Математический анализ, Коллоквиум 4

Балюк Игорь
@lodthe, GitHub

Дата изменения: 2020.05.02 в 11:29

Содержание

Оригинальный список вопросов
Огромное спасибо Егору Косову: документ состоит из его конспектов и моих вставок.

1 Метрические и нормированные пространства.

Оригинальный конспект.

Определение. Пусть X — множество. Функция $d : X \times X \to [0; +\infty)$ называется метрикой, если

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x) \forall x, y \in X$;
3. $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z) \forall x, y, z \in X$.

Пара (X, d) называется метрическим пространством.

Говоря простым языком, метрика — это расстояние между двумя объектами. Мы будем часто работать с Евклидовой метрикой: пусть $x, y \in \mathbb{R}^n$, тогда $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$.

Определение. Пусть X — линейное пространство. Функция $\|\cdot\| : X \to [0; +\infty)$ называется нормой, если

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0$;
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall x \in X$;
3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \forall x, y \in X$.

Пара $(X, \|\cdot\|)$ называется нормированным пространством.

Нормой является привычнам нам длина вектора. Аналогично матрике, мы будем часто работать с Евклидовой нормой: пусть $x \in \mathbb{R}^n$, тогда $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.
Всякое нормированное пространство является метрическим с метрикой $d(x, y) = \|x - y\|$.

Определение. Пусть X — линейное пространство. Функция $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ называется скалярным произведением, если для всех $x, y, z \in X$ и всех $a, b \in \mathbb{R}$ выполнены следующие условия:

1. $\langle x, x \rangle \geqslant 0$ и $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$;
2. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;
3. $\langle ax + by, z \rangle = a\langle x, z \rangle + b\langle y, z \rangle$.

Линейное пространство X со скалярным произведением называется Евклидовым.

Мы будем часто работать со следующим скалярным произведением: пусть $x, y \in \mathbb{R}^n$, тогда $\langle x, y \rangle = x_1 \cdot y_1 \ldots x_n \cdot y_n$.

Лемма. (Неравенство Коши-Буняковского) Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скалярное произведение на линейном пространстве X, тогда $\forall x, y \in X$

$$|\langle x, y \rangle| \leqslant \sqrt{\langle x, x \rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y \rangle}.$$