. Но такое множество  $T$  разрешимо, а  $Z^{\mathbb{C}} = \{n \in \mathbb{N} : \exists x \exists k \ T(n, x, k)\} \implies Z^{\mathbb{C}}$  перечислимо.

**Пример 3.3.** Рассмотрим перечислимое множество  $Z^{\mathbb{C}} = \{n \in \mathbb{N} : U_n \text{ где-то определена}\} \neq \emptyset$ . Тогда существует вычислимая тотальная  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  такая, что  $Z^{\mathbb{C}} = \text{range } f = \{f(0), f(1), \dots\}$ . Рассмотрим  $W : \mathbb{N}^2 \xrightarrow{p} \mathbb{N}$  такую, что

$$W(m, x) = \begin{cases} \text{undefined}, & m = 0, \\ U(f(m-1), x), & m \geq 1. \end{cases}$$

$W$ , очевидно, является вычислимой. Докажем, что она универсальна. Рассмотрим произвольную вычислимую функцию  $g : \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$ . Рассмотрим несколько случаев:

1.  $g$  нигде не определена  $\implies g = W_0$ .
2.  $g$  где-то определена  $\implies \exists k$  такое, что  $U_k = g$  (в силу универсальности  $U$ )  $\implies \exists k \in Z^{\mathbb{C}} : U_k = g \implies \exists m \in \mathbb{N} : U_{f(m)} = g$ . Тогда  $g = U_{f(m)} = W_{m+1}$ .

Получается, что  $W$  является универсальной вычислимой функцией. Введем множество  $Z' = \{m \in \mathbb{N} : W_m \text{ нигде не определена}\}$ . Поскольку  $\forall m \ W_{m+1} = U_{f(m)}$ , где  $f$  — где-то определенная функция, поскольку  $\text{range } f = Z^{\mathbb{C}} \neq \emptyset$ , а  $f(m)$  — индексы относительно  $U$  где-то определенных функций  $\implies$  единственным номером нигде не определенной функции является  $0 \implies Z' = \{0\}$ . Поскольку  $Z^{\mathbb{C}}$  конечно, то оно разрешимо  $\implies$  перечислимо, но  $Z$  не перечислимо  $\implies W$  не является главной универсальной вычислимой функцией.

**Следствие 3.4.** Существуют не главные у. в. ф.

## 3.2 Рекурсия

**Теорема 3.1** (Клини). Пусть  $U$  — главная универсальная вычислимая функция. Тогда для любой вычислимой тотальной функции  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  существует  $n \in \mathbb{N}$  такое, что  $U_{f(n)} = U_n$ . То есть,

$$\forall x \ U(f(n), x) \simeq U(n, x).$$

*Доказательство.* Рассмотрим функцию  $V : \mathbb{N}^2 \xrightarrow{p} \mathbb{N}$  такую, что

$$\forall k \forall x \ V(k, x) \simeq U(U(k, k), x).$$

Такая функция вычислима. Поскольку  $U$  — главная, то существует вычислимая тотальная функция  $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  такая, что

$$\forall k \ U_{S(k)} = V_k \iff \forall k \forall x \ U(S(k), x) \simeq V(k, x) \simeq U(U(k, k), x) \quad (1)$$

Рассмотрим функцию  $f \circ S$ . Она вычислима и тотальная как композиция вычислимых тотальных функций. Поскольку  $U$  — у. в. ф.  $\implies \exists t$  такое, что  $U_t = f \circ S$ . Тогда

$$\forall x \ U(t, x) \simeq f(S(x)). \quad (2)$$

По формуле (1),

$$\forall x \ U(S(t), x) \simeq U(U(t, t), x) \stackrel{(2)}{\simeq} U(f(S(t)), x).$$

Получилось, что

$$\forall x \ U(S(t), x) \simeq U(f(S(t)), x).$$

Положим  $n = S(t)$ , тогда  $\forall x \ U(n, x) \simeq U(f(n), x) \iff U_n = U_{S(n)}$ .  $\square$

## 4 Лекция 4

**Теорема 4.1** (Клини о неподвижной точке). Пусть  $U$  — главная универсальная вычислимая функция,  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  — произвольная вычислимая тотальная функция. Тогда существует  $n \in \mathbb{N}$  такое, что  $U_{f(n)} = U_n$ , то есть

$$\exists n \quad \forall x \quad U(n, x) \simeq U(f(n), x).$$

На прошлой лекции мы доказали теорему Клини. С одной стороны, вы можете возразить, что же такого потрясающего в этом результате, бред же какой-то. На самом деле, если мы вспомним нашу содержательную интерпретацию символов, которые здесь есть, то оказывается, что это все не является бредом.  $U$  — функция, которую вычисляет некоторый универсальный алгоритм  $\mathcal{U}$ , то есть интерпретатор какого-то языка программирования. Первые аргументы функции  $U$ , то есть  $n$  и  $f(n)$  — это какие-то программы, а значение функции  $U(n, x)$  — это то, что вычисляет программа  $n$  на входе  $x$ . Тогда  $f$  можно рассматривать как некоторое алгоритмическое преобразование программ. И оказывается, что в главном языке программирования для любого алгоритмического преобразования программ найдется такая программа, чей смысл не меняется. Этот же факт означает, что ни одно алгоритмическое преобразование не может поменять смысл всех программ.

### 4.1 Теорема о рекурсии

Следствием теоремы Клини является факт, который мы будем называть теоремой о рекурсии.

**Следствие 4.1** (Теорема о рекурсии). Пусть  $U$  — главная универсальная вычислимая функция, и  $V : \mathbb{N}^2 \xrightarrow{p} \mathbb{N}$  — произвольная вычислимая функция<sup>2</sup> двух аргументов. Тогда  $\exists n \in \mathbb{N}$  такое, что

$$U_n = V_n.$$

Последнее равенство равносильно

$$\exists n \quad \forall x \quad U(n, x) \simeq V(n, x).$$

То есть, у нас существует такая программа, которая имеет на главном языке такой же смысл, что и на языке  $V$ . Вы спросите, а как вообще так? А вдруг один язык таков, что ни одна корректная программа не является корректной для другого? Тогда это утверждение не является верным, однако мы договорились, что все натуральные числа являются корректными программами, а в таком случае все хорошо.

*Доказательство.* И так, определение главной универсальной вычислимой функции гарантирует нам существование какой-то вычислимой тотальной функции. В тоже время, теорема Клини принимает какую-то вычислимую тотальную функцию на вход. Применим эти два факта и все получится.

Формально, так как  $U$  — главная, то существует вычислимая тотальная  $S$  такая, что  $\forall k \quad U_{S(k)} = V_k$ . Но, по теореме Клини, существует неподвижная точка  $n$  для  $S$ , то есть  $\exists n : U_{S(n)} = U_n$ . Тогда

$$\exists n : \quad U_n = U_{S(n)} = V_n,$$

что и требовалось показать. □

Причем тут вообще рекурсия? А при том, что функция  $V$  может сама по себе вызывать функцию  $U$ .

**Пример 4.1.** Существует такая программа  $n$ , которая на любом входе выводит саму себя. То есть,

$$\exists n : \quad \forall x \quad U(n, x) = n.$$

*Доказательство.* Рассмотрим  $V(k, x) = k$ , она вычислима. Тогда, по теореме о рекурсии,  $\exists n$  такое, что  $\forall x \quad U(n, x) \simeq V(n, x) \implies \exists n \quad \forall x \quad U(n, x) = n$ . □

**Пример 4.2.** Существует такая программа  $n$ , которая на любом входе  $x$  возвращает то же, что и программа  $x$  на входе  $n$ . То есть,  $\exists n : \forall x \quad U(n, x) \simeq U(x, n)$ .

Доказательство последнего примера полностью аналогично примеру 1. Таких примеров можно привести бесконечное количество, поэтому надо просто усвоить один важный факт: в главных языках программирования программа может иметь доступ к своему коду.

Как с этим всем связана рекурсия? Приходилось ли вам писать рекурсивные алгоритмы на каком-нибудь языке программирования (например, С). Наверное, приходилось. А как устроен рекурсивный алгоритм? На каком-то этапе вычисления функции  $f$ , она использует свой собственный код, то есть вызывает функцию  $f$ .

С другой стороны, на этот факт можно посмотреть как на уравнение.

---

<sup>2</sup>мы можем рассматривать ее как какой-то язык программирования, где первый аргумент — программы, а второй аргумент — их входной набор данных

**Утверждение 4.1.**  $\exists$  вычислимая функция  $f$  такая, что

$$\begin{cases} f(0) = 1, & x = 0, \\ f(x) = x \cdot f(x-1), & x > 0. \end{cases}$$

Заметим, что выражение выше является *системой из уравнений* на функцию  $f$ . Поэтому можно задать два вопроса:

1. существует ли такая  $f$ ?
2. единственна ли такая  $f$ ?

Оказывается, теорема Клини легко нам показывает, что такая функция существует. То есть, по некоторым условиям на функцию  $f$  нам гарантировано существование алгоритма, который эту функцию вычисляет.

*Доказательство.* Рассмотрим

$$V(k, x) \simeq \begin{cases} 1, & x = 0, \\ U(k, x-1) \cdot x, & x > 0. \end{cases}$$

По теореме о рекурсии,  $\exists n$  такое, что  $\forall x U(n, x) \simeq V(n, x)$ , то есть

$$\exists n \quad \forall x \quad U(n, x) \simeq \begin{cases} 1, & x = 0, \\ U(n, x-1) \cdot x, & x > 0. \end{cases}$$

Нам хочется, чтобы  $f = U_n$ , однако в формулировке теоремы о рекурсии нам не гарантируется, что  $U_n$  всюду определено, в то время как  $f$  должна быть всюду определена. Заметим, что в нуле функция  $U(n, 0)$  определена, а в остальных точках ее определенность можно доказать индукцией по  $x$ . Получается, что  $U_n$  тотальна. Таким образом, мы получили функцию с желаемыми свойствами ( $f = U_n$ ).  $\square$

В чем преимущество такого подхода? Мы описали наши пожелания относительно какой-то функции  $f$ , а теорема о рекурсии гарантирует нам существование алгоритма, вычисляющего  $f$ .

**Утверждение 4.2.** *Существует вычислимая функция  $f$  такая, что  $\forall x f(x) \simeq 1 + f(x+1)$ .*

Странная функция, она в точке  $x$  на единицу больше, чем в точке  $x+1$ . Что можно сказать про такую функцию? Она монотонно убывает, потому что  $f(x)$  на единицу больше, чем  $f(x+1)$ . Какое же значение у нее в нуле? Да никакого, ведь функция из натуральных чисел в натуральные. Может ли такая функция быть определена в каком-то натуральном числе? Нет, потому что иначе она бы представляла собой бесконечно убывающую последовательность натуральных чисел, которой существовать не может. Но вместе с тем, такая вычислимая функция подходит, и это очень просто понять:

*Доказательство.* Рассмотрим вычислимую функцию  $V(k, x) \simeq U(k, x+1) + 1$ . Правая часть вычислима, а по теореме о рекурсии существует  $n$  такое, что для любого  $x$   $U(n, x) \simeq V(n, x) \simeq U(n, x+1) + 1 \implies f = U_n$ .  $\square$

То есть, такая функция все же существует. Но что же это за функция? Ясно, что такая функция  $f = \zeta$  — нигде не определенная функция. Поэтому, любое уравнение вида  $U(n, x) \simeq V(n, x)$  с вычислимой правой частью имеет программу  $n_0$  — свое решение. Но никто не гарантирует, чтобы это решение было номером всюду определенной функции, и так далее. То есть, понятие рекурсия в этой всей теории используется в самом широком смысле: рекурсивная функция не обязана останавливаться. Она может нам дать нигде не определенную функцию, ведь, если передать такую функцию какому-нибудь компилятору вроде компилятора языка Си, то произойдет stack overflow ввиду конечности памяти в реальном мире. В нашей модели памяти бесконечно много, поэтому наша программа бы просто зациклилась, как, например, зацикливается программа, вычисляющая функцию  $\zeta$ .

## 4.2 Теорема о совместной рекурсии

Оказывается, с помощью конструкций вида

$$U(n, x) \simeq V(n, x)$$

с вычислимой правой частью, можно решать не только уравнения на вычислимую функцию, но и системы уравнений.

**Пример 4.3.** Существуют такие программы  $a$  и  $b$ , что для любого  $x$

$$\begin{aligned} U(a, x) &= b, \\ U(b, x) &= a + 1. \end{aligned}$$

Такая концепция в программировании называется *совместной рекурсией*: когда мы определяем одну функцию через другую, а эту функцию через первую. Совместная рекурсия встречается и в реальной жизни, например можно определить функции для проверки числа на четность:

$$\begin{aligned} \text{even}(0) &= 1, \\ \text{even}(n+1) &= \text{odd}(n), \\ \text{odd}(0) &= 0, \\ \text{odd}(n+1) &= \text{even}(n). \end{aligned}$$

**Теорема 4.2** (о совместной рекурсии). Пусть  $U$  — главная универсальная вычислимая функция, а  $V_1, V_2$  — произвольные вычислимые функции с нужным числом аргументов. Тогда  $\exists a, b$  такие, что  $\forall x$

$$\begin{cases} U(a, x) \simeq V_1(a, b, x), \\ U(b, x) \simeq V_2(a, b, x). \end{cases}$$

Мы можем решить систему уравнений: существуют два таких алгоритма, которые используют код друг друга. Все такие переходы от одномерного случая к двумерному делаются с помощью кодирования пар. С другой стороны, у нас на семинаре было доказано следующее утверждение:

**Утверждение 4.3.** Если  $U$  — главная универсальная вычислимая функция, то существует такая вычислимая тотальная функция  $c$ , что

$$\forall p, q \quad U_{c(p, q)} = U_p \circ U_q.$$

Или, если записать это в кванторах,

$$\forall x \quad U(c(p, q), x) \simeq U(p, U(q, x)).$$

Содержательно, идея этого утверждения следующая: имея текст программы  $p$  и текст программы  $q$ , мы можем автоматически сгенерировать текст программы, которая вычисляет  $p \circ q$ . Для Си, например, это вообще тривиальное утверждение: надо просто вызвать одну функцию из другой. Но это имеет место и в абстрактном случае. Само доказательство этого утверждения сильно зависит от наличия так называемого кодирования пар. Напомню, что это такое.

**Определение 4.1.** Пусть у нас существует вычислимая тотальная биекция  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ . Тогда  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  называется *кодированием пары*.

Таких биекций много, кроме того, для такой биекции существуют вычислимые тотальные функции-проекторы  $\pi_1$  и  $\pi_2$  такие, что

$$\begin{aligned} \pi_1(\langle n, m \rangle) &= n, \\ \pi_2(\langle n, m \rangle) &= m. \end{aligned}$$

Если  $\pi_1$  и  $\pi_2$  — вычислимые тотальные функции, то, поскольку  $U$  является у. в. ф., то у них есть какие-то индексы<sup>3</sup>  $p_1, p_2 \in \mathbb{N}$  такие, что

$$\pi_1 = U_{p_1} \quad \pi_2 = U_{p_2}.$$

Рассмотрим теперь функцию  $V(k, x) \simeq \langle V_1(c(p_1, k), c(p_2, k), x), V_2(c(p_1, k), c(p_2, k), x) \rangle$ . Такая функция  $V$  вычислима, потому что представляет собой композицию вычислимых функций. Почему она такая? Потому что нам так захотелось. По теореме о рекурсии,  $\exists n \in \mathbb{N}$  такое, что  $\forall x \in \mathbb{N}$

$$U(n, x) \simeq V(n, x) \simeq \langle V_1(c(p_1, n), c(p_2, n), x), V_2(c(p_1, n), c(p_2, n), x) \rangle.$$

Положим  $a = c(p_1, n)$ ,  $b = c(p_2, n)$ , тогда

$$U(a, x) \simeq U(c(p_1, n), x) \simeq U(p_1, U(n, x)) \simeq \pi_1(U(n, x)) \simeq V_1(c(p_1, n), c(p_2, n), x) \simeq V_1(a, b, x).$$

Кроме кодирования пар, можно использовать кодирование троек, и, с помощью такого кодирования, доказать это утверждение для трех программ. Аналогично можно сделать для любого конечного числа программ.

Итак, теорема Клини позволяет решать системы уравнений на вычислимые функции.

<sup>3</sup>программы, которые их считают

### 4.3 Теорема Райса-Успенского

Здесь и далее  $U$  — главная универсальная вычислимая функция. Теорему Райса-Успенского можно рассматривать как следствие теоремы Клини. Если вы ходили на семинары, или, хотя бы, на прошлую лекцию, то вы, наверное, помните, что у нас были такие множества:

$$\begin{aligned} &\{n \in \mathbb{N} \mid U_n \text{ где-то определена}\}, \\ &\{n \in \mathbb{N} \mid U_n \text{ монотонно возрастает на } \text{dom } U_n\}. \end{aligned}$$

Что это такое? Это множество программ, которые вычисляют функцию с каким-то нетривиальным свойством. Это вопрос, который, вообще говоря, мог бы быть интересен и на практике. И мы с вами во всех конкретных случаях видели, что все эти множества являются неразрешимыми. Первое множество перечислимо, второе — нет, но никакое из них не является разрешимым. То есть вопрос о том, можем ли мы алгоритмически узнать, обладает ли вычислимая функция  $U_n$  каким-то конкретным свойством, решался для  $U$  отрицательно. Оказывается, что это — общий факт, то есть нельзя алгоритмически по программе узнать, обладает ли вычисляемая ею функция какими-то свойствами<sup>4</sup>. Это и есть теорема Райса-Успенского.

**Теорема 4.3 (Райса-Успенского).** Пусть  $U$  — главная универсальная вычислимая функция, а  $\mathcal{F}$  — нетривиальное<sup>5</sup> подмножество множества всех вычислимых функций  $f : \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$ . Тогда множество

$$F = \{n \in \mathbb{N} \mid U_n \in \mathcal{F}\}$$

неразрешимо. Множество  $F$  называется индексным множеством.

*Доказательство (Есенин-Вольпин).* Сведем доказательство исходного утверждения к теореме Клини. Зафиксируем вычислимую функцию  $f \in \mathcal{F}$ , и вычислимую функцию  $g \notin \mathcal{F}$ . В силу универсальности  $U$  существуют индексы  $n, m \in \mathbb{N}$  такие, что  $f = U_n$  и  $g = U_m$ . Рассмотрим тотальную функцию  $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  такую, что

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad h(k) = \begin{cases} m, & k \in F, \\ n, & k \notin F. \end{cases}$$

Если  $F$  — разрешимое множество, то  $h$  вычислима, потому что  $h(k) = m \cdot \chi_F(k) + n \cdot (1 - \chi_F(k))$ . Итак,  $h$  вычислима и тотальна, тогда, по теореме Клини,  $\exists n$  такое, что

$$U_n = U_{h(n)}.$$

Рассмотрим теперь, куда попадает число  $n$ . Оно либо попадает в  $F$ , либо нет. Предположим, что  $k \in F$ , тогда  $U_k \in \mathcal{F}$  с одной стороны. С другой стороны, поскольку  $k \in F$ , то  $U_{h(k)} \in \mathcal{F} \implies h(k) = m \implies U_m \in \mathcal{F} \implies g \in \mathcal{F} \implies$  противоречие. Совершенно аналогично рассматривается случай, когда  $k \notin F$ . Тогда  $U_k \notin \mathcal{F} \implies U_{h(k)} \notin \mathcal{F} \implies U_n \notin \mathcal{F} \implies f \notin \mathcal{F} \implies$  противоречие.

Итак, если бы множество  $F$  было бы разрешимым, мы бы с вами изготовили такую функцию, которая использует свойство принадлежности множеству  $F$  и делает все наоборот: если принадлежит, то выдает номер функции, которая не принадлежит, а если не принадлежит, то выдает номер функции, которая принадлежит этому множеству. А дальше мы пользуемся теоремой Клини: должна быть программа, чей смысл не меняется, однако в таком случае получается, что смысл любой программы меняется, отсюда и противоречие.  $\square$

Дадим также альтернативное доказательство этой теоремы, которое изначально предложил Райс.

*Доказательство (Райс).* Зафиксируем функцию  $\zeta$ , которая нигде не определена. Попадает ли эта функция  $\mathcal{F}$  или нет? Рассмотрим два случая:

$\zeta \in \mathcal{F} \implies$  проведем тоже рассуждение для  $\bar{\mathcal{F}}$ , этого достаточно, поскольку разрешимость любого множества эквивалентно разрешимости его дополнения.

$\zeta \notin \mathcal{F} \implies$  мы знаем, что  $\mathcal{F} \neq \emptyset$ , значит существует вычислимая  $f \in \mathcal{F}$ . Зафиксируем также  $K$  — какое-то перечислимое неразрешимое множество. Рассмотрим функцию  $V : \mathbb{N}^2 \xrightarrow{p} \mathbb{N}$ , которая устроена следующим образом:

$$\forall n, x \in \mathbb{N} \quad V(n, x) \simeq \begin{cases} f(x), & n \in K, \\ \zeta(x), & n \notin K. \end{cases}$$

Покажем, что функция  $V$  вычислима. На входе  $(n, x)$  запускаем перечислитель множества  $K$ , если  $n \notin K$ , то алгоритм заиклится, что равносильно вычислению  $\zeta$ . Иначе, передаем управление вычислителю функции  $f$ . Ну или, если расписать формальнее, то  $V(n, x) \simeq f(x) \cdot \omega_K(n)$ , где  $\omega_K$  вычислима как полухарактеристическая функция перечислимого множества.  $U$  — главная  $\implies$  существует вычислимая тотальная  $S$  такая, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{S(n)} = V_n.$$

Для любого  $n \in \mathbb{N}$  рассмотрим два случая:

<sup>4</sup>все равно, что сказать, что нетривиальные свойства функции не распознаются по номерам программ

<sup>5</sup>это значит, что  $\exists f \in \mathcal{F}$ , и  $\exists g \notin \mathcal{F}$

$$n \in K \implies V_n = f \in \mathcal{F} \implies U_{S(n)} \in \mathcal{F} \implies S(n) \in F.$$

$$n \notin K \implies V_n = \zeta \notin \mathcal{F} \implies U_{S(n)} \notin \mathcal{F} \implies S(n) \notin F.$$

Получается, что  $\forall n \ n \in K \iff S(n) \in F$  — картина  $m$ -сводимости. Тогда неразрешимое множество  $K \leq_m F$ , но тогда  $F$  неразрешимо, что и требовалось доказать. Заметим, что, по свойству  $m$ -сводимости,  $\bar{K} \leq_m \bar{F}$ , то есть  $\bar{F}$  не перечислимо, поскольку  $\bar{K}$  не перечислимо.

□

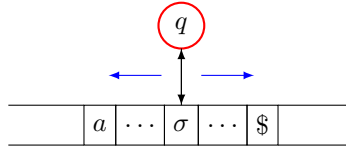


## 5 Лекция 5

### 5.1 Неформальное описание машины Тьюринга

Что такое машины Тьюринга и зачем они нам нужны? В предшествующих лекциях мы с вами работали с понятием алгоритма и достаточно далеко развили соответствующую теорию при том, что алгоритм мы никак не определяли. Дело в том, что определений алгоритма может быть много, и нельзя сказать, что одно из них хуже или лучше другого, ровно как и нельзя сказать, что один язык программирования лучше или хуже другого. В общем-то, эти определения могут выглядеть по-разному, однако они эквивалентны в том смысле, что дают одно и то же множество вычислимых функций. Собственно говоря, именно по тому, какие функции считаются вычислимыми, мы и оцениваем данное конкретное понятие алгоритма.

Машина Тьюринга — это такая модель алгоритмов, которая немного похожа на примитивный электромеханический (или даже электронный) компьютер. Она не самая удобная для практических рассуждений или математических доказательств, но, с другой стороны, она считает в себе относительную простоту, наглядность и относительную близость к практике. Так что машины Тьюринга прочно укрепились в преподавании и, по-сути, являются простейшими моделями, которые нам надо знать. Дадим неформальное описание машины Тьюринга.



Суть в том, что у нас имеется некоторая такая лента, разбитая на ячейки. Такую ленту можно рассматривать как оперативную память. Каждая ячейка имеет конечную емкость, то есть число состояний ячейки конечно. Можно считать, что в ячейку пишется какой-то символ  $a$  из *конечного* алфавита  $\Gamma$ . По ленте ездит некоторое абстрактное устройство, которое называется *головкой*. Что же эта головка делает? Головка может читать символ из ячейки, и может писать символ в эту ячейку. Также она может ленту двигать на один шаг влево или на один шаг вправо. Соответственно, чтобы прочитать с ленты несколько последовательных символов, машина должна несколько раз ленту переместить (или проехать по ней). Кроме того, у головки самой имеется некоторая внутренняя память, которая содержательно нужна для того, чтобы устанавливать связь между содержимым ячеек. Мы моделируем эту память следующим образом: мы считаем, что у головки есть какое-то состояние  $q \in Q$ , в котором она находится, и эти состояния вместе образуют некоторый *конечный алфавит состояний*  $Q$ . Почему память можно моделировать конечным алфавитом состояний? Если вы рассмотрите модель памяти в вашем компьютере в предположении, что вы не можете ее покупать, то эту память можно заполнить лишь конечным числом способов. Например, если она имеет «длину» в  $n$  бит, то мы можем придать ей лишь  $2^n$  различных состояний. С практической точки зрения удобно думать, что память головки — это что-то типа состояния регистра процессора, а лента — оперативная память (которая, при этом, считается неограниченной). Мы считаем, что чистые (нетронутые) ячейки памяти заполнены специальным символом  $\# \in \Gamma$ , который называется *пробельным символом*.

Как же наша машина Тьюринга работает? Работает она в соответствии с некоторой «программой». Тут важно понимать аналогию: не смотря на то, что мы говорим, что машина Тьюринга — это модель компьютера, она является таким компьютером, который выполняет только одну программу. Как же выглядит программа? Программа, по сути дела, указывает машине что делать, в каком состоянии, в зависимости от символа, написанного в данной ячейке, в которой находится головка. Программа состоит из инструкций вида  $qa \mapsto q'a'S$ , где

- $q, q' \in Q$  — состояния;
- $a, a' \in \Gamma$  — символы алфавита;
- $S \in \{L, N, R\}$  — элемент некоторого трехэлементного множества, в котором  $L$  = «left»,  $N$  = «neutral»,  $R$  = «right». Это символы, которые говорят нам, куда нужно сдвинуть головку. Например,  $R$  означает, что машина должна сдвинуться в ячейку справа от текущей.

Интерпретация инструкций такая: если в состоянии  $q$  увидишь  $a$  в текущей ячейке, то запиши  $a'$  в текущую ячейку, перейди в состояние  $q'$  и сместись на  $S$ . То есть, по сути дела, чем определяется поведение машины Тьюринга? Поведение ее определяется тем, что написано на ленте, изначальным положением головки и ее состоянием. На самом деле, в каждый момент времени, будущее состояние нашей машины определяется такой информацией. Такая информация называется *конфигурацией машины Тьюринга*.

**Определение 5.1.** Конечное множество  $\Gamma$  называется ленточным алфавитом.

**Определение 5.2.** Будем обозначать через  $\Gamma^*$  множество всех конечных последовательностей элементов из алфавита  $\Gamma$ .

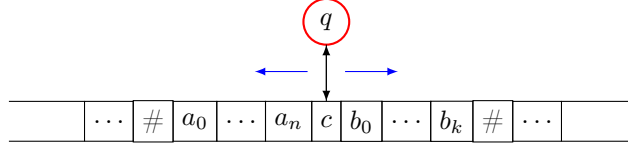
$$\Gamma^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma^n.$$

**Определение 5.3.** Зафиксируем  $A, B \in \Gamma^*$  — какие-то слова ленточного алфавита,  $q$  — состояние головки МТ<sup>6</sup>,  $c \in \Gamma$  — символ в текущей ячейке, на которую машина смотрит. Тогда набор  $(A, B, q, c)$  называется конфигурацией машины Тьюринга.

Конфигурация трактуется следующим образом:

- $A$  — то, что стоит слева от головки;
- $B$  — то, что стоит справа от головки;
- $c$  — символ, который находится под головкой.

Проиллюстрировать это можно, например, вот так:



Здесь  $(a_0, \dots, a_n) = A$ ,  $(b_0, \dots, b_k) = B$ . Обратим внимание, что нельзя сказать, что машина находится в какой-то одной конфигурации, потому что мы можем к словам  $A$  и  $B$  дописывать пробельные символы. Поэтому, если быть супер формальными, речь идет о классах эквивалентности. Поэтому мы не говорим, что машина Тьюринга находится в такой конфигурации, а говорим, что происходит на ленте, если конфигурация такая. Здесь очень много всяких мелких деталей, поэтому мы их скрыли при построении теории алгоритмов.

Итак, в соответствии с программой и своей конфигурацией, МТ делает шаги. Один шаг состоит в исполнении одной инструкции вида  $qa \mapsto q'a'S$ .

**Определение 5.4.** Процесс (протокол) вычисления — конечная последовательность конфигураций, где каждая следующая конфигурация получается из предыдущей за один шаг машины.

Это определение можно себе представить следующим образом:

$$c_1 \xrightarrow{\mathcal{M}} c_2 \xrightarrow{\mathcal{M}} c_3 \xrightarrow{\mathcal{M}} \dots \xrightarrow{\mathcal{M}} c_n,$$

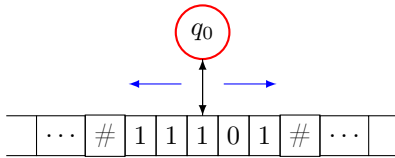
где  $\mathcal{M}$  — обозначение машины Тьюринга, а  $c_i$  —  $i$ -ая конфигурация  $\mathcal{M}$ . Отношение « $\xrightarrow{\mathcal{M}}$ » означает, что одна операция получается из другой за один шаг  $\mathcal{M}$ . Сам такой процесс мы можем понимать как *отношение достижимости конфигурации* за  $n$  шагов.

Мы написали много всего абстрактного, посмотрим, как вся эта теория может работать. Заведем МТ  $\mathcal{M} : \Gamma = \{0, 1, \#\}, Q = \{q_0, q_1\}$ . Зададим ее программу:

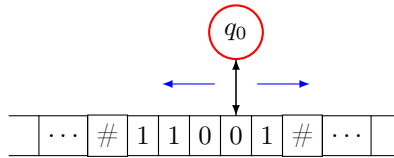
$$\begin{aligned} q_0 0 &\mapsto q_0 1 R, \\ q_0 1 &\mapsto q_0 0 R, \\ q_0 \# &\mapsto q_1 \# N. \end{aligned}$$

Пояснение текстом:

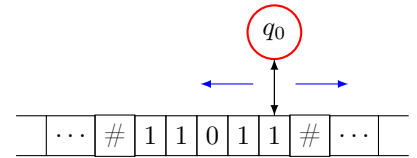
- если мы видим 0 в состоянии  $q_0$ , то давайте напишем 1 в состоянии  $q_0$  и сдвинемся направо;
- если мы видим 1 в состоянии  $q_0$ , то давайте напишем 0 в состоянии  $q_0$  и сдвинемся направо;
- если мы видим  $\#$  в состоянии  $q_0$ , то перейдем в состояние  $q_1$ , напишем в этом состоянии  $\#$ , и никуда двигаться не будем.



(a) Состояние 1.



(b) Состояние 2.



(c) Состояние 3.

Это можно представить в виде такой последовательности состояний:

$$11q_0101 \xrightarrow{\mathcal{M}} 110q_001 \xrightarrow{\mathcal{M}} 1101q_01 \xrightarrow{\mathcal{M}} 11010q_0\#.$$

<sup>6</sup>машины Тьюринга — прим.

В последнем состоянии окажется, что головка остановилась на пробельном символе. Что же будет происходить в таком случае? Будет ли машина дальше двигаться? Если машина видит в состоянии  $q_0$  решетку, то она переходит в конфигурацию  $q_1$ :

$$11010q_0\# \xrightarrow{\mathcal{M}} 11010q_1\#.$$

А дальше мы что-нибудь делать будем? Получается, что наша программа определена не полностью, хотя, формально, надо для любой ситуации описать, что нужно в ней делать. Практически, указывают только те пары, которые чем-либо нам интересны, а остальные пары, по умолчанию, считаются «нейтральными»:

$$q_1\# \mapsto q_1\#N.$$

Тогда получается, что начальная конфигурация

$$11q_0101 \xrightarrow{\mathcal{M}} {}^711010q_1\#.$$

Получается, что процесс вычисления на  $\mathcal{M}$  — это переписывание последовательности конфигураций. Пусть  $\Sigma$  — некоторое конечное множество, которое мы будем называть *входным алфавитом*.

**Определение.** Машина  $\mathcal{M}$  вычисляет функцию  $f : \Sigma^* \xrightarrow{p} \Sigma^*$ , если  $\Sigma \subseteq \Gamma$  и для любого слова  $\vec{x} \in \Sigma^*$

$$\vec{x} \in \text{dom } f \implies q\vec{x} \xrightarrow{\mathcal{M}} f(\vec{x}).$$

Возникает множество вопросов, которые надо уточнить:

**Q:** где должна находиться головка относительно входа?

**A:** давайте считать, что головка должна стоять на самой последней решетке перед входом.

**Q:** где должна быть головка после вычислений?

**A:** нам очень удобно считать, что после вычислений машина поставит головку перед результатом.

**Q:** а какие же у нас тут должны быть состояния?

**A:** на самом деле, с помощью состояний мы можем передавать некоторую дополнительную информацию. Договоримся, что хотя бы одно состояние (выделенное) считается *начальным* (обозн.  $q_1$ ), и хотя бы одно состояние считается *завершающим* (обозн.  $q_0$ ).

Тогда определение можно записать следующим образом:

**Определение 5.5** (вычислимости функции). Машина  $\mathcal{M}$  вычисляет функцию  $f : \Sigma^* \xrightarrow{p} \Sigma^*$ , если  $\Sigma \subseteq \Gamma$  и для любого слова  $\vec{x} \in \Sigma^*$

$$\vec{x} \in \text{dom } f \implies q_1\#\vec{x} \xrightarrow{\mathcal{M}} q_0\#f(\vec{x}).$$

$$\vec{x} \notin \text{dom } f \implies \text{для любой конфигурации } c \text{ } q_1\#\vec{x} \not\xrightarrow{\mathcal{M}} c, \text{ если } c \text{ содержит } q_0.$$

## 5.2 Формальное описание машины Тьюринга

**Определение 5.6** (формальное определение МТ). Машина Тьюринга  $\mathcal{M}$  — это набор конечных множеств

$$\mathcal{M} = (\Gamma, \Sigma, Q, q_1, q_0, \delta),$$

где  $\Sigma \subseteq \Gamma$ ,  $\# \in \Gamma \setminus \Sigma$ ,  $q_1, q_0 \in Q$ ,  $\Gamma \cap Q = \emptyset$ ,  $\delta : (Q \setminus \{q_0\}) \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, N, R\}$  — функция переходов<sup>8</sup>.

Конечно, формальное определение машины ничего нам не говорит об определении того, как же ведутся вычисления (то есть, мы пока ничего не знаем про отношение « $\xrightarrow{\mathcal{M}}$ »). Давайте и его формально определим.

По сути дела, определив формально МТ, мы заодно определили понятие конфигурации МТ. Пусть  $\text{Conf}_{\mathcal{M}}$  — это множество всех конфигураций  $\mathcal{M}$ . Определим « $\xrightarrow{\mathcal{M}}$ » индуктивно как наименьшее по включению отношение такое, что  $\forall q, q' \in Q; \forall a, a' \in A; \forall b \in B$

1. Если  $\delta(q, a) = (q', a', R)$ , то  $AqabB \xrightarrow{\mathcal{M}} Aa'q'bB$  и  $Aqa \mapsto Aa'q'\#$ .

2. Аналогично (1) для сдвига  $N$ .

3. Аналогично (1) для сдвига  $L$ .

<sup>7</sup>через  $c_1 \xrightarrow{\mathcal{M}} c_2$  я обозначаю достижимость конфигурации  $c_1$  из конфигурации  $c_2$  за конечное число шагов.

<sup>8</sup>ну или программа, которую выполняет  $\mathcal{M}$ .

Обратим внимание, что такое формальное определение отношения на конфигурациях не зависит от слова «лента». Соответственно,  $c \xrightarrow{\mathcal{M}} c' \iff \exists c_1, c_n : c \xrightarrow{\mathcal{M}} c_1 \xrightarrow{\mathcal{M}} \dots \xrightarrow{\mathcal{M}} c_n \xrightarrow{\mathcal{M}} c'$ . В частности, может быть, что  $c = c'$ . Тогда « $\xrightarrow{\mathcal{M}}$ » — рефлексивное транзитивное замыкание отношения « $\rightarrow$ ».

Давайте повторим, что означает вычислимость функции  $f$ , которая определена на словах конечного алфавита  $\Sigma$ . Это значит, что на всех словах, где функция определена, мы из исходной конфигурации попадаем в завершающую, а на всех словах, где она не определена, мы никогда не попадем в завершающую конфигурацию. Но ведь в теории алгоритмов у нас были функции на натуральных числах, то есть  $f : \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$ . Как же обработать эту ситуацию, учитывая тот факт, что  $f$  определена на словах конечного алфавита, а  $\mathbb{N}$  счетно. Идея: закодируем натуральные числа через символы конечного алфавита. У нас есть несколько видов кодирования:

**Унарное кодирование:** Определим функцию унарного кодирования  $u : \mathbb{N} \rightarrow \{1\}^*$ . Положим код нуля  $u(0) = \varepsilon \in \{1\}^* \leftarrow$  нулевое слово. Тогда  $u(n+1) = 1u(n)$ , то есть унарным кодом числа  $n$  является  $n$  последовательных единиц ( $u(3) = 111$ ), код нуля — отсутствие единиц.

**Бинарное кодирование:** Определим функцию бинарного кодирования  $b : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}^*$  — обычная двоичная запись числа  $n$ :  $b(0) = 0$ ,  $b(2n) = b(n)0$ ,  $b(2n+1) = b(n)1$ .

**Утверждение 5.1.** Функция  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  такая, что  $f(n) = n+1$  вычислима на МТ в унарных кодах.

*Доказательство.* Существует МТ, которая по бинарному коду строит унарный и наоборот, поэтому от вида кодирования числа  $n$  результат зависеть не будет. Нужно показать, что существует вычисляемая функция  $g : \{1\}^* \rightarrow \{1\}^*$  такая, что  $g(u(n)) = u(f(n)) = u(n+1)$ . То есть, мы хотим построить такую МТ, что

$$\underbrace{1 \dots 1}_n \xrightarrow{\mathcal{M}} \underbrace{1 \dots 1}_{n+1}.$$

Самое главное — задать функцию перехода  $\delta$ . Положим  $Q = \{q_0, q_1\}$ ,  $\Sigma = \{1\}$ ,  $\Gamma = \{\#, 1\}$ . Воспользуемся тем, что в унарной записи нет разницы, приписывать единицу в начало или в конец числа, поэтому определим  $\delta$  следующим образом:

$$q_1 \# \mapsto q_0 1 L.$$

Тогда у нас все получится. □

Важно понимать, что алфавит состояний не может быть бесконечным, как и не может зависеть от входа. Какую-то дополнительную информацию можно хранить на ленте с помощью дополнительных символов, которые мы можем ввести.

На практике, в интернете имеется множество ресурсов, которые позволяют вам написать код МТ и его отладить. Конечно, писать программу вслепую без отладки трудно, ведь даже такая простая программа как удвоение числа потребовала от нас каких-то усилий.

Итак, с помощью унарного кодирования мы поняли, как работать с функциями вида  $f : \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$ . А если, например, функция зависит от двух аргументов? Тогда можно ввести дополнительный символ-разделитель  $\$ \in \Gamma$ , и записать наши аргументы вот так

$$\# \text{code}(n) \$ \text{code}(m) \xrightarrow{\mathcal{M}} \# \text{code}(f(n, m)).$$

Заметим, что без  $\$$  можно обойтись в бинарном коде:

$$\text{code}((n, m)) = \text{double}(b(n))01\text{double}(b(m)),$$

где  $abc \xrightarrow{\text{double}} aabbcc$ , то есть  $\text{double}$  удваивает каждый символ в записи числа  $n$ . Понятно, что при таком подходе у нас никогда не встретится подстрока вида  $01$ , поэтому кодирование выше является корректным. Например,

$$\text{code}((3, 5)) = \underbrace{1111}_{n=3} 01 \underbrace{110011}_{m=5}.$$

### 5.3 Тезис Тьюринга

Тезис Тьюринга говорит нам, что любая функция, вычисляемая в интуитивном смысле<sup>9</sup>, вычислима некоторой машиной Тьюринга (при выборе подходящего кодирования аргументов и значений). По сути дела, этот принцип говорит нам, что машины Тьюринга соответствуют интуитивному понятию вычислений, то есть любое вычисление можно реализовать на машине Тьюринга. Есть<sup>10</sup> философская аргументация в пользу этого тезиса. Можно сравнить работу МТ с вычислениями, которые человек мог бы делать на листах бумаги, что, мол, на каждом листе бумаги вы можете написать лишь конечное число различных текстов, значит каждый лист бумаги можно рассматривать как ячейку, содержащую один из символов конечного алфавита. Состояний вашего мозга конечно много, то есть мозг — это такая головка, у нее конечное число состояний. Вы берете листы и обозреваете в каждый момент только один, переходите от одного к другому перелистывая их, что очень похоже на вычисления, производимые МТ.

<sup>9</sup>что бы это не значило.

<sup>10</sup>см. в книге Верещагина-Шеня «Лекции по математической логике. Часть 3. Вычислимость».

## 5.4 Свойства алгоритмов в терминах машин Тьюринга

Попробуем проследить связь всей этой теории про МТ со свойствами алгоритмов.

**«Алгоритмов лишь счетно много»:** Можно ли сказать, что машин Тьюринга счетно много? Как мы помним,  $\mathcal{M} = (\Gamma, \Sigma, Q, q_0, q_1, \delta)$ , где  $\Gamma, \Sigma, Q$  конечны;  $q_0, q_1 \in Q$ ;  $\delta : (Q \setminus q_0) \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, N, R\}$ . То есть вопрос сводится к тому, сколько существует конечных множеств? Ответ: очень много. То есть настолько много, что нельзя говорить о том, что существует множество всех конечных множеств. С точки зрения формальной теории множеств, все конечные множества образуют т. н. *собственный класс* (как и все возможные множества), то есть множество они не образуют. Следовательно, машин Тьюринга тоже очень много. Как же получить счетное число таких машин? На самом деле, многие МТ отличаются друг от друга только названиями состояний и символов, то есть они изоморфны. Две МТ  $(\Gamma, \Sigma, Q, q_0, q_1, \delta)$  и  $(\Gamma', \Sigma', Q', q'_0, q'_1, \delta')$  называются *изоморфными*, если существует отображение<sup>11</sup>  $\varphi$  такое, что  $\Gamma \mathcal{L} \Gamma', Q \mathcal{L} Q', \varphi(q_0) = q'_0, \varphi(q_1) = q'_1, \delta(q, a) = (t, b, S) \iff \delta(\varphi(q), \varphi(a)) = (\varphi(t), \varphi(b), S)$ . С точностью до изоморфизма существует лишь счетно много машин Тьюринга, как и алгоритмов.

**«Композиция вычислимых функций вычислима»:** Пусть у нас машина  $\mathcal{M}$  вычисляет функцию  $f : \Sigma^* \xrightarrow{p} \Sigma^*$ , а  $\mathcal{N}$  вычисляет  $g : \Sigma^* \xrightarrow{p} \Sigma^*$ . У нас  $\mathcal{M} = (\Gamma, \Sigma, Q, q_0, q_1, \delta), \mathcal{N} = (\Gamma', \Sigma, Q', q'_0, q'_1, \delta')$ . С точностью до изоморфизма, считаем, что  $Q \cap Q' = \emptyset$ . Построим машину  $\mathcal{L} = (\Gamma \cup \Gamma', \Sigma, Q \cup Q', q_0, q'_1, \hat{\delta})$ , где  $\hat{\delta} = \delta \cup \delta' \cup \{q_1 \# \rightarrow q'_0 \# N\}$ . Поскольку

$$q_0 \# \vec{x} \xrightarrow{\mathcal{M}} q_1 \# f(\vec{x}) \xrightarrow{\mathcal{L}} q'_0 \# f(\vec{x}) \xrightarrow{\mathcal{N}} q'_1 \# g(f(\vec{x})),$$

то машина  $\mathcal{L}$  позволяет вычислить композицию  $f \circ g$ , ведь она содержит в себе машины  $\mathcal{M}$  и  $\mathcal{N}$ . Формально, состояние  $q'_1$  не является завершающим для машины  $\mathcal{N}$ , поэтому мы должны доопределить  $\hat{\delta}$ , чтобы все было корректно.

**«Существование у. в. ф.»:** Пусть алфавит  $\Sigma \supseteq \{0, 1\}$  фиксирован. Почему можно алфавит зафиксировать? Ну потому что можно доказать, что любой алфавит можно, путем кодирования его символов, заменить алфавитом из нулей и единиц. То есть если функция, которая работает на бинарных кодах, вычислима в одном алфавите, содержащем нули и единицы, то она вычислима некоторой машиной алфавите, содержащем только нули и единицы. Поэтому выбор алфавита не очень существенен, а ограничение на наличие в нем 0 и 1 довольно слабое. Любую машину с таким  $\Sigma$  можно кодировать в  $\{0, 1\}$ , то есть положим  $\Gamma = \{\text{code}(a) \mid a \in \Gamma\}$ ,  $Q = \{q_0, \dots, q_n\} = \{\$b(i)\$ \mid i \in \{0, \dots, n\}\}$ ,  $\delta$  — список конечных инструкций  $qa \mapsto q'a'S'$ , каждую из которых можно закодировать, то есть каждая такая инструкция — слово конечного алфавита  $\implies$  его можно закодировать двоичным кодом. Поэтому каждая  $\mathcal{M} \mapsto \text{code}(\mathcal{M}) \in \{0, 1\}^* \implies$  любая  $\mathcal{M}$  — это конечный объект.

**Теорема 5.1.** *Существует МТ  $\mathcal{U}$  с входным алфавитом  $\Sigma$  такая, что для любой МТ  $\mathcal{M}$  с входным алфавитом  $\Sigma$*

$$\forall \vec{x} \in \Sigma^* \quad \mathcal{U}(\langle \text{code}(\mathcal{M}), \vec{x} \rangle) \simeq \mathcal{M}(\vec{x}).$$

Здесь « $\simeq$ » означает, что либо обе машины приходят к одной завершающей конфигурации, либо обе не останавливаются (никогда не приходят к завершающей конфигурации).

**«Возможность выполнять по шагам»:** Можно доказать, что существует машина  $\mathcal{T}$  такая, что для любой машины  $\mathcal{M}$  и для любых  $\vec{x}, \vec{y}$ , а также для любого  $k \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{T}(\langle \text{code}(\mathcal{M}), \vec{x}, \vec{y}, u(k) \rangle) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathcal{M} \text{ на входе } \vec{x} \text{ останавливается за } k \text{ шагов и выдает } \vec{y}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

<sup>11</sup>по сути, такие МТ отличаются переименованием элементов множеств.

## 6 Лекция 6

### 6.1 Формулы и термы языка первого порядка

Сегодня мы начинаем изучение логики. Давайте немножко поговорим о том, что это такое. Вообще, логика — это такая наука, которая посвящена анализу различных рассуждений, как формальных математических, так и, может быть, не совсем формальных философских, юридических или каких-нибудь иных. То, что называется *математической логикой*, в основном, посвящено изучению различных доказательств, разных рассуждений, которые встречаются в математике, математическими же методами. Например, обычная логика стремится отделить корректные рассуждения, в которых из истинных посылок всегда выводят истинные следствия, от некорректных. И математическая логика тоже не чужда этой задаче. При этом, нам с вами нужно будет точно определить, что же значит истинность утверждения, что такое утверждение или высказывание. Мы не будем пытаться решить эту задачу в ее общеполитической широте. Мы попробуем смоделировать те высказывания, с которыми работает сама математика (т. е. те, которые встречаются в разных ее областях). Начнем с изучения какого-то конкретного примера.

**Пример** Рассмотрим арифметику натуральных или целых чисел. Давайте посмотрим, что же у нас в арифметике есть. В арифметике бывают:

**Высказывания** например, « $2 = 3$ » или « $2 < 3$ ». Хочется верить, что первое высказывание ложно, а второе истинно. Так оно, в общем-то, и есть, если у нас фиксирован смысл чисел 2, 3, операций « $=$ » и « $<$ ».

**Не высказывания** например, « $2x = 3 + y$ » не является высказыванием, но почему? Потому что в нем присутствуют переменные. То есть мы не можем ничего утверждать про его истинность или ложность, не определив значения *переменных*  $x$  и  $y$ .

Тем не менее, у этих объектов есть нечто общее. В конечном счете, может быть, по модулю придания переменным каких-то значений, они обозначают какое-то утверждение (или высказывание), возможно, с параметрами. Высказывания с параметрами также называются *предикатами*. Сами такие выражения ( $2 = 3$  или  $2x = 3 + y$ ) мы будем называть *формулами*. Формула обозначает предикат. Бывают еще формулы вида

$$\exists x: \forall y \quad x \leq y. \quad (3)$$

Такая формула с кванторами также обозначает некоторое высказывание. Обратим внимание, что вот это высказывание будет верным для  $\mathbb{N}$ , но ложным для  $\mathbb{Z}$ . Что можно делать с такими выражениями? Их можно комбинировать (или группировать) с помощью некоторых *логических связей*. В принципе, набор связей можно выбирать произвольно, но можно доказать, что всегда достаточно конъюнкции и отрицания (или дизъюнкции и отрицания). Мы будем пользоваться связками  $\wedge, \vee, \implies, \neg$ . Что же такое связки? С чисто синтаксической точки зрения, связки — это такие значки, которые позволяют из одной формулы сделать другую, например если у нас была формула

$$\exists x: x + 2 = 1, \quad (4)$$

вы можете взять и написать, например, такое утверждение:

$$((\exists x: x + 2 = 1) \vee \neg(2x = 3 + y)) \implies 3 = 5 + z.$$

**Из чего образуются формулы?** Давайте посмотрим на выражения вида

$$2 + x, \quad 3 \cdot y, \quad z, \quad (z + x) \cdot x + 8, \quad \dots$$

Они обозначают числа, зависящие от параметров. А что такое числа? Числа — это элементы нашей предметной области, о которой мы говорим, то есть может быть натуральные числа, может быть целые числа, как мы договоримся. То есть, формулы обозначают элементы предметной области, о которой наша математическая теория ведет разговор. Такие выражения называются *термами*<sup>12</sup>. Содержательно, терм — это имя числа или какого-то другого объекта, который мы рассматриваем. Но у некоторых объектов могут быть имена собственные, например

- 2, 3 — константы;
- $x, y$  — переменные.

Еще мы можем строить термы следующим образом: можно взять два каких-то терма, и соединить их символом какой-то операции или функции:

$$2 + x$$

---

<sup>12</sup>терм — от слова термин.



Здесь «+» — символ бинарной операции (функции). То есть термы можно также называть *функциональными выражениями*. Они обозначают результат применения каких-то функций к каким-то константам или переменным. Обратите внимание, термы и формулы являются некими разными сущностями. В чем же между ними разница? Терм обозначает число, а формула обозначает высказывание, при этом и число, и высказывание могут зависеть от параметров. При этом, к формуле мы можем задать вопрос<sup>13</sup> «верно это или нет?», а к терму мы можем задать вопрос «чему это равно?». То есть формула — это какое-то утверждение, а терм — имя объекта.

Как же обстоит дело в общем случае? Давайте попробуем это понять. В арифметике нам, до сих пор, встретились некоторые константы (2, 3, 8), были символы переменных ( $x, y, z$ ), были символы служебные (круглые скобки) и были символы «+» и «·». Давайте попробуем к этому всему подойти абстрактно. Как вообще можно было бы абстрактно определить терм? Определение это зависит от списка символов, над которыми эти термы определяются. Ну и аналогично, для определения формул, нам требовались служебные символы, логические символы (связки, кванторы) и символы, специфические для нашей области (например, символы «=» и «<»).

## 6.2 Сигнатуры

Если все эти символы собрать в одну кучу, получится то, что называется *сигнатурой* — список символов, которые используются для построения формул в той или иной математической теории. Конечно же, сигнатуру можно определить и формально. Посмотрим, для начала, какая же у нас сигнатура в арифметике:

- Символы отношений<sup>14</sup> (предикатов):  $=^{(2)}, <^{(2)}, \leq^{(2)}, >^{(2)}, \geq^{(2)}, \dots$
- Символы операций (функций):  $+^{(2)}, \cdot^{(2)}, (\cdot)+^{(1)}, \dots$
- Символы констант: 2, 3,  $\dots$

Теперь попробуем определить сигнатуру абстрактно.

**Определение 6.1.** Сигнатурой  $\sigma$  называется тройка множеств

$$\sigma = (\text{Rel}, \text{Func}, \text{Const}),$$

где

- $\text{Rel} \neq \emptyset$  — множество символов отношений (или предикатных символов).
- $\text{Func}$  — множество функциональных символов.
- $\text{Const}$  — множество символов констант.

Обратите внимание на следующий интеллектуальный трюк: в принципе, мы можем считать саму операцию «+» символом для себя, но нам это не выгодно. Почему? Потому что точно также можно считать операцию « $\leq$ » символом для себя, однако проще про них думать как про отдельную сущность. Есть один символ, есть формула (3), но эта формула, в зависимости от интерпретации  $x$  и  $y$  как натуральных чисел или как целых, ведет себя по-разному. То есть нам выгодно разделить имя отношения и само отношение. Имя может быть одно, формула одна, а поведение этой формулы, при разной интерпретации, может быть разным. Так, например, уравнение (4) одно, а наличие у него решения зависит от того, к какой области мы его применяем, и, по-сути дела, как мы понимаем «+»: то ли как функцию сложения целых чисел, то ли как функцию сложения натуральных. Поэтому мы отделяем само отношение от его обозначения.

На самом деле,  $\text{Rel}, \text{Func}$  и  $\text{Const}$  — это не просто какие-то множества, а еще объектам из этих множеств приписано некоторое натуральное число, называемое *валентностью* или *арностью*. То есть, например, для любого  $R \in \text{Rel}$  приписано  $n \in \mathbb{N}$  такое, что  $R^{(n)} \in \text{Rel}$ . Аналогично, валентности приписаны и функциональным символам, то есть  $f^{(m)} \in \text{Func}$ . Давайте теперь попытаемся понять, как же у нас определяются формулы. Как уже было сказано, формулы строятся из термов, поэтому сначала нужно определить понятие терма. Для начала зафиксируем, что считается общим для всех сигнатур:

- алфавит переменных  $\text{Var} = \{v_0, v_1, v_2, \dots\} \sim \mathbb{N}$ . По умолчанию, разные буквы  $x, y, z, \dots$ , обозначают какие-то разные  $v_i$ .
- символы связи  $\wedge, \vee, \implies, \neg, \iff$ .
- кванторы  $\exists$  и  $\forall$ .
- скобки «(» и «)».

Из всего этого зоопарка мы будем конструировать формулы и сигнатуры.

<sup>13</sup>при определенном выборе значений параметров.

<sup>14</sup>(i) в правом верхнем углу символа отношения или операции обозначает его арность, то есть (2) означает, что отношение бинарное.

**Определение 6.2** (терма в арифметике). Будем определять термы индуктивно:

1.  $x \in \text{Var} \implies x$  — это терм. Будем обозначать этот факт как  $x \in \text{Tm}$ , где  $\text{Tm}$  является множеством термов.
2.  $c \in \text{Const} \implies c \in \text{Tm}$ .
3.  $t, s \in \text{Tm} \implies (t + s) \in \text{Tm}, (t \cdot s) \in \text{Tm}, t++ \in \text{Tm}$ .

В соответствии с этими правилами мы можем доказать, что выражение

$$(2 + x)++$$

является термом, потому что термом является  $2 + x$ , которое является термом, потому что  $2$  и  $x$  являются термами. Будем считать, что множество термов является наименьшим по включению среди всех множеств, удовлетворяющих индуктивному определению 6.2.

**Определение 6.3.** Будем обозначать через  $\text{Tm}_\sigma$  множество термов в сигнатуре  $\sigma$ .

**Определение 6.4** (терма в произвольной сигнатуре). Зафиксируем сигнатуру  $\sigma$  и определим  $\text{Tm}_\sigma$  индуктивно:

1.  $x \in \text{Var} \implies x \in \text{Tm}_\sigma$ .
2.  $c \in \text{Const}_\sigma \implies c \in \text{Tm}_\sigma$ .
3.  $f^{(m)} \in \text{Func}_\sigma, t_1, \dots, t_m \in \text{Tm}_\sigma \implies ft_1 \dots t_m \in \text{Tm}_\sigma$ .

Обратим внимание, что последний пункт определения записан в польской нотации, то есть, например,  $2+x \mapsto +2x$ , а  $(2+x) \cdot (y+x) \mapsto \cdot + 2x + yx$ .

**Определение 6.5** (формулы в арифметике). Определим  $\text{Fm}$  индуктивно:

1.  $t, s \in \text{Tm} \implies t = s, t < s, t \leq s, t > s, t \geq s \in \text{Fm}^{15}$ .
2.  $\varphi, \psi \in \text{Fm} \implies (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \implies \psi), (\varphi \iff \psi), \neg \varphi \in \text{Fm}$ .
3.  $x \in \text{Var}, \varphi \in \text{Fm} \implies \forall x \varphi, \exists x \varphi \in \text{Fm}$ .

**Пример**  $(2+x)++$  — это терм.  $y + 3 \cdot z$  — это тоже терм. Тогда из них мы можем организовать какую-то формулу, соединив их чем-нибудь, например, символом « $<$ »:

$$(2+x)++ < y + 3 \cdot z.$$

Как видим, получилась формула. Можно на нее навесить знак отрицания,

$$\neg((2+x)++ < y + 3 \cdot z),$$

получится тоже формула. Можно еще и квантор накинуть:

$$\forall w \neg((2+x)++ < y + 3 \cdot z).$$

Ну и так далее.

**Определение 6.6** (формулы в произвольной сигнатуре). Зафиксируем сигнатуру  $\sigma$  и определим  $\text{Fm}_\sigma$  индуктивно:

1.  $R^{(n)} \in \text{Rel}_\sigma, t_1, \dots, t_n \in \text{Tm}_\sigma \implies Rt_1 \dots t_n \in \text{Fm}_\sigma$ .
2.  $\varphi, \psi \in \text{Fm}_\sigma \implies (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \implies \psi), (\varphi \iff \psi), \neg \varphi \in \text{Fm}_\sigma$ .
3.  $x \in \text{Var}, \varphi \in \text{Fm}_\sigma \implies \forall x \varphi, \exists x \varphi \in \text{Fm}_\sigma$ .

Введя понятия терма и формулы, введем некоторые синтаксические понятия, которые с ними естественным образом связаны. Заведем множество  $V(t)$  = «все переменные, которые встречаются в  $t$ ». Определение, конечно, хорошее, но про него сложно что-то говорить формально. Попробуем зайти с другой стороны.

**Определение 6.7.** Определим множество  $V$  всех переменных, которые встречаются в терме  $t$  рекурсивно:

1. Если  $t = x \in \text{Var}$ , то  $V(t) = \{x\}$ .
2. Если  $t = c \in \text{Const}_\sigma$ , то  $V(t) = \emptyset$ .
3. Если  $t = ft_1 \dots t_m$ , то  $V(t) = V(t_1) \cup \dots \cup V(t_m)$ .

<sup>15</sup>формулы такого вида называются *атомарными*.



## Пример

$$V(3 + ((x + y) \cdot 2)) = V(3) \cup V((x + y) \cdot 2) = \emptyset \cup V(2) \cup V(x + y) = \emptyset \cup V(x) \cup V(y) = \{x, y\}.$$

**Определение 6.8.** Определим функцию  $V: \text{Fm}_\sigma \rightarrow \text{Var}$ , которая каждой формуле ставит в соответствие множество ее переменных. Действуем рекурсивно:

1.  $V(Rt_1 \dots t_n) = V(t_1) \cup \dots \cup V(t_n)$ .
2.  $V(\varphi \vee \psi) = V(\varphi \wedge \psi) = V(\varphi \implies \psi) = \dots = V(\varphi) \cup V(\psi)$ .
3.  $V(\exists x \varphi) = V(\forall x \varphi) = V(\varphi) \cup \{x\}$ .

## Пример

$$V(\forall x \exists y (x = z + 3)) = \{x, y, z\}.$$

На самом деле, для того, чтобы придать формулам какое-то значение, научиться выяснять, когда же формула истинна, а когда — ложна, нам очень важно отделять те переменные, которые связаны кванторами от тех, которые кванторами не связаны и вместо которых можно что-то подставлять. Давайте рассмотрим формулу

$$\exists x (x + 2 = 1)$$

с семантической точки зрения. Можно ли сказать, что это свойство какого-то конкретного  $x$ ? Нет, это свойство всей нашей области (натуральных чисел, или же вещественных). То есть, здесь, по сути дела, сказано, что у уравнения есть решение. Это не свойство какого-то конкретного решения (например, в области натуральных чисел такого  $x$  нет, но оно есть в области вещественных чисел). Такое вхождение переменной называется *связанным*. Мы сталкивались с подобными вещами, например, в анализе, где говорили что существует первообразная  $\int \sin x \, dx$  функции  $\sin$ . Имеет ли здесь  $x$  какую-то индивидуальность? Нет конечно, ведь запись  $\int \sin x \, dx$  эквивалента  $\int \sin y \, dy$ , тогда как  $\sin x \neq \sin y \leftarrow$  здесь переменная  $x$  является *свободной*.

Важно понимать, что в одну и ту же формулу  $x$  может иметь как свободное вхождение, так и связанное, например

$$x = 3 \quad \vee \quad \exists x \, x + 2 = 1.$$

Здесь первый  $x$  имеет свободное вхождение, а второй  $x$  — связанное. Получается, что хоть обозначение и одно, вхождения разные, ведь в первом случае что-то говорится про конкретный объект  $x$ , конкретное число, а во втором случае что-то говорится про всю область наших чисел (что среди них имеется решение нашего уравнения). То есть это, по сути дела, разные  $x$ , и их возможное совпадение может считаться случайным.

**Определение 6.9** (свободная переменная). Зафиксируем функцию  $\text{FV}: \text{Fm}_\sigma \rightarrow \text{Var}$ , которая каждой формуле ставит в соответствие множество *свободных* переменных в ней, следующим образом:

1.  $\text{FV}(Rt_1 \dots t_n) = V(t_1) \cup \dots \cup V(t_n)$ .
2.  $\text{FV}(\varphi \wedge \psi) = \text{FV}(\varphi \vee \psi) = \dots = \text{FV}(\varphi) \cup \text{FV}(\psi)$ .
3.  $\text{FV}(\forall x \varphi) = \text{FV}(\exists x \varphi) = \text{FV}(\varphi) \setminus \{x\}$ .

## 6.3 Доказательства индукцией по построению

Допустим мы хотим доказать, что все  $\varphi \in \text{Fm}_\sigma$  удовлетворяют свойству  $P$ , то есть  $\forall \varphi \, P(\varphi)$ . Для этого достаточно доказать, что

1.  $\forall R^{(n)} \in \text{Rel}_\sigma, \forall t_1, \dots, t_n \in \text{Tm}_\sigma \, P(Rt_1 \dots t_n)$ .
2.  $\forall \varphi, \psi \, P(\varphi) \wedge P(\psi) \implies P(\varphi \wedge \psi) \wedge P(\varphi \vee \psi) \wedge \dots$
3.  $\forall \varphi \, \forall x \in \text{Var} \, P(\varphi) \implies P(\forall x \varphi) \wedge P(\exists x \varphi)$ .

Докажем, в качестве упражнения, следующую лемму:

**Лемма 6.1.**  $\forall \varphi \in \text{Fm}_\sigma \, \text{FV}(\varphi) \subseteq V(\varphi)$ .

*Доказательство.* Нам надо показать, что это утверждение верно для всех атомарных формул, а также, если это верно для простых формул, то верно и для более сложных.

1.  $\text{FV}(Rt_1 \dots t_n) \stackrel{\text{def}}{=} V(t_1) \cup \dots \cup V(t_n) \stackrel{\text{def}}{=} V(Rt_1 \dots t_n)$ .
2. Допустим, что  $\text{FV}(\varphi) \subseteq V(\varphi)$  и  $\text{FV}(\psi) \subseteq V(\psi)$ . Тогда  $\text{FV}(\varphi \implies \psi) = \text{FV}(\varphi) \cup \text{FV}(\psi)$ , в тоже время  $V(\varphi \implies \psi) = V(\varphi) \cup V(\psi)$ , но тогда, по предположению индукции,  $\text{FV}(\varphi \implies \psi) \subseteq V(\varphi \implies \psi)$ . Аналогично для остальных операций.
3. Допустим, что  $\text{FV}(\varphi) \subseteq V(\varphi)$ . Хотим, чтобы  $\text{FV}(\forall x \varphi) \subseteq V(\forall x \varphi)$ . Тогда  $\text{FV}(\forall x \varphi) = \text{FV}(\varphi) \setminus \{x\} \subseteq V(\varphi) \cup \{x\} \subseteq V(\forall x \varphi)$ .  $\square$

**Что же означают формулы и термы** Идея: если всем переменным придать значения, то значение формулы  $\in \{0, 1\}$ , а значением терма будет некоторое «число». Откуда все эти значения берутся и что это за числа? Нам нужно множество, из которого мы будем брать значение переменных. Ну хорошо, предположим, что это какое-то множество  $M$ . Рассмотрим формулу вида

$$3 + x.$$

Тогда мы должны уметь сложить 3 и элемент из  $M$ , но тогда тройка должна быть элементом из  $M$ , а «+» надо понимать как функцию на множестве  $M$ . Но тогда нужно и все константы понимать как элементы множества  $M$ , и все функциональные символы должны означать функции на  $M$ . Но какие? Ответ на эти вопросы называется *структура сигнатуры*, но это уже в следующих лекциях.

## 7 Лекция 7

В прошлый раз мы разобрались с формальным определением формул 1-го порядка. Теперь надо понять, что же эти формулы означают. Рассмотрим, например, формулу

$$\exists x \quad x + y = 3.$$

Вообще говоря, значение этой формулы зависит от того, что поставлено в соответствие переменной  $y$ . Поэтому, значение формулы всегда представляет из себя *что-то*, зависящее от значения переменных. Поэтому, если всем переменным придать значение из какого-нибудь множества, то мы желаем, чтобы значением формулы оказалось либо *да*, либо *нет*. То есть, формула, при фиксированных значениях переменных, либо ложна, либо истинна. Ну а значениями термов, из которых строятся такие формулы (например,  $x + y$  или  $3$ ) должны быть объекты из некоторого множества (например, числа). Ну и кроме того, значение формулы зависит от того, что мы понимаем под функциональными и реляционными отношениями. Например, если мы пишем « $+$ », то он может обозначать разные вещи в зависимости от объектов, которым он применяется (сложение матриц, сложение чисел). Отсюда видно, что нам нужно зафиксировать множество, откуда будут браться значения переменных, функциями на котором мы будем интерпретировать наши функциональные символы, отношения на котором мы будем интерпретировать символами отношений, и элементами которого мы будем интерпретировать константы. Разумеется, понимание кванторов тоже будет опираться на это множество ( $\exists x$  предполагает, что множество значений для  $x$  фиксированно).

### 7.1 Интерпретация сигнатуры

Попробуем теперь все тоже самое провести абстрактно. Допустим, у нас дана некоторая сигнатура

$$\sigma = (\text{Rel}_\sigma, \text{Func}_\sigma, \text{Const}_\sigma),$$

тогда

**Определение 7.1.** Интерпретация сигнатуры  $\sigma$  — это пара  $\mathcal{M} = (M, I_\mathcal{M})$ , где  $M \neq \emptyset$ , а  $I_\mathcal{M}$  — это такое отображение<sup>16</sup>, что

1.  $\forall R^{(n)} \in \text{Rel}_\sigma \quad I_\mathcal{M}(R) \subseteq M^n$ , то есть  $I_\mathcal{M}(R)$  — это  $n$ -арное отношение на  $M$ ;
2.  $\forall f^{(m)} \in \text{Func}_\sigma \quad I_\mathcal{M}(f): M^m \rightarrow M$ ;
3.  $\forall c \in \text{Const}_\sigma \quad I_\mathcal{M}(c) \in M$ .

Множество  $M$  называется *носителем интерпретации*  $\mathcal{M}$ .

То есть, что делает функция  $I$ ? Она каждому символу отношения ставит в соответствие отношение соответствующей валентности, каждому символу функциональному ставит в соответствие функцию, каждому константному символу ставит в соответствие определенный элемент. То есть, у нас были просто символы, а теперь мы их наделили значением. Получается, что  $I_\mathcal{M}(\ast)$  — это *интерпретация* символа  $\ast$  в  $\mathcal{M}$ . Принято писать  $R^\mathcal{M}$ ,  $f^\mathcal{M}$ ,  $c^\mathcal{M}$  вместо, соответственно,  $I_\mathcal{M}(R)$ ,  $I_\mathcal{M}(f)$ ,  $I_\mathcal{M}(c)$ . С другой стороны, что такое интерпретация? Можно сказать, что интерпретация — это какое-то множество, и на нем заданы (возможно, бесконечные) список отношений, функций и элементов, причем такой, что они поставлены в соответствие символам сигнатуры. Это значит, что можно было бы за первичный объект брать саму эту интерпретацию. На самом деле, это более логично, и в таком случае мы можем интерпретацию назвать  $\sigma$ -структурой. Почему структурой? Вообще, структурой в математике называют множество и какой-то список отношений, функций и элементов на нем, а  $\sigma$ -структура значит, что она поставлена в соответствие сигнатуре  $\sigma$ .

Давайте рассмотрим какой-нибудь пример. Вообще говоря, я уже отмечал в прошлый раз, что нам в логике важно отделить символ от его значения. Почему это так? Ведь когда мы работаем с ними в анализе или в теории вероятностей, или еще где-то, мы этого не делаем. Там значения символов, на самом деле, очень жестко фиксировано, если мы не говорим о переменных. Ну а в логике нам важно рассматривать такие ситуации, когда одному и тому же символу могут быть приданы разные значения, и смотреть на взаимоотношение таких различных интерпретаций.

**Соглашение 7.1.** Следующие обозначения эквивалентны:

$$(x_1, \dots, x_n) \in R^\mathcal{M} \iff R^\mathcal{M}(x_1, \dots, x_n).$$

<sup>16</sup>Дашков не сказал, откуда и куда, но сказал, что оно страшное :(

**Пример** Рассмотрим сигнатуру  $\sigma = (\text{Rel}_\sigma = \{Q^{(3)}\}; \text{Func}_\sigma = \{f^{(2)}, \#^{(1)}\}; \text{Const}_\sigma = \{\$ \})$  и две ее интерпретации

$$\mathcal{M} = (\{0, 1\}; Q^{\mathcal{M}}; f^{\mathcal{M}}, \#^{\mathcal{M}}, \$^{\mathcal{M}}),$$

где

$$\begin{aligned} Q^{\mathcal{M}} &\subseteq \{0, 1\}^3: (x, y, z) \in Q^{\mathcal{M}} \iff x = y = z \implies Q^{\mathcal{M}} = \{(0, 0, 0), (1, 1, 1)\}; \\ f^{\mathcal{M}}(x, y) &= x \oplus y, \quad \#^{\mathcal{M}}(x) = x; \\ \$^{\mathcal{M}} &= 1. \end{aligned}$$

Мы получили какую-то интерпретацию  $\sigma$ . Какого-то особого смысла в ней нет, но как пример она вполне себе подойдет.

Можно рассмотреть и другую интерпретацию  $\mathcal{N} = (\mathbb{N}; Q^{\mathcal{N}}; f^{\mathcal{N}}, \#^{\mathcal{N}}, \$^{\mathcal{N}})$ :

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in Q^{\mathcal{N}} &\iff x + y = z; \\ f^{\mathcal{N}}(x, y) &= (x \cdot y)^2, \quad \#^{\mathcal{N}}(x) = x + 7; \\ \$^{\mathcal{N}} &= 2020. \end{aligned}$$

В ней также нет ничего содержательного, просто она отличается от  $\mathcal{M}$ .

## 7.2 Оценка переменных

Все-таки, нашей конечной целью является определение значения формулы и значения терма. Мы определили интерпретацию, то есть у нас теперь имеются значения наших базовых символов. А как же нам дать значение формулы и значение терма? Мы понимаем, что оно зависит от значения переменных. Как же нам придать значение переменным?

**Определение 7.2.** *Оценкой переменных* в интерпретации  $\mathcal{M}$  называется любая функция<sup>17</sup>  $\pi: \text{Var} \rightarrow M$ .

Например, можно считать, что всем переменным с четными номерами ставится в соответствие 5, а всем переменным с нечетными номерами ставится в соответствие их номер. Получится оценка переменных в любой интерпретации, где носителем выступает множество натуральных чисел.

Итак, оценка переменных принимает на вход сам символ (не его значение, до него мы пока даже не дошли, а именно символ) и этому символу ставит в соответствие элемент нашего носителя.

## 7.3 Значение терма в интерпретации при оценке

**Обозначение.** Будем обозначать через  $[t]_{\mathcal{M}}(\pi)$  значение терма  $t$  в интерпретации  $\mathcal{M}$  при оценке переменных  $\pi$ .

**Определение 7.3.** Определим значение терма  $t \in \text{Tm}_\sigma$  в интерпретации  $\mathcal{M}$  при оценке  $\pi$  рекурсивно:

1.  $x \in \text{Var} \implies [x]_{\mathcal{M}}(\pi) = \pi(x)$ ;
2.  $x \in \text{Const}_\sigma \implies [c]_{\mathcal{M}}(\pi) = c^{\mathcal{M}}$ ;
3.  $[ft_1 \dots t_m]_{\mathcal{M}}(\pi) = f^{\mathcal{M}}([t_1]_{\mathcal{M}}(\pi), \dots, [t_m]_{\mathcal{M}}(\pi))$ .

**Пример** Давайте возьмем нашу дику интерпретацию  $\mathcal{N}$  и будем примеры приводить в ней. Какой у нас здесь есть терм? Ну, например,

$$f(\#x)x.$$

Какое же у него значение? Оно зависит, естественно, от оценки. Давайте ее посчитаем:

$$[f(\#x)x]_{\mathcal{N}}(\pi) = f^{\mathcal{N}}([\#x](\pi), [x](\pi)) = f^{\mathcal{N}}(\#^{\mathcal{N}}([x](\pi)), [x](\pi)) = f^{\mathcal{N}}(\#^{\mathcal{N}}(\pi(x)), \pi(x)).$$

Как видите, все свелось к тому, что нужно знать, что будет поставлено в соответствие  $x$  функцией  $\pi$ . Допустим,  $\pi(x) = 9$ , тогда

$$[f(\#x)x]_{\mathcal{N}}(\pi) = f^{\mathcal{N}}(\#^{\mathcal{N}}(\pi(x)), \pi(x)) = ((9 + 7) \cdot 9)^2.$$

Здесь  $\#^{\mathcal{N}}(\pi(x)) = \#^{\mathcal{N}}(9) = 9 + 7$ .

Итак, мы определили рекурсивно значение терма, дальше следует одно простое замечание: какая бы ни была оценка, нам совершенно безразлично как она оценит те переменные, которые в нашем терме не встречаются. Вот это совершенно простое, но фундаментально важное наблюдение.

<sup>17</sup>такая функция ставит каждой переменной в соответствие элемент из носителя интерпретации

**Лемма 7.1.** Если  $\forall y \in V(t)$ <sup>18</sup>  $\pi_1(y) = \pi_2(y)$ , то

$$[t]_{\mathcal{M}}(\pi_1) = [t]_{\mathcal{M}}(\pi_2).$$

*Доказательство.* Приведем доказательство индукцией по построению терма  $t$ .

1. Допустим, что  $t = x \in \text{Var}$ , тогда  $x \in V(t)$ . Имеем  $[t](\pi_1) = \pi_1(x)$ ,  $[t](\pi_2) = \pi_2(x)$ , но, поскольку  $x \in V(t)$ , то  $\pi_1(x) = \pi_2(x)$ .
2. Допустим, что  $t = c \in \text{Const}_\sigma$ , тогда  $[t](\pi_1) = c^{\mathcal{M}} = [t](\pi_2)$ .
3. Допустим, что  $t = ft_1 \dots t_n$ , тогда, по предположению индукции,  $\forall i (\forall y \in V(t_i) \pi_1(y) = \pi_2(y) \implies [t_i](\pi_1) = [t_i](\pi_2))$ . Мы хотим доказать, что значение большого терма будет одинаковым при любых двух оценках, которые совпадают на всех встречающихся в нем переменных. То есть, мы допускаем, что  $\forall y \in V(t) (\pi_1(y) = \pi_2(y))$ . Теперь заметим, что  $V(t) = V(t_1) \cup \dots \cup V(t_n)$ , то есть множество переменных в терме — это объединение множеств переменных в каждом вложенном в него терме. Итак,

$$[ft_1 \dots t_n](\pi_1) = f^{\mathcal{M}}([t_1](\pi_1), \dots, [t_n](\pi_1)).$$

Любой  $y$ , встречающийся в терме  $t_i$ , встречается и в терме  $t$  (и наоборот). Значит, по предположению индукции,  $\forall i [t_i](\pi_1) = [t_i](\pi_2)$ , значит

$$f^{\mathcal{M}}([t_1](\pi_1), \dots, [t_n](\pi_1)) = f^{\mathcal{M}}([t_1](\pi_2), \dots, [t_n](\pi_2)).$$

Тогда получается, что

$$[ft_1 \dots t_n](\pi_1) = [ft_1 \dots t_n](\pi_2).$$

□

Содержательно это утверждение можно сформулировать так: значение терма зависит от значения оценки только тех переменных, которые в нем встречаются. Теперь мы определим значение формулы. Как это сделать? Формула, как известно, строится с помощью термов, символов отношений, логических связок и кванторов.

## 7.4 Значение формулы в интерпретации при оценке

**Обозначение.** Будем обозначать через  $[\varphi]_{\mathcal{M}}(\pi) \in \{0, 1\}$  значение формулы  $\varphi \in \text{Fm}_\sigma$  в интерпретации  $\mathcal{M}$  при оценке переменных  $\pi$ .

**Замена оценки переменной** Пусть нам дана оценка  $\pi: \text{Var} \rightarrow \mathcal{M}$ . Давайте заведем оценку, которая от нее отличается строго в одной точке (переменной). Пусть  $y \in \text{Var}$  и  $m \in M$ , определим оценку  $(\pi + (y \mapsto m)): \text{Var} \rightarrow M$  (альтернативное обозначение —  $\pi_y^m$ ) такую, что

$$\pi_y^m(x) = \begin{cases} m, & x = y, \\ \pi(x), & x \neq y. \end{cases}$$

Обратим внимание на знак « $\equiv$ », он обозначает равенство не по значению переменной (его мы все еще не ввели), а именно что они синтаксически совпадают (за  $x$  скрывается какая-то буква из алфавита  $\text{Var}$ , за  $y$  скрывается какая-то буква из алфавита  $\text{Var}$ , и если эти буквы совпали, то мы вернем  $m$ , иначе вернем  $\pi(x)$ ). Иначе говоря, мы меняем значение функции  $\pi$ , которая на вход принимает переменные, в одной точке.

**Определение 7.4.** Определим значение формулы  $\varphi$  в интерпретации  $\mathcal{M}$  при оценке переменных  $\pi$  рекурсивно:

1.  $[Rt_1 \dots t_n]_{\mathcal{M}}(\pi) = \begin{cases} 1, & ([t_1](\pi), \dots, [t_n](\pi)) \in R^{\mathcal{M}}; \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$
2.  $[\varphi \wedge \psi]_{\mathcal{M}}(\pi) = \text{И}([\varphi]_{\mathcal{M}}(\pi), [\psi]_{\mathcal{M}}(\pi))$ ,  $[\varphi \vee \psi]_{\mathcal{M}}(\pi) = \text{ИЛИ}([\varphi]_{\mathcal{M}}(\pi), [\psi]_{\mathcal{M}}(\pi))$ ,  $[\neg \varphi]_{\mathcal{M}}(\pi) = \text{НЕ}([\varphi]_{\mathcal{M}}(\pi))$ , и так далее;
- 3.

$$\begin{aligned} [\forall x \varphi]_{\mathcal{M}}(\pi) &= \begin{cases} 1, & \text{для всех } m \in M : [\varphi](\pi_x^m) = 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \\ [\exists x \varphi]_{\mathcal{M}}(\pi) &= \begin{cases} 1, & \text{существует } m \in M : [\varphi](\pi_x^m) = 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \end{aligned}$$

Обратим внимание на то, что мы кванторы существования и всеобщности определяем через кванторы существования и всеобщности. С этим ничего не поделаешь, ведь мы не пытаемся объяснить, что такое квантор всеобщности или квантор существования, а просто пытаемся формализовать это, научиться формальное выражение исследовать с помощью нашей неформальной логики.

<sup>18</sup>см. определение 6.7

**Пример** Рассмотрим следующую формулу  $\varphi$  в интерпретации  $\mathcal{N}$ :

$$\varphi = \exists y \forall y Qxyy.$$

Это замкнутая формула, то есть она не содержит свободных переменных. Ее значение не зависит от оценки переменных. Посчитаем ее оценку при  $\pi$ :

$$[\exists x \forall y Qxyy](\pi) = 1 \iff \text{существует } a \in \mathcal{N} [\forall y Qxyy](\pi_x^a) = 1,$$

распишем последнюю оценку:

$$\begin{aligned} [\forall y Qxyy](\pi_x^a) = 1 &\iff \text{для всех } b \in \mathcal{N} [Qxyy](\pi_x^a \pi_y^b) = 1 \iff [x](\pi_x^a \pi_y^b) + [y](\pi_x^a \pi_y^b) = [y](\pi_x^a \pi_y^b) \iff \\ &\iff \pi_x^a(x) + \pi_x^a \pi_y^b(y) = \pi_x^a \pi_y^b(y) \iff a + b = b, \text{ положим } a = 0, \text{ тогда } 0 + b = b \implies \text{формула } \varphi \text{ истинна.} \end{aligned}$$

**Лемма 7.2.** Если  $\forall y \in \text{FV}(\varphi) \pi_1(y) = \pi_2(y)$ , то

$$[\varphi]_{\mathcal{M}}(\pi_1) = [\varphi]_{\mathcal{M}}(\pi_2).$$

*Доказательство.* Приведем доказательство индукцией по построению формулы  $\varphi$ :

1.  $\varphi = Rt_1 \dots t_n$ , тогда  $[\varphi](\pi_1) = 1 \iff R^{\mathcal{M}}([t_1](\pi_1), \dots, [t_n](\pi_1))$ . Вспомним, что  $\text{FV}(Rt_1 \dots t_n) = V(t_1) \cup \dots \cup V(t_n)$ , тогда  $V(t_i) \subseteq \text{FV}(Rt_1, \dots, t_n)$ , тогда для всех переменных, встречающихся в  $t_i$ , наши оценки ведут себя одинаково  $\implies$  значения термов при этих оценках одинаковы по лемме 7.1. Тогда  $R^{\mathcal{M}}([t_1](\pi_1), \dots, [t_n](\pi_1)) \iff R^{\mathcal{M}}([t_1](\pi_2), \dots, [t_n](\pi_2)) \iff [\varphi](\pi_2) = 1$ ;
2.  $[\theta \wedge \psi](\pi) = \text{И}([\theta](\pi_1), [\psi](\pi_1))$ . Вспомним, что  $\text{FV}(\theta \wedge \psi) = \text{FV}(\theta) \cup \text{FV}(\psi) \implies \text{FV}(\theta) \subseteq \text{FV}(\theta \wedge \psi)$ , тогда, по предположению индукции,  $\text{И}([\theta](\pi_1), [\psi](\pi_2)) = \text{И}([\theta](\pi_2), [\psi](\pi_2)) = [\theta \wedge \psi](\pi_2)$ . Для других логических функций аналогично.
3. Разберем только квантор всеобщности. Допустим  $\varphi = \forall z \psi$ . Нам дано, что  $\forall y \in \text{FV}(\forall z \psi) \pi_1(y) = \pi_2(y)$ , тогда

$$[\forall z \psi]_{\mathcal{M}}(\pi_1) = 1 \iff \forall m \in M [\psi](\pi_1 + (z \mapsto m)) = 1.$$

По предположению индукции, мы знаем, что если у нас две оценки совпадают на всех переменных, свободных в  $\psi$ , то и значения соответствующие тоже совпадают. Поскольку  $\text{FV}(\forall z \psi) = \text{FV}(\psi) \setminus \{z\}$ , то  $\text{FV}(\psi) \subseteq \text{FV}(\forall z \psi) \cup \{z\}$ .

**Утверждение 7.1.**  $\forall y \in \text{FV}(\psi) (\pi_1 + (z \mapsto m))(y) = (\pi_2 + (z \mapsto m))(y)$ .

*Доказательство.*  $y \in \text{FV}(\psi)$ , тогда возможны два случая:

- (a)  $y \in \text{FV}(\forall z \psi) = \text{FV}(\psi)$ , тогда  $y \neq z$  потому что  $z$  не входит свободно в  $\psi$ . Значит,  $(\pi_1 + (z \mapsto m))(y) = \pi_1(y) = \pi_2(y) = (\pi_2 + (z \mapsto m))(y)$ .
- (b)  $y = z \implies (\pi_1 + (z \mapsto m))(y) = m = (\pi_2 + (z \mapsto m))(y)$ . □

По предположению индукции, для более простых формул наше утверждение верно. Мы знаем, что для более простой формулы  $\psi$  верно, что если какие-то две оценки совпадают на свободных в ней переменных, то значения этой более простой формулы при таких оценках обязаны совпасть:

$$[\psi](\pi_1 + (z \mapsto m)) = [\psi](\pi_2 + (z \mapsto m)).$$

Получается, что для любого  $m \in M [\psi](\pi_2 + (z \mapsto m)) = 1 \implies [\forall z \psi](\pi_2) = 1$ . □

Итак, мы получили очень важную теорему: значение формулы при оценке зависит только от значения этой оценки на переменных, свободно входящих в формулу. Введем теперь более удобные обозначения, с которыми мы и будем, в основном, работать.

**Обозначение.** Зафиксируем набор различных переменных  $(x_1, \dots, x_n) \in \text{Var}^n$ . Будем писать  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ , если  $\text{FV}(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ .

**Обозначение.** Пусть  $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in M^n$ , тогда  $\forall \varphi(x_1, \dots, x_n), \forall \vec{a}$

$$\mathcal{M} \models \varphi(\vec{a}) \iff \forall \pi [\varphi]_{\mathcal{M}}(\pi_{x_1}^{a_1} \pi_{x_2}^{a_2} \dots \pi_{x_n}^{a_n}).$$

Читается это следующим образом: в  $\mathcal{M}$  истинна  $\varphi$  на наборе  $\vec{a}$ .

**Пример** Зафиксируем интерпретации  $\mathcal{M} = (\mathbb{N}; =^{\mathbb{N}}; +^{\mathbb{N}}, \cdot^{\mathbb{N}}; 0, 1, 2)$  и  $\mathcal{N} = (\mathbb{Z}; =^{\mathbb{Z}}; +^{\mathbb{Z}}, \cdot^{\mathbb{Z}}; 0, 1, 2)$ . Рассмотрим формулу  $\varphi = (x + 1 = 0)$ , тогда

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &\not\models \varphi(5), \\ \mathcal{M} &\not\models \varphi(0), \\ \mathcal{N} &\models \varphi(-1).\end{aligned}$$

Соответственно, мы можем сказать, что

$$\mathcal{N} \models \exists \varphi \varphi.$$

На каком наборе? А ни на каком, потому что набор может быть пустым, например,  $\text{FV}(\exists x (x + 1 = 0)) = \emptyset$ .

**Определение 7.5.** Формула  $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in \text{Fm}_{\sigma}$  выражает отношение  $X \subseteq M^n$  в интерпретации  $\mathcal{M}$  сигнатуры  $\sigma \iff$

$$\forall \vec{a} \in M^n (\mathcal{M} \models \varphi(\vec{a}) \iff \vec{a} \in X).$$

В такой ситуации пишут еще, что  $\varphi^{\mathcal{M}} = X$ .

## 8 Лекция 8

### 8.1 Изоморфизм структур

Мы уже с вами видели, что у одной и той же сигнатуры возможны разные интерпретации. Если я, например, возьму сигнатуру поля  $\sigma = (=; +^{(2)}, \cdot^{(2)}; 0, 1)$ , то можно рассмотреть интерпретации:

1.  $\mathcal{R} = (\mathbb{R}; =; +, \cdot; 0, 1)$  — поле вещественных чисел;
2.  $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}; =; +, \cdot; 0, 1)$  — поле рациональных чисел.

Здесь у нас одна и та же структура имеет совершенно разные интерпретации, но прежде чем говорить о *разном*, прежде всего полезно поговорить об *одинаковом*, а именно: какие интерпретации мы понимаем как *существенно одинаковые* (или *изоморфные*)?

Вспомним определение изоморфизма двух линейных пространств: два векторных пространства называются изоморфными, если существует биективное  $\alpha$  такое, что

$$\alpha(x +_1 y) = \alpha(x) +_2 \alpha(y).$$

Будем рассуждать аналогичным образом. Пусть  $\mathcal{M}$  и  $\mathcal{N}$  — две интерпретации одной сигнатуры  $\sigma$ , то есть

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= (M; R^{\mathcal{M}} \dots; f^{\mathcal{M}} \dots; c^{\mathcal{M}} \dots), \\ \mathcal{N} &= (N; R^{\mathcal{N}} \dots; f^{\mathcal{N}} \dots; c^{\mathcal{N}} \dots).\end{aligned}$$

**Определение 8.1.** Будем говорить, что  $\alpha$  — *изоморфизм* между  $\mathcal{M}$  и  $\mathcal{N}$ , если

1.  $\alpha: M \rightarrow N$  — биекция;
2. Сохраняются все отношения, то есть  $\forall R^{(n)} \in \text{Rel}_\sigma, \forall \vec{a} \in M^n \ R^{\mathcal{M}}(\vec{a}) \iff R^{\mathcal{N}}(\alpha \vec{a})$ ;
3. «Уважаются» все функции, то есть  $\forall f^{(n)} \in \text{Func}_\sigma, \forall \vec{a} \in M^n \ \alpha f^{\mathcal{M}}(\vec{a}) = f^{\mathcal{N}}(\alpha \vec{a})$ ;
4.  $\forall c \in \text{Const}_\sigma, \alpha c^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{N}}$ ;

**Определение 8.2.** Будем говорить, что структуры  $\mathcal{M}$  и  $\mathcal{N}$  изоморфны (обозн.  $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$ ), если существует изоморфизм  $\alpha: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ .

**Утверждение 8.1.**

1.  $\mathcal{M} \xrightarrow{\text{Id}_{\mathcal{M}}} \mathcal{M}$ .
2.  $\mathcal{M} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{N} \implies \mathcal{N} \xrightarrow{\alpha^{-1}} \mathcal{M}$ .
3.  $\mathcal{M} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{N} \text{ и } \mathcal{N} \xrightarrow{\beta} \mathcal{L} \implies \mathcal{M} \xrightarrow{\beta \circ \alpha} \mathcal{L}$ .

**Пример** Рассмотрим конкретный пример, который является классическим. Положим  $\mathcal{M} = (\mathbb{R}; =; +^{(2)}; 0)$  и  $\mathcal{N} = (\mathbb{R}_+; =; \cdot^{(2)}; 1)$ . Естественно, это интерпретация одной сигнатуры  $\sigma = (=; \circ^{(2)}; e)$ .

**Утверждение 8.2.**  $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$ .

Словами это можно передать так: «сложение вещественных чисел устроено также, как умножение положительных вещественных чисел».

*Доказательство.* Нам нужна функция  $\alpha$  на множестве вещественных чисел такая, что

$$\alpha(x + y) = \alpha(x) \cdot \alpha(y).$$

Рассмотрим  $\alpha(x) = 2^x$ , проверим для нее свойства изоморфизма

1.  $\alpha$  — биекция, поскольку переводит все вещественные числа в положительные, и у каждого числа ровно один прообраз.
2. Отношение « $=$ » сохраняется, поскольку  $x = y \iff 2^x = 2^y$  в силу инъективности  $\alpha$ .
3.  $\forall x, y \ \alpha(x \circ^{\mathcal{M}} y) = \alpha(x) \circ^{\mathcal{N}} \alpha(y)$ .
4.  $\alpha(0) = 2^0 = 1$ .

Все свойства отношения изоморфности выполнены, поэтому  $\alpha$  — изоморфизм. □



## 8.2 Значение терма и формулы при изоморфизме

**Теорема 8.1** (о значении формулы при изоморфизме). Пусть  $\mathcal{M}$  и  $\mathcal{N}$  — интерпретации сигнатуры  $\sigma$ , и  $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in \text{Fm}_\sigma$ . Тогда если  $\mathcal{M} \stackrel{\alpha}{\cong} \mathcal{N}$ , то

$$\forall \vec{a} \in M^n \quad \mathcal{M} \models \varphi(\vec{a}) \iff \mathcal{N} \models \varphi(\alpha \vec{a}).$$

Можно сказать, что значение формулы  $\varphi$  на наборе  $\vec{a}$  в структуре  $\mathcal{M}$  равно значению той же формулы на наборе, в который наш набор переходит под действием изоморфизма. Чтобы нам это доказать, нам надо рассуждать индукцией по построению формулы. Но чтобы рассуждать индукцией по построению формулы, нужно будет возиться с термами. Поэтому нам нужно аналогичное рассуждение про термы.

**Определение 8.3.** Пусть у нас есть терм  $t(x_1, \dots, x_n) \in \text{Tm}_\sigma$ , тогда  $t^{\mathcal{M}}(\vec{a}) = [t]_{\mathcal{M}}(\pi_{x_1} \dots \pi_{x_n})$ .

По сути дела, это значит, что  $t^{\mathcal{M}}: M^n \rightarrow M$ . Давайте поймем, что же это значит. Ну представим, что у нас есть структура  $\mathcal{N} = (\mathbb{N}; =; +)$ , тогда заведем терм  $t = x + x + x$ ,  $V(t) = \{x\}$ . Тогда  $t^{\mathcal{N}}(a) = [t]_{\mathcal{N}}(a) = a + a + a = 3a$ , то есть  $t^{\mathcal{N}}$  — функция утроения числа, то есть  $t^{\mathcal{N}}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . То есть, по сути дела, у нас был какой-то функциональный символ «+», обозначающий операцию сложения. Из него мы сделали более сложную функцию — терм. Получается, что каждый терм обозначает некоторую функцию. Тогда, по определению изоморфизма, если мы  $\alpha$  применим к значению функции, соответствующую функциональному символу в точке  $a$ , то получится значение той же функции из другой структуры в точке  $\alpha(a)$ . Это же свойство будет верно вообще для всех термов.

**Лемма 8.1.** Если  $\mathcal{M} \stackrel{\alpha}{\cong} \mathcal{N}$ , то

$$\forall \vec{a} \in M^n \quad \forall t(x_1, \dots, x_n) \in \text{Tm}_\sigma \quad \alpha(t^{\mathcal{M}}(\vec{a})) = t^{\mathcal{N}}(\alpha \vec{a}).$$

*Доказательство.* Приведем доказательство индукцией по построению терма  $t$ :

1.  $t = x_i \implies t^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n) = a_i$ ,  $t^{\mathcal{N}}(b_1, \dots, b_n) = b_i$ . Тогда  $\alpha(t^{\mathcal{M}}(\vec{a})) = \alpha a_i = t^{\mathcal{N}}(\alpha \vec{a}) = t^{\mathcal{N}}(\alpha a_1, \dots, \alpha a_n)$ ;
2.  $t = c \implies t^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n) = c^{\mathcal{M}}$ ,  $t^{\mathcal{N}}(b_1, \dots, b_n) = c^{\mathcal{N}}$ , тогда  $\alpha(t^{\mathcal{M}}(\vec{a})) = \alpha c^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{N}} = t^{\mathcal{N}}(\alpha \vec{a})$ ;
3.  $t = f t_1 \dots t_m \implies t^{\mathcal{M}}(\vec{a}) = f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}(\vec{a}), \dots, t_m^{\mathcal{M}}(\vec{a}))$ , тогда  $\alpha(t^{\mathcal{M}}(\vec{a})) = \alpha(f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}(\vec{a}), \dots, t_m^{\mathcal{M}}(\vec{a})))$ . Теперь вспомним про то, что  $\alpha$  и  $f^{\mathcal{N}}$  перестановочны (см. определение 8.1), тогда  $\alpha(f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}(\vec{a}), \dots, t_m^{\mathcal{M}}(\vec{a}))) = f^{\mathcal{N}}(\alpha(t_1^{\mathcal{M}}(\vec{a}), \dots, t_m^{\mathcal{M}}(\vec{a})))$ , но ведь  $\alpha(t_i^{\mathcal{M}}(\vec{a}))$  — более простой терм, потому что он является частью  $t$ , поэтому здесь применимо предположение индукции, тогда  $f^{\mathcal{N}}(t_1^{\mathcal{N}}(\alpha \vec{a}), \dots, t_m^{\mathcal{N}}(\alpha \vec{a})) = t^{\mathcal{N}}(\alpha \vec{a})$ .  $\square$

Функции, которые описываются термами, ведут себя совершенно также, как и исходные функции (в силу перестановочности с  $\alpha$ ). С другой стороны, наши отношения сохраняются в смысле  $R^{\mathcal{M}}(\vec{a}) \iff R^{\mathcal{N}}(\alpha \vec{a})$ . Вот для формул мы хотим доказать именно это.

**Теорема 8.2** (о значении формулы при изоморфизме). Формула истинна на  $\vec{a}$  в  $\mathcal{M}$  тогда и только тогда, когда она истинна на  $\alpha \vec{a}$  в  $\mathcal{N}$ .

*Доказательство.* Приведем доказательство индукцией по построению формулы  $\varphi$ :

1.  $\varphi = R t_1 \dots t_n$ , тогда истинность формулы  $\varphi$  на наборе  $\vec{a}$  равносильна тому, что  $(t_1^{\mathcal{M}}(\vec{a}), \dots, t_n^{\mathcal{M}}(\vec{a})) \in R^{\mathcal{M}}$ , то есть

$$\mathcal{M} \models \varphi(\vec{a}) \iff (t_1^{\mathcal{M}}(\vec{a}), \dots, t_n^{\mathcal{M}}(\vec{a})) \in R^{\mathcal{M}}.$$

Аналогично,

$$\mathcal{N} \models \varphi(\alpha \vec{a}) \iff (t_1^{\mathcal{N}}(\alpha \vec{a}), \dots, t_n^{\mathcal{N}}(\alpha \vec{a})) \in R^{\mathcal{N}}.$$

По лемме 8.1,

$$t_i^{\mathcal{N}}(\alpha \vec{a}) = \alpha(t_i^{\mathcal{M}}(\vec{a})).$$

Тогда,

$$(t_1^{\mathcal{N}}(\alpha \vec{a}), \dots, t_n^{\mathcal{N}}(\alpha \vec{a})) \in R^{\mathcal{N}} \iff (\alpha(t_1^{\mathcal{M}}(\vec{a})), \dots, \alpha(t_n^{\mathcal{M}}(\vec{a}))) \in R^{\mathcal{N}}.$$

По определению изоморфизма,  $R^{\mathcal{M}}(\vec{a}) \iff R^{\mathcal{N}}(\alpha \vec{a})$ , тогда

$$(t_1^{\mathcal{M}}(\vec{a}), \dots, t_n^{\mathcal{M}}(\vec{a})) \in R^{\mathcal{M}} \iff (\alpha(t_1^{\mathcal{M}}(\vec{a})), \dots, \alpha(t_n^{\mathcal{M}}(\vec{a}))) \in R^{\mathcal{N}},$$

что и требовалось доказать.

2. (а)  $\varphi = \theta \wedge \psi$ , тогда

$$\mathcal{M} \models (\theta \wedge \psi)(\vec{a}) \iff \mathcal{M} \models \theta(\vec{a}) \text{ и } \mathcal{M} \models \psi(\vec{a}).$$

Почему мы их рассматриваем том же наборе? Потому что когда мы пишем  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ , мы не утверждаем, что все переменные там встречаются, но других там нет. Понятно, что в одном конъюнкте не может быть переменных, которых не было бы во всей конъюнкции. Тогда, по предположению индукции,

$$\mathcal{M} \models \theta(\vec{a}) \text{ и } \mathcal{M} \models \psi(\vec{a}) \iff \mathcal{N} \models \theta(\alpha \vec{a}) \text{ и } \mathcal{N} \models \psi(\alpha \vec{a}) \iff \mathcal{N} \models (\theta \wedge \psi)(\alpha \vec{a}).$$

(b)  $\varphi = \neg\psi$ .

$$\mathcal{M} \models (\neg\psi)(\vec{a}) \iff \mathcal{M} \not\models \psi(\vec{a}) \iff \mathcal{N} \not\models \psi(\alpha\vec{a}) \iff \mathcal{N} \models (\neg\psi)(\alpha\vec{a}).$$

3. (a)  $\varphi = \exists x \psi$ . Тогда существует  $b \in M$  (соответствующее  $x$ ) такое, что

$$\mathcal{M} \models (\exists x \psi)(\vec{a}) \iff \mathcal{M} \models \psi(\vec{a}, b).$$

По предположению индукции,

$$\mathcal{M} \models \psi(\vec{a}, b) \iff \mathcal{N} \models \psi(\alpha\vec{a}, \alpha b), \quad (5)$$

однако это не совсем то, что нам нужно, поскольку мы хотим, чтобы существовало  $c \in N$  такое, что

$$\mathcal{N} \models (\exists x \psi)(\alpha\vec{a}) \iff \mathcal{N} \models \psi(\alpha\vec{a}, c). \quad (6)$$

Попытаемся почувствовать разницу между (5) и (6). В первом случае сказано, что  $\exists b \in M$  такое, что формула в  $\mathcal{N}$  истинна на числе  $\alpha b$ . Во втором же сказано, что существует какое-то произвольное  $c \in N$  такое, что на нем она будет истинна. В чем же разница? Понятно, что если она истинна на  $\alpha b \in N$ , то такое  $c$  найдется. А в обратную сторону? Может ли найтись  $c$  такое, что оно не имеет вида  $\alpha b$ ? Нет, такого быть не может, потому что  $\alpha$  сюръективна  $\implies$  для любого  $c \in N$  существует  $b \in M$  такое, что  $c = \alpha b$ .

(b)  $\varphi = \forall x \psi$ . Тогда для всех  $b \in M$

$$\mathcal{M} \models (\forall x \psi)(\vec{a}) \iff \mathcal{M} \models \psi(\vec{a}, b) \iff \mathcal{N} \models \psi(\alpha\vec{a}, \alpha b) \iff \mathcal{N} \models (\forall x \psi)(\alpha\vec{a}).$$

□

**Определение 8.4.** Отношение  $X \subseteq M^n$  *выразимо* в  $\mathcal{M}$ , если

$$\exists \varphi(x_1, \dots, x_n) \in \text{Fm}_\sigma \quad \forall \vec{a} \in M^n (\vec{a} \in X \iff \mathcal{M} \models \varphi(\vec{a})).$$

**Пример** В поле  $\mathcal{R}$  выразимо унарное отношение  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ , то есть

$$\varphi_+(x) = \exists y (y \cdot y = x).$$

Мы определяем  $\varphi_+$  таким образом, потому что из положительных чисел можно извлекать корень (чего нельзя делать с отрицательными числами). Тогда  $\forall a \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{R} \models \varphi_+(a) \iff a \geq 0 \iff a \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

### 8.3 Автоморфизмы

**Определение 8.5.** Если  $\mathcal{M} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{M}$ , то  $\alpha$  — *автоморфизм*  $\mathcal{M}$  (обозн.  $\alpha \in \text{Aut}(\mathcal{M})$ ).

**Пример** Давайте приведем какой-то нетривиальный автоморфизм для, например, порядка целых чисел, то есть  $\mathcal{M} = (\mathbb{Z}, <)$ . Тогда

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} \quad x < y \iff \alpha x < \alpha y.$$

Нам подойдет любое биективное  $\alpha: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  с таким свойством. Рассмотрим  $\alpha(x) = x + 1$  или  $\alpha(x) = x + 4$  — любой целочисленный сдвиг. Такое  $\alpha$  удовлетворяет нужным свойствам  $\implies$  является автоморфизмом.

### 8.4 Сохранение выразимых множеств автоморфизмами

Автоморфизмы открывают нам возможность доказать, что что-нибудь невыразимо. Это очень тупой, очень грубый способ. Обычно, отношение невыразимо, но автоморфизма, который позволял бы нам это доказать, не находится.

**Следствие 8.1.** Если отношение  $X \subseteq M^n$  *выразимо* в  $\mathcal{M}$ , то

$$\forall \alpha \in \text{Aut}(\mathcal{M}) \quad \forall \vec{a} \in M^n \quad \vec{a} \in X \iff \alpha \vec{a} \in X.$$

Это следствие можно записать и так: «выразимые отношения сохраняются всеми автоморфизмами структуры». В частности, если какое-то отношение не сохраняется каким-то автоморфизмом, то оно точно невыразимо.

*Доказательство.* Если  $X$  выразимо, то

$$\exists \varphi(x_1, \dots, x_n) \quad \forall \vec{a} \in M^n \quad \vec{a} \in X \iff \mathcal{M} \models \varphi(\vec{a}).$$

У нас  $\alpha$  — изоморфизм из  $\mathcal{M}$  в  $\mathcal{M}$ , тогда  $\vec{a} \in X \iff \mathcal{M} \models \varphi(\vec{a})$ . Вспомним теорему 8.2, в нашем случае  $\mathcal{N} = \mathcal{M}$ , тогда  $\mathcal{M} \models \varphi \vec{a} \iff \mathcal{M} \models \varphi(\alpha \vec{a}) \iff \alpha \vec{a} \in X$ . □

**Утверждение 8.3.** Множество  $\mathbb{Z}_+ = \{n \in \mathbb{Z} \mid n > 0\}$  *невыразимо* в  $\mathcal{M}$  из примера.

*Доказательство.* Рассмотрим  $\alpha(x) = x + 1$ ,  $\alpha \in \text{Aut}(\mathcal{M})$ . Мы знаем, что  $0 \notin \mathbb{Z}_+$ , но  $\alpha(0) = 1 \in \mathbb{Z}_+$ . Таким образом,  $\exists a \in \mathbb{Z}$  такое, что  $a \in \mathbb{Z}_+ \not\iff \alpha a \in \mathbb{Z}_+$ . Значит,  $\mathbb{Z}_+$  не выразимо в  $\mathcal{M}$ . □

**Определение 8.6.** Формула  $\varphi$  называется *предложением*, если  $\text{FV}(\varphi) = \emptyset$ .

## 8.5 Элементарная эквивалентность структур

**Определение 8.7.** Интерпретации сигнатуры  $\sigma$   $\mathcal{M}$  и  $\mathcal{N}$  называются *элементарно эквивалентными* ( $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ ), если  $\forall \varphi \in \text{St}_\sigma$

$$\mathcal{M} \models \varphi \iff \mathcal{N} \models \varphi.$$

**Определение 8.8.** Будем обозначать через  $\text{St}_\sigma$  множество предложений в сигнатуре  $\sigma$ .

## 8.6 Изоморфные структуры элементарно эквивалентны

**Следствие 8.2.**  $\mathcal{M} \cong \mathcal{N} \implies \mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ .

*Доказательство.* Поскольку  $\varphi \in \text{St}_\sigma$ , то

$$\mathcal{M} \models \varphi \iff \mathcal{M} \models \varphi(\text{«пустой набор»}) \stackrel{8.2}{\iff} \mathcal{N} \models \varphi(\alpha(\text{«пустой набор»})) = \varphi(\text{«пустой набор»}) \iff \mathcal{N} \models \varphi.$$

□

Что означает элементарная эквивалентность? Она означает, что ни одна формула не может отличить одну сигнатуру от другой. То есть, с точки зрения логики, такие формулы устроены одинаково.

**Факт**  $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N} \not\Rightarrow \mathcal{M} \cong \mathcal{N}$

**Пример**  $(\mathbb{Q}, <) \not\equiv (\mathbb{R}, <)$ , но  $(\mathbb{Q}, <) \equiv (\mathbb{R}, <)$ .

## 9 Лекция 9

В прошлой лекции мы говорили о структурах, об изоморфизме структур, поняли, что выразимые отношения сохраняются всеми автоморфизмами. Вообще, мы показали как себя ведет значение формулы при изоморфизме. А теперь мы хотим пойти немножко в другом направлении, и мы хотим установить общие законы нашей логики предикатов. Неформально выражаясь, логика предикатов — это свойства формул первого порядка<sup>19</sup>, которые имеют место для всех структур (интерпретаций). То есть, это такие свойства, которые не зависят от интерпретации (являются законами логики).

Будем считать, что у нас какая-нибудь сигнатура  $\sigma$  фиксирована и мы рассматриваем формулы этой сигнатуры.

**Определение 9.1.** Формула  $\varphi$  *общезначима*, если для любой интерпретации  $\mathcal{M}$ , для любой оценки переменных  $\pi: \text{Var} \rightarrow M$

$$[\varphi]_{\mathcal{M}}(\pi) = 1.$$

Что такое общезначимая формула? Это такая формула, которая всегда, как ее не интерпретируй, что с ней не делай, она будет принимать значение 1, которое всегда истинно.

**Пример** Формула

$$Px \implies (\neg Px \implies Qyz)$$

является общезначимой. Почему? Ну давайте возьмем какую-нибудь интерпретацию, какую-то оценку, то, в конечном счете, значение нашей формулы сведется к

$$[\varphi]_{\mathcal{M}}(\pi) = \text{ИМП}(\sigma, \text{ИМП}(\text{НЕ}(\sigma), \tau)),$$

где  $\sigma, \tau \in \{0, 1\}$ . Какие бы значения  $\sigma, \tau$  не были, значение формулы будет 1 (можно проверить по таблице истинности). Поэтому эта формула является общезначимой.

Следует заметить, что не всякая общезначимая формула общезначима в силу импликации и отрицания.

**Пример** Рассмотрим формулу

$$\varphi = \forall x Px \implies \exists x Px.$$

Понятно, что в ней ничего не зависит от того, что мы понимаем под свойством  $P$ . Это будет всегда так, если  $M \neq \emptyset$  (по определению  $M$ , это правда).

**Контр-пример** Рассмотрим формулу

$$\varphi = Px \vee \neg Qy.$$

Придумаем интерпретацию и оценку переменных такие, что  $\varphi$  ложна. Положим  $M = \mathbb{N}$ ,  $P^{\mathcal{M}} = Q^{\mathcal{M}} = \text{«равно 0»}$ ,  $\pi(x) = 2020$ ,  $\pi(y) = 0$ . Тогда значение  $\varphi$  ложно.

И так, общезначимые формулы — это законы логики. Наша задача — понять, как эти законы устроены. Двойственным к общезначимости является следующее понятие:

**Определение 9.2.** Формула  $\varphi$  *выполнима*, если существует интерпретация  $\mathcal{M}$  и оценка  $\pi$  такая, что

$$[\varphi]_{\mathcal{M}}(\pi) = 1.$$

То есть, общезначимая формула истинна всегда, а выполняемая истинна в каком-то случае.

**Лемма 9.1.** Формула  $\varphi$  общезначима  $\iff \neg\varphi$  не выполнима.

**Лемма 9.2.** Формула  $\varphi$  выполнима  $\iff \neg\varphi$  не общезначима.

**Определение 9.3.** Формулы  $\varphi$  и  $\psi$  (логически) эквивалентны, если для любой структуры  $\mathcal{M}$ , для любой оценки  $\pi$

$$[\varphi]_{\mathcal{M}}(\pi) = [\psi]_{\mathcal{M}}(\pi).$$

**Лемма 9.3.** Верны следующие утверждения:

1.  $\varphi \equiv \varphi$ ;
2.  $\varphi \equiv \psi \implies \psi \equiv \varphi$ ;
3.  $\varphi \equiv \psi \wedge \psi \equiv \theta \implies \varphi \equiv \theta$ .

Таким образом, наша эквивалентность является отношением эквивалентности на множестве формул.

<sup>19</sup>так называются те формулы, которые были нами определены.

**Лемма 9.4** (о конгруэнции отношения эквивалентности). Если  $\varphi \equiv \varphi'$ , то

- $\neg\varphi \equiv \neg\varphi'$ ;
- $\varphi \wedge \psi \equiv \varphi' \wedge \psi$ .
- $\varphi \vee \psi \equiv \varphi' \vee \psi$ .
- $\varphi \implies \psi \equiv \varphi' \implies \psi$ .
- $\psi \implies \varphi \equiv \psi \implies \varphi'$ .
- $\forall x\varphi \equiv \forall x\varphi'$ .
- $\exists x\varphi \equiv \exists x\varphi'$ .

Это связано с тем, что значение сложной формулы определяется через значения ее подформул. И если значение  $\varphi$  всегда можно заменить на значение  $\varphi'$  в любой интерпретации и при любой оценке, то тогда, конечно же, значение исходной формулы не изменится. Проверим один пункт с квантором.

*Доказательство.*  $[\forall x\varphi]_{\mathcal{M}}(\pi) = 1 \iff \forall m \in M [\varphi](\pi_x^m) = 1$ , но  $[\varphi](\pi_x^m) = [\varphi'](\pi_x^m)$ , тогда  $[\varphi'](\pi_x^m) = 1$ .  $\square$

**Упражнение** Существуют  $\varphi, \varphi'$  такие, что

$$\forall x\varphi = \forall x\varphi',$$

но  $\varphi \not\equiv \varphi'$ , то есть снимать квантор таким образом нельзя.

Можно ли через эквивалентность выразить общезначимость (и наоборот)? Ну конечно можно!

**Лемма 9.5.**  $\varphi \equiv \psi \iff$  общезначима формула

$$(\varphi \implies \psi) \wedge (\psi \implies \varphi).$$

*Доказательство.* Значение импликации один тогда и только тогда, когда значение посылки не больше значения заключения, а в лемме сказано, что они одинаковы. Тогда формулы  $\varphi$  и  $\psi$  эквивалентны.  $\square$

**Лемма 9.6.** Формула  $\varphi$  общезначима тогда и только тогда, когда

$$\varphi \equiv \text{«заведомая истина»}.$$

Что это за заведомая истина? На самом деле, обычно, логики считают, что есть связки

- $\top$  — тождественная истина.
- $\perp$  — тождественная ложь.

Если же их в сигнатуре нет, то приходится как-то выкручиваться. Например, если в сигнатуре есть предикатный символ  $P$ , то в качестве тождественной истины можно взять формулу  $Px \vee \neg Px$ .

**Следствие 9.1.** Все общезначимые формулы эквивалентны друг другу.

Теперь давайте посмотрим некоторые свойства, которые характерны именно для кванторов. Одно из этих свойств очень простое, но в тоже время весьма полезное — лемма о фиктивном кванторе.

**Лемма 9.7** (о фиктивном кванторе). Если  $x \notin \text{FV}(\varphi)$ , то  $\forall x\varphi \equiv \varphi$ . Аналогично,  $\exists x\varphi \equiv \varphi$ .

*Доказательство.* Нам надо доказать эквивалентность, то есть то, что происходит в любой интерпретации  $\mathcal{M}$  и при любой оценке  $\pi$ . Рассмотрим формулу

$$[\forall x\varphi]_{\mathcal{M}}(\pi) = 1 \iff \forall m \in M [\varphi](\pi_x^m) = 1.$$

Мы знаем, что если для любого  $z \in \text{FV}(\psi)$  две оценки  $\pi_1(z)$  и  $\pi_2(z)$  совпадают, то  $[\psi]_{\mathcal{M}}(\pi_1) = [\psi]_{\mathcal{M}}(\pi_2)$ . Мы знаем, что  $x \notin \text{FV}(\varphi)$ , посмотрим тогда на следующее выражение

$$\pi_x^m(z) = \pi(z),$$

где

$$\pi_x^m(z) = \begin{cases} m, & y = x, \\ \pi(y), & y \neq x. \end{cases}$$

Заметим, что значение  $\pi_x^m$  совпадает со значением  $\pi$  везде, кроме  $x$ , тогда  $[\psi]_{\mathcal{M}}(\pi_1) = [\psi]_{\mathcal{M}}(\pi_2) \implies [\varphi]_{\mathcal{M}}(\pi_x^m) = [\varphi]_{\mathcal{M}}(\pi)$ . Получается, что  $[\varphi](\pi_x^m) = [\varphi](\pi)$ . Дальше мы снимаем внешний фиктивный квантор: мы получили, что  $\forall m \in M [\varphi](\pi) = 1$ , что не зависит от  $m$ , тогда это равносильно  $[\varphi](\pi) = 1$ .  $\square$

**Следствие 9.2.**  $\forall x \exists x \varphi \equiv \exists x \varphi$ .

**Утверждение 9.1.** Формула  $\varphi$  общезначима  $\iff \forall x \varphi$  общезначима.

*Доказательство.*

$\implies$  Дано:  $\forall \mathcal{M}, \forall \pi: [\varphi]_{\mathcal{M}}(\pi) = 1$ . Хотим:  $\forall \mathcal{M}, \forall \rho: [\forall x \varphi]_{\mathcal{M}}(\rho) = 1$ . Зафиксируем какие-то  $\mathcal{M}$  и  $\rho$ , тогда

$$[\forall x \varphi](\rho) = 1 \iff \forall m \in M [\varphi](\rho_x^m) = 1.$$

Давайте положим  $\pi = \rho_x^m$ , тогда  $[\varphi](\pi) = 1$ . Поскольку  $\varphi$  общезначима, то можно навесить квантор всеобщности, поскольку нам нужно, чтобы  $\varphi$  была истинна для некоторых специальных оценок, а она истинна всегда.

$\impliedby$  Дано:  $\forall \mathcal{M}, \forall \pi: [\forall \varphi]_{\mathcal{M}}(\pi) = 1$ . Хотим:  $\forall \mathcal{M}, \forall \rho: [\varphi]_{\mathcal{M}}(\rho) = 1$ . Мы знаем, что  $\forall m \in M: [\varphi]_{\mathcal{M}}(\pi_x^m) = 1$ . Положим  $\pi = \rho$ ,  $m = \rho(x)$ , тогда  $\pi_x^m = \rho_x^{\rho(x)}$ . Эта оценка ведет себя как  $\rho$  везде, кроме  $x$ , где она также ведет себя как  $\rho$ , то есть  $\pi_x^m = \rho$ . Имеем  $[\varphi]_{\mathcal{M}}(\rho) = 1$ .  $\square$

**Упражнение**  $\varphi$  выполнима  $\iff \exists x \varphi$  выполнима.

### Эквивалентности алгебры логики

$$\begin{aligned} \varphi \implies \psi &\equiv \neg \varphi \vee \psi, \\ \neg \varphi \implies \neg \psi &\equiv \psi \implies \varphi, \\ \neg(\varphi \implies \psi) &\equiv \varphi \wedge \neg \psi, \\ \neg \neg \varphi &\equiv \varphi, \\ \neg(\varphi \wedge \psi) &\equiv \neg \varphi \vee \neg \psi, \\ \neg(\varphi \vee \psi) &\equiv \neg \varphi \wedge \neg \psi, \\ \varphi \wedge (\psi \vee \theta) &\equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta), \\ \varphi \vee (\psi \wedge \theta) &\equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta), \\ \varphi \wedge (\varphi \vee \psi) &\equiv \varphi, \\ \varphi \vee (\varphi \wedge \psi) &\equiv \varphi, \\ \varphi \wedge \psi &\equiv \psi \wedge \varphi, \\ \varphi \wedge \varphi &\equiv \varphi, \\ (\varphi \wedge \psi) \wedge \theta &\equiv \varphi \wedge (\psi \wedge \theta). \end{aligned}$$

Последние три эквивалентности также верны, если  $\wedge$  заменить на  $\vee$ . Все эквивалентности доказываются по таблице истинности.

**Теорема 9.1** (основные эквивалентности с кванторами).

1.

$$\begin{aligned} \forall x(\varphi \wedge \psi) &\equiv \forall x \varphi \wedge \forall x \psi, \\ \exists x(\varphi \vee \psi) &\equiv \exists x \varphi \vee \exists x \psi. \end{aligned}$$

2. Пусть  $x \notin \text{FV}(\psi)$ , тогда

$$\begin{aligned} \forall x(\varphi \wedge \psi) &\equiv \forall x \varphi \wedge \psi, \\ \exists x(\varphi \wedge \psi) &\equiv \exists x \varphi \wedge \psi, \\ \forall x(\varphi \vee \psi) &\equiv \forall x \varphi \vee \psi, \\ \exists x(\varphi \vee \psi) &\equiv \exists x \varphi \vee \psi. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \neg \forall x \varphi &\equiv \exists x \neg \varphi, \\ \neg \exists x \varphi &\equiv \forall x \neg \varphi. \end{aligned}$$

Доказательство проводится за счет нашего определения: мы постепенно превращаем это утверждение в утверждение про наши неформальные кванторы, никакого другого инструментария у нас нет. Проверим некоторые из них.

*Доказательство.* Зафиксируем  $M$  и  $\pi$ .

**2.2**  $[\exists x(\varphi \wedge \psi)](\pi) = 1 \iff \exists m \in M [\varphi \wedge \psi](\pi_x^m) = 1$ . Заметим, что  $\varphi \wedge \psi = \Pi([\varphi](\pi_x^m), [\psi](\pi_x^m))$ . Мы знаем, что  $x$  не входит свободно в  $\psi$ , то есть  $x \notin \text{FV}(\psi)$ . Что это означает? Давайте посмотрим на оценки  $\pi_x^m$  и  $\pi$ . Они ведь совпадают всюду, кроме  $x$ . В частности,  $\forall z \in \text{FV}(\psi) \pi_x^m(z) = \pi(z)$ . Отсюда, по теореме (хз какой, надо найти),  $[\psi](\pi_x^m) = [\psi](\pi)$ . У нас получается следующая вещь: найдется элемент  $m \in M$  такой, что  $\Pi([\varphi](\pi_x^m), [\psi](\pi)) = 1$ . Это равносильно тому, что

$$\exists m \in M ([\varphi](\pi_x^m) = 1 \text{ и } [\psi](\pi) = 1).$$

Теперь заметим, что значение  $[\psi](\pi)$  не зависит от  $m$ , поэтому это можно переписать следующим образом:

$$(\exists m \in M [\varphi](\pi_x^m) = 1) \text{ и } [\psi](\pi) = 1 \iff [\exists x\varphi](\pi) = 1 \text{ и } [\psi](\pi) = 1 \iff [\exists x\varphi](\pi) = 1. \quad \square$$

**Следствие 9.3** (Выразимость одного квантора через другой).  $\forall x\varphi \equiv \forall x\neg\neg\varphi \equiv \neg\exists x\neg\varphi$ .  $\exists x\varphi \equiv \neg\forall x\neg\varphi$ .

**Следствие 9.4.** Пусть  $x \notin \text{FV}(\psi)$ , тогда

$$\begin{aligned} \forall x(\varphi \implies \psi) &\equiv \exists x\varphi \implies \psi, \\ \exists x(\varphi \implies \psi) &\equiv \forall x\varphi \implies \psi, \\ \forall x(\psi \implies \varphi) &\equiv \psi \implies \forall\varphi, \\ \exists x(\psi \implies \varphi) &\equiv \psi \implies \exists\varphi. \end{aligned}$$

Как это запомнить? При вынесении квантора из посылки, он меняется на противоположный. При вынесении квантора из влечения, он остается тем же.

*Доказательство.*  $\forall x(\varphi \implies \psi) \equiv \forall x(\neg\varphi \vee \psi)$ . Мы помним, что  $x \notin \text{FV}(\psi)$ , тогда

$$\forall x(\neg\varphi \vee \psi) \equiv \forall x\neg\varphi \vee \psi \equiv \neg\exists x\varphi \vee \psi \equiv \exists x\varphi \implies \psi. \quad \square$$

## 9.1 Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы

Будем работать с ДНФ и КНФ для формул первого порядка. Давайте рассмотрим формулу

$$(\forall xPx \vee \neg Qy) \implies \exists xPx.$$

Обратим внимание, что здесь есть кванторы, здесь есть атомы (отношения, в которые подставлены термы). Давайте выделим блоки  $\forall xPx$ ,  $Qy$  и  $\exists xPx$ , и посмотрим на структуру нашей формулы

$$(\square \vee \neg\square) \implies \square.$$

Здесь наши квадраты — либо атомарные формулы, либо формулы, начинающиеся с квантора<sup>20</sup>. Мы хотим проанализировать формулу с точки зрения логических связок.

Пусть фиксирован набор попарно различных формул (атомарных или вида  $\forall x\varphi$ ,  $\exists x\varphi$ )  $(F_1, \dots, F_n)$  в сигнатуре  $\sigma$ .

**Определение 9.4.** Определим множество  $\mathcal{B}(F_1, \dots, F_n)$  булевых комбинаций формул из  $(F_1, \dots, F_n)$  следующим образом:

1.  $\forall i F_i \in \mathcal{B}(F_1, \dots, F_n)$ ;
2.  $\varphi, \psi \in \mathcal{B}(F_1, \dots, F_n) \implies \neg\varphi, (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \implies \psi), (\varphi \iff \psi) \in \mathcal{B}(F_1, \dots, F_n)$ .

Мы хотим понять, как определяется истинность булевой комбинации. Это очень просто. Каждой  $\varphi \in \mathcal{B}(F_1, \dots, F_n)$  поставим в соответствие булеву функцию  $f_\varphi: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  таким образом, что (далее рекурсией по построению)

1.  $\varphi = F_i \implies f_\varphi(x_1, \dots, x_n) = x_i$ ;
2. (a)  $\varphi = \neg\psi \implies f_\varphi(\vec{x}) = \text{НЕ}(f_\psi(\vec{x}))$ ;
- (b)  $\varphi = \psi \vee \theta \implies f_\varphi(\vec{x}) = \text{ИЛИ}(f_\psi(\vec{x}), f_\theta(\vec{x}))$ ;
- (c) Аналогично для других связок.

**Лемма 9.8.** Для любой формулы  $\varphi \in \mathcal{B}(F_1, \dots, F_n)$ ,  $\forall M, \forall \pi$

$$[\varphi]_{\mathcal{M}}(\pi) = f_\varphi([F_1]_{\mathcal{M}}(\pi), \dots, [F_n]_{\mathcal{M}}(\pi)).$$

<sup>20</sup>такие вещи называются квазиатомами

*Доказательство.* Индукцией по построению  $\varphi$ . □

**Определение 9.5.** Формула  $\varphi \in \mathcal{B}(F_1, \dots, F_n)$  называется *тавтологией*, если  $\forall \vec{x} f_\varphi(\vec{x}) = 1$ .

**Утверждение 9.2.** Если  $\varphi$  тавтология, то  $\varphi$  общезначима.

*Доказательство.* Следует из леммы 9.8. □

Не всякая общезначимая формула является тавтологией. Например, формула  $\varphi = \forall x Px \implies \exists x Px$  не является тавтологией, потому что, если представить ее в виде булевой комбинации, она будет иметь вид  $F_1 \implies F_2$ , и ей будет соответствовать функция ИМП( $x_1, x_2$ ), которая не всегда истинна.

**Определение 9.6** (ДНФ над набором формул). Пусть фиксирован набор формул  $(F_1, \dots, F_n)$  (как прежде). Определим дизъюнктивную нормальную форму следующим образом:

1.  $F_i$  или  $\neg F_i$  — *литералы*;
2. Если  $l_1, \dots, l_k$  — литералы, то  $l_1 \wedge \dots \wedge l_k$  — *элементарная конъюнкция*;
3. Если  $c_1, \dots, c_m$  — элементарные конъюнкции, то  $c_1 \vee \dots \vee c_m$  — ДНФ над набором  $(F_1, \dots, F_n)$ .

**Определение 9.7** (КНФ над набором формул). Пусть фиксирован набор формул  $(F_1, \dots, F_n)$  (как прежде). Определим конъюнктивную нормальную форму следующим образом:

1.  $F_i$  или  $\neg F_i$  — *литералы*;
2. Если  $l_1, \dots, l_k$  — литералы, то  $l_1 \vee \dots \vee l_k$  — *элементарная дизъюнкция*;
3. Если  $d_1, \dots, d_m$  — элементарные дизъюнкции, то  $d_1 \wedge \dots \wedge d_m$  — КНФ над набором  $(F_1, \dots, F_n)$ .

ДНФ и КНФ, вообще говоря, являются разными объектами. Например,

$$(F_1 \wedge \neg F_2 \wedge F_1) \vee (\neg F_3) \vee (F_1 \wedge F_4)$$

является ДНФ, но не является КНФ, потому что в дереве разбора формулы ниже дизъюнкции стоит конъюнкция.

Однако, существуют формулы, которые являются одновременно КНФ и ДНФ, например

$$F_1 \wedge \neg F_2; \quad F_3 \wedge \neg F_4 \wedge F_5.$$

На самом деле, одновременно КНФ и ДНФ являются литералы и элементарные конъюнкции (дизъюнкции).

**Следствие 9.5.**  $\text{CNF}(\vec{F}) \cup \text{DNF}(\vec{F}) \subseteq \mathcal{B}(\vec{F})$ .



## 10 Лекция 10

В прошлой лекции мы рассмотрели некоторые конкретные виды булевых комбинаций (ДНФ и КНФ).

### 10.1 Теорема о ДНФ и КНФ

**Теорема 10.1.** Любую булеву комбинацию  $\varphi \in \mathcal{B}(F_1, \dots, F_n)$  существуют  $\varphi_1 \in \text{DNF}(F_1, \dots, F_n)$  и  $\varphi_2 \in \text{CNF}(F_1, \dots, F_n)$  такие, что

$$\varphi \equiv \varphi_1 \wedge \varphi \equiv \varphi_2.$$

*Доказательство.* Все наше доказательство будет строиться вокруг рассмотрения функции  $f_\varphi: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ , которая истинностные значения формул  $F_1, \dots, F_n$  превращает в истинностное значение формулы  $\varphi$ . В любой интерпретации и при любой оценке переменных

$$[\varphi](\pi) = f_\varphi([F_1](\pi), \dots, [F_n](\pi)) = f_\varphi([\vec{F}](\pi)).$$

Теперь давайте исследуем функцию  $f_\varphi$ . Рассмотрим  $U = \{\sigma \in \{0, 1\}^n \mid f_\varphi(\sigma) = 1\}$ . Нам надо рассмотреть несколько случаев:

1.  $U = \emptyset$ . Тогда для любого  $\pi$   $[\varphi](\pi) = f_\varphi([\vec{F}](\pi)) = 0$ . Положим  $\varphi_1 = F_1 \wedge \neg F_1$ , тогда  $\varphi_1 \equiv \varphi$ .
2.  $U \neq \emptyset$ . Пусть  $A \in \text{Fm}$ , а  $\sigma \in \{0, 1\}$ , тогда положим

$$A^\sigma = \begin{cases} A, & \sigma = 1, \\ \neg A, & \sigma = 0. \end{cases}$$

**Утверждение 10.1.**  $[A^\sigma](\pi) = 1 \iff \sigma = [A](\pi)$ .

*Доказательство.* Действительно, если  $\sigma = 1$ , то  $[A^1](\pi) = [A](\pi)$ , то есть  $[A^1](\pi) = 1 \iff [A](\pi) = 1$ . Если же  $\sigma = 0$ , то  $[A^0](\pi) = 1 \iff [\neg A](\pi) = 1 \iff [A](\pi) = 0$ .  $\square$

**Следствие 10.1.**  $\Phi_{\vec{\sigma}} = [F_1^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge F_n^{\sigma_n}](\pi) = 1 \iff \forall i [F_i^{\sigma_i}](\pi) = 1 \iff \forall i \sigma_i = [F_i](\pi) \iff \vec{\sigma} = [\vec{F}]$ .

Тогда мы говорим буквально следующее: когда у нас  $[\varphi](\pi) = 1$ ? Тогда и только тогда, когда  $f_\varphi([\vec{F}](\pi)) = 1 \iff [\vec{F}](\pi) \in U \iff \exists \vec{\sigma} \in U [\vec{F}](\pi) = \vec{\sigma}$ . Получилось тоже самое, что и в следствии 10.1, поэтому это все равносильно тому, что  $\exists \vec{\sigma} \in U [\Phi_{\vec{\sigma}}](\pi) = 1 \iff [\bigvee_{\vec{\sigma} \in U} \Phi_{\vec{\sigma}}](\pi) = 1$ . Но если  $\varphi$  и  $\bigvee_{\vec{\sigma} \in U} \Phi_{\vec{\sigma}}$  принимают значение 1 одновременно, то и значение 0 они принимают одновременно (поскольку возможных значений всего два), тогда  $\varphi \equiv \bigvee_{\vec{\sigma} \in U} \Phi_{\vec{\sigma}} \equiv \bigvee_{\vec{\sigma} \in U} F_1^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge F_n^{\sigma_n} \in \text{DNF}(F_1, \dots, F_n)$ .

Таким образом, мы построили ДНФ. Построим теперь КНФ. На этот раз будем анализировать множество  $Z = \{\vec{\sigma} \mid f_\varphi(\vec{\sigma}) = 0\}$ . Рассмотрим несколько случаев:

1.  $Z = \emptyset$ . Тогда для любого  $\pi$   $[\varphi](\pi) = 1$ . Положим  $\varphi_2 = F_1 \vee \neg F_1 \equiv \varphi$ .
2. Делаем все тоже самое, что и для ДНФ, только наоборот. Рассмотрим формулу  $\psi_{\vec{\sigma}} = F_1^{\overline{\sigma_1}} \vee \dots \vee F_n^{\overline{\sigma_n}}$ , где  $\overline{\sigma_i}$  значит отрицание  $\sigma_i$ , тогда

$$[F_1^{\overline{\sigma_1}} \vee \dots \vee F_n^{\overline{\sigma_n}}](\pi) = 0 \iff \forall i [F_i^{\overline{\sigma_i}}](\pi) = 0 \iff \forall i \overline{\sigma_i} \neq [F_i](\pi) \iff \forall i \sigma_i = [F_i](\pi) \iff \vec{\sigma} = [\vec{F}](\pi).$$

Что же мы делаем дальше? Дальше мы смотрим, когда  $[\varphi](\pi) = 0 \iff f_\varphi([\vec{F}](\pi)) = 0 \iff [\vec{F}](\pi) \in Z \iff \exists \vec{\sigma} \in Z [\vec{F}](\pi) = \vec{\sigma}$ . Это равносильно тому, что  $\exists \vec{\sigma} \in Z [\psi_{\vec{\sigma}}](\pi) = 0 \iff [\bigwedge_{\vec{\sigma} \in Z} \psi_{\vec{\sigma}}](\pi) = 0$ , откуда

$$\varphi \equiv \bigwedge_{\vec{\sigma} \in Z} \psi_{\vec{\sigma}} \in \text{CNF}(F_1, \dots, F_n).$$

$\square$

Что нужно делать на практике? Если мы хотим использовать это на практике, то нам надо, прежде всего, найти функцию  $f_\varphi$  (то есть, построить таблицу истинности). Такая таблица будет являться таблицей зависимости значений формулы  $\varphi$  от значений образующих ее формул. Дальше, если строим ДНФ, то мы берем наборы, где наша функция принимает значение 1. Каждый такой набор мы кодируем элементарной конъюнкцией  $F_1^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge F_n^{\sigma_n}$  и берем их дизъюнкцию.

На самом деле, можно не пускать каждый раз в ход этот алгоритм, а просто пользоваться элементарными эквивалентностями, и, раскрывая скобки, получить ДНФ (КНФ).

## 10.2 Корректные подстановки

Давайте рассмотрим следующую формулу

$$\varphi(x) = \exists y \, x < y.$$

Рассмотрим также формулу

$$\forall x \varphi = \forall x \exists y \, x < y.$$

Истинна ли такая формула в структуре натуральных чисел  $\mathbb{N}$ ? У любого натурального числа существует большее, поэтому такая формула истинна. Ну если она истинна для любого  $x$ , то мы можем вместо  $x$  подставить любой терм  $t$ , тогда

$$\forall x \varphi \implies \varphi(t/x),$$

и формула так же должна быть верна для любого  $t$ . Ну а теперь подставим вместо  $x$   $y$ , тогда формула

$$\varphi(y/x) = \exists y \, y < y$$

не является истинна в натуральных числах. Получается очень неприятная ситуация, ведь мы ожидали, что получится истинное утверждение, а получилось ложное. В чем же проблема? Проблема в том, что в  $\varphi$  переменная  $x$  входила свободно, но потеряла эту свободу при подстановке  $y$ , ведь  $y$  — связанная переменная. Такая ситуация называется в логике *коллизией переменных* и это исключительно синтаксическая проблема, в ней нет глубокого смысла. Она связана исключительно с тем, что мы используем один и тот же алфавит для связанных переменных и для свободных.

**Определение 10.1.** Подстановкой называется функция  $(\cdot)(\cdot / \cdot): \text{Tm}_\sigma \times \text{Tm}_\sigma \times \text{Var} \rightarrow \text{Tm}_\sigma$ , которая принимает на вход терм  $t \in \text{Tm}_\sigma$  и переменную  $x \in \text{Var}$ , и которая произвольный терм  $S \in \text{Tm}_\sigma$  преобразует в другой терм  $S(t/x) \in \text{Tm}_\sigma$ . Аналогично, для формулы можно определить функцию  $(\cdot)(\cdot / \cdot): \text{Fm}_\sigma \times \text{Tm}_\sigma \times \text{Var} \rightarrow \text{Fm}_\sigma$ , которая преобразует формулу в другую формулу.

Как подстановка работает? Неформально, идея очень проста. Рассмотрим ее на примере:

$$\underbrace{((x + z \cdot 3) \cdot (y + x))}_{\text{формула}} \quad \underbrace{((19 \cdot x)/x)}_{\text{подставили } 19 \cdot x \text{ вместо } x} = ((19 \cdot x) + z \cdot 3) \cdot (y + (19 \cdot x)).$$

Вроде все просто, однако мы, на самом деле, заменяем только свободные вхождения:

$$((x = 3) \vee \forall x(x + z = 7))((x \cdot 19)/x) = (((19 \cdot x) = 3) \vee \forall x(x + z = 7)).$$

Формально, действуем индукцией по построению терма  $S$ :

1.  $x \in \text{Tm} \implies x(t/x) = t$ ; если  $y \neq x$ , тогда  $y(t/x) = y$ ;
2.  $c \in \text{Const} \implies c(t/x) = c$ ;
3.  $(f s_1 \dots s_n)(t/x) = f(s_1(t/x)) \dots (s_n(t/x))$ .

Аналогично для формулы  $\varphi$ :

1.  $(R s_1 \dots s_n)(t/x) = R(s_1(t/x)) \dots (s_n(t/x))$ ;
2.  $(\varphi \wedge \psi)(t/x) = \varphi(t/x) \wedge \psi(t/x)$ ;
3.  $Q \in \{\forall, \exists\} \implies (Q x \varphi)(t/x) = Q x \varphi$ ; если  $y \neq x$ , то  $(Q y \varphi)(t/x) = Q y(\varphi(t/x))$ .

**Определение 10.2.** Терм  $t$  свободен для  $x$  в формуле  $\varphi$  (обозн.  $t\text{-}x\text{-}\varphi$ ), если ни одно свободное вхождение  $x$  в  $\varphi$  не попадает под квантор по  $y$ , если  $y \in V(t)$ .

То есть, не произойдет такой ситуации, что

$$\varphi = \dots Q y(\dots x \dots),$$

или, если по-человечески, то это значит, что в формуле  $\varphi$  переменная  $x$  не будет попадать в область действия кванторов (если мы подставим вместо  $x$   $t$ , и этот  $y$  попадет под квантор).

Давайте сделаем несколько простых наблюдений. Если  $x \notin \text{FV}(\varphi)$ , тогда любой терм свободен, то есть  $t\text{-}x\text{-}\varphi$ . Понятно, что если в  $t$  нет переменных, то он свободен. Ситуация

$$t\text{-}x\text{-}Q y \psi$$

Возможна тогда и только тогда, когда

1.  $x \notin \text{FV}(Q y \psi)$ <sup>21</sup>;

<sup>21</sup>кроме ситуации, когда  $x$  совпадает с  $y$

2.  $x \in \text{FV}(Qy\psi) \iff x \neq y$ . Если это так, то  $y \notin V(t)$ , поскольку иначе это свободное вхождение попадает под действие квантора  $Q$ , а тогда, при подстановке терма  $t$  вместо  $x$ , этот квантор «поймает» переменную  $y$ , если она была в  $t$ . Кроме этого, надо также отметить, что другой коллизии не произойдет, то есть  $t$ - $x$ - $\psi$ . Получается тогда, что полное условие выглядит так:  $x \in \text{FV}(Qy\psi)$  и  $y \in V(t)$ , и  $t$ - $x$ - $\psi$ .

**Лемма 10.1** (о корректной подстановке). Пусть  $s, t \in \text{Tm}_\sigma$ ,  $x \in \text{Var}$ ,  $\varphi \in \text{Fm}_\sigma$ ,  $\mathcal{M}$  — интерпретация,  $\pi$  — оценка. Тогда

1.  $[s(t/x)](\pi) = [s](\pi_x^{[t](\pi)})$  — значение терма  $s$  при подстановке терма  $t$  вместо переменной  $x$  равняется значению терма  $s$ , где оценка переменной  $x$  заменяется на значение терма  $t$ .
2.  $t$ - $x$ - $\varphi \implies [\varphi(t/x)](\pi) = [\varphi](\pi_x^{[t](\pi)})$ .

*Доказательство.* Для  $s$  — индукция по построению  $s$ , для  $\varphi$  — индукция по построению. Разберем самый важный случай:

$$\varphi = \forall z\psi.$$

Нам дано, что терм  $t$  свободен для  $x$  в формуле  $\forall z\psi$ . Тогда возможны два случая:

1.  $x \notin \text{FV}(\forall z\psi)$ ;
2.  $x \in \text{FV}(\forall z\psi)$ . Тут мы можем сразу сказать, что  $z \neq x$ ,  $z \notin V(t)$  и  $t$ - $x$ - $\psi$ .

Разберем эти случаи:

1.  $\varphi(t/x) = (\forall z\psi)(t/x) = \forall z\psi = \varphi$  (мы подставили  $t$  вместо  $x$ , но никаких  $x$  в формуле не было), тогда

$$[\varphi(t/x)](\pi) = [\varphi](\pi) = [\varphi](\pi_x^{[t](x)}),$$

потому что значение формулы при оценке зависит только от оценки свободных переменных, которой  $x$  не является.

2.  $(\forall z\psi)(t/x) = \forall z(\psi(t/x))$ , тогда

$$[\varphi(t/x)](\pi) = [\forall z(\psi(t/x))](\pi) = 1 \iff \forall m \in M [\psi(t/x)](\pi_z^m) = 1.$$

Теперь заметим, что  $\psi$  более простая, чем  $\varphi$ . Тогда мы можем воспользоваться предположением индукции ( $t$ - $x$ - $\psi$ ) и получим

$$[\psi(t/x)](\pi_z^m) = [\psi](\pi_z^m \pi_x^{[t](\pi_z^m)}).$$

Мы знаем, что  $z \in V(t)$ , тогда

$$[t](\pi) = [t](\pi_z^m),$$

отсюда

$$[\psi](\pi_z^m \pi_x^{[t](\pi_z^m)}) = [\psi](\pi_z^m \pi_x^{[t](\pi)}).$$

Мы помним, что  $z \neq x$ , тогда

$$[\psi](\pi_z^m \pi_x^{[t](\pi)}) = [\psi](\pi_x^{[t](\pi)} \pi_z^m).$$

Получается, что

$$\forall m [\psi](\pi_x^{[t](\pi)} \pi_z^m) = 1,$$

но это эквивалентно тому, что

$$[\forall z\psi](\pi_x^{[t](\pi)}) = 1 = [\varphi](\pi_x^{[t](\pi)}).$$

Получается, что значение формулы  $\varphi$  при модифицированной оценке равно 1 тогда и только тогда, когда значение результата подстановки при исходной оценке равно 1. □

**Следствие 10.2.** Если  $t$ - $x$ - $\varphi$ , то формулы

$$\forall x\varphi \implies \varphi(t/x)$$

и

$$\varphi(t/x) \implies \exists x\varphi.$$

общезначимы.

*Доказательство.* Докажем только второе утверждение. Допустим, что  $[\varphi(t/x)](\pi) = 1$ , тогда, по лемме 10.1,  $[\varphi](\pi_x^{[t](\pi)}) = [\varphi(t/x)](\pi)$ . Тогда  $\exists m = [t](\pi): [\varphi](\pi_x^m) = 1 \iff [\exists x\varphi](\pi) = 1$ . То есть, если посылка при какой-то оценке принимает значение один, то и заключение при этой оценке принимает значение 1. □

Рассмотрим формулы  $\forall xPxy$  и  $\forall zPzy$ , они будут эквивалентны. Рассмотрим теперь формулы  $\forall xPxy$  и  $\forall yPyu$ , будут ли они эквивалентны? Нет, потому что из того, что каждый «дружит» с  $y$  не следует, что каждый «дружит» сам с собой, то есть подстановка некорректна. Почему? Потому что она исказила структуру формулы.

Нельзя переименовывать свободные переменные! Например, обозначим за  $Q$  свойство «быть голубым». Тогда  $Qu \neq Qx$ , потому что легко придумать оценку, в которой  $y$  голубой, а  $x$  — нет. Поэтому свободные переменные переименовывать нельзя. Свободные переменные можно переименовывать, но нам потребуются некоторые дополнительные условия.

**Следствие 10.3** (переименование связанной переменной). *Если  $y \notin V(\varphi)$ , то*

$$\forall x\varphi \equiv \forall y\varphi(y/x)$$

и

$$\exists x\varphi \equiv \exists y\varphi(y/x).$$

*Доказательство.* Если  $y \notin V(\varphi)$ , тогда  $y$  свободен для  $x$  в  $\varphi$ , потому что в  $\varphi$  нет кванторов по  $y$ . Далее,

$$[\forall y\varphi(y/x)](\pi) = 1 \iff \forall m \in M [\varphi(y/x)](\pi_y^m) = 1.$$

По лемме 10.1,

$$[\varphi(y/x)](\pi_y^m) = [\varphi](\pi_y^{[y]_x(\pi_y^m)}) = [\varphi](\pi_y^m x^m).$$

Мы знаем, что  $y$  не входит свободно в  $\varphi$  (он туда вообще не входит), тогда

$$[\varphi](\pi_y^m x^m) = [\varphi](\pi_x^m),$$

тогда

$$[\varphi(y/x)](\pi_y^m) = 1 = [\varphi](\pi_x^m).$$

Получается, что

$$\forall m \in M [\varphi](\pi_x^m) = 1 \iff [\forall x\varphi](\pi) = 1.$$

Такой цепочкой равносильных преобразований мы показали, что

$$[\forall x\varphi](\pi) = 1 \iff [\forall y\varphi(y/x)](\pi) = 1.$$

□

## 10.3 Предварённая нормальная форма

Сейчас мы покажем, как переименование связанной переменной позволяет сделать очень важную и достаточно интересную вещь, которая называется *предварённой нормальной формой*. Дело в том, что, с точностью до эквивалентности, из формулы можно все кванторы вынести наружу.

**Определение 10.3.** Формула называется *безкванторной*, если в ней нет кванторов<sup>22</sup> (то есть, она является булевой комбинацией атомарных формул).

**Определение 10.4.** Формула называется *предварённой*, если она имеет вид

$$Q_1x_1Q_2x_2\dots Q_nx_n\varphi_0,$$

где  $\varphi_0$  — безкванторная, а  $Q_i \in \{\exists, \forall\}$ .

**Пример**  $\forall x \exists y (\neg Pxy \implies Qzx)$ .

**Контрпример**  $\neg \forall x Pxy \wedge \exists y Qzx$ .

**Теорема 10.2.** Для любой формулы  $\varphi \in \text{Fm}_\sigma$  существует (не единственная!) предварённая формула  $\varphi'$  такая, что  $\varphi \equiv \varphi'$ .

Такая  $\varphi'$  называется предварённой нормальной формой формулы  $\varphi$ .

*Доказательство.* Индукция по построению  $\varphi$ :

1.  $\varphi = Rt_1\dots t_n \implies$  положим  $\varphi' = \varphi$ .
2.  $\varphi = Qx\psi$ . По предположению индукции, у нас существует предварённая  $\psi'$  такая, что  $\psi \equiv \psi'$ , тогда  $\varphi \equiv Qx\psi \equiv Qx\psi'$  является предварённой.

<sup>22</sup>На коллоке могут попросить раскрыть это определение индуктивно.

3.  $\varphi \equiv \neg\psi$ . По предположению индукции, у нас существует предварённая  $\psi'$  такая, что  $\psi' \equiv \psi$ , где  $\psi' = Q_1x_1Q_2x_2 \dots Q_nx_n\psi_\delta$ , где  $\psi_\delta$  — безкванторная формула. Получается, что

$$\varphi \equiv \neg\psi \equiv \neg\psi' \equiv \neg Q_1x_1 \dots Q_nx_n\psi_\delta \equiv \overline{Q_1x_1} \neg Q_2x_2 \dots Q_nx_n\psi_\delta \equiv \overline{Q_1x_1} \dots \overline{Q_nx_n} \neg\psi_\delta.$$

Осталось просто положить  $\varphi' = \overline{Q_1x_1} \dots \overline{Q_nx_n} \neg\psi_\delta$ .

4.  $\varphi \equiv \psi \wedge \theta$ . По предположению индукции, у нас существуют  $\psi \equiv Q_1x_1 \dots Q_nx_n\psi_\delta$  и  $\theta \equiv Q'_1y_1 \dots Q'_my_m\theta_\delta$ , где  $\psi_\delta$  и  $\theta_\delta$  — безкванторные формулы. Пусть  $(z_1, \dots, z_n; w_1, \dots, w_m)$  — свежие (то есть, не встречающиеся в  $\varphi$ ) и различные переменные. Тогда, по теореме 10.3,

$$\varphi \equiv Q_1z_1 \dots Q_nz_n\psi_\delta(\vec{z}/\vec{x}) \wedge Q'_1w_1 \dots Q'_mw_m\theta_\delta(\vec{w}/\vec{y}) \equiv Q_1z_1 \dots Q_nz_nQ'_1w_1 \dots Q'_mw_m (\psi_\delta(\vec{z}/\vec{x}) \wedge \theta_\delta(\vec{w}/\vec{y})).$$

Осталось просто положить  $\varphi'$  равной последней формуле. □

## 11 Лекция 11

Давайте перейдем теперь к идейному содержанию построенной нами теории. Зачем нам все это нужно? Логика, по сути дела, изучает, что делает математика. В частности, нам хочется понять, что вообще с этой логикой можно делать. Давайте, например, попробуем поговорить о группах. Мы можем смотреть на группу как на некоторую структуру

$$\mathcal{G} = (A; =; +^{(2)}, -^{(1)}; 0),$$

но ведь не всякая интерпретация такой структуры является группой. Мы хотим, чтобы наша бинарная операция была ассоциативна, то есть

$$\mathcal{G} \models \forall x \forall y \forall z (x + y) + z = x + (y + z).$$

Таким образом мы получили полугруппу. Какие еще свойства должны выполняться в группе? Нам нужно, чтобы для каждого элемента существовал обратный к нему, то есть

$$\mathcal{G} \models \forall x (x + (-x) = 0).$$

Будем конструировать абелеву группу, поэтому потребуем еще и коммутативность:

$$\mathcal{G} \models \forall x (x + (-x) = 0 \wedge (-x) + x = 0).$$

Осталось сказать, что 0 является нейтральным элементом, то есть

$$\mathcal{G} \models \forall x (x + 0 = x \wedge 0 + x = x).$$

Всего этого достаточно, чтобы  $\mathcal{G}$  была группой, однако, с другой стороны, у нас получилось три формулы. И вот эти формулы являются аксиомами группы. Назовем три предложения, которые обозначают наши аксиомы, соответственно  $\varphi_{\text{ass}}$ ,  $\varphi_{\text{inv}}$  и  $\varphi_{\text{neut}}$  и рассмотрим множество

$$T = \{\varphi_{\text{ass}}, \varphi_{\text{inv}}, \varphi_{\text{neut}}\}.$$

Мы, по сути дела, сказали, что

$$\forall \text{ нормальной } \mathcal{G} \quad (\mathcal{G} \text{ — группа} \iff \forall \varphi \in T \mathcal{G} \models \varphi).$$

Нормальность значит, что символ равенства обозначает равенство в нашем привычном понимании. Поскольку любая группа удовлетворяет предложениям из  $T$ , можно сказать, что  $T$  — теория групп.

Давайте теперь подойдем с другой стороны. Рассмотрим структуру  $\mathcal{M} = (A; =; <)$ . Когда такая штука является частично упорядоченным множеством? Можем ли мы написать формулы, которые выполняются тогда и только тогда, когда она является порядком<sup>23</sup>?

**Антирефлексивность**  $\mathcal{M} \models \varphi_{\text{antireflex}} = \forall x \neg(x < x)$ ;

**Транзитивность**  $\mathcal{M} \models \varphi_{\text{transit}} = \forall x \forall y \forall z (x < y \wedge y < z \implies x < z)$ .

Утверждается, что любая нормальная  $\mathcal{M}$  является частично упорядоченным множеством  $\iff \forall \varphi \in T_{\text{ord}} = \{\varphi_{\text{antireflex}}, \varphi_{\text{transit}}\} \mathcal{M} \models \varphi$ . Что мы видим? Разные классы математических структур можно задавать просто записав множество предложений, которые выполняются тогда и только тогда, когда наша структура является тем, что мы описываем (группой, порядком).

### 11.1 Логическое (семантическое) следствие

**Определение 11.1.** Теория (в сигнатуре  $\sigma$ ) — это любое множество предложений в сигнатуре  $\sigma$ .

**Определение 11.2.**  $\mathcal{M} \models T \iff \forall \varphi \in T \mathcal{M} \models \varphi$ .

**Определение 11.3.** Теория  $T$  выполнима (или совместна)  $\iff \exists \mathcal{M} \mathcal{M} \models T$ .

**Утверждение 11.1** (антисимметричность порядка). Для любой модели  $\mathcal{M}$

$$\mathcal{M} \models T_{\text{ord}} \implies \mathcal{M} \models \forall x \forall y (x < y \wedge y < x \implies x = y).$$

*Доказательство.* Мы знаем, что  $\mathcal{M} \models \forall x \neg(x < x)$  и  $\mathcal{M} \models \forall x \forall y \forall z (x < y \wedge y < z \implies x < z)$ . Хотим, чтобы  $\mathcal{M} \models \forall x \forall y (x < y \wedge y < x \implies x = y)$ . Зафиксируем  $a, b \in M$ , тогда  $a <^{\mathcal{M}} b$  и  $b <^{\mathcal{M}} a$ . Тогда, по транзитивности,  $a <^{\mathcal{M}} a$ , а по антирефлексивности  $\neg a <^{\mathcal{M}} a$ . Получили противоречие, то есть  $\forall a, b \in M$

$$\mathcal{M} \models \neg(a <^{\mathcal{M}} b \wedge b <^{\mathcal{M}} a),$$

тогда  $\mathcal{M} \models (x < y \wedge y < x \implies x = y)(a, b)$ , потому что импликация истинна для произвольных  $a, b$ .  $\square$

В некотором смысле,  $\varphi_{\text{antisym}}$  следует из  $\varphi_{\text{antireflex}}$  и  $\varphi_{\text{transit}}$ , то есть, следует из  $T_{\text{ord}}$ .

**Определение 11.4.** Предложение  $\varphi$  логически следует из теории  $T$ , если  $\forall \mathcal{M} (\mathcal{M} \models T \implies \mathcal{M} \models \varphi)$ .

<sup>23</sup>тоже самое, что и частично упорядоченное множество.

**Обозначение**  $T \models \varphi$  (из теории  $T$  следует  $\varphi$ )

Что значит логическое следование? Оно значит, что в любой структуре, где верна теория  $T$ , верно и предложение  $\varphi$ .

Вернемся к теории групп. Выразим, что нейтральный элемент единственный. Для начала, нам потребуется выразить условие нейтральности элемента:

$$\psi = \forall y \forall x (x + y = x \wedge y + x = x) \implies y = 0.$$

Такая формула является фактом из теории групп, но как это доказать?

**Утверждение.**  $T_{gp} \models \psi$  ( $\iff \forall$  нормальной  $\mathcal{M}$  ( $\mathcal{M} \models T_{gp} \implies \mathcal{M} \models \psi$ )).

*Доказательство.* Нам дано, что у нас есть нормальная структура  $\mathcal{M}$  и  $\mathcal{M} \models T_{gp}$ , то есть

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &\models \varphi_{\text{ass}}, \\ \mathcal{M} &\models \varphi_{\text{inv}}, \\ \mathcal{M} &\models \varphi_{\text{neut}}. \end{aligned}$$

□

*Доказательство.* Зафиксируем  $b \in M$  и допустим, что  $\mathcal{M} \models (\forall x (x + y = x \wedge y + x = x))(b)$ . Мы хотим, чтобы  $b = 0^{\mathcal{M}}$ . Рассуждаем как в обычной математике. Нам нужно подставить в качестве  $x$   $0^{\mathcal{M}}$ , тогда

$$0^{\mathcal{M}} + b = 0^{\mathcal{M}},$$

но из  $\varphi_{\text{neut}}$  мы знаем, что  $0^{\mathcal{M}} + z = z$ , тогда

$$0^{\mathcal{M}} + b = 0^{\mathcal{M}} = b.$$

□

Давайте напоследок введем еще одну теорию, которая нам понадобится — теория DLO<sup>24</sup>:

$$\text{DLO} = T_{\text{ord}} \cup \{\forall x \forall y (x < y \vee y < x \vee x = y), \forall x \forall y (x < y) \implies \exists z (x < z \wedge z < y), \forall x \exists y x < y, \forall x \exists y y < x\}.$$

Наш DLO отличается от общепринятого DLO отсутствием наибольшего и наименьшего элементов. Для любой нормальной  $\mathcal{M}$  ( $\mathcal{M} \models \text{DLO} \iff \mathcal{M}$  — плотный линейный порядок без максимума и минимума).

**Примеры**  $(\mathbb{R}, <) \models \text{DLO}$ ;  $(\mathbb{Q}, <) \models \text{DLO}$ ;  $(\mathbb{R} \cap (0, 1), <) \models \text{DLO}$ .

**Контрпримеры**

- $(\mathbb{N}, <) \not\models \text{DLO}$  — присутствует минимум;
- $(\mathbb{Z}, <) \not\models \text{DLO}$  — нет максимума и минимума, но порядок не плотный;
- $(\mathbb{R} \cap [0, 1], <) \not\models \text{DLO}$  — присутствует и минимум, и максимум.

## 11.2 Теорема компактности (без доказательства)

До сих пор мы рассматривали примеры, в которых логика нам не давала ничего кроме лишних мучений. Рассмотрим следующее утверждение:

**Утверждение.** Предположим, что мы знаем, что какая-то формула логически следует из теории (т.е.  $T \models \varphi$ ), всегда ли существует конечное подмножество  $T' \subseteq T$  такое, то  $T' \models \varphi$ ?

Учитывая тот факт, что теория может быть бесконечной, такое утверждение сложно доказать. Тем не менее, оно верно и называется *теоремой о компактности*. Выглядит оно может быть и не очень презентабельно, но из него следует куча всяких вещей. Например, мы можем с вами доказать, что не существует теории, которая имеет модели сколь угодно большой конечной мощности, но не имеет бесконечной модели. Пока мы просто поверим в эту теорему, а потом ее докажем.

**Утверждение 11.2.** Можем ли мы придумать такую теорию  $T_{\text{fin}}$ , что для любой нормальной  $\mathcal{M}$  ( $\mathcal{M} \models T_{\text{fin}} \iff \mathcal{M}$  бесконечно)?

*Доказательство.* Поскольку теорию выбираем мы, то и сигнатуру выбираем тоже мы. Пусть в  $\sigma$  есть равенство « $=$ » и есть различные константы  $\{c_0, c_1, c_2, \dots\} \sim \mathbb{N}$ . Определим формулу  $\text{Diff}_n(\vec{c})$ , которая говорит, что  $n$  элементов попарно не равны, индуктивно:

<sup>24</sup>Dense Linear Order.

$k = 2$ :  $\text{Diff}_2(c_0, c_1) \equiv \neg x_1 = x_2$ ;

$k = n + 1$ :  $\text{Diff}_{n+1}(c_0, \dots, c_n) \equiv \text{Diff}_n \wedge \bigwedge_{i=0}^n \neg c_{n+1} = c_i$ .

Положим  $T_{\text{fin}} = \{\exists x_0 \exists x_1 \text{Diff}_2(x_0, x_1), \exists x_0 \exists x_1 \exists x_2 \text{Diff}_3(x_0, x_1, x_2), \dots, \exists x_0 \dots \exists x_n \text{Diff}_{n+1}(x_0, \dots, x_n), \dots\}$ . Если в какой-то структуре данная теория верна, то структура автоматически является бесконечной, то есть

$\mathcal{M} \models T_{\text{fin}} \implies \text{Для любого } n \text{ в } M \text{ есть } n \text{ попарно различных элементов} \implies M \text{ бесконечна.}$

Обратно, допустим, что  $M$  бесконечно, тогда  $\forall n$  в  $M$  можно найти  $n$  различных элементов для любого  $n$ , тогда  $\forall n \mathcal{M} \models \exists x_1 \dots \exists x_n \text{Diff}_n(x_1, \dots, x_n) \implies \mathcal{M} \models T_{\text{fin}}$ .  $\square$

И так, мы получили теорию, которая выполняется тогда и только тогда, когда структура бесконечна.

### 11.3 Невозможность аксиоматизации класса конечных нормальных структур

Докажем следующее следствие из теоремы компактности:

**Следствие 11.1.** *Если для любого конечного подмножества  $T' \subseteq T$  выполнимо, то выполнима и вся  $T$ .*

*Доказательство.* Давайте рассмотрим тождественную ложь  $\perp$ , равную любой не выполнимой формуле (например,  $\exists x(Px \wedge \neg Px)$ ).

**Замечание**  $T \models \perp \iff T$  не выполнима

*Доказательство.*  $T \models \perp \iff \forall \mathcal{M}(\mathcal{M} \models T \implies \mathcal{M} \models \perp)$ , но  $\mathcal{M} \models \perp$  не может быть истинна, отсюда  $\forall \mathcal{M} \mathcal{M} \not\models \perp \iff T$  не выполнима.  $\square$

Будем доказывать исходное утверждение от противного. Пусть  $T$  не выполнима, тогда  $T \models \perp$ . Тогда, по теореме о компактности, существует конечное  $T' \subseteq T$  такое, что  $T' \models \perp \implies T'$  не выполнимо, что противоречит утверждению.  $\square$

**Утверждение 11.3.**  $\nexists T_{\text{fin}}$  такой, что  $\forall \mathcal{M} (\mathcal{M} \models T_{\text{fin}} \iff \mathcal{M} \text{ конечна})$ .

*Доказательство.* Пусть такая теория  $T_{\text{fin}}$  есть в сигнатуре  $\sigma$ . Добавим к  $\sigma$  новые константные символы  $\{c_0, c_1, \dots\} \sim \mathbb{N}$ . Рассмотрим бесконечную теорию

$$\hat{T} = T_{\text{fin}} \cup \{\neg c_i = c_j \mid i, j \in \mathbb{N}\}.$$

Утверждается, что для любого конечного  $T' \subseteq \hat{T}$   $T'$  выполнима. Почему? Заметим, что  $T' \subseteq T_{\text{fin}} \cup \{\neg c_i = c_j \mid i, j \leq K\}$ . Рассмотрим конечное множество  $M$  мощности не меньше  $K$ . Тогда мы видим, что в структуре  $(M; =; \dots) \models T_{\text{fin}}$  так как она выполняется в любой конечной структуре. С другой стороны, мы можем сопоставить  $c_0, \dots, c_K$  какие-то элементы из  $M$ , поскольку мощность  $M$  не меньше  $K$ . Поэтому  $(M; =; \dots) \models \{\neg c_i = c_j \mid i, j \leq K\}$ . Таким образом  $T'$  выполнимо для любого конечного подмножества. Тогда, по теореме компактности,  $\hat{T}$  выполнимо  $\implies \exists \hat{\mathcal{M}} \hat{\mathcal{M}} \models \hat{T} \implies \hat{\mathcal{M}} \models T_{\text{fin}} \cup \{c_i = c_j \mid i, j \in \mathbb{N}\} \implies \hat{\mathcal{M}}$  бесконечна, но  $\hat{\mathcal{M}} \models T_{\text{fin}}$ , а мы предполагали, что любая такая модель конечна.  $\square$

Что говорит нам этот результат? Он нам говорит, что свойство «быть конечным» не может быть выражено в логике первого порядка. То есть мы с вами находим некоторые границы применимости логики первого порядка.

### 11.4 Сколемизация

Давайте рассмотрим формулу предварённую:

$$\forall x \forall y \exists z Pxyz.$$

Что значит, что  $\mathcal{M} \models \forall x \forall y \exists z Pxyz$ ? Это значит, что для любых  $a, b \in M$  найдется  $c = c(a, b)$  такое, что  $P^{\mathcal{M}}(a, b, c)$ . Рассмотрим формулу

$$\forall x \forall y \exists z x + y = z.$$

Здесь  $z$ , по сути дела, является функцией от  $x$  и  $y$ . Мы можем эту функцию некоторым образом сделать явной. Для этого нам нужно преобразовать формулу:

$$\forall x \forall y \exists z Pxyz \rightsquigarrow \forall x \forall y Pxy(fxy),$$

где  $f$  — ранее не встречавшийся функциональный символ. Мы помним, что формула

$$\varphi(t/x) \implies \exists x \varphi$$



общезначима, если  $t\text{-}x\text{-}\varphi$ . Значит, в предположении, что подстановка корректна (в данном случае она корректна, потому что в формуле нет кванторов по  $x$  и  $y$ ), формула

$$Pxy(fxy) \implies \exists z Pxyz$$

общезначима. Отсюда, в свою очередь, следует, что формула

$$\forall x \forall y Pxy(fxy) \implies \forall x \forall y \exists z Pxyz$$

общезначима. То есть, по сути дела из формулы

$$\forall x \forall y Pxy(fxy)$$

следует формула

$$\forall x \forall y \exists z.$$

А наоборот? Наоборот, конечно же, нет, ведь в этой формуле  $f$  вообще не упоминалась. Поэтому, если такая формула истинна в какой-то структуре, то совершенно не обязательно, что в той же структуре будет истинна формула  $\forall x \forall y Pxy(fxy)$ , потому что не понятно, что такое  $f$ . Тем не менее, мы можем  $f$  как-то проинтерпретировать и подобрать значения таким образом, что это будет функция, которая по любым  $x, y$  выбирает  $z$ . Тогда мы получим равносильность.

Рассмотрим следующую формулу в предположении, что в ней нет фиктивных кванторов:

$$\exists w \forall x \forall y \exists z \forall u \exists v \varphi \rightsquigarrow \forall x \forall y \exists z \forall u \exists v \varphi(c/w) \rightsquigarrow \forall x \forall y \forall u \exists v \varphi(c/w, fxy/z) \rightsquigarrow \forall x \forall y \forall u \varphi(c/w, fxy/z, gxyu/v),$$

что можно сказать про такую формулу? Если считать, что  $\varphi$  безкванторная, то у нас получилась формула, в которой нет кванторов существования. Утверждается, что исходная формула выполнима тогда и только тогда, когда выполнима формула, которая получается в результате этих шагов. Ну и на каждом шаге сохраняется выполнимость. Вообще говоря, формулы не эквивалентны, но они равновыполнимы.

Содержательно, мы уже проговаривали, почему это так. Ну действительно, если выполнима формула

$$\forall x \forall y \exists z Pxyz,$$

то где-то, в какой-то структуре, для любых  $x$  и  $y$  находится значение  $z$ . Добавим к сигнатуре символ  $f$  и проинтерпретируем его функцией (которая должна существовать в силу аксиомы выбора) которая каждому  $x$  и  $y$  ставит в соответствие подходящий  $z$ . Такая процедура называется *сколемизацией*.

**Формально** У нас есть отношение  $\rightarrow_S$ , устроенное следующим образом:

$$\forall \vec{x} \exists y \varphi \rightarrow_S \forall \vec{x} \varphi(f\vec{x}/y).$$

При этом, мы предполагаем, что формула  $\forall \vec{x} \exists y \varphi$  является предварённой.

**Определение 11.5.** Предварённая формула  $\varphi'$  называется *сколемовской нормальной формой* формулы  $\varphi$ , если

1. В  $\varphi'$  нет квантора  $\exists$ ;
2.  $\varphi \rightarrow_S \varphi_1 \rightarrow_S \dots \rightarrow_S \varphi_n \rightarrow_S \varphi'$  (обозн.  $\varphi \twoheadrightarrow_S \varphi'$ ).

**Утверждение 11.4.** Если  $\varphi \twoheadrightarrow_S \varphi'$ , то  $\varphi$  выполнима  $\iff \varphi'$  выполнима.

## 12 Лекция 12

### 12.1 Обобщение логического следования и выполнимости на теории со свободными переменными

Мы хотим понять, верно ли, что нам достаточно тех предложений, которые содержатся в теории  $T$ , чтобы выполнялось  $\varphi$ ? Иначе говоря, мы хотим понять, следует ли из нашего набора аксиом какое-нибудь утверждение. На прошлой лекции мы доказывали, что в теории порядка из аксиом антирефлексивности и транзитивности следует антисимметричность. Теперь мы хотим найти способ автоматически (или полуавтоматически) получать все следствия нашей теории. Хотя у нас и нет разрешающего алгоритма для этой задачи, тем не менее, есть полурешающий алгоритм, который позволяет перечислить все следствия нашей теории (механическим путем получить все теоремы).

Как же это сделать? Прежде всего, нам потребуется сделать следующее обобщение:

**Определение 12.1** (логическое следование). Пусть  $\Gamma \subseteq \text{Fm}_\sigma$  и  $\varphi \in \text{Fm}_\sigma$ . Тогда  $\Gamma \models \varphi \iff \forall \mathcal{M} \forall \pi (\forall \mathcal{G} \in \Gamma: [\mathcal{G}]_{\mathcal{M}}(\pi) = 1 \implies [\varphi]_{\mathcal{M}}(\pi) = 1)$ . Условие  $\forall \mathcal{G} \in \Gamma: [\mathcal{G}]_{\mathcal{M}}(\pi) = 1$  равносильно  $[\Gamma]_{\mathcal{M}}(\pi) = 1$ .

Понятно, что если мы возьмем в качестве  $\Gamma$  теорию, а в качестве  $\pi$  — предложение, то получится ровно тоже самое, что мы сформулировали на прошлой лекции.

### 12.2 Сведение задачи установления логического следования к проверке выполнимости

**Утверждение 12.1.**  $\Gamma \models \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$  не выполнимо.

Это утверждение несколько похоже на выражение общезначимости через выполнимость.

*Доказательство.*  $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$  не выполнимо  $\implies \neg \exists \mathcal{M} \exists \pi ([\Gamma]_{\mathcal{M}}(\pi) = 1 \wedge [\neg\varphi]_{\mathcal{M}}(\pi) = 1) \iff \forall \mathcal{M} \forall \pi (\neg[\Gamma]_{\mathcal{M}}(\pi) = 1 \vee \neg[\neg\varphi]_{\mathcal{M}}(\pi) = 1)$ . Вспомним, что  $\neg\alpha \vee \neg\varphi \equiv \alpha \implies \neg\beta$ , тогда  $\forall \mathcal{M} \forall \pi (\neg[\Gamma]_{\mathcal{M}}(\pi) = 1 \vee \neg[\neg\varphi]_{\mathcal{M}}(\pi) = 1) \iff \forall \mathcal{M} \forall \pi ([\Gamma]_{\mathcal{M}}(\pi) = 1 \implies \neg[\neg\varphi]_{\mathcal{M}}(\pi) = 1) \iff \forall \mathcal{M} \forall \pi ([\Gamma]_{\mathcal{M}}(\pi) = 1 \implies [\varphi]_{\mathcal{M}}(\pi) = 1) \iff \Gamma \models \varphi$ .  $\square$

**Простыми словами** Что означает, что из  $\Gamma$  следует  $\varphi$ ? Значит, во всякой структуре, при любой оценке, если верно  $\Gamma$ , то верно и  $\varphi$ . Значит, не существует такой структуры, где  $\Gamma$  было бы верно, а  $\varphi$  верно не было бы.

**Следствие 12.1.**  $\Gamma \models \perp \iff \Gamma$  не выполнима

*Доказательство.*  $\Gamma \models \perp \iff \Gamma \cup \{\neg\perp\}$  не выполнимо. Но ведь отрицание тождественной лжи — тождественная истина. Но когда выполнима  $\Gamma$  и тождественная истина? Ну тогда, когда выполнима  $\Gamma$ , то есть, из  $\Gamma$  следует тождественная ложь тогда и только тогда, когда у  $\Gamma$  нет модели.  $\square$

**Вывод** Проверка логического следования сводится к проверке выполнимости.

### 12.3 Сколемизация: теорема о сохранении равновыполнимости

Тут повторяются все определения и примеры про сколемизацию с прошлой лекции, так что я решил не писать их еще раз.

**Определение 12.2.**  $\Gamma$  выполнимо  $\iff \exists \mathcal{M} \exists \pi [\Gamma]_{\mathcal{M}}(\pi) = 1$ .

**Определение 12.3.** Множества формул  $\Gamma$  и  $\Delta$  равновыполнимы  $\iff (\Gamma \text{ выполнимо} \iff \Delta \text{ выполнимо})$ .

**Утверждение 12.2.** Для любой предварённой формулы  $\varphi$  такой, что она не содержит фиктивных кванторов, существует сколемовская нормальная форма  $\psi$  такая, что  $\varphi \rightarrow_S \psi$ .

*Доказательство.* Применим алгоритм сколемизации и заметим, что кванторов у нас конечное число, поэтому алгоритм точно остановится.  $\square$

**Теорема 12.1** (о сколемизации). Пусть  $\Gamma \subseteq \text{Fm}$  и  $\varphi \rightarrow_S \psi$ . Тогда  $\Gamma \cup \{\varphi\}$  и  $\Gamma \cup \{\psi\}$  равновыполнимы.

Что это означает? Это означает, что у нас было какое-то множество формул (хочется сказать теорий, но в нашем множестве могут быть свободные переменные), мы взяли оттуда одну формулу и подвергли ее сколемизации. Тогда то, что получилось, равновыполнимо с исходным множеством.

*Доказательство.* Раз у нас была сколемизация, то  $\varphi = \forall \vec{x} \exists y \theta$ , а  $\psi = \forall \vec{x} \theta(f\vec{x}/y)$ , где  $f$  «свежая», то есть, в частности,  $f$  не встречается в  $\Gamma$ . Сделаем несколько наблюдений:

1. В формуле  $\exists y\theta$  нет кванторов по  $\vec{x}$  (иначе в  $\varphi$  есть фиктивный квантор)  $\implies f\vec{x}-y-\theta$ , ну а раз подстановка корректная, то формула  $\theta(f\vec{x}/y) \implies \exists y\theta$  общезначима. Поскольку формула общезначима, то, по факту с семинара, формула  $\forall \vec{x}\theta(f\vec{x}/y) \implies \forall \vec{x}\exists y\theta$  также общезначима. Вспомним про определение  $\varphi$  и  $\psi$ , и заметим, что  $\psi \implies \varphi$ , то есть, в любой структуре, где верно  $\psi$ , верно и  $\varphi$ . Тогда если  $\exists \mathcal{M} \exists \pi$  такие, что  $[\Gamma \cup \{\psi\}]_{\mathcal{M}}(\pi) = 1$ , то  $[\Gamma \cup \{\varphi\}]_{\mathcal{M}}(\pi) = 1$ . Значит, если  $\Gamma \cup \{\psi\}$  выполнима, то  $\Gamma \cup \{\varphi\}$  выполнима.

2. Допустим, что  $\Gamma \cup \{\forall \vec{x}\exists y\theta\}$  выполнима. Тогда  $\exists \mathcal{M} \exists \pi$  ( $[\Gamma]_{\mathcal{M}}(\pi) = 1$  и  $[\forall \vec{x}\exists y\theta]_{\mathcal{M}}(\pi) = 1$ ). Заметим, что

$$[\forall \vec{x}\exists y\theta]_{\mathcal{M}}(\pi) = 1 \iff \forall \vec{a} \in M \exists b \in M [\theta]_{\mathcal{M}}(\pi_{\vec{x}}^{\vec{a}} b) = 1.$$

Теперь рассмотрим  $\mathcal{M}' = (\mathcal{M}, f^{\mathcal{M}})$  (мы расширили структуру, добавив<sup>25</sup> в нее интерпретацию символа  $f$ ). Как мы можем ее расширить? Для этого нам нужно определить значение  $f^{\mathcal{M}}(\vec{a})$ . Положим его равным  $b \in M$  такому, что  $\forall \vec{a} [\theta]_{\mathcal{M}}(\pi_{\vec{x}}^{\vec{a}} b) = 1$ , то есть,  $\forall \vec{a} \in M^n [\theta]_{\mathcal{M}}(\pi_{\vec{x}}^{\vec{a}} f^{\mathcal{M}}(\vec{a})) = 1$ . Такая  $f^{\mathcal{M}}$  существует в силу аксиомы выбора. Ну вот мы взяли такую интерпретацию, дальше мы хотим посмотреть, что же будет с  $\psi$  и ее значением

$$[\forall \vec{x}\theta(f\vec{x}/y)]_{\mathcal{M}'}(\pi).$$

В старой структуре у нее вообще не было значения, потому что там у нас не интерпретировался символ  $f$ . В новой же структуре

$$[\forall \vec{x}\theta(f\vec{x}/y)]_{\mathcal{M}'}(\pi) = 1 \iff \forall \vec{a} \in M [\theta(f\vec{x}/y)]_{\mathcal{M}'}(\pi_{\vec{x}}^{\vec{a}}) = 1.$$

Докажем последнее равенство. Мы можем воспользоваться леммой 10.1 и получится, что

$$[\theta(f\vec{x}/y)]_{\mathcal{M}'}(\pi_{\vec{x}}^{\vec{a}}) = [\theta]_{\mathcal{M}'}\left(\pi_{\vec{x}}^{\vec{a}} \frac{[f\vec{x}]_{\mathcal{M}'}(\pi_{\vec{x}}^{\vec{a}})}{y}\right) = [\theta]_{\mathcal{M}'}\left(\pi_{\vec{x}}^{\vec{a}} \frac{f^{\mathcal{M}}(\vec{a})}{y}\right) \stackrel{f \text{ — свежая}}{=} [\theta]_{\mathcal{M}}\left(\pi_{\vec{x}}^{\vec{a}} \frac{f^{\mathcal{M}}(\vec{a})}{y}\right) = 1$$

Итак,  $[\varphi]_{\mathcal{M}'}(\pi) = 1$ . А что с  $\Gamma$ ? В  $\Gamma$  ничего не изменится, поскольку  $f$  не встречается в  $\Gamma$ , поэтому

$$[\Gamma]_{\mathcal{M}'}(\pi) = [\Gamma]_{\mathcal{M}}(\pi) = 1.$$

Таким образом,  $[\Gamma \cup \{\varphi\}]_{\mathcal{M}'}(\pi) = 1$ , то есть  $\Gamma \cup \{\psi\}$  выполнима. □

## 12.4 Исчисление резолюций

### 12.4.1 Правила резолюции и подстановки

Введем два *правила вывода*. Что это вообще такое? Мы не даем общее понятие, но это, своего рода, функции на формулах.

**Правило резолюции** Если есть формулы  $\neg A \vee B$  и  $A \vee C$ , разрешается получить формулу  $B \vee C$ . В логике это записывается следующим образом:

$$\frac{\neg A \vee B \quad A \vee C}{B \vee C}.$$

Частный случай:

$$\frac{\neg A \quad A}{\perp}.$$

**Утверждение 12.3** (корректность правила резолюции).  $\forall \mathcal{M} \forall \pi$  если  $[\neg A \vee B]_{\mathcal{M}}(\pi) = 1$  и  $[A \vee C]_{\mathcal{M}}(\pi) = 1$ , то  $[B \vee C]_{\mathcal{M}}(\pi) = 1$ .

Другими словами, формула  $((\neg A \vee B) \wedge (A \vee C)) \implies (B \vee C)$  общезначима.

*Доказательство.* Пусть  $[\neg A \vee B]_{\mathcal{M}}(\pi) = 1$  и  $[A \vee C]_{\mathcal{M}}(\pi) = 1$ , тогда Заметим, что на всех наборах, на которых

$[A]_{\mathcal{M}}(\pi)$	$[B]_{\mathcal{M}}(\pi)$	$[C]_{\mathcal{M}}(\pi)$	$[\neg A \vee B]_{\mathcal{M}}(\pi) = 1 \wedge [A \vee C]_{\mathcal{M}}(\pi) = 1$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

истинны наши формулы, истинна либо  $B$ , либо  $C$ , поэтому

$$[\neg A \vee B]_{\mathcal{M}}(\pi) = 1 \wedge [A \vee C]_{\mathcal{M}}(\pi) = 1 \implies [B \vee C]_{\mathcal{M}}(\pi) = 1$$

вне зависимости от  $A$ . □

**Определение 12.4.** *Универсальной формулой* называется формула вида  $\forall \vec{x}\varphi_0$ , где  $\varphi_0$  — безкванторная.

<sup>25</sup>Такая операция называется *обогащением* структуры  $\mathcal{M}$ .

**Правило подстановки** Если  $A$  универсальная, то из  $\forall y A$  разрешается получить формулу  $A(t/y)$ , где  $t$  — любой терм.

Не требуется, чтобы подстановка была корректной. То есть, мы можем в универсальную формулу подставить любой терм. Символически это правило записывают так:

$$\frac{\forall y A}{A(t/y)},$$

где  $A$  — универсальная.

**Утверждение 12.4** (Корректность правила подстановки). Пусть  $A$  — универсальная, тогда  $\forall \mathcal{M} \forall \pi$  если  $[\forall y A]_{\mathcal{M}}(\pi) = 1$ , то  $[A(t/y)]_{\mathcal{M}}(\pi) = 1$ .

*Доказательство.*  $A = \forall \vec{x} A_0$ , где  $A_0$  — безкванторная. Нам дано, что  $[\forall y \forall \vec{x} A_0]_{\mathcal{M}}(\pi) = 1$ , это равносильно тому, что  $\forall a \in M \forall \vec{b} \in M^n [A_0](\pi_{\vec{y}}^a \vec{b}) = 1$ . А теперь сделаем следующий фокус: мы же можем переставлять одноименные кванторы местами ( $\forall u \forall v \varphi \equiv \forall v \forall u \varphi$ ), поэтому

$$\forall a \in M \forall \vec{b} \in M^n [A_0](\pi_{\vec{y}}^a \vec{b}) = 1 \iff \forall \vec{b} \in M^n \forall a \in M [A_0](\pi_{\vec{y}}^a \vec{b}) = 1$$

Мы хотим, чтобы

$$[A(t/y)]_{\mathcal{M}}(\pi) = 1 \iff [\forall \vec{x} A_0(t/y)]_{\mathcal{M}}(\pi) = 1.$$

Когда эта штука равна 1? Ну тогда и только тогда, когда  $\forall \vec{b} \in M^n [A_0(t/y)]_{\mathcal{M}}(\pi_{\vec{x}}^{\vec{b}}) = 1$ , но у нас  $A_0$  безкванторная, значит совершенно любой терм  $t-y-A_0$ , потому что там некому связать переменные из терма  $t$ . Значит, по лемме 10.1,

$$[\forall \vec{x} A_0(t/y)]_{\mathcal{M}}(\pi) = 1 \iff [A_0]_{\mathcal{M}} \left( \pi_{\vec{x} \ y}^{\vec{b} \ [t](\pi_{\vec{x}}^{\vec{b}})} \right).$$

Для любого  $\vec{b}$  положим  $a = [t](\pi_{\vec{x}}^{\vec{b}})$ , тогда  $\forall \vec{b} \in M^n [A_0](\pi_{\vec{x} \ y}^{\vec{b} \ [t](\pi_{\vec{x}}^{\vec{b}})}) = 1$  потому что  $\pi_{\vec{x} \ y}^{\vec{b} \ a} = \pi_{\vec{y} \ \vec{x}}^a \vec{b}$  в силу того, что переменные  $\vec{x}$  и  $y$  различаются. Ну все, мы получили, что

$$[A_0]_{\mathcal{M}} \left( \pi_{\vec{x} \ y}^{\vec{b} \ [t](\pi_{\vec{x}}^{\vec{b}})} \right) = 1 \iff [A(t/y)]_{\mathcal{M}}(\pi) = 1.$$

□

#### 12.4.2 Выводимость в ИР

**Исчисление резолюций** Будем говорить неформально, пусть  $\Gamma \vdash_{\text{ИР}} \varphi$  (читается как « $\varphi$  выводится из  $\Gamma$  в исчислении резолюций»), это равносильно тому, что  $\varphi$  можно получить из формул в  $\Gamma$ , применяя к ним правила резолюции и правила подстановки конечное число раз.

**От автора** К сожалению, у меня больше нет ни сил, ни времени, чтобы дотехать конспект лекции по дискре, поэтому сорри, дальше нужно только смотреть лекции (продолжение текущей лекции начинается на 1:24:00)