

Математический Анализ 2, Коллоквиум III

Версия от 18.03.2021 12:11

Содержание

1. Собственный интеграл, зависящий от параметра. Теорема о непрерывности по параметру. Теорема о дифференцировании по параметру под знаком интеграла. Теорема об интегрировании по параметру под знаком интеграла.	3
1.1. Собственный интеграл, зависящий от параметра.	3
1.2. Теорема о непрерывности по параметру	3
1.3. Теорема о дифференцировании по параметру под знаком интеграла.	4
1.4. Теорема об интегрировании по параметру под знаком интеграла.	5
2. Равномерная сходимость семейства функций. Определение. Критерий Коши равномерной сходимости. .	5
2.1. TBD	5
3. Свойства равномерно сходящегося семейства функций. Теорема о предельном переходе. Теорема о непрерывности по параметру. Теорема об интегрировании по параметру. Теорема о дифференцировании по параметру.	5
3.1. Теорема о предельном переходе	5
3.2. Теорема о непрерывности по параметру	6
3.3. Теорема об интегрировании по параметру	6
3.4. Теорема о дифференцировании по параметру	7
4. Равномерная сходимость несобственного интеграла. Определение. Критерий Коши равномерной сходимости несобственного интеграла. Мажорантный признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственного интеграла. Вторая интегральная теорема о среднем (для собственного интеграла). Признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости несобственного интеграла.	10
4.1. TBD	10
5. Свойства равномерно сходящегося несобственного интеграла. Теорема о предельном переходе под знаком несобственного интеграла. Монотонный предельный переход и теорема Дини и равномерной сходимости семейства функций. Следствие из теоремы Дини о монотонном предельном переходе под знаком несобственного интеграла. Теорема о непрерывности несобственного интеграла по параметру.	10
5.1. TBD	10
6. Свойства равномерно сходящегося несобственного интеграла. Теорема о дифференцировании по параметру под знаком несобственного интеграла. Теорема о собственном интегрировании по параметру под знаком несобственного интеграла. Теорема о несобственном интегрировании по параметру под знаком несобственного интеграла.	10
6.1. TBD	10
7. Эйлеровы В- и Г- функции. Определение В-функции, ее область определения и свойства: симметричность, формула понижения, случайно натурально-значных аргументов. Формула Эйлера – Гаусса. Формула дополнения (с использованием разложения \sin в бесконечное произведение без доказательства). Связь между В- и Г- функциями.	10
7.1. TBD	10

8.	Абстрактные ряды Фурье. Пространство квадратично-интегрируемых функций \mathcal{R}_2 (определение). Скалярное произведение и норма в этом пространстве (определение). Ортогональная и ортонормированная система элементов (определение). Стандартная тригонометрическая система на $[-\pi; \pi]$, ее ортогональность и нормы элементов. Ряд в пространстве квадратично-интегрируемых функций и его сходимость (определение). Непрерывность скалярного произведения. Равенство Парсеваля.	10
8.1.	TBD	10
9.	Абстрактные ряды Фурье. Коэффициенты и ряды Фурье (определение). Коэффициенты и ряд Фурье по стандартной тригонометрической системе на $[-\pi; \pi]$. Лемма о перпендикуляре. Неравенство Бесселя. Из полноты пространства следует сходимость ряда Фурье. Ряд и частичная сумма ряда Фурье как наилучшее приближение. Полная ортогональная система (определение). Критерии полноты ортогональной системы (представимость любого элемента его рядом Фурье; равенство Парсеваля; отсутствие ненулевого элемента, ортогонального всем элементам системы).	10
9.1.	TBD	10
10.	Тригонометрический ряд Фурье. Теорема о сходимости тригонометрического ряда Фурье в среднем-квадратичном (без доказательства полноты тригонометрической системы). Представление частичной суммы ряда Фурье через ядро Дирихле. Лемма Римана. Условие Дини и теорема о поточечной сходимости ряда Фурье. Разложение \sin в бесконечное произведение.	10
10.1.	TBD	10
11.	Тригонометрический ряд Фурье. Теорема о почленном дифференцировании ряда Фурье. Теорема о связи гладкости функции и скорости убывания ее коэффициентов Фурье. Теорема о связи гладкости функции и скорости сходимости ее ряда Фурье. Теорема о полноте тригонометрической системы.	10
11.1.	TBD	10

1. Собственный интеграл, зависящий от параметра. Теорема о непрерывности по параметру. Теорема о дифференцировании по параметру под знаком интеграла. Теорема об интегрировании по параметру под знаком интеграла.

1.1. Собственный интеграл, зависящий от параметра.

Определение. Собственным интегралом, зависящем от параметра, будем называть интеграл вида

$$F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx,$$

где α и β это некие функции, определенные для y из некоторого отрезка $[c; d]$.

Часто α и β являются константами и интеграл принимает следующий вид:

$$F(y) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dx.$$

1.2. Теорема о непрерывности по параметру

Теорема. Рассмотрим $G = [a; b] \times [c; d]$ и пусть функция $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывна на ограниченном замкнутом множестве, откуда следует, что она равномерно непрерывна.

Пусть α, β непрерывны на отрезке $[c; d]$, тогда функция

$$F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$$

равномерно непрерывна на $[c; d]$.

Доказательство. Докажем непрерывность.

Пусть функция f ограничена каким-то числом M .

В силу непрерывности α и β для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что из условия $|y - y_0| < \delta$ следует $|\alpha(y) - \alpha(y_0)| < \varepsilon$ и $|\beta(y) - \beta(y_0)| < \varepsilon$.

В силу равномерной непрерывности f для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что из условия $|y - y_0| < \delta$ следует $|f(x, y) - f(x, y_0)| < \varepsilon$.

Воспользуемся этим:

$$\begin{aligned} |F(y) - F(y_0)| &= \left| \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx - \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y_0) dx \right| \\ &\quad \left[- \text{прибавим и вычтем член } \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y) dx \right] \\ &= \left| \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx - \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y) dx + \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y) dx - \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y_0) dx \right| \\ &\leq \left| \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx - \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y) dx \right| + \left| \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y) dx - \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y_0) dx \right| \\ &\quad [- \text{оценим слагаемое с модулем интеграла как интеграл модуля}] \\ &\leq \left| \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx - \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y) dx \right| + \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} |f(x, y) - f(x, y_0)| dx \\ &\quad [- \text{раскроем первое слагаемое; для понимания представьте, что } \alpha(y) < \alpha(y_0) < \beta(y_0) < \beta(y)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_{\alpha(y)}^{\alpha(y_0)} f(x, y) dx + \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x, y) dx \right| + \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} |f(x, y) - f(x, y_0)| dx \\
&\leq \int_{\alpha(y)}^{\alpha(y_0)} \underbrace{|f(x, y)|}_{\leq M} dx + \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} \underbrace{|f(x, y)|}_{\leq M} dx + \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \underbrace{|f(x, y) - f(x, y_0)|}_{\leq \varepsilon} dx \\
&\leq (\alpha(y_0) - \alpha(y)) \cdot M + (\beta(y) - \beta(y_0)) \cdot M + (\beta(y_0) - \alpha(y_0)) \cdot \varepsilon \\
&= 2 \cdot \varepsilon \cdot M + (\beta(y) - \alpha(y)) \cdot \varepsilon = \varepsilon',
\end{aligned}$$

то есть выбирая $\delta > 0$ мы можем сделать так, что $|F(y) - F(y_0)| < \varepsilon'$ для любого $\varepsilon' > 0$. ■

Теперь немного о том, зачем нам эта теорема. Если вместо отрезка $[c; d]$ рассмотреть $[c; +\infty)$, то утверждение из теоремы остается верным и из равномерной непрерывности $f(x, y)$ на $[a; b] \times [c; +\infty)$ следует

$$\exists \lim_{y \rightarrow +\infty} F(y) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \lim_{y \rightarrow +\infty} f(x, y) dx.$$

1.3. Теорема о дифференцировании по параметру под знаком интеграла.

Для простоты изложения будем рассматривать $a = \alpha(y)$ и $b = \beta(y)$. Тогда

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx.$$

Теорема. Если f непрерывна на $G = [a; b] \times [c; d]$, а также производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ существует и непрерывна на G , то F непрерывно дифференцируема на $[c; d]$.

Причем эта производная может быть вычислена:

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx.$$

Доказательство. Необходимо доказать, что отношение стремится в пределе к интегралу:

$$D = \frac{F(y) - F(y_0)}{y - y_0} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) dx = \int_a^b \frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0} dx - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) dx.$$

По теореме о среднем (теорема Лагранжа, 1 курс) на отрезке $[y_0; y]$ найдется точка y^* такая, что

$$f(x, y) - f(x, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y^*) \cdot (y - y_0).$$

Подставим в нашу разность:

$$\begin{aligned}
|D| &= \dots = \left| \int_a^b \frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0} dx - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) dx \right| = \left| \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y^*) dx - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) dx \right| \\
&= \left| \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y^*) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) \right) dx \right| \leq \int_a^b \underbrace{\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y^*) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) \right|}_{\leq \varepsilon} dx \leq (b - a) \cdot \varepsilon.
\end{aligned}$$

Последний переход получается в силу равномерной непрерывности $\frac{\partial f}{\partial y}$ на G и того, что $|y^* - y_0| \leq |y - y_0| < \varepsilon$.

То есть мы доказали, что $\frac{F(y) - F(y_0)}{y - y_0}$ равномерно стремится к числу $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) dx$, то есть существует предел, который мы и называем производной $F'(y)$.

Непрерывность производной получается как следствие предыдущей теоремы (о непрерывности по параметру), где в роли непрерывной функции выступает $\frac{\partial f}{\partial y}$. ■

Иногда мы не можем взять какой-то интеграл, но с помощью этой теоремы мы можем взять производную интеграла, а зная производную потом найти сам интеграл.

1.4. Теорема об интегрировании по параметру под знаком интеграла.

Пусть $F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$. Мы хотим эту функцию проинтегрировать, то есть найти $\int_c^d F(y) dy$. Возникает вопрос, можно ли переставить интегралы.

Теорема. Если f непрерывна на множестве $G = [a; b] \times [c; d]$ (то есть она интегрируема на G), и выполняются следующие два пункта:

- при любом значении $y \in [c; d]$ функция $f(x, y)$ интегрируема по x , то есть существует $\int_a^b f(x, y) dx$;
- при любом значении $x \in [a; b]$ функция $f(x, y)$ интегрируема по y , то есть существует $\int_c^d f(x, y) dy$;

то эти интегралы равны друг другу, то есть

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dy dx.$$

Доказательство. Доказательство следует из теоремы Фубини о том, что повторные интегралы равны двойному интегралу по прямоугольнику:

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \iint_G f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dy dx.$$

■

Интегрирование по параметру также иногда позволяет вычислить интеграл, который по-другому вычислить невозможно.

2. Равномерная сходимость семейства функций. Определение. Критерий Коши равномерной сходимости.

2.1. TDB

3. Свойства равномерно сходящегося семейства функций. Теорема о предельном переходе. Теорема о непрерывности по параметру. Теорема об интегрировании по параметру. Теорема о дифференцировании по параметру.

3.1. Теорема о предельном переходе

Теорема (Теорем о предельном переходе).

Пусть:

- $f(x, y) \xrightarrow[x \rightarrow a]{y \in H} g(y)$
- $\forall x \in D : f(x, y) \xrightarrow{y \rightarrow b} h(x)$
- $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} c$

Тогда $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = c$

Доказательство теоремы о предельном переходе. Необходимо доказать, что $|g(y) - c|$ мала.

$$|g(y) - c| \leq |g(y) - f(x, y)| + |f(x, y) - h(x)| + |h(x) - c|$$

- $|g(y) - f(x, y)| < \frac{\varepsilon}{3}$, при $0 < |x - a| < \delta_1$, $\forall y \in H$
- $|h(x) - c| < \frac{\varepsilon}{3}$, при $0 < |x - a| < \delta_2$
- $|f(x, y) - h(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ при фиксированном x и $0 < |y - b| < \delta_3$

$$\text{Для } \delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3) : |g(y) - c| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad \blacksquare$$

3.2. Теорема о непрерывности по параметру

Теорема (Теорема о непрерывности по параметру). Пусть

- $f(x, y) \xrightarrow[x \rightarrow a]{y \in H} g(y)$
- $f(x, y)$, $\forall x \in D$ – непрерывна как функция от y в точке $y = b$

Тогда $g(y)$ – непрерывна в точке $y = b$

Доказательство теоремы о непрерывности по параметру. Необходимо доказать, что предел разности $|g(y) - g(b)|$ равен нулю.

$$|g(y) - g(b)| \leq |g(y) - f(x, y)| + |f(x, y) - f(x, b)| + |f(x, b) - g(b)|$$

- $|g(y) - f(x, y)| < \frac{\varepsilon}{3}$, при $0 < |x - a| < \delta_1$, $\forall y \in H$ (в силу условий равномерной сходимости)
- $|f(x, b) - g(b)| < \frac{\varepsilon}{3}$ – это частный случай предыдущего пункта (так как $b \in H$ по условию теоремы)
- $|f(x, y) - f(x, b)| < \frac{\varepsilon}{3}$ при фиксированном x и, в виду непрерывности $f(x, y)$ по y в точки $y = b$ (условие теоремы), $|y - b| < \delta_2$

$$\text{Для } \delta = \min(\delta_1, \delta_2) : |g(y) - g(b)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad \blacksquare$$

3.3. Теорема об интегрировании по параметру

Теорема (Теорема об интегрировании по параметру). Пусть

- Пусть H – жорданово множество
- $f(x, y)$ – ограничена на $D \times H$
- $\forall x \in D : f(x, y)$ – интегрируема по y
- $f(x, y) \xrightarrow[x \rightarrow a]{y \in H} g(y)$

$$\text{Тогда функция } g(y) \text{ интегрируема и } \int_H g(y) dy = \lim_{x \rightarrow a} \int_H f(x, y) dy$$

Доказательство теоремы об интегрировании по параметру. Сначала докажем, что функция $g(y)$ – интегрируема. Случай, когда $\mu(H) = 0$ – тривиален: любая функция интегрируема на этом множестве и интеграл равен нулю. Поэтому далее рассматриваем случай $\mu(H) \neq 0$.

Для этого воспользуемся критерием Дарбу.

Пусть $\{H_i\}$ – разбиение множества H . Тогда необходимо доказать:

$$\sum_i \sup_{y_1, y_2 \in H_i} |g(y_1) - g(y_2)| \mu(H_i) = \sum_i \omega_g(H_i) \mu(H_i) < \varepsilon, \text{ где } \mu(H_i) \text{ – мера множества } H_i.$$

$$|g(y_1) - g(y_2)| \leq |g(y_1) - f(x, y_1)| + |f(x, y_1) - f(x, y_2)| + |f(x, y_2) - g(y_2)|$$

- $|g(y_1) - f(x, y_1)| < \frac{\varepsilon}{3\mu(H)}$, при $0 < |x - a| < \delta_1$, $\forall y_1 \in H$
- $|f(x, y_2) - g(y_2)| < \frac{\varepsilon}{3\mu(H)}$, при $0 < |x - a| < \delta_2$, $\forall y_2 \in H$

Теперь перепишем сумму с учётом оценок выше для $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$:

$$\sum_i \sup_{y_1, y_2 \in H_i} |g(y_1) - g(y_2)| \mu(H_i) \leq \sum_i \frac{\varepsilon}{3\mu(H)} \mu(H_i) + \sum_i \sup_{y_1, y_2 \in H} |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \mu(H_i) + \sum_i \frac{\varepsilon}{3\mu(H)} \mu(H_i)$$

- $\sum_i \sup_{y_1, y_2 \in H} |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \mu(H_i) < \frac{\varepsilon}{3}$ по критерию Дарбу, так как $f(x, y)$ интегрируема по y при фиксированном x (условие теоремы)

Таким образом, $\sum_i \sup_{y_1, y_2 \in H_i} |g(y_1) - g(y_2)| \mu(H_i) \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \Rightarrow g$ – интегрируема по критерию Дарбу

Теперь докажем вторую часть утверждения – научимся брать интеграл от функции g .

$$\left| \int_H (g(y) - f(x, y)) dy \right| \leq \int_H |(g(y) - f(x, y))| dy$$

- $|(g(y) - f(x, y))| < \varepsilon$ при $0 < |x - a| < \delta$ и $\forall y \in H$

Следовательно, $\left| \int_H (g(y) - f(x, y)) dy \right| < \varepsilon \mu(H)$

$$\Rightarrow \int_H ((g(y) - f(x, y)) dy \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

$$\int_H f(x, y) dy = \int_H g(y) dy + \int_H ((g(y) - f(x, y)) dy \rightarrow \int_H g(y) dy$$

■

3.4. Теорема о дифференцировании по параметру

Теорема (Теорема о дифференцировании по параметру). Пусть

- H – выпуклое ограниченное множество (например: отрезок $[c, d]$)
- $\forall x \in D : f(x, y)$ – дифференцируема по $y \in H$
- $f(x, y) \xrightarrow[x \rightarrow a]{y \in H} g(y), a \in \overline{D}$
- $f'_y(x, y) \xrightarrow[x \rightarrow a]{y \in H} h(y)$

Тогда $g(y)$ – дифференцируема на множестве H и $g'(y) = h(y)$

Доказательство теоремы о дифференцировании по параметру. Сначала докажем, что $f(x, y) \xrightarrow[x \rightarrow a]{y \in H} g(y)$. Для этого воспользуемся критерием Коши: хотим доказать, что $|f(x_1, y) - f(x_2, y)| < \varepsilon$ равномерно по всем y , если только x_1 и x_2 достаточно близко к точке a лежат. Тогда будет выполнено условие Коши, а значит, что семейство $f(x, y)$ равномерно сходится к своей предельной функции g .

Возьмём какое-нибудь $y_0 \in H$, тогда:

$$|f(x_1, y) - f(x_2, y)| = |(f(x_1, y) - f(x_2, y)) - (f(x_1, y_0) - f(x_2, y_0))| + |(f(x_1, y_0) - f(x_2, y_0))|$$

Теперь зафиксируем x_1 и x_2 , тогда можем рассматривать функцию $q(y) = (f(x_1, y) - f(x_2, y))$. Так как мы из условия теоремы знаем, что $f(x, y)$ дифференцируема по $y \in H$, то и функции $q(y)$ дифференцируема по $y \in H$. Теперь необходимо применить теорему Лагранжа для функции $q(y)$. Модифицируем равенство дальше:

$$|f(x_1, y) - f(x_2, y)| = |q(y) - q(y_0)| + |q(y_0)| = [\text{Теорема Лагранжа}] = |q'(y^*)| \cdot |y - y_0| + |q(y_0)|, \text{ где } y^* \in [\min(y_0, y), \max(y_0, y)]$$

Вернёмся к записи через функцию f :

$$|f(x_1, y) - f(x_2, y)| = |f'_y(x_1, y^*) - f'_y(x_2, y^*)| \cdot |y - y_0| + |(f(x_1, y_0) - f(x_2, y_0))|$$

- По условию теоремы $f'_y(x, y) \xrightarrow[y \in H]{x \rightarrow a} h(y) \Rightarrow$, применив критерий Коши для производной можем сказать, что $|f'_y(x_1, y^*) - f'_y(x_2, y^*)| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot \text{diam}(H)}$
- $|y - y_0| < \text{diam}(H)$
- $|(f(x_1, y_0) - f(x_2, y_0))| < \frac{\varepsilon}{2}$, так как $f(x, y_0) \rightarrow g(y_0)$

Итого: $|f(x_1, y) - f(x_2, y)| < \varepsilon$

Теперь хотим доказать $\frac{f(x, y) - f(x, b)}{y - b} \Rightarrow \frac{g(y) - g(b)}{y - b}$, $b \in H, y \neq b$

Для этого давайте снова воспользуемся критерием Коши:

$$\left| \frac{f(x_1, y) - f(x_1, b)}{y - b} - \frac{f(x_2, y) - f(x_2, b)}{y - b} \right|$$

Снова введём функцию $F(y) = f(x_1, y) - f(x_2, y)$ как в первой части доказательства и снова воспользуемся для неё формулой Лагранжа. Перепишем равенство:

$$\left| \frac{f(x_1, y) - f(x_1, b)}{y - b} - \frac{f(x_2, y) - f(x_2, b)}{y - b} \right| = \left| \frac{F'(y^*) \cdot (y - b)}{y - b} \right| = |F'(y^*)|, \text{ где } y^* \in [b, y]$$

Тогда, вернувшись к записи с f получаем:

$$\left| \frac{f(x_1, y) - f(x_1, b)}{y - b} - \frac{f(x_2, y) - f(x_2, b)}{y - b} \right| = |f'_y(x_1, y^*) - f'_y(x_2, y^*)| < \varepsilon, \text{ так как по условию теоремы } f'_y(x, y) \xrightarrow[x \rightarrow a]{y \in H} h(y)$$

Теперь осталось воспользоваться теоремой о внесении предела под знак равномерной сходимости:

$$\lim_{y \rightarrow b} \frac{g(y) - g(b)}{y - b} = [\text{см. пункт 3.1 лекций}] = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} \frac{f(x, y) - f(x, b)}{y - b} = \lim_{x \rightarrow a} f'_y(x, b) = h(b) \Rightarrow g'(y) = h(y), \text{ что и требовалось доказать.} \quad \blacksquare$$

4. Равномерная сходимость несобственного интеграла. Определение. Критерий Коши равномерной сходимости несобственного интеграла. Мажорантный признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственного интеграла. Вторая интегральная теорема о среднем (для собственного интеграла). Признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости несобственного интеграла.

4.1. TBD

5. Свойства равномерно сходящегося несобственного интеграла. Теорема о предельном переходе под знаком несобственного интеграла. Монотонный предельный переход и теорема Дини и равномерной сходимости семейства функций. Следствие из теоремы Дини о монотонном предельном переходе под знаком несобственного интеграла. Теорема о непрерывности несобственного интеграла по параметру.

5.1. TBD

6. Свойства равномерно сходящегося несобственного интеграла. Теорема о дифференцировании по параметру под знаком несобственного интеграла. Теорема о собственном интегрировании по параметру под знаком несобственного интеграла. Теорема о несобственном интегрировании по параметру под знаком несобственного интеграла.

6.1. TBD

7. Эйлеровы В- и Г- функции. Определение В-функции, ее область определения и свойства: симметричность, формула понижения, случайно натурально-значных аргументов. Формула Эйлера – Гаусса. Формула дополнения (с использованием разложения \sin в бесконечное произведение без доказательства). Связь между В- и Г-функциями.

7.1. TBD

8. Абстрактные ряды Фурье. Пространство квадратично-интегрируемых функций \mathcal{R}_2 (определение). Скалярное произведение и норма в этом пространстве (определение). Ортогональная и ортонормированная система элементов (определение). Стандартная тригонометрическая система на $[-\pi; \pi]$, ее ортогональность и нормы элементов. Ряд в пространстве квадратично-интегрируемых функций и его сходимость (определение). Непрерывность скалярного произведения. Равенство Парсеваля.

8.1. TBD

9. Абстрактные ряды Фурье. Коэффициенты и ряды Фурье (определение). Коэффициенты и ряд Фурье по стандартной тригонометрической системе на $[-\pi; \pi]$. Лемма о перпендикуляре. Неравенство Бесселя. Из полноты пространства следует сходимость ряда Фурье. Ряд и частичная сумма ряда Фурье как наилучшее приближение. Полная ортогональная система (определение). Критерии полноты ортогональной системы (представимость любого элемента его рядом Фурье; равенство Парсеваля; отсутствие ненулевого элемента, ортогонального всем элементам системы).

9.1. TBD

10. Тригонометрический ряд Фурье. Теорема о сходимости тригонометрического ряда Фурье в средне-квадратичном (без доказательства полноты тригонометрической системы). Представление частичной суммы ряда Фурье через ядро Дирихле. Лемма Римана. Условие Дини и теорема о поточечной сходимости ряда Фурье. Разло-