

Второй коллоквиум по МА-2

Денис Козлов
[Telegram](#)

Версия от 17.12.2020 16:12

0.1

0.2

0.3

0.4

0.5

0.6

0.7

0.8

0.9

0.10

0.11

0.12

0.13

0.14

0.15

0.16

0.17

0.18

0.19

0.20

0.21

0.22

0.23

0.24

0.25

0.26

0.27

0.28

0.29

0.30

0.31 Сформулируйте свойство непрерывности интеграла (о предельном переходе под знаком интеграла).

Теорема. Пусть все функции f_n ограничены и интегрируемы на D , а также $f_n \Rightarrow f$ на D . Тогда функция f будет интегрируема на D и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_D f_n(x) dx = \int_D f(x) dx.$$

0.32 Сформулируйте свойство аддитивности интеграла.

Теорема. Пусть D — жорданово множество, а функция f — ограничена и интегрируема на D . Пусть A и B это дизъюнктные (непересекающиеся) жордановы подмножества D . Тогда:

$$\int_{A \sqcup B} f(x) dx = \int_A f(x) dx + \int_B f(x) dx.$$

0.33 Как вводится понятие заряда на кольце множеств? Покажите, что для заряда справедлива формула включения-исключения.

Определение. Функция ν , определенная на некотором кольце множеств, называется зарядом, если

- а) $\nu(\emptyset) = 0$;
- б) $\nu(A \sqcup B) = \nu(A) + \nu(B)$ (аддитивность).

Таким образом, мера — это неотрицательный заряд.

Пример. Пусть f это ограниченная интегрируемая функция на множестве D . В силу свойства аддитивности интеграла имеем

$$\nu(A) = \int_A f(x) dx.$$

Теорема. Для заряда справедлива формула включений-исключений:

$$\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B) - \nu(A \cap B).$$

Доказательство. Заметим, что $A \cup B = A \sqcup (B \setminus A)$ и $B = (B \setminus A) \sqcup (A \cap B)$.

- С одной стороны имеем

$$\nu(A \cup B) = \nu(A \sqcup (B \setminus A)) = \nu(A) + \nu(B \setminus A).$$

- С другой стороны имеем

$$\nu(A) + \nu(B) - \nu(A \cap B) = \nu(A) + \nu((B \setminus A) \sqcup (A \cap B)) - \nu(A \cap B) = \nu(A) + \nu(B \setminus A) + \nu(A \cap B) - \nu(A \cap B) = \nu(A) + \nu(B \setminus A).$$

То есть оба выражения равны $\nu(A) + \nu(B \setminus A)$, из чего делаем вывод:

$$\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B \setminus A) = \nu(A) + \nu(B) - \nu(A \cap B).$$

■

0.34
0.35
0.36
0.37
0.38
0.39
0.40
0.41
0.42
0.43
0.44
0.45
0.46
0.47
0.48
0.49
0.50
0.51
0.52
0.53
0.54
0.55
0.56
0.57
0.58
0.59
0.60
0.61
0.62
0.63
0.64
0.65
0.66
0.67
0.68
0.69
0.70
0.71
0.72
0.73