

# Линейная алгебра, Коллоквиум II

Бобень Вячеслав

[@darkkeks](#), [GitHub](#)

Благодарность выражается Левину Александру ([@azerty1234567890](#))

и Милько Андрею ([@andrew\\_milko](#)) за видеозаписи лекций.

Дата изменения: 2020.05.23 в 16:08

2019 — 2020

“К коллоку можете даже не готовиться”.

— Роман Сергеевич Авдеев

## Содержание

<b>1</b>	<b>Определения и формулировки</b>	<b>5</b>
1.1	Сумма двух подпространств векторного пространства	5
1.2	Теорема о связи размерности суммы двух подпространств с размерностью их пересечения	5
1.3	Сумма нескольких подпространств векторного пространства	5
1.4	Линейная независимость нескольких подпространств векторного пространства	5
1.5	Разложение векторного пространства в прямую сумму подпространств	5
1.6	При каких условиях на подпространства $U_1, U_2$ векторного пространства $V$ имеет место разложение $V = U_1 \oplus U_2$ ?	5
1.7	Проекция вектора на подпространство вдоль дополнительного подпространства	5
1.8	Матрица перехода от одного базиса векторного пространства к другому	5
1.9	Формула преобразования координат вектора при замене базиса	6
1.10	Линейное отображение векторных пространств, его простейшие свойства	6
1.11	Изоморфизм векторных пространств, изоморфные векторные пространства	6
1.12	Какими свойствами обладает отношение изоморфности на множестве всех векторных пространств?	6
1.13	Критерий изоморфности двух конечномерных векторных пространств	6
1.14	Матрица линейного отображения	6
1.15	Связь между координатами вектора и его образа при линейном отображении	7
1.16	Формула изменения матрицы линейного отображения при замене базисов	7
1.17	Сумма двух линейных отображений и её матрица. Произведение линейного отображения на скаляр и его матрица	7
1.18	Композиция двух линейных отображений и её матрица	7
1.19	Ядро и образ линейного отображения. Являются ли они подпространствами в соответствующих векторных пространствах?	7
1.20	Критерий инъективности линейного отображения в терминах его ядра	8
1.21	Связь между рангом матрицы линейного отображения и размерностью его образа	8
1.22	Каким свойством обладает набор векторов, дополняющих базис ядра линейного отображения до базиса всего пространства?	8
1.23	Теорема о связи размерностей ядра и образа линейного отображения	8
1.24	К какому простейшему виду можно привести матрицу линейного отображения путём замены базисов?	8
1.25	Линейная функция на векторном пространстве	8
1.26	Сопряжённое (двойственное) векторное пространство и его размерность	8
1.27	Базис сопряжённого пространства, двойственный к данному базису исходного векторного пространства	9
1.28	Билинейная форма на векторном пространстве	9
1.29	Матрица билинейной формы	9
1.30	Формула для вычисления значений билинейной формы в координатах	9
1.31	Формула изменения матрицы билинейной формы при замене базисов	9
1.32	Симметричная билинейная форма. Критерий симметричности билинейной формы в терминах её матрицы	9
1.33	Квадратичная форма	10

1.34	Соответствие между симметричными билинейными формами и квадратичными формами . . . . .	10
1.35	Симметризация билинейной формы . . . . .	10
1.36	Поляризация квадратичной формы . . . . .	10
1.37	Матрица квадратичной формы . . . . .	10
1.38	Канонический вид квадратичной формы . . . . .	10
1.39	Нормальный вид квадратичной формы над $\mathbb{R}$ . . . . .	10
1.40	Индексы инерции квадратичной формы над $\mathbb{R}$ . . . . .	10
1.41	Закон инерции для квадратичной формы над $\mathbb{R}$ . . . . .	10
1.42	Положительно/неотрицательно определённая квадратичная форма над $\mathbb{R}$ . . . . .	10
1.43	Отрицательно/неположительно определённая квадратичная форма над $\mathbb{R}$ . . . . .	10
1.44	Неопределённая квадратичная форма над $\mathbb{R}$ . . . . .	11
1.45	Способ нахождения индексов инерции квадратичной формы над $\mathbb{R}$ , вытекающий из метода Якоби . . . . .	11
1.46	Критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы над $\mathbb{R}$ . . . . .	11
1.47	Критерий отрицательной определённости квадратичной формы над $\mathbb{R}$ . . . . .	11
1.48	Евклидово пространство . . . . .	11
1.49	Длина вектора в евклидовом пространстве . . . . .	11
1.50	Неравенство Коши–Буняковского . . . . .	11
1.51	Угол между ненулевыми векторами евклидова пространства . . . . .	12
1.52	Матрица Грама системы векторов евклидова пространства . . . . .	12
1.53	Свойства определителя матрицы Грама . . . . .	12
1.54	Ортогональное дополнение подмножества евклидова пространства . . . . .	12
1.55	Чему равна размерность ортогонального дополнения к подпространству евклидова пространства? . . . . .	12
1.56	Каким свойством обладают подпространство евклидова пространства и его ортогональное дополнение? . . . . .	12
1.57	Ортогональная проекция вектора на подпространство . . . . .	12
1.58	Ортогональная составляющая вектора относительно подпространства . . . . .	12
1.59	Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в $\mathbb{R}^n$ , заданное своим базисом . . . . .	13
1.60	Ортогональная система векторов евклидова пространства. Ортогональный базис . . . . .	13
1.61	Ортонормированная система векторов евклидова пространства. Ортонормированный базис . . . . .	13
1.62	Описание всех ортонормированных базисов евклидова пространства в терминах одного такого базиса и матриц перехода . . . . .	13
1.63	Ортогональная матрица . . . . .	13
1.64	Формула для координат вектора в ортогональном и ортонормированном базисах евклидова пространства . . . . .	13
1.65	Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в терминах его ортогонального базиса . . . . .	13
1.66	Метод ортогонализации Грама–Шмидта . . . . .	14
1.67	Теорема Пифагора в евклидовом пространстве . . . . .	14
1.68	Расстояние между векторами евклидова пространства . . . . .	14
1.69	Неравенство треугольника в евклидовом пространстве . . . . .	14
1.70	Теорема о расстоянии между вектором и подпространством в терминах ортогональной составляющей . . . . .	14
1.71	Псевдорешение несовместной системы линейных уравнений . . . . .	14
1.72	Формула для расстояния от вектора до подпространства в терминах матриц Грама . . . . .	15
1.73	$k$ -мерный параллелепипед и его объём . . . . .	15
1.74	Формула для объёма $k$ -мерного параллелепипеда в $n$ -мерном евклидовом пространстве . . . . .	15
1.75	Формула для объёма $n$ -мерного параллелепипеда в $n$ -мерном евклидовом пространстве в терминах координат в ортонормированном базисе . . . . .	15
1.76	В каком случае два базиса евклидова пространства называются одинаково ориентированными? . . . . .	15
1.77	Ориентированный объём $n$ -мерного параллелепипеда в $n$ -мерном евклидовом пространстве . . . . .	15
1.78	Свойства ориентированного объёма $n$ -мерного параллелепипеда в $n$ -мерном евклидовом пространстве . . . . .	15
1.79	Связь векторного произведения со скалярным и ориентированным объёмом . . . . .	15
1.80	Формула для вычисления векторного произведения в терминах координат в положительно ориентированном ортонормированном базисе . . . . .	16
1.81	Смешанное произведение векторов трёхмерного евклидова пространства . . . . .	16
1.82	Формула для вычисления смешанного произведения в терминах координат в положительно ориентированном ортонормированном базисе . . . . .	16
1.83	Критерий компланарности трёх векторов трёхмерного евклидова пространства . . . . .	16
1.84	Критерий коллинеарности двух векторов трёхмерного евклидова пространства . . . . .	16
1.85	Геометрические свойства векторного произведения . . . . .	16
1.86	Линейное многообразие. Характеризация линейных многообразий как сдвигов подпространств . . . . .	16
1.87	Критерий равенства двух линейных многообразий. Направляющее подпространство и размерность линейного многообразия . . . . .	16
1.88	Теорема о плоскости, проходящей через $k + 1$ точку в $\mathbb{R}^n$ . . . . .	16
1.89	Три способа задания прямой в $\mathbb{R}^2$ . Уравнение прямой в $\mathbb{R}^2$ , проходящей через две различные точки . . . . .	17
1.90	Три способа задания плоскости в $\mathbb{R}^3$ . . . . .	17
1.91	Уравнение плоскости в $\mathbb{R}^3$ , проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой . . . . .	17

1.92	Три способа задания прямой в $\mathbb{R}^3$ . . . . .	17
1.93	Уравнения прямой в $\mathbb{R}^3$ , проходящей через две различные точки . . . . .	17
1.94	Случаи взаимного расположения двух прямых в $\mathbb{R}^3$ . . . . .	17
1.95	Формула для расстояния от точки до прямой в $\mathbb{R}^3$ . . . . .	17
1.96	Формула для расстояния от точки до плоскости в $\mathbb{R}^3$ . . . . .	17
1.97	Формула для расстояния между двумя скрещивающимися прямыми в $\mathbb{R}^3$ . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Вопросы на доказательство</b> . . . . .	<b>18</b>
2.1	Подпространства . . . . .	18
2.1.1	Теорема о связи размерности суммы двух подпространств с размерностью их пересечения . . . . .	18
2.1.2	Теорема о пяти эквивалентных условиях, определяющих линейно независимый набор подпространств векторного пространства . . . . .	18
2.2	Линейные отображения . . . . .	19
2.2.1	Свойства отношения изоморфности на множестве всех векторных пространств . . . . .	19
2.2.2	Критерий изоморфности двух конечномерных векторных пространств . . . . .	20
2.2.3	Существование и единственность линейного отображения с заданными образами базисных векторов . . . . .	20
2.2.4	Связь между координатами вектора и его образа при линейном отображении . . . . .	21
2.2.5	Формула изменения матрицы линейного отображения при замене базисов . . . . .	21
2.2.6	Изоморфизм $\text{Hom}(V, W) \xrightarrow{\sim} \text{Mat}_{m \times n}(F)$ при фиксированных базисах $V$ и $W$ . . . . .	22
2.2.7	Матрица композиции двух линейных отображений . . . . .	22
2.2.8	Утверждение о том, что ядро и образ — подпространства в соответствующих векторных пространствах . . . . .	22
2.2.9	Связь между рангом матрицы линейного отображения и размерностью его образа . . . . .	23
2.2.10	Лемма о дополнении базиса ядра линейного отображения до базиса всего пространства . . . . .	23
2.2.11	Теорема о связи размерностей ядра и образа линейного отображения, приведение матрицы линейного отображения к диагональному виду с единицами и нулями на диагонали . . . . .	23
2.3	Линейные, билинейные и квадратичные формы . . . . .	24
2.3.1	Свойство базиса сопряжённого векторного пространства . . . . .	24
2.3.2	Формула для вычисления значений билинейной формы в координатах . . . . .	24
2.3.3	Существование и единственность билинейной формы с заданной матрицей . . . . .	24
2.3.4	Формула изменения матрицы билинейной формы при переходе к другому базису . . . . .	25
2.3.5	Критерий симметричности билинейной формы в терминах её матрицы в каком-либо базисе . . . . .	25
2.3.6	Соответствие между симметричными билинейными формами и квадратичными формами . . . . .	26
2.3.7	Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду . . . . .	26
2.3.8	Метод Якоби приведения квадратичной формы к каноническому виду . . . . .	26
2.3.9	Существование нормального вида для квадратичной формы над $\mathbb{R}$ . . . . .	26
2.3.10	Закон инерции . . . . .	26
2.3.11	Следствие метода Якоби о нахождении индексов инерции квадратичной формы над $\mathbb{R}$ . . . . .	27
2.3.12	Критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы, критерий отрицательной определённости квадратичной формы . . . . .	27
2.4	Евклидовы пространства . . . . .	28
2.4.1	Неравенство Коши–Буняковского . . . . .	28
2.4.2	Свойства определителя матрицы Грама системы векторов евклидова пространства . . . . .	28
2.4.3	Свойства ортогонального дополнения к подпространству в евклидовом пространстве: размерность, разложение в прямую сумму, ортогональное дополнение к ортогональному дополнению . . . . .	28
2.4.4	Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в $\mathbb{R}^n$ в терминах его произвольного базиса . . . . .	29
2.4.5	Существование ортонормированного базиса в евклидовом пространстве, дополнение ортогональной (ортонормированной) системы векторов до ортогонального (ортонормированного) базиса . . . . .	29
2.4.6	Описание всех ортонормированных базисов в терминах одного и матриц перехода . . . . .	29
2.4.7	Формула для координат вектора в ортогональном (ортонормированном) базисе. Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в терминах его ортогонального (ортонормированного) базиса . . . . .	30
2.4.8	Теорема Пифагора и неравенство треугольника в евклидовом пространстве . . . . .	30
2.4.9	Теорема о расстоянии между вектором и подпространством в терминах ортогональной составляющей . . . . .	30
2.4.10	Метод наименьших квадратов для несовместных систем линейных уравнений: постановка задачи и её решение. Единственность псевдорешения и явная формула для него в случае линейной независимости столбцов матрицы коэффициентов . . . . .	30
2.4.11	Формула для расстояния между вектором и подпространством в терминах матриц Грама . . . . .	31
2.4.12	Две формулы для объёма $k$ -мерного параллелепипеда в евклидовом пространстве . . . . .	31
2.5	Элементы аналитической геометрии и линейные многообразия . . . . .	31

2.5.1	Теорема о векторном произведении и формуле для него в координатах в положительно ориентированном ортонормированном базисе . . . . .	31
2.5.2	Критерий коллинеарности двух векторов трёхмерного евклидова пространства . . . . .	32
2.5.3	Геометрические свойства векторного произведения . . . . .	32
2.5.4	Антикоммутативность и билинейность векторного произведения . . . . .	32
2.5.5	Линейные многообразия как сдвиги подпространств . . . . .	33
2.5.6	Критерий равенства двух линейных многообразий . . . . .	33
2.5.7	Теорема о плоскости, проходящей через $k + 1$ точку в $\mathbb{R}^n$ . . . . .	33

# 1 Определения и формулировки

## 1. Сумма двух подпространств векторного пространства

Пусть  $V$  – векторное пространство над  $F$ .

$U, W \subseteq V$  – подпространства.

**Определение.** Суммой подпространств  $U, W$  называется множество

$$U + W := \{u + w \mid u \in U, w \in W\}.$$

## 2. Теорема о связи размерности суммы двух подпространств с размерностью их пересечения

**Теорема.**  $\dim(U \cap W) + \dim(U + W) = \dim U + \dim W$ .

*Пример.* Всякие две плоскости в  $\mathbb{R}^3$  (содержащие 0) имеют общую прямую.

Здесь  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $\dim U = 2$ ,  $\dim W = 2$ .

При этом  $\dim(U + W) \leq 3$ .

Тогда,  $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) \geq 2 + 2 - 3 = 1$ .

## 3. Сумма нескольких подпространств векторного пространства

Пусть  $U_1, \dots, U_k \subseteq V$  – подпространства.

**Определение.** Суммой подпространств  $U_1, \dots, U_k$  называется множество

$$U_1 + \dots + U_k = \{u_1 + \dots + u_k \mid u_i \in U_i\}.$$

**Замечание.**  $\dim(U_1 + \dots + U_k) \leq \dim U_1 + \dots + \dim U_k$ .

## 4. Линейная независимость нескольких подпространств векторного пространства

**Определение.** Подпространства  $U_1, \dots, U_k$  называются *линейно независимыми*, если  $\forall u_1 \in U_1, \dots, u_k \in U_k$  из условия  $u_1 + \dots + u_k = 0$  следует  $u_1 = \dots = u_k = 0$ .

*Пример.* Если  $\dim U_i = 1$  и  $U_i = \langle u_i \rangle \forall i$ , то  $U_1, \dots, U_k$  линейно независимы  $\iff u_1, \dots, u_k$  линейно независимы.

## 5. Разложение векторного пространства в прямую сумму подпространств

**Определение.** Говорят, что векторное пространство  $V$  разлагается в *прямую сумму*  $U_1, \dots, U_k$ , если

1.  $V = U_1 + \dots + U_k$ ,
2.  $U_1, \dots, U_k$  линейно независимы.

Обозначение:  $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k$ .

*Пример.* Если  $e_1, \dots, e_n$  – базис  $V$ , то  $V = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle e_n \rangle$

## 6. При каких условиях на подпространства $U_1, U_2$ векторного пространства $V$ имеет место разложение $V = U_1 \oplus U_2$ ?

$$V = U_1 \oplus U_2 \iff \begin{cases} V = U_1 + U_2, \\ U_1 \cap U_2 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} \dim V = \dim U_1 + \dim U_2, \\ U_1 \cap U_2 = 0. \end{cases}$$

## 7. Проекция вектора на подпространство вдоль дополнительного подпространства

**Замечание.**  $V = U_1 \oplus U_2 \implies \forall v \in V \exists! u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$ , такие что  $v = u_1 + u_2$ .

Тогда,  $u_1$  называется проекцией вектора  $v$  на  $U_1$  вдоль  $U_2$ .

Так же,  $u_2$  называется проекцией вектора  $v$  на  $U_2$  вдоль  $U_1$ .

## 8. Матрица перехода от одного базиса векторного пространства к другому

Пусть  $(e_1, \dots, e_n)$  и  $(e'_1, \dots, e'_n)$  – два базиса в  $V$ ,

$$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C,$$

при этом  $\det C \neq 0$ .

**Определение.** Матрица  $C$  называется *матрицей перехода* от базиса  $(e_1, \dots, e_n)$  к базису  $(e'_1, \dots, e'_n)$ .

**Замечание.** Матрица перехода от  $(e'_1, \dots, e'_n)$  к  $(e_1, \dots, e_n)$  – это  $C^{-1}$ .

## 9. Формула преобразования координат вектора при замене базиса

Пусть  $C$  — матрица перехода от базиса  $e = (e_1, \dots, e_n)$  к базису  $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ ,  $v \in V$ , тогда

$$\begin{aligned}v &= x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \\v &= x'_1 e'_1 + \dots + x'_n e'_n.\end{aligned}$$

**Предложение.**

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

## 10. Линейное отображение векторных пространств, его простейшие свойства

Пусть  $V, W$  — векторные пространства над  $F$ .

**Определение.** Отображение  $\varphi: V \rightarrow W$  называется *линейным*, если

1.  $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$ ,
2.  $\varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v)$ .

$\forall v_1, v_2, v \in V, \forall \lambda \in F$ .

**Простейшие свойства**

1.  $\varphi(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$ .
2.  $\varphi(-v) = -\varphi(v)$ .

## 11. Изоморфизм векторных пространств, изоморфные векторные пространства

**Определение.** Отображение  $\varphi: V \rightarrow W$  называется *изоморфизмом* если оно линейно и биективно.

Обозначение:  $\varphi: V \xrightarrow{\sim} W$ .

**Определение.** Два векторных пространства  $V, W$  называются *изоморфными*, если существует изоморфизм  $\varphi: V \xrightarrow{\sim} W$ .

Обозначается:  $V \simeq W$  (либо  $V \cong W$ ).

## 12. Какими свойствами обладает отношение изоморфности на множестве всех векторных пространств?

**Теорема.** Отношение изоморфности является отношением эквивалентности на множестве всех векторных пространств над фиксированным полем  $F$ .

## 13. Критерий изоморфности двух конечномерных векторных пространств

**Теорема.** Пусть  $V, W$  — два конечномерных векторных пространства над  $F$ .

Тогда,  $V \simeq W \iff \dim V = \dim W$ .

## 14. Матрица линейного отображения

Пусть  $V, W$  — векторные пространства над  $F$ .

$e = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ ,

$f = (f_1, \dots, f_m)$  — базис  $W$ .

Пусть  $\varphi: V \rightarrow W$  — линейное отображение.

$\forall j = 1, \dots, n$

$$\varphi(e_j) = a_{1j}f_1 + a_{2j}f_2 + \dots + a_{mj}f_m = (f_1, \dots, f_m) \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

Тогда,  $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = (f_1, \dots, f_m) \cdot A$ , где  $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{m \times n}(F)$ .

**Определение.**  $A$  называется матрицей линейного отображения  $\varphi$  в базисах  $e$  и  $f$ .

Обозначение:  $A = A(\varphi, e, f)$ .

В  $j$ -м столбце матрицы  $A$  стоят координаты вектора  $\varphi(e_j)$  в базисе  $f$ .

### 15. Связь между координатами вектора и его образа при линейном отображении

**Предложение.** Пусть  $\varphi: V \rightarrow W$  — линейное отображение,

$\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ ,

$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$  — базис  $W$ ,

$A = A(\varphi, \mathbf{e}, \mathbf{f})$ .

$v \in V \implies v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ ,

$\varphi(v) = y_1 f_1 + \dots + y_m f_m$ .

Тогда,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

### 16. Формула изменения матрицы линейного отображения при замене базисов

Пусть  $\mathbf{e}'$  — другой базис в  $V$ ,  $\mathbf{f}'$  — другой базис в  $W$ .

$\mathbf{e}' = \mathbf{e} \cdot C_{\in M_n}$ ,

$\mathbf{f}' = \mathbf{f} \cdot D_{\in M_m}$ .

$A = A(\varphi, \mathbf{e}, \mathbf{f})$ ,

$A' = A(\varphi, \mathbf{e}', \mathbf{f}')$ .

**Предложение.**  $A' = D^{-1}AC$ .

### 17. Сумма двух линейных отображений и её матрица. Произведение линейного отображения на скаляр и его матрица

Пусть  $\varphi, \psi \in \text{Hom}(V, W)$ ,  $\lambda \in F$ .

**Определение.**

1. Суммой линейных отображений  $\varphi$  и  $\psi$  называется линейное отображение  $\varphi + \psi \in \text{Hom}(V, W)$ , такое что  $(\varphi + \psi)(v) := \varphi(v) + \psi(v)$ .

2. Произведение  $\varphi$  на  $\lambda$  — это линейное отображение  $\lambda\varphi \in \text{Hom}(V, W)$ , такое что  $(\lambda\varphi)(v) := \lambda\varphi(v)$ .

Зафиксируем базисы  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  в  $V$  и  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$  в  $W$ .

**Предложение.**

1.  $\varphi, \psi \in \text{Hom}(V, W)$ ,  $A_\varphi = A(\varphi, \mathbf{e}, \mathbf{f})$

$A_\psi = A(\psi, \mathbf{e}, \mathbf{f})$

$A_{\varphi+\psi} = A(\varphi + \psi, \mathbf{e}, \mathbf{f}) \implies A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$

2.  $\lambda \in F, \varphi \in \text{Hom}(V, W)$ ,  $A_\varphi = A(\varphi, \mathbf{e}, \mathbf{f})$

$A_{\lambda\varphi} = A(\lambda\varphi, \mathbf{e}, \mathbf{f}) \implies A_{\lambda\varphi} = \lambda A_\varphi$

### 18. Композиция двух линейных отображений и её матрица

Пусть  $U \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{\varphi} W$  — цепочка линейных отображений, а  $\varphi \circ \psi: U \rightarrow W$  — их композиция,

$\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ ,

$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$  — базис  $W$ ,

$\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_k)$  — базис  $U$ .

$A_\varphi = A(\varphi, \mathbf{e}, \mathbf{f})$ ,

$A_\psi = A(\psi, \mathbf{g}, \mathbf{e})$ ,

$A_{\varphi \circ \psi} = A(\varphi \circ \psi, \mathbf{g}, \mathbf{f})$ .

Тогда,  $A_{\varphi \circ \psi} = A_\varphi \cdot A_\psi$ .

### 19. Ядро и образ линейного отображения. Являются ли они подпространствами в соответствующих векторных пространствах?

Пусть  $\varphi: V \rightarrow W$ .

**Определение.** Ядро линейной оболочки  $\varphi$  — это  $\ker \varphi := \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\} \subseteq V$ .

Образ линейного отображения  $\varphi$  — это  $\text{Im } \varphi := \varphi(V) \subseteq W$ .

**Предложение.**

1. Ядро — подпространство в  $V$ .
2. Образ — подпространство в  $W$ .

## 20. Критерий инъективности линейного отображения в терминах его ядра

Пусть  $V, W$  — векторные пространства над  $F$ ,

$\varphi: V \rightarrow W$  — линейное отображение.

**Предложение.**

- (a)  $\varphi$  инъективно  $\iff \ker \varphi = \{0\}$ ,
- (b)  $\varphi$  сюръективно  $\iff \operatorname{Im} \varphi = W$ .

## 21. Связь между рангом матрицы линейного отображения и размерностью его образа

Пусть  $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ ,

$\mathfrak{f} = (f_1, \dots, f_m)$  — базис  $W$ ,

$A = A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f})$ .

**Теорема.**  $\operatorname{rk} A = \dim \operatorname{Im} \varphi$ .

**Замечание.** Число  $\dim \operatorname{Im} \varphi$  называется *рангом* линейного отображения  $\varphi$ , обозначается  $\operatorname{rk} \varphi$ .

**Следствие.**  $\operatorname{rk} A$  не зависит от выбора пары базисов  $\mathfrak{e}$  и  $\mathfrak{f}$ .

## 22. Каким свойством обладает набор векторов, дополняющих базис ядра линейного отображения до базиса всего пространства?

**Предложение.** Пусть  $e_1, \dots, e_k$  — базис  $\ker \varphi$  и векторы  $e_{k+1}, \dots, e_n$  дополняют его до базиса всего  $V$ .

Тогда,  $\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)$  образуют базис в  $\operatorname{Im} \varphi$ .

## 23. Теорема о связи размерностей ядра и образа линейного отображения

**Теорема.**  $\dim \operatorname{Im} \varphi + \dim \ker \varphi = \dim V$ .

## 24. К какому простейшему виду можно привести матрицу линейного отображения путём замены базисов?

**Предложение.** Пусть  $\operatorname{rk} \varphi = r$ . Тогда существует базис  $\mathfrak{e}$  в  $V$  и базис  $\mathfrak{f}$  в  $W$ , такие что

$$A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}) = \left( \begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) = \begin{matrix} & \begin{matrix} r & & n-r \end{matrix} \\ \begin{matrix} r \\ m-r \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

## 25. Линейная функция на векторном пространстве

**Определение.** *Линейной функцией* (или *линейной формой*, или *линейным функционалом*) на  $V$  называется всякое линейное отображение  $\alpha: V \rightarrow F$ .

**Обозначение.**  $V^* := \operatorname{Hom}(V, F)$  — множество всех линейных функций на  $V$ .

## 26. Сопряжённое (двойственное) векторное пространство и его размерность

Из общей теории линейных отображений:

1.  $V^*$  — векторное пространство (оно называется *сопряжённым* или *двойственным*).
2. Если  $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$  — фиксированный базис в  $V$ , то есть изоморфизм  $V^* \simeq \operatorname{Mat}_{1 \times n}(F)$  (а это ни что иное, как строки длины  $n$ ).

$$\alpha \rightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

$$v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

$$\alpha(v) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n.$$

$\alpha_i = \alpha(e_i)$  — коэффициенты линейной функции  $\alpha$  в базисе  $\mathfrak{e}$ .



**Следствие.**  $\dim V^* = \dim V \implies V^* \simeq V$ .

## 27. Базис сопряжённого пространства, двойственный к данному базису исходного векторного пространства

При  $i = 1, \dots, n$  рассмотрим линейную функцию  $\varepsilon_i \in V^*$ , соответствующую строке  $(0 \dots 1 \dots 0)$ . Тогда  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  — базис  $V^*$ , он однозначно определяется условием  $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$  ( $\delta_{ij}$  — символ Кронекера)

**Определение.** Базис  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  пространства  $V^*$ , определенный условием выше, называется базисом, *двойственным* (сопряженным) к базису  $e$ .

Удобная запись условия:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} (e_1, \dots, e_n) = E.$$

## 28. Билинейная форма на векторном пространстве

Пусть  $V$  — векторное пространство над  $F$ .

**Определение.** *Билинейная форма* на  $V$  — это отображение  $\beta: V \times V \rightarrow F$ , линейное по каждому аргументу.

### Линейность по 1-му аргументу

- $\beta(x_1 + x_2, y) = \beta(x_1, y) + \beta(x_2, y) \quad \forall x_1, x_2, y \in V,$
- $\beta(\lambda x, y) = \lambda \beta(x, y) \quad \forall x, y \in V, \lambda \in F.$

### Линейность по 2-му аргументу

- $\beta(x, y_1 + y_2) = \beta(x, y_1) + \beta(x, y_2) \quad \forall x, y_1, y_2 \in V,$
- $\beta(x, \lambda y) = \lambda \beta(x, y) \quad \forall x, y \in V, \lambda \in F.$

## 29. Матрица билинейной формы

Считаем, что  $\dim V = n < \infty$ .

Пусть  $e = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ .

**Определение.** Матрицей билинейной формы  $\beta$  в базисе  $e$  называется такая матрица  $B \in M_n$ , что  $b_{ij} = \beta(e_i, e_j)$ .

Обозначение:  $B(\beta, e)$ .

## 30. Формула для вычисления значений билинейной формы в координатах

Пусть  $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ ,

$y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$ .

Тогда,

$$\beta(x, y) = (x_1, \dots, x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

## 31. Формула изменения матрицы билинейной формы при замене базисов

$B = B(\beta, e)$ .

Пусть  $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$  — другой базис  $V$ .

$e' = e \cdot C$ .

$B' := B(\beta, e')$ .

**Предложение.**  $B' = C^T B C$ .

## 32. Симметричная билинейная форма. Критерий симметричности билинейной формы в терминах её матрицы

**Определение.** Билинейная форма  $\beta$  называется *симметричной*, если  $\beta(x, y) = \beta(y, x) \quad \forall x, y \in V$ .

Пусть  $e$  — произвольный базис  $V$ .

**Предложение.**  $\beta$  симметрична  $\iff B = B^T$ .

### 33. Квадратичная форма

Пусть  $\beta: V \times V \rightarrow F$  — билинейная форма на  $V$ .

**Определение.** Отображение  $Q_\beta: V \rightarrow F$ ,  $Q_\beta(x) = \beta(x, x)$ , называется *квадратичной формой*, ассоциированной с билинейной формой  $\beta$ .

Пусть  $e$  — базис  $V$ ,  $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ ,  $B = B(\beta, e)$ .

Тогда,

$$Q_\beta(x) = (x_1 \dots x_n) B \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (b_{ij} + b_{ji}) x_i x_j.$$

### 34. Соответствие между симметричными билинейными формами и квадратичными формами

**Предложение.** Пусть в поле  $F$  выполнено условие  $1 + 1 \neq 0$  (то есть  $2 \neq 0$ ). Тогда отображение  $\beta \mapsto Q_\beta$  является биекцией между симметричными билинейными формами на  $V$  и квадратичными формами на  $V$ .

### 35. Симметризация билинейной формы

Билинейная форма  $\sigma(x, y) = \frac{1}{2} (\beta(x, y) + \beta(y, x))$  называется *симметризацией* билинейной формы  $\beta$ .

Если  $B$  и  $S$  — матрицы билинейных форм  $\beta$  и  $\sigma$  в некотором базисе, то  $S = \frac{1}{2}(B + B^T)$ .

### 36. Поляризация квадратичной формы

Симметричная билинейная форма  $\beta(x, y) = \frac{1}{2} [Q(x + y) - Q(x) - Q(y)]$  называется *поляризацией* квадратичной формы  $Q$ .

### 37. Матрица квадратичной формы

**Определение.** Матрицей квадратичной формы  $Q$  в базисе  $e$  называется матрица соответствующей симметричной билинейной формы (поляризации) в базисе  $e$ .

Обозначение:  $B(Q, e)$ .

*Пример.* Пусть  $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$ .

Если  $e$  — стандартный базис, то  $B(Q, e) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ .

### 38. Канонический вид квадратичной формы

**Определение.** Квадратичная форма  $Q$  имеет в базисе  $e$  *канонический вид*, если  $B(Q, e)$  диагональна.

Если  $B(Q, e) = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n)$ , то  $Q(x_1, \dots, x_n) = b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + \dots + b_n x_n^2$ .

### 39. Нормальный вид квадратичной формы над $\mathbb{R}$

**Определение.** Квадратичная форма над  $\mathbb{R}$  имеет *нормальный вид* в базисе  $e$ , если в этом базисе

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \varepsilon_1 x_1^2 + \dots + \varepsilon_n x_n^2,$$

где  $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$ .

### 40. Индексы инерции квадратичной формы над $\mathbb{R}$

Пусть  $F = \mathbb{R}$ .

Пусть  $Q: V \rightarrow \mathbb{R}$  — квадратичная форма.

Можно привести к нормальному виду

$$Q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_{s+t}^2.$$

Здесь  $i_+ := s$  — положительный индекс инерции квадратичной формы  $Q$ ,

$i_- := t$  — отрицательный индекс инерции квадратичной формы  $Q$ .

### 41. Закон инерции для квадратичной формы над $\mathbb{R}$

**Теорема.** Числа  $i_+$  и  $i_-$  не зависят от базиса в котором  $Q$  принимает нормальный вид.

### 42. Положительно/неотрицательно определённая квадратичная форма над $\mathbb{R}$

### 43. Отрицательно/неположительно определённая квадратичная форма над $\mathbb{R}$

#### 44. Неопределённая квадратичная форма над $\mathbb{R}$

**Определение.** Квадратичная форма  $Q$  над  $\mathbb{R}$  называется

Термин	Обозначение	Условие	Нормальный вид	Индексы инерции
Положительно определённой	$Q > 0$	$Q(x) > 0 \ \forall x \neq 0$	$x_1^2 + \dots + x_n^2$	$i_+ = n, i_- = 0$
Отрицательно определённой	$Q < 0$	$Q(x) < 0 \ \forall x \neq 0$	$-x_1^2 - \dots - x_n^2$	$i_+ = 0, i_- = n$
Неотрицательно определённой	$Q \geq 0$	$Q(x) \geq 0 \ \forall x$	$x_1^2 + \dots + x_k^2, \ k \leq n$	$i_+ = k, i_- = 0$
Неположительно определённой	$Q \leq 0$	$Q(x) \leq 0 \ \forall x$	$-x_1^2 - \dots - x_k^2, \ k \leq n$	$i_+ = 0, i_- = k$
Неопределённой	—	$\exists x : Q(x) > 0$ $\exists y : Q(y) < 0$	$x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_{s+t}^2$ $s, t \geq 1$	$i_+ = s, i_- = t$

#### 45. Способ нахождения индексов инерции квадратичной формы над $\mathbb{R}$ , вытекающий из метода Якоби

Пусть  $Q: V \rightarrow \mathbb{R}$  — квадратичная форма,

$e = (e_1, \dots, e_n)$  — базис,

$B = B(Q, e)$ ,

$\delta_k$  —  $k$ -й угловой минор матрицы  $B$ .

**Следствие** (из метода Якоби). Пусть  $\delta_k \neq 0 \ \forall k$ . Тогда:

Число  $i_+$  равно количеству сохранений знака в последовательности  $1, \delta_1, \dots, \delta_n$ .

Число  $i_-$  равно количеству перемен знака в последовательности  $1, \delta_1, \dots, \delta_n$ .

#### 46. Критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы над $\mathbb{R}$

Пусть  $V$  — векторное пространство над  $\mathbb{R}$ ,  $\dim V = n$ ,

$e = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ ,

$B = B(Q, e)$ ,

$B_k$  — левый верхний  $k \times k$  блок,

$\delta_k = \det B_k$ .

**Теорема** (Критерий Сильвестра положительной определённости).

$$Q > 0 \iff \delta_k > 0 \ \forall k = 1 \dots n.$$

#### 47. Критерий отрицательной определённости квадратичной формы над $\mathbb{R}$

**Следствие.**

$$Q < 0 \iff \delta_k \begin{cases} > 0 & \text{при } k : 2, \\ < 0 & \text{при } k \not: 2. \end{cases}$$

#### 48. Евклидово пространство

**Определение.** *Евклидово пространство* — это векторное пространство  $\mathbb{E}$  над  $\mathbb{R}$ , на котором задано *скалярное произведение*, то есть такое отображение  $(\cdot, \cdot): \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ , что

1.  $(\cdot, \cdot)$  — симметричная билинейная форма,
2. Квадратичная форма  $(x, x)$  положительно определённая.

#### 49. Длина вектора в евклидовом пространстве

**Определение.** *Длина* вектора  $x \in \mathbb{E}$  — это  $|x| := \sqrt{(x, x)}$ .

Свойство:  $|x| \geq 0$ , причем  $|x| = 0 \iff x = 0$ .

*Пример.* Если  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$  со стандартным скалярным произведением, то  $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ .

#### 50. Неравенство Коши–Буняковского

**Предложение** (неравенство Коши–Буняковского).  $\forall x, y \in \mathbb{E}$  верно  $|(x, y)| \leq |x| \cdot |y|$ , причём равенство  $\iff x, y$  пропорциональны.

*Пример.* Пусть  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$  со стандартным скалярным произведением, тогда

$$|x_1 y_1 + \dots + x_n y_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}.$$

### 51. Угол между ненулевыми векторами евклидова пространства

Пусть  $x, y \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$ , тогда  $-1 \leq \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|} \leq 1$ .

**Определение.** Угол между ненулевыми векторами  $x, y \in \mathbb{E}$ , это такой  $\alpha \in [0, \pi]$ , что  $\cos \alpha = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}$ .

Тогда  $(x, y) = |x| |y| \cos \alpha$ .

### 52. Матрица Грама системы векторов евклидова пространства

Пусть  $v_1, \dots, v_k$  — произвольная система векторов.

**Определение.** Матрица Грама этой системы — это

$$G(v_1, \dots, v_k) = \begin{pmatrix} (v_1, v_1) & (v_1, v_2) & \dots & (v_1, v_k) \\ (v_2, v_1) & (v_2, v_2) & \dots & (v_2, v_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (v_k, v_1) & (v_k, v_2) & \dots & (v_k, v_k) \end{pmatrix}.$$

*Пример.*  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$  со стандартным скалярным произведением.

$a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n \rightsquigarrow A := (a_1, \dots, a_k) \in \text{Mat}_{n \times k}(\mathbb{R})$ .

Тогда,  $G(a_1, \dots, a_k) = A^T \cdot A$ .

### 53. Свойства определителя матрицы Грама

**Предложение.**  $\forall v_1, \dots, v_k \in \mathbb{E} \implies \det G(v_1, \dots, v_k) \geq 0$ .

Более того,  $\det G(v_1, \dots, v_k) > 0 \iff v_1, \dots, v_k$  линейно независимы.

### 54. Ортогональное дополнение подмножества евклидова пространства

**Определение.** Ортогональное дополнение множества  $S \subseteq \mathbb{E}$  — это множество  $S^\perp := \{x \in \mathbb{E} \mid (x, y) = 0 \ \forall y \in S\}$ .

### 55. Чему равна размерность ортогонального дополнения к подпространству евклидова пространства?

Пусть  $\dim \mathbb{E} = n$ ,  $S \subseteq \mathbb{E}$  — подпространство.

Тогда,  $\dim S^\perp = n - \dim S$ .

### 56. Каким свойством обладают подпространство евклидова пространства и его ортогональное дополнение?

Считаем, что  $\dim \mathbb{E} = n < \infty$ .

**Предложение.** Пусть  $S \subseteq \mathbb{E}$  — подпространство. Тогда:

1.  $\dim S^\perp = n - \dim S$ .
2.  $\mathbb{E} = S \oplus S^\perp$ .
3.  $(S^\perp)^\perp = S$ .

### 57. Ортогональная проекция вектора на подпространство

$\Downarrow$

### 58. Ортогональная составляющая вектора относительно подпространства

$S$  — подпространство  $\implies \mathbb{E} = S \oplus S^\perp$

$\forall v \in \mathbb{E} \exists! x \in S, y \in S^\perp$ , такие что  $x + y = v$ .

**Определение.**

1.  $x$  называется ортогональной проекцией вектора  $v$  на подпространство  $S$ .  
Обозначение:  $x = \text{pr}_S v$ .
2.  $y$  называется ортогональной составляющей вектора  $v$  относительно подпространства  $S$ .  
Обозначение:  $y = \text{ort}_S v$ .

**59. Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в  $\mathbb{R}^n$ , заданное своим базисом**

Пусть  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$  со стандартным скалярным произведением.

$S \subseteq \mathbb{E}$  — подпространство,  $a_1, \dots, a_k$  — базис  $S$ .

Пусть  $A := (a_1, \dots, a_k) \in \text{Mat}_{n \times k}(\mathbb{R})$ ,  $A^{(i)} = a_i$ .

**Предложение.**  $\forall v \in \mathbb{R}^n \quad \text{pr}_S v = A(A^T A)^{-1} A^T v$ .

**60. Ортогональная система векторов евклидова пространства. Ортогональный базис**

$\Downarrow$

**61. Ортонормированная система векторов евклидова пространства. Ортонормированный базис**

**Определение.** Система ненулевых векторов  $v_1, \dots, v_k$  называется

1. *ортогональной*, если  $(v_i, v_j) = 0 \quad \forall i \neq j$  (то есть  $G(v_1, \dots, v_k)$  диагональна),
2. *ортонормированной*, если  $(v_i, v_j) = 0 \quad \forall i \neq j$  и  $(v_i, v_i) = 1$  ( $\iff |v_i| = 1$ ). То есть  $G(v_1, \dots, v_k) = E$ .

**Замечание.** Всякая ортогональная (и в частности ортонормированная) система векторов автоматически линейно независима.

$$\det G(v_1, \dots, v_k) = |v_1|^2 \dots |v_k|^2 \neq 0.$$

**Определение.** Базис пространства называется *ортогональным* (соответственно *ортонормированным*), если он является ортогональной (ортонормированной) системой векторов.

**62. Описание всех ортонормированных базисов евклидова пространства в терминах одного такого базиса и матриц перехода**

Пусть  $e = (e_1, \dots, e_n)$  — ортонормированный базис в  $E$ .

Пусть  $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$  — какой-то другой базис.

$$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C, \quad C \in M_n^0(\mathbb{R}).$$

**Предложение.**  $e'$  — ортонормированный базис  $\iff C^T \cdot C = E$ .

**63. Ортогональная матрица**

**Определение.** Матрица  $C \in M_n(\mathbb{R})$  называется *ортогональной* если  $C^T C = E$ .

**Замечание.**  $C^T C = E \iff C C^T = E \iff C^{-1} = C^T$ .

**Свойства.**

1.  $C^T C = E \implies$  система столбцов  $C^{(1)}, \dots, C^{(n)}$  — это ортонормированный базис в  $\mathbb{R}^n$ ,
2.  $C C^T = E \implies$  система строк  $C_{(1)}, \dots, C_{(n)}$  — это тоже ортонормированный базис в  $\mathbb{R}^n$ ,

В частности,  $|c_{ij}| \leq 1$ .

3.  $\det C = \pm 1$ .

*Пример.*  $n = 2$ . Ортогональные матрицы:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}.$$

$$\det = 1 \quad \det = -1$$

**64. Формула для координат вектора в ортогональном и ортонормированном базисах евклидова пространства**

Пусть  $\mathbb{E}$  — евклидово пространство,  $(e_1, \dots, e_n)$  — ортогональный базис.

$v \in \mathbb{E}$ .

**Предложение.**  $v = \frac{(v, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 + \frac{(v, e_2)}{(e_2, e_2)} e_2 + \dots + \frac{(v, e_n)}{(e_n, e_n)} e_n$ .

В частности, если  $e_1, \dots, e_n$  ортонормирован, то  $v = (v, e_1) e_1 + \dots + (v, e_n) e_n$ .

**65. Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в терминах его ортогонального базиса**

Пусть  $S \subseteq \mathbb{E}$  — подпространство.

$e_1, \dots, e_k$  — ортогональный базис в  $S$ .

**Предложение.**  $\forall v \in \mathbb{E} \quad \text{pr}_S v = \sum_{i=1}^k \frac{(v, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i$ .

В частности, если  $e_1, \dots, e_k$  ортонормирован, то  $\text{pr}_S v = \sum_{i=1}^k (v, e_i) e_i$ .

## 66. Метод ортогонализации Грама–Шмидта

Как построить ортогональный (ортонормированный) базис в  $\mathbb{E}$ ?

Если  $f_1, \dots, f_n$  — ортогональный базис, то  $\left(\frac{f_1}{|f_1|}, \dots, \frac{f_n}{|f_n|}\right)$  — ортонормированный базис.

Тогда, достаточно построить ортогональный базис.

Пусть  $e_1, \dots, e_k$  — линейно независимая система векторов.

$i$ -й угловой минор в  $G(e_1, \dots, e_k)$  — это  $\det G(e_1, \dots, e_k) > 0$ .

Следовательно, применим метод Якоби:

∃! система векторов  $f_1, \dots, f_k$ , такая что

$$\begin{aligned} f_1 &= e_1, \\ f_2 &\in e_2 + \langle e_1 \rangle, \\ f_3 &\in e_3 + \langle e_1, e_2 \rangle, \\ &\dots, \\ f_k &\in e_k + \langle e_1, \dots, e_{k-1} \rangle \end{aligned}$$

И выполнены следующие свойства  $\forall i = 1, \dots, k$ :

0.  $f_1, \dots, f_k$  ортогональны.
1.  $\langle e_1, \dots, e_i \rangle = \langle f_1, \dots, f_i \rangle$ .
2.  $f_i = e_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{(e_i, f_j)}{(f_j, f_j)} f_j$  (\*).
3.  $\det G(e_1, \dots, e_i) = \det G(f_1, \dots, f_i)$  (♥).

Построение базиса  $f_1, \dots, f_k$  по формулам (\*) называется методом (процессом) ортогонализации Грама–Шмидта.

## 67. Теорема Пифагора в евклидовом пространстве

**Теорема.** Пусть  $x, y \in \mathbb{E}$ ,  $(x, y) = 0$ . Тогда  $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$ .

## 68. Расстояние между векторами евклидова пространства

**Определение.** Расстояние между векторами  $x, y \in \mathbb{E}$  — это  $\rho(x, y) = |x - y|$ .

## 69. Неравенство треугольника в евклидовом пространстве

**Предложение.**  $\forall a, b, c \in \mathbb{E} \implies \rho(a, b) + \rho(b, c) \geq \rho(a, c)$ .

## 70. Теорема о расстоянии между вектором и подпространством в терминах ортогональной составляющей

**Теорема.** Пусть  $x \in \mathbb{E}$ ,  $S \subseteq \mathbb{E}$  — подпространство. Тогда,  $\rho(x, S) = |\text{ort}_S x|$ , причем  $\text{pr}_S x$  — это ближайший к  $x$  вектор из  $S$ .

## 71. Псевдорешение несовместной системы линейных уравнений

СЛУ  $Ax = b$ ,  $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ .

$$x_0 \text{ — решение системы} \iff Ax_0 = b \iff Ax_0 - b = 0 \iff |Ax_0 - b| = 0 \iff \rho(Ax_0, b) = 0.$$

Если СЛУ несовместна, то  $x_0$  называется псевдорешением, если  $\rho(Ax_0, b)$  минимально.

$$\rho(Ax_0, b) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \rho(Ax, b).$$

$x_0$  — решение задачи оптимизации  $\rho(Ax, b) \xrightarrow{x \in \mathbb{R}^n} \min$ .

Если столбцы  $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$  линейно независимы, то псевдорешение единственно и может быть найдено по формуле  $x_0 = (A^T A)^{-1} A^T b$ .

**72. Формула для расстояния от вектора до подпространства в терминах матриц Грама**

Пусть  $\mathbb{E}$  — евклидово пространство,  $\dim \mathbb{E} = n < \infty$ .

$S \subseteq \mathbb{E}$  — подпространство,  $e_1, \dots, e_k$  — базис в  $S$ .

**Теорема.**  $\forall x \in \mathbb{E} \quad \rho(x, S)^2 = \frac{\det G(e_1, \dots, e_k, x)}{\det G(e_1, \dots, e_k)}$ .

**73.  $k$ -мерный параллелепипед и его объём**

**Определение.**  $k$ -мерный параллелепипед, натянутый на векторы  $a_1, \dots, a_k$ , это множество

$$P(a_1, \dots, a_k) := \left\{ \sum_{i=1}^k x_i a_i \mid 0 \leq x_i < 1 \right\}.$$

Основание:  $P(a_1, \dots, a_{k-1})$ .

Высота:  $h := |\text{ort}_{\langle a_1, \dots, a_{k-1} \rangle} a_k|$ .

**Определение.**  $k$ -мерный объём  $k$ -мерного параллелепипеда  $P(a_1, \dots, a_k)$  — это величина  $\text{vol } P(a_1, \dots, a_k)$ , определяемая индуктивно:

$$k = 1 \implies \text{vol } P(a_1) := |a_1|.$$

$$k > 1 \implies \text{vol } P(a_1, \dots, a_k) := \text{vol } P(a_1, \dots, a_{k-1}) \cdot h.$$

**74. Формула для объёма  $k$ -мерного параллелепипеда в  $n$ -мерном евклидовом пространстве**

**Теорема.**  $\text{vol } P(a_1, \dots, a_k)^2 = \det G(a_1, \dots, a_k)$ .

**75. Формула для объёма  $n$ -мерного параллелепипеда в  $n$ -мерном евклидовом пространстве в терминах координат в ортонормированном базисе**

Пусть  $(e_1, \dots, e_n)$  — ортонормированный базис в  $\mathbb{E}$ ,

$$(a_1, \dots, a_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot A, \quad A \in M_n(\mathbb{R}).$$

**Предложение.**  $\text{vol } P(a_1, \dots, a_n) = |\det A|$ .

**76. В каком случае два базиса евклидова пространства называются одинаково ориентированными?**

Пусть  $e = (e_1, \dots, e_n)$  и  $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$  — два базиса в  $\mathbb{E}$ .

$$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C, \quad C \in M_n^0(\mathbb{R}).$$

**Определение.** Говорят, что  $e$  и  $e'$  одинаково ориентированы, если  $\det C > 0$ .

**77. Ориентированный объём  $n$ -мерного параллелепипеда в  $n$ -мерном евклидовом пространстве**

Фиксируем ориентацию в  $\mathbb{E}$ .

Фиксируем положительно ориентированный ортонормированный базис  $e = (e_1, \dots, e_n)$  в  $\mathbb{E}$ .

Пусть  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{E}$ ,  $(a_1, \dots, a_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot A$ .

**Определение.** Ориентированным объёмом параллелепипеда  $P(a_1, \dots, a_n)$  называется величина

$$\text{Vol}(a_1, \dots, a_n) = \det A.$$

**78. Свойства ориентированного объёма  $n$ -мерного параллелепипеда в  $n$ -мерном евклидовом пространстве**

1.  $\text{Vol}(a_1, \dots, a_n)$  линеен по каждому аргументу.
2.  $\text{Vol}(a_1, \dots, a_n)$  кососимметрична (то есть меняет знак при перестановке любых двух аргументов).
3.  $\text{Vol}(a_1, \dots, a_n) > 0 \iff (a_1, \dots, a_n)$  — положительно ориентированный базис в  $\mathbb{E}$ .
4.  $\text{Vol}(a_1, \dots, a_n) < 0 \iff (a_1, \dots, a_n)$  — отрицательно ориентированный базис в  $\mathbb{E}$ .
5.  $\text{Vol}(a_1, \dots, a_n) = 0 \iff (a_1, \dots, a_n)$  линейно зависимы.

**79. Связь векторного произведения со скалярным и ориентированным объёмом**

**80. Формула для вычисления векторного произведения в терминах координат в положительно ориентированном ортонормированном базисе**

Если  $e = (e_1, e_2, e_3)$  — положительно ориентированный базис и  $a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$ , то

$$b = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$$

$$[a, b] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} := \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} e_3. \quad (*)$$

**81. Смешанное произведение векторов трёхмерного евклидова пространства**

**Определение.**  $\forall a, b, c \in \mathbb{E}$  число  $(a, b, c) := ([a, b], c)$  называется *смешанным произведением* векторов  $a, b, c$ .

**Замечание.**  $(a, b, c) = \text{Vol}(a, b, c)$ .

**82. Формула для вычисления смешанного произведения в терминах координат в положительно ориентированном ортонормированном базисе**

Если  $e_1, e_2, e_3$  — положительно ориентированный ортонормированный базис, то

$$\begin{cases} a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 \\ b = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 \\ c = c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3 \end{cases} \implies (a, b, c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

**83. Критерий компланарности трёх векторов трёхмерного евклидова пространства**

$a, b, c$  компланарны  $\iff (a, b, c) = 0$ .

**84. Критерий коллинеарности двух векторов трёхмерного евклидова пространства**

**Предложение.**  $a, b \in \mathbb{E}$  коллинеарны  $\iff [a, b] = 0$ .

**85. Геометрические свойства векторного произведения**

**Предложение.**

1.  $[a, b] \perp \langle a, b \rangle$ .
2.  $|[a, b]| = \text{vol } P(a, b)$ .
3.  $\text{Vol}(a, b, [a, b]) \geq 0$ .

**86. Линейное многообразие. Характеризация линейных многообразий как сдвигов подпространств**

**Определение.** *Линейное многообразие* в  $\mathbb{R}^n$  — это множество решений некоторой совместной СЛУ.

Пусть  $Ax = b$  — СЛУ,  $\emptyset \neq L \subseteq \mathbb{R}^n$  — множество решений,  $x_z \in L$  — частное решение.

Было: Лемма:  $L = x_z + S$ , где  $S$  — множество решений ОСЛУ  $Ax = 0$ .

**Предложение.** Множество  $L \subseteq \mathbb{R}^n$  является линейным многообразием  $\iff L = v_0 + S$  для некоторых  $v_0 \in \mathbb{R}^n$  и подпространства  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ .

**87. Критерий равенства двух линейных многообразий. Направляющее подпространство и размерность линейного многообразия**

**Предложение.** Пусть  $L_1 = v_1 + S_1$  и  $L_2 = v_2 + S_2$  — два линейных многообразия в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда,

$$L_1 = L_2 \iff \begin{cases} S_1 = S_2 (= S) \\ v_1 - v_2 \in S \end{cases}.$$

Если  $L$  — линейное многообразие, то  $L = v_0 + S$ , где  $S$  определено однозначно.

**Определение.**  $S$  называется *направляющим подпространством* линейного многообразия  $L$ .

**Определение.** *Размерностью* линейного многообразия называется размерность его направляющего подпространства.

**88. Теорема о плоскости, проходящей через  $k + 1$  точку в  $\mathbb{R}^n$**

**Теорема.**



- а) Через любые  $k + 1$  точек в  $\mathbb{R}^n$  проходит плоскость размерности  $\leq k$ .  
 б) Если эти точки не лежат в плоскости размерности  $< k$ , то через них проходит ровно одна плоскость размерности  $k$ .

**Следствие.**

1. Через любые две различные точки проходит ровно одна прямая.
2. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит ровно одна плоскость.

**89. Три способа задания прямой в  $\mathbb{R}^2$ . Уравнение прямой в  $\mathbb{R}^2$ , проходящей через две различные точки**

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix} = 0 \quad \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \quad \begin{matrix} x_1 = x_0 \implies x = x_0, \\ y_1 = y_0 \implies y = y_0. \end{matrix}$$

**90. Три способа задания плоскости в  $\mathbb{R}^3$**

**91. Уравнение плоскости в  $\mathbb{R}^3$ , проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой**

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

**92. Три способа задания прямой в  $\mathbb{R}^3$**

**93. Уравнения прямой в  $\mathbb{R}^3$ , проходящей через две различные точки**

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}.$$

**94. Случаи взаимного расположения двух прямых в  $\mathbb{R}^3$**

**95. Формула для расстояния от точки до прямой в  $\mathbb{R}^3$**

**96. Формула для расстояния от точки до плоскости в  $\mathbb{R}^3$**

**97. Формула для расстояния между двумя скрещивающимися прямыми в  $\mathbb{R}^3$**

## 2 Вопросы на доказательство

### 2.1 Подпространства

#### 1. Теорема о связи размерности суммы двух подпространств с размерностью их пересечения

**Теорема.**  $\dim(U \cap W) + \dim(U + W) = \dim U + \dim W$ .

*Пример.* Всякие две плоскости в  $\mathbb{R}^3$  (содержащие 0) имеют общую прямую.

Здесь  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $\dim U = 2$ ,  $\dim W = 2$ .

При этом  $\dim(U + W) \leq 3$ .

Тогда,  $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) \geq 2 + 2 - 3 = 1$ .

*Доказательство.* Пусть  $\dim(U \cap W) = p$ ,  $\dim U = q$ ,  $\dim W = r$ .

Пусть  $a = \{a_1, \dots, a_p\}$  – базис в  $U \cap W$ .

Тогда,  $a$  можно дополнить до базиса в  $U$  и в  $W$ :

$b = \{b_1, \dots, b_{q-p}\}$  – такая система, что  $a \cup b$  – базис в  $U$ .

$c = \{c_1, \dots, c_{r-p}\}$  – такая система, что  $a \cup c$  – базис в  $W$ .

Докажем, что  $a \cup b \cup c$  – базис в  $U + W$ .

1.  $\langle a \cup b \cup c \rangle = U + W$ :

$v \in U + W \implies \exists u \in U, w \in W$ , такие что  $v = u + w$ .

$u \in U = \langle a \cup b \rangle \subseteq \langle a \cup b \cup c \rangle$ .

$w \in W = \langle a \cup c \rangle \subseteq \langle a \cup b \cup c \rangle$ .

Значит,  $v \in \langle a \cup b \cup c \rangle$ .

2.  $a \cup b \cup c$  линейно независимо.

Пусть  $\underbrace{\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_p a_p}_x + \underbrace{\beta_1 b_1 + \dots + \beta_{q-p} b_{q-p}}_y + \underbrace{\gamma_1 c_1 + \dots + \gamma_{r-p} c_{r-p}}_z = 0$ , где  $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k \in F$ .

Тогда,  $z = -\underbrace{x}_{\in U} - \underbrace{y}_{\in U} \in U$ .

Но,  $z \in W$ , значит  $z \in U \cap W$ .

То есть  $z = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p$ ,  $\lambda_i \in F$ .

Тогда,  $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p - \gamma_1 c_1 - \dots - \gamma_{r-p} c_{r-p} = 0$

Так как  $a \cup c$  линейно независимо, то  $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = \gamma_1 = \dots = \gamma_{r-p} = 0$  и  $z = 0$ .

Следовательно,  $x + y = 0$ , то есть  $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_p a_p + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_{q-p} b_{q-p} = 0$ .

Так как  $a \cup b$  линейно независимо, то  $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = \beta_1 = \dots = \beta_{q-p} = 0$ .

Получаем, что  $a \cup b \cup c$  линейно независимо.

Итого:  $a \cup b \cup c$  – базис в  $U + W$ .

$$\begin{aligned} \dim(U + W) &= |a| + |b| + |c| \\ &= p + q - p + r - p \\ &= q + r - p \\ &= \dim U + \dim W - \dim(U \cap W). \end{aligned}$$

■

#### 2. Теорема о пяти эквивалентных условиях, определяющих линейно независимый набор подпространств векторного пространства

**Теорема.** Следующие условия эквивалентны:

(1)  $U_1, \dots, U_k$  линейно независимы.

(2) всякий  $u \in U_1 + \dots + U_k$  единственным образом представим в виде  $u = u_1 + \dots + u_k$ , где  $u_i \in U_i$ .

(3) Если  $e_i$  – базис в  $U_i \forall i$ , то  $\underbrace{e_1 \sqcup e_2 \sqcup \dots \sqcup e_k}_{\text{объединение множеств}} = \text{базис в } U_1 + \dots + U_k$ .

(4)  $\dim(U_1 + \dots + U_k) = \dim U_1 + \dots + \dim U_k$ .

(5)  $\forall i = 1, \dots, k \quad U_i \cap (U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_k) = 0$ .

*Пример.* Если  $\mathfrak{e}_1 = \{e_1, e_2\}$ ,  $\mathfrak{e}_2 = \{e_2, e_3\}$ , то

- $\mathfrak{e}_1 \cup \mathfrak{e}_2 = \{e_1, e_2, e_3\}$  — 3 элемента,
- $\mathfrak{e}_1 \sqcup \mathfrak{e}_2 = \{e_1, e_2, e_2, e_3\}$  — 4 элемента.

*Доказательство.* Пусть  $\widehat{U}_i = U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_k$ .

(1)  $\implies$  (2) Пусть  $u_1 + \dots + u_k = u'_1 + \dots + u'_k$ , где  $u_i, u'_i \in U_i$ .

$$\text{Тогда, } \underbrace{(u_1 - u'_1)}_{\in U_1} + \underbrace{(u_2 - u'_2)}_{\in U_2} + \dots + \underbrace{(u_k - u'_k)}_{\in U_k} = 0 \implies u_i - u'_i = \dots = u_k - u'_k = 0.$$

То есть,  $u_1 = u'_1, \dots, u_k = u'_k$ .

(2)  $\implies$  (3) Пусть  $u \in U_1 + \dots + U_k$  — произвольный.

$u$  единственным образом представим в виде  $u = u_1 + \dots + u_k$ , где  $u_i \in U_i$ ,

$u_i$  единственным образом представим в виде линейной комбинации векторов из  $\mathfrak{e}_i$ .

Следовательно,  $u$  единственным образом представим в виде линейной комбинации векторов из  $\mathfrak{e}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathfrak{e}_k$ .

То есть,  $\mathfrak{e}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathfrak{e}_k$  — базис в  $U_1 + \dots + U_k$ .

(3)  $\implies$  (4) Очевидно.

(4)  $\implies$  (5)

$$\begin{aligned} \dim(U_i \cap \widehat{U}_i) &= \dim U_i + \dim \widehat{U}_i - \dim(U_1 + \dots + U_k) \\ &\leq \dim U_i + (\dim U_1 + \dots + \dim U_{i-1} + \dim U_{i+1} + \dots + \dim U_k) - (\dim U_1 + \dots + \dim U_k) \\ &= 0. \end{aligned}$$

(5)  $\implies$  (1)  $u_1 + \dots + u_k = 0$ , где  $u_i \in U_i$ .

$$\text{Тогда, } \underbrace{u_i}_{\in U_i} = \underbrace{-u_1 - \dots - u_{i-1} - u_{i+1} - \dots - u_k}_{\in \widehat{U}_i}$$

Следовательно,  $u_i \in U_i \cap \widehat{U}_i = 0 \implies u_i = 0$ . ■

**Следствие.** Пусть  $k = 2$ , тогда

$U_1, U_2$  линейно независимы  $\iff U_1 \cap U_2 = 0$ .

## 2.2 Линейные отображения

### 1. Свойства отношения изоморфности на множестве всех векторных пространств

**Предложение.** Если  $\varphi: V \rightarrow W$  — изоморфизм, то  $\varphi^{-1}$  — тоже изоморфизм.

*Доказательство.* Биективность есть, так как  $\varphi^{-1}$  — обратное отображение. Проверим линейность:

$$1) \ w_1, w_2 \in W \implies w_1 = \varphi(\varphi^{-1}(w_1)), \ w_2 = \varphi(\varphi^{-1}(w_2))$$

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(w_1 + w_2) &= \varphi^{-1}\left(\underbrace{\varphi(\varphi^{-1}(w_1))}_{w_1} + \underbrace{\varphi(\varphi^{-1}(w_2))}_{w_2}\right) \\ &= \underbrace{\varphi^{-1}}_{Id}(\varphi(\varphi^{-1}(w_1) + \varphi^{-1}(w_2))) \\ &= \varphi^{-1}(w_1) + \varphi^{-1}(w_2). \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(\lambda \cdot w_1) &= \varphi^{-1}(\lambda \cdot \varphi(\varphi^{-1}(w_1))) \\ &= \underbrace{\varphi^{-1}}_{Id}(\varphi(\lambda \cdot \varphi^{-1}(w_1))) \\ &= \lambda \varphi^{-1}(w_1). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Пусть  $U \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{\varphi} W$ , тогда  $\varphi \circ \psi: U \rightarrow W$  — композиция.

**Предложение.**

1. Если  $\varphi, \psi$  линейны, то  $\varphi \circ \psi$  тоже линейна.
2. Если  $\varphi, \psi$  — изоморфизмы, то  $\varphi \circ \psi$  — тоже изоморфизм.

*Доказательство.*

1. (1)  $(\varphi \circ \psi)(u_1 + u_2) = \varphi(\psi(u_1 + u_2)) = \varphi(\psi(u_1) + \psi(u_2)) = \varphi(\psi(u_1)) + \varphi(\psi(u_2)) = (\varphi \circ \psi)(u_1) + (\varphi \circ \psi)(u_2)$ .
- (2)  $(\varphi \circ \psi)(\lambda u) = \varphi(\psi(\lambda u)) = \varphi(\lambda \psi(u)) = \lambda \varphi(\psi(u)) = \lambda(\varphi \circ \psi)(u)$ .
2. из 1 следует, что  $(\varphi \circ \psi)$  линейно, но при этом биективно как композиция двух биекций. ■

**Теорема.** Отношение изоморфности является отношением эквивалентности на множестве всех векторных пространств над фиксированным полем  $F$ .

*Доказательство.*

1. Рефлексивность:  $Id : V \xrightarrow{\sim} V$ .
2. Симметричность:  $V \simeq W \implies W \simeq V$  следует из Предложения 1.
3. Транзитивность:  $U \simeq V, V \simeq W \implies U \simeq W$  следует из Предложения 2. ■

## 2. Критерий изоморфности двух конечномерных векторных пространств

**Теорема.** Пусть  $V, W$  — два конечномерных векторных пространства над  $F$ .

Тогда,  $V \simeq W \iff \dim V = \dim W$ .

**Лемма.**  $\dim V = n \implies V \simeq F^n$ .

*Доказательство.* Фиксируем базис  $(e_1, \dots, e_n)$  в  $V$ .

Тогда, отображение  $\varphi : V \rightarrow F^n$  — изоморфизм.

$$v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \implies \varphi(v) := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

**Лемма.** Пусть  $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$  и  $e_1, \dots, e_n$  — базис  $V$ , тогда  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$  — базис  $W$ .

*Доказательство.* Пусть  $w \in W$ . Тогда  $\exists x_1, \dots, x_n \in F$ , такие что  $\varphi^{-1}(w) = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ .

Тогда,  $w = \varphi(\varphi^{-1}(w)) = \varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n) \implies W = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \rangle$ .

Теперь докажем линейную независимость:

Пусть  $\alpha_1 \varphi(e_1) + \dots + \alpha_n \varphi(e_n) = \vec{0}$ .

Тогда,  $\varphi(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) = \vec{0}$ .

Применяя  $\varphi^{-1}$  получаем,  $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = \varphi^{-1}(\vec{0}) = \vec{0}$ . Значит,  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ .

Итог:  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$  — базис в  $W$ . ■

*Доказательство теоремы.*

$\Leftarrow$  Пусть  $\dim V = \dim W = n$ . Тогда по лемме 1  $V \simeq F^n, W \simeq F^n$ , значит  $V \simeq W$ .

$\Rightarrow$  Пусть  $V \simeq W$ . Фиксируем изоморфизм  $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$ .

Тогда по лемме 2 получаем, что  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$  — базис  $W$ , а значит  $\dim V = n = \dim W$ . ■

## 3. Существование и единственность линейного отображения с заданными образами базисных векторов

Пусть  $V, W$  — векторные пространства над  $F$  и  $(e_1, \dots, e_n)$  — фиксированный базис в  $V$ .

**Предложение.**

1. Если  $\varphi : V \rightarrow W$  — линейное отображение, то  $\varphi$  однозначно определяется векторами  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ ,
2.  $\forall w_1, \dots, w_n \in W \exists!$  линейное отображение  $\varphi$ , такое что,  $\varphi(e_1) = w_1, \dots, \varphi(e_n) = w_n$ .

*Доказательство.*

1.  $v \in V \implies v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \implies \varphi(v) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n)$ .

2. Зададим  $\varphi: V \rightarrow W$  формулой  $\varphi(x_1e_1 + \dots + x_ne_n) = x_1w_1 + \dots + x_nw_n$ .

Тогда  $\varphi$  — линейное отображение из  $V$  в  $W$  (упражнение).

Единственность следует из 1. ■

#### 4. Связь между координатами вектора и его образа при линейном отображении

**Предложение.** Пусть  $\varphi: V \rightarrow W$  — линейное отображение,

$\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ ,

$\mathfrak{f} = (f_1, \dots, f_m)$  — базис  $W$ ,

$A = A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f})$ .

$v \in V \implies v = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$ ,

$\varphi(v) = y_1f_1 + \dots + y_mf_m$ .

Тогда,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

*Доказательство.*  $v = (e_1, \dots, e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ .

Значит,

$$\varphi(v) = (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (f_1, \dots, f_m) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

При этом,

$$\varphi(v) = (f_1, \dots, f_m) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Так как  $f_1, \dots, f_m$  линейно независимы, то

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$
■

#### 5. Формула изменения матрицы линейного отображения при замене базисов

Пусть теперь  $\mathfrak{e}'$  — другой базис в  $V$ ,  $\mathfrak{f}'$  — другой базис в  $W$ .

$\mathfrak{e}' = \mathfrak{e} \cdot C_{C \in M_n}$ ,

$\mathfrak{f}' = \mathfrak{f} \cdot D_{D \in M_m}$ .

$A = A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f})$ ,

$A' = A(\varphi, \mathfrak{e}', \mathfrak{f}')$ .

**Предложение.**  $A' = D^{-1}AC$ .

*Доказательство.*

$$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C.$$

Применим  $\varphi$ ,

$$(\varphi(e'_1), \dots, \varphi(e'_n)) = (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) \cdot C = (f_1, \dots, f_m) \cdot A \cdot C$$

При этом,

$$(\varphi(e'_1), \dots, \varphi(e'_n)) = (f'_1, \dots, f'_m) \cdot A' = (f_1, \dots, f_m) \cdot D \cdot A'.$$

Отсюда,

$$A \cdot C = D \cdot A' \implies A' = D^{-1} \cdot A \cdot C.$$
■

## 6. Изоморфизм $\text{Hom}(V, W) \xrightarrow{\sim} \text{Mat}_{m \times n}(F)$ при фиксированных базисах $V$ и $W$

**Следствие.** При фиксированном  $\mathfrak{e}$  и  $\mathfrak{f}$  отображение  $\varphi \mapsto A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f})$  является изоморфизмом между  $\text{Hom}(V, W)$  и  $\text{Mat}_{m \times n}(F)$ .

Зафиксируем базисы  $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$  в  $V$  и  $\mathfrak{f} = (f_1, \dots, f_m)$  в  $W$ .

### Линейность.

1.  $\varphi, \psi \in \text{Hom}(V, W)$ ,  $A_\varphi = A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f})$   
 $A_\psi = A(\psi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f})$   
 $A_{\varphi+\psi} = A(\varphi + \psi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}) \implies A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$
2.  $\lambda \in F, \varphi \in \text{Hom}(V, W)$ ,  $A_\varphi = A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f})$   
 $A_{\lambda\varphi} = A(\lambda\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}) \implies A_{\lambda\varphi} = \lambda A_\varphi$

*Доказательство.*

1.

$$\begin{aligned} (f_1, \dots, f_m) \cdot A_{\varphi+\psi} &= ((\varphi + \psi)(e_1), \dots, (\varphi + \psi)(e_n)) \\ &= (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) + (\psi(e_1), \dots, \psi(e_n)) \\ &= (f_1, \dots, f_m)A_\varphi + (f_1, \dots, f_m)A_\psi \\ &= (f_1, \dots, f_m)(A_\varphi + A_\psi). \end{aligned}$$

Следовательно,  $A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$ .

2.

$$\begin{aligned} (f_1, \dots, f_m) \cdot A_{\lambda\varphi} &= ((\lambda\varphi)(e_1), \dots, (\lambda\varphi)(e_n)) \\ &= ((\varphi)(e_1), \dots, (\varphi)(e_n))\lambda \\ &= (f_1, \dots, f_m)A_\varphi\lambda. \end{aligned}$$

Следовательно,  $A_{\lambda\varphi} = \lambda A_\varphi$ . ■

**Биективность.** По определению, в  $j$ -м столбце матрицы  $A$  стоят координаты вектора  $\varphi(e_j)$  в базисе  $\mathfrak{f}$ .

А значит, из пункта 2.3 следует, что при фиксированных базисах  $\mathfrak{e}$  и  $\mathfrak{f}$  отображение  $\varphi \mapsto A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f})$  является биекцией между  $\text{Hom}(V, W)$  и  $\text{Mat}_{m \times n}(F)$ .

## 7. Матрица композиции двух линейных отображений

Пусть  $U \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{\varphi} W$  — цепочка линейных отображений, а  $\varphi \circ \psi : U \rightarrow W$  — их композиция,

$\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ ,

$\mathfrak{f} = (f_1, \dots, f_m)$  — базис  $W$ ,

$\mathfrak{g} = (g_1, \dots, g_k)$  — базис  $U$ .

$A_\varphi = A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f})$ ,

$A_\psi = A(\psi, \mathfrak{g}, \mathfrak{e})$ ,

$A_{\varphi \circ \psi} = A(\varphi \circ \psi, \mathfrak{g}, \mathfrak{f})$ .

Тогда,  $A_{\varphi \circ \psi} = A_\varphi \cdot A_\psi$ .

*Доказательство.*  $(\psi(g_1), \dots, \psi(g_k)) = (e_1, \dots, e_n)A_\psi$ . Тогда применяя  $\varphi$ ,

$$(\varphi(\psi(g_1)), \dots, \varphi(\psi(g_k))) = (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))A_\psi = (f_1, \dots, f_m)A_\varphi A_\psi.$$

С другой стороны,

$$(\varphi(\psi(g_1)), \dots, \varphi(\psi(g_k))) = (f_1, \dots, f_m)A_{\varphi \circ \psi}.$$

Значит,  $A_\varphi \cdot A_\psi = A_{\varphi \circ \psi}$ . ■

## 8. Утверждение о том, что ядро и образ — подпространства в соответствующих векторных пространствах

**Предложение.**

1. Ядро — подпространство в  $V$ .
2. Образ — подпространство в  $W$ .

*Доказательство.*

1. (a)  $\varphi(0_V) = 0_W$ ,  
 (b)  $v_1, v_2 \in \ker \varphi \implies \varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = 0 + 0 = 0 \implies v_1 + v_2 \in \ker \varphi$ ,  
 (c)  $\lambda \in F, v \in V \implies \varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v) = \lambda 0 = 0 \implies \lambda v \in \ker \varphi$ .
2. (a)  $0_W = \varphi(W) \in \operatorname{Im} \varphi$ ,  
 (b)  $w_1, w_2 \in \operatorname{Im} \varphi \implies \exists v_1, v_2 : w_1 = \varphi(v_1), w_2 = \varphi(v_2) \implies w_1 + w_2 = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \varphi(v_1 + v_2) \in \operatorname{Im} \varphi$ ,  
 (c)  $\varphi \in F, w \in \operatorname{Im} \varphi \implies \exists v \in V : w = \varphi(v) \implies \lambda w = \lambda \varphi(v) = \varphi(\lambda v) \in \operatorname{Im} \varphi$ . ■

**9. Связь между рангом матрицы линейного отображения и размерностью его образа**

Пусть  $U \subseteq V$  — подпространство,  $u_1, \dots, u_k$  — базис в  $U$ .

**Лемма.** Тогда,  $\varphi(U) = \langle \varphi(u_1), \dots, \varphi(u_k) \rangle$ . В частности,  $\dim \varphi(U) \leq \dim U$  и  $\dim \operatorname{Im} \varphi \leq \dim V$ .

*Доказательство.*  $u \in U \implies u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k, \alpha_i \in F$ , тогда

$$\varphi(u) = \alpha_1 \varphi(u_1) + \dots + \alpha_k \varphi(u_k) \in \langle \varphi(u_1), \dots, \varphi(u_k) \rangle. \quad \blacksquare$$

Пусть  $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ ,  
 $\mathfrak{f} = (f_1, \dots, f_m)$  — базис  $W$ ,  
 $A = A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f})$ .

**Теорема.**  $\operatorname{rk} A = \dim \operatorname{Im} \varphi$ .

*Доказательство.* По лемме,  $\operatorname{Im} \varphi = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \rangle$ . Поэтому,  $\dim \operatorname{Im} \varphi = \operatorname{rk} \{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\}$ .

Так как  $j$ -й столбец матрицы  $A$  составлен из координат вектора  $\varphi(e_j)$  в базисе  $\mathfrak{f}$ , то

$$\alpha_1 \varphi(e_1) + \dots + \alpha_n \varphi(e_n) = 0 \iff \alpha_1 A^{(1)} + \dots + \alpha_n A^{(n)} = 0.$$

Значит,  $\dim \operatorname{Im} \varphi = \operatorname{rk} \{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\} = \operatorname{rk} \{A^{(1)}, \dots, A^{(n)}\} = \operatorname{rk} A$ . ■

**Замечание.** Число  $\dim \operatorname{Im} \varphi$  называется *рангом* линейного отображения  $\varphi$ , обозначается  $\operatorname{rk} \varphi$ .

**10. Лемма о дополнении базиса ядра линейного отображения до базиса всего пространства**

**Предложение.** Пусть  $e_1, \dots, e_k$  — базис  $\ker \varphi$  и векторы  $e_{k+1}, \dots, e_n$  дополняют его до базиса всего  $V$ .

Тогда,  $\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)$  образуют базис в  $\operatorname{Im} \varphi$ .

*Доказательство.*  $\operatorname{Im} \varphi = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_k), \varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n) \rangle = \langle \varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n) \rangle$ . (так как  $\varphi(e_1) = \dots = \varphi(e_k) = 0$ ).

Осталось показать, что  $\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)$  линейно независимы.

Пусть  $\alpha_{k+1} \varphi(e_{k+1}) + \dots + \alpha_n \varphi(e_n) = 0$ , где  $\alpha_i \in F$ .

Тогда  $\varphi(\alpha_{k+1} e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n) = 0 \implies \alpha_{k+1} e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n \in \ker \varphi$ .

Но тогда  $\alpha_{k+1} e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_k e_k$ , где  $\beta_j \in F$ .

Так как  $(e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ , то  $\alpha_i = \beta_j = 0 \forall i, j$ . ■

**11. Теорема о связи размерностей ядра и образа линейного отображения, приведение матрицы линейного отображения к диагональному виду с единицами и нулями на диагонали**

**Теорема.**  $\dim \operatorname{Im} \varphi + \dim \ker \varphi = \dim V$ .

*Доказательство.* Вытекает из [предыдущего предложения](#) так как в его доказательстве:

$$\dim V = n,$$

$$\dim \ker \varphi = k,$$

$$\dim \operatorname{Im} \varphi = n - k. \quad \blacksquare$$

**Предложение.** Пусть  $\text{rk } \varphi = r$ . Тогда существует базис  $\mathfrak{e}$  в  $V$  и базис  $\mathfrak{f}$  в  $W$ , такие что

$$A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}) = \left( \begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) = \begin{matrix} & \begin{matrix} r & & n-r \end{matrix} \\ \begin{matrix} r \\ m-r \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

*Доказательство.* Пусть  $e_{r+1}, \dots, e_n$  — базис  $\ker \varphi$ . Дополним его векторами  $e_1, \dots, e_r$  до базиса всего  $V$ .

Положим  $f_1 = \varphi(e_1), \dots, f_r = \varphi(e_r)$ , тогда  $(f_1, \dots, f_r)$  — базис  $\text{Im } \varphi$ .

Дополним  $f_1, \dots, f_r$  до базиса  $f_1, \dots, f_m$  всего  $W$ .

Тогда,  $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$  и  $\mathfrak{f} = (f_1, \dots, f_m)$  — искомые базисы. ■

## 2.3 Линейные, билинейные и квадратичные формы

### 1. Свойство базиса сопряжённого векторного пространства

$\varepsilon_i(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_i$ , поэтому  $\varepsilon_i$  называется  $i$ -й координатной функцией в базисе  $\mathfrak{e}$ .

**Предложение.** Всякий базис пространства  $V^*$  двойствен некоторому базису пространства  $V$ .

*Доказательство.* Пусть  $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$  — базис пространства  $V^*$ . Фиксируем какой-то базис  $\mathfrak{e}' = (e'_1, \dots, e'_n)$  пространства  $V$ , и пусть  $\varepsilon' = \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \dots \\ \varepsilon'_n \end{pmatrix}$  — соответствующий ему двойственный базис  $V^*$ .

Тогда,  $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \dots \\ \varepsilon'_n \end{pmatrix}$  для некоторой матрицы  $C \in M_n^0(F)$ .

Положим  $(e_1, \dots, e_n) = (e'_1, \dots, e'_n) \cdot C^{-1}$ .

Тогда,

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} (e_1, \dots, e_n) = C \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \dots \\ \varepsilon'_n \end{pmatrix} (e'_1, \dots, e'_n) C^{-1} = C E C^{-1} = E.$$

Значит,  $\varepsilon$  двойствен к  $\mathfrak{e}$ . ■

**Упражнение.**  $\mathfrak{e}$  определён однозначно.

### 2. Формула для вычисления значений билинейной формы в координатах

Пусть  $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ ,

$y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$ .

Тогда,

$$\begin{aligned} \beta(x, y) &= \beta \left( \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \beta \left( e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \underbrace{\beta(e_i, e_j)}_{\beta_{ij}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \beta_{ij} y_j \\ &= (x_1, \dots, x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

### 3. Существование и единственность билинейной формы с заданной матрицей



**Предложение.** Пусть  $e$  — фиксированный базис  $V$ .

1. Всякая билинейная форма  $\beta$  на  $V$  однозначно определяется матрицей  $B(\beta, e)$ .
2.  $\forall B \in M_n(F) \exists!$  билинейная форма  $\beta$  на  $V$ , такая что  $B(\beta, e) = B$ .

*Доказательство.*

1. Следует из формулы выше.
2. Единственность следует из формулы выше. Докажем существование:  
Определим  $\beta$  по формуле выше.  
Тогда  $\beta$  — билинейная форма на  $V$  (упражнение).

$$\beta(e_i, e_j) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot B \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad j = \beta_{ij}.$$

Действительно,  $B(\beta, e) = B$ . ■

#### 4. Формула изменения матрицы билинейной формы при переходе к другому базису

$B = B(\beta, e)$ .

Пусть  $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$  — другой базис  $V$ .

$e' = e \cdot C$ .

$B' := B(\beta, e')$ .

**Предложение.**  $B' = C^T B C$ .

*Доказательство.*

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = x'_1 e'_1 + \dots + x'_n e'_n,$$

$$y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n = y'_1 e'_1 + \dots + y'_n e'_n,$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} y'_1 \\ \dots \\ y'_n \end{pmatrix}.$$

Тогда,

$$\begin{aligned} \beta(x, y) &= (x_1 \dots x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = (x'_1 \dots x'_n) C^T B C \begin{pmatrix} y'_1 \\ \dots \\ y'_n \end{pmatrix} \\ \beta(x, y) &= (x'_1 \dots x'_n) B' \begin{pmatrix} y'_1 \\ \dots \\ y'_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Получаем, что  $B' = C^T B C$ . ■

#### 5. Критерий симметричности билинейной формы в терминах её матрицы в каком-либо базисе

Пусть  $e$  — произвольный базис  $V$ .

**Предложение.**  $\beta$  симметрична  $\iff B = B^T$ .

*Доказательство.*

$$\implies b_{ji} = \beta(e_j, e_i) = \beta(e_i, e_j) = b_{ij},$$

$$\Leftarrow x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n,$$

$$y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n,$$

Тогда,

$$\beta(y, x) = (y_1 \dots y_n) B \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1 \dots x_n) B^T \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1 \dots x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \beta(x, y).$$

■

## 6. Соответствие между симметричными билинейными формами и квадратичными формами

**Предложение.** Пусть в поле  $F$  выполнено условие  $1 + 1 \neq 0$  (то есть  $2 \neq 0$ ). Тогда отображение  $\beta \mapsto Q_\beta$  является биекцией между симметричными билинейными формами на  $V$  и квадратичными формами на  $V$ .

*Доказательство.*

**Сюръективность**  $Q$  — квадратичная форма  $\implies Q = Q_\beta$  для некоторой билинейной формы на  $V$ .

То есть  $Q(x) = \beta(x, x) \forall x \in V$ .

Положим  $\sigma(x, y) = \frac{1}{2} [\beta(x, y) + \beta(y, x)]$ , тогда  $\sigma$  — симметричная билинейная форма.

$$\sigma(x, x) = \frac{1}{2} [\beta(x, x) + \beta(x, x)] = \beta(x, x).$$

**Инъективность**  $\beta$  — симметричная билинейная форма на  $V$ .

$$Q_\beta(x + y) = \beta(x + y, x + y) = \underbrace{\beta(x, x)}_{Q_\beta(x)} + \underbrace{\beta(x, y) + \beta(y, x)}_{\text{равны между собой}} + \underbrace{\beta(y, y)}_{Q_\beta(y)} \implies \beta(x, y) = \frac{1}{2} [Q_\beta(x + y) - Q_\beta(x) - Q_\beta(y)].$$

■

## 7. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду

## 8. Метод Якоби приведения квадратичной формы к каноническому виду

## 9. Существование нормального вида для квадратичной формы над $\mathbb{R}$

**Следствие** (из метода Лагранжа). Для всякой квадратичной формы  $Q$  над  $\mathbb{R}$  существует базис, в котором  $Q$  имеет нормальный вид.

*Доказательство.* Из теоремы знаем, что существует базис  $e$ , в котором  $Q$  имеет канонический вид

$$Q(x_1, \dots, x_n) = b_1 x_1^2 + \dots + b_n x_n^2.$$

Делаем замену

$$x_i = \begin{cases} \frac{x'_i}{\sqrt{|b_i|}}, & b_i \neq 0 \\ x_i, & b_i = 0 \end{cases}.$$

Тогда в новых координатах  $Q(x'_1, \dots, x'_n) = \varepsilon_1 x_1'^2 + \dots + \varepsilon_n x_n'^2$ ,

$$\varepsilon_i = \operatorname{sgn} b_i = \begin{cases} 1, & b_i > 0 \\ 0, & b_i = 0 \\ -1, & b_i < 0 \end{cases}.$$

■

## 10. Закон инерции

Пусть  $F = \mathbb{R}$ .

Пусть  $Q: V \rightarrow \mathbb{R}$  — квадратичная форма.

Можно привести к нормальному виду

$$Q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_{s+t}^2.$$

**Теорема.** Числа  $i_+$  и  $i_-$  не зависят от базиса в котором  $Q$  принимает нормальный вид.

*Доказательство.*  $s + t = \operatorname{rk} Q$ , то есть не зависит от выбора базиса. Следовательно, достаточно показать, что число  $s$  определено однозначно.

Пусть  $e = (e_1, \dots, e_n)$  — базис, в котором  $Q$  принимает нормальный вид

$$Q = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_{s+t}^2.$$

Пусть  $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$  — другой базис, в котором  $Q$  принимает нормальный вид

$$Q = x_1'^2 + \dots + x_{s'}'^2 - x_{s'+1}'^2 - \dots - x_{s'+t'}'^2.$$

Предположим, что  $s \neq s'$ , можно считать что  $s > s'$ .

Положим  $L := \langle e_1, \dots, e_s \rangle$ ,  $\dim L = s$ ,

$$L' := \langle e'_{s'+1}, \dots, e'_n \rangle, \dim L' = n - s'.$$

Так как  $L + L' \subseteq V$ , то  $\dim(L + L') \leq n$ .

Тогда,  $\dim(L \cap L') \geq s + (n - s') - n = s - s' > 0$ .

Значит,  $\exists$  вектор  $v \in L \cap L'$ , такой что  $v \neq 0$ .

Теперь:

1. Так как  $v \in L$ , то  $Q(v) > 0$ ,
2. Так как  $v \in L'$ , то  $Q(v) \leq 0$ .

Противоречие. ■

## 11. Следствие метода Якоби о нахождении индексов инерции квадратичной формы над $\mathbb{R}$

Пусть  $Q: V \rightarrow \mathbb{R}$  — квадратичная форма,

$e = (e_1, \dots, e_n)$  — базис,

$$B = B(Q, e),$$

$\delta_k$  —  $k$ -й угловой минор матрицы  $B$ .

**Следствие** (из метода Якоби). Пусть  $\delta_k \neq 0 \forall k$ . Тогда:

Число  $i_+$  равно количеству сохранений знака в последовательности  $1, \delta_1, \dots, \delta_n$ .

Число  $i_-$  равно количеству перемен знака в последовательности  $1, \delta_1, \dots, \delta_n$ .

*Доказательство.* Метод Якоби  $\implies \exists$  базис, в котором  $Q$  принимает канонический вид

$$Q = \delta_1 x_1^2 + \frac{\delta_2}{\delta_1} x_2^2 + \dots + \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} x_n^2.$$

Здесь, знак отношения  $\frac{\delta_i}{\delta_{i-1}}$  соответствует смене либо сохранению знака в рассматриваемой последовательности.

По закону инерции, количества знаков  $+$  и  $-$  не изменяются от выбора базиса. ■

## 12. Критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы, критерий отрицательной определённости квадратичной формы

Пусть  $V$  — векторное пространство над  $\mathbb{R}$ ,  $\dim V = n$ ,

$e = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ ,

$$B = B(Q, e),$$

$B_k$  — левый верхний  $k \times k$  блок,

$$\delta_k = \det B_k.$$

**Теорема** (Критерий Сильвестра положительной определённости).

$$Q > 0 \iff \delta_k > 0 \forall k = 1 \dots n.$$

*Доказательство.*

$\Leftarrow$  По следствию из метода Якоби,  $i_+ = n$ , то есть  $Q > 0$ .

$\Rightarrow$   $Q > 0 \implies \exists C \in M_n^0(\mathbb{R})$ , такая что  $C^T B C = E$ .

Тогда,  $\det C^T \cdot \det B \cdot \det C = 1$ . Отсюда,  $\delta_n = \frac{1}{(\det C)^2} > 0$ .

Теперь, для любого  $k$  ограничение  $Q$  на  $\langle e_1, \dots, e_k \rangle$  тоже положительно определено, а его матрица в базисе  $e_1, \dots, e_k$  равна  $B_k$ . Следовательно,  $\det B_k > 0$ . ■

## 2.4 Евклидовы пространства

### 1. Неравенство Коши–Буняковского

**Предложение** (неравенство Коши–Буняковского).  $\forall x, y \in \mathbb{E}$  верно  $|(x, y)| \leq |x| \cdot |y|$ , причём равенство  $\iff x, y$  пропорциональны.

*Доказательство.* Случаи:

1.  $x, y$  пропорциональны. Тогда, можно считать, что  $y = \lambda x$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .  
 $|(x, y)| = |(x, \lambda x)| = |\lambda| |(x, x)| = |\lambda| |x|^2 = |x| \cdot |\lambda x| = |x| \cdot |y|$ .
2.  $x, y$  не пропорциональны. Тогда  $x, y$  линейно независимы.  
Значит они образуют базис в  $\langle x, y \rangle$ .

Получаем

$$\begin{vmatrix} (x, x) & (x, y) \\ (y, x) & (y, y) \end{vmatrix} > 0 \quad (\text{критерий Сильвестра}).$$

Отсюда,  $(x, x) \cdot (y, y) - (x, y)^2 > 0 \implies (x, y)^2 < |x|^2 \cdot |y|^2$ .

■

*Пример.* Пусть  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$  со стандартным скалярным произведением, тогда

$$|x_1 y_1 + \dots + x_n y_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}.$$

### 2. Свойства определителя матрицы Грама системы векторов евклидова пространства

**Предложение.**  $\forall v_1, \dots, v_k \in \mathbb{E} \implies \det G(v_1, \dots, v_k) \geq 0$ .

Более того,  $\det G(v_1, \dots, v_k) > 0 \iff v_1, \dots, v_k$  линейно независимы.

*Доказательство.* Пусть  $G := G(v_1, \dots, v_k)$ . Случаи:

1.  $v_1, \dots, v_k$  линейно независимы. Тогда,  $G$  — матрица билинейной формы  $(\cdot, \cdot)|_{\langle v_1, \dots, v_k \rangle}$  в базисе  $v_1, \dots, v_k$  подпространства  $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ , а значит  $\det G > 0$  по критерию Сильвестра.
2.  $v_1, \dots, v_k$  линейно зависимы. Тогда,  $\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ , такие что  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$ .  
А значит,  $\forall i = 1, \dots, k \implies \alpha_1 (v_1, v_i) + \dots + \alpha_k (v_k, v_i) = 0$ .  
Отсюда,  $\alpha_1 G_{(1)} + \dots + \alpha_k G_{(k)} = 0 \implies$  строки в  $G$  линейно зависимы  $\implies \det G = 0$ .

■

### 3. Свойства ортогонального дополнения к подпространству в евклидовом пространстве: размерность, разложение в прямую сумму, ортогональное дополнение к ортогональному дополнению

Далее считаем, что  $\dim \mathbb{E} = n < \infty$ .

**Предложение.** Пусть  $S \subseteq \mathbb{E}$  — подпространство. Тогда:

1.  $\dim S^\perp = n - \dim S$ .
2.  $\mathbb{E} = S \oplus S^\perp$ .
3.  $(S^\perp)^\perp = S$ .

*Доказательство.*

1. Пусть  $\dim S = k$  и  $e_1, \dots, e_k$  — базис  $S$ .  
Дополним  $e_1, \dots, e_k$  до базиса  $e_1, \dots, e_n$  всего  $\mathbb{E}$ .  
Тогда,  $\forall x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in \mathbb{E}$ .

$$\begin{aligned} x \in S^\perp &\iff (x, e_i) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k \\ &\iff \begin{cases} (e_1, e_1)x_1 + \dots + (e_n, e_1)x_n = 0 \\ (e_1, e_2)x_1 + \dots + (e_n, e_2)x_n = 0 \\ \dots \\ (e_1, e_k)x_1 + \dots + (e_n, e_k)x_n = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Это ОСЛУ с матрицей  $G \in \text{Mat}_{k \times n}(\mathbb{R})$ , причём левый  $k \times k$  блок в  $G$  — это  $\underbrace{G(e_1, \dots, e_k)}_{\det \neq 0}$ .

Это означает, что  $\text{rk } G = k$ .

Следовательно, пространство решений этой ОСЛУ имеет размерность  $n - k$ .

Отсюда,  $\dim S^\perp = n - k = n - \dim S$ .

2. (a)  $\dim S + \dim S^\perp = k + (n - k) = n = \dim E$ .  
 (b)  $v \in S \cap S^\perp \implies (v, v) = 0 \implies v = 0 \implies S \cap S^\perp = \{0\}$ .  
 А значит,  $E = S \oplus S^\perp$ .  
 3. Заметим, что  $S \subseteq (S^\perp)^\perp$  (по определению).  
 $\dim(S^\perp)^\perp = n - \dim S^\perp = n - (n - \dim S) = \dim S$ .  
 Следовательно,  $S = (S^\perp)^\perp$ . ■

#### 4. Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в $\mathbb{R}^n$ в терминах его произвольного базиса

Пусть  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$  со стандартным скалярным произведением.

$S \subseteq \mathbb{E}$  — подпространство,  $a_1, \dots, a_k$  — базис  $S$ .

Пусть  $A := (a_1, \dots, a_k) \in \text{Mat}_{n \times k}(\mathbb{R})$ ,  $A^{(i)} = a_i$ .

**Предложение.**  $\forall v \in \mathbb{R}^n \quad \text{pr}_S v = A(A^T A)^{-1} A^T v$ .

*Доказательство.* Корректность:  $A^T A = G(a_1, \dots, a_k) \in M_k^0(\mathbb{R})$ .

Положим  $x := \text{pr}_S v$ ,  $y := \text{ort}_S v$ .

Так как  $x \in S$ ,  $x = A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_k \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ .

$y \in S^\perp \implies A^T y = 0$ .

$$\begin{aligned} A(A^T A)^{-1} A^T v &= A(A^T A)^{-1} A^T (x + y) \\ &= \underbrace{A(A^T A)^{-1} A^T A}_{E} \overbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_k \end{pmatrix}}^x + A(A^T A)^{-1} \underbrace{A^T y}_0 \\ &= A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = x = \text{pr}_S v. \end{aligned}$$

#### 5. Существование ортонормированного базиса в евклидовом пространстве, дополнение ортогональной (ортонормированной) системы векторов до ортогонального (ортонормированного) базиса

**Теорема.** Во всяком конечномерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

*Доказательство.* Следует из теоремы о приведении квадратичной формы  $(x, x)$  к нормальному виду (который будет  $E$  в силу положительной определённости). ■

**Следствие.** Всякую ортогональную (ортонормированную) систему векторов можно дополнить до ортогонального (ортонормированного) базиса.

*Доказательство.* Пусть  $e_1, \dots, e_k$  — данная система.

Пусть  $e_{k+1}, \dots, e_n$  — это ортогональный (ортонормированный) базис в  $\langle e_1, \dots, e_k \rangle^\perp$ .

Тогда  $e_1, \dots, e_n$  — искомый базис. ■

#### 6. Описание всех ортонормированных базисов в терминах одного и матриц перехода

Пусть  $e = (e_1, \dots, e_n)$  — ортонормированный базис в  $E$ .

Пусть  $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$  — какой-то другой базис.

$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C$ ,  $C \in M_n^0(\mathbb{R})$ .

**Предложение.**  $e'$  — ортонормированный базис  $\iff C^T \cdot C = E$ .

*Доказательство.*  $G(e'_1, \dots, e'_n) = C^T \underbrace{G(e_1, \dots, e_n)}_E C = C^T C$ .

$e'$  ортонормированный  $\iff G(e'_1, \dots, e'_n) = E \iff C^T C = E$ . ■

**7. Формула для координат вектора в ортогональном (ортонормированном) базисе. Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в терминах его ортогонального (ортонормированного) базиса**

Пусть  $\mathbb{E}$  — евклидово пространство,  $(e_1, \dots, e_n)$  — ортогональный базис.

$v \in \mathbb{E}$ .

**Предложение.**  $v = \frac{(v, e_1)}{(e_1, e_1)}e_1 + \frac{(v, e_2)}{(e_2, e_2)}e_2 + \dots + \frac{(v, e_n)}{(e_n, e_n)}e_n$ .

В частности, если  $e_1, \dots, e_n$  ортонормирован, то  $v = (v, e_1)e_1 + \dots + (v, e_n)e_n$ .

*Доказательство.*  $v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n$ .

$\forall i = 1, \dots, n \quad (v, e_i) = \lambda_1(e_1, e_i) + \dots + \lambda_n(e_n, e_i)$ .

Так как базис ортогонален, то  $(v, e_i) = \lambda_i(e_i, e_i) \implies \lambda_i = \frac{(v, e_i)}{(e_i, e_i)}$ . ■

**8. Теорема Пифагора и неравенство треугольника в евклидовом пространстве**

**Теорема.** Пусть  $x, y \in \mathbb{E}$ ,  $(x, y) = 0$ . Тогда  $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$ .

*Доказательство.*

$$|x + y|^2 = (x + y, x + y) = \underbrace{(x, x)}_{|x|^2} + \underbrace{(x, y)}_0 + \underbrace{(y, x)}_0 + \underbrace{(y, y)}_{|y|^2} = |x|^2 + |y|^2. \quad \blacksquare$$

**9. Теорема о расстоянии между вектором и подпространством в терминах ортогональной составляющей**

**Теорема.** Пусть  $x \in \mathbb{E}$ ,  $S \subseteq \mathbb{E}$  — подпространство. Тогда,  $\rho(x, S) = |\text{ort}_S x|$ , причем  $\text{pr}_S x$  — это ближайший к  $x$  вектор из  $S$ .

*Доказательство.* Положим  $y = \text{pr}_S x$ ,  $z = \text{ort}_S x$ . Тогда,  $x = y + z$ . Для любого  $y' \in S$ ,  $y' \neq 0$  имеем

$$\rho(x, y + y')^2 = |x - y - y'|^2 = |z - y'|^2 = |z|^2 + |y'|^2 > |z|^2 = |x - y|^2 = \rho(x, y)^2. \quad \blacksquare$$

**10. Метод наименьших квадратов для несовместных систем линейных уравнений: постановка задачи и её решение. Единственность псевдорешения и явная формула для него в случае линейной независимости столбцов матрицы коэффициентов**

СЛУ  $Ax = b$ ,  $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ .

$$x_0 \text{ — решение системы} \iff Ax_0 = b \iff Ax_0 - b = 0 \iff |Ax_0 - b| = 0 \iff \rho(Ax_0, b) = 0.$$

Если СЛУ несовместна, то  $x_0$  называется *псевдорешением*, если  $\rho(Ax_0, b)$  минимально.

$$\rho(Ax_0, b) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \rho(Ax, b).$$

$x_0$  — решение задачи оптимизации  $\rho(Ax, b) \xrightarrow{x \in \mathbb{R}^n} \min$ .

Пусть  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  — подпространство натянутое на столбцы матрицы  $A$ .

$$S = \langle A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \rangle.$$

Положим  $c := \text{pr}_S b$ .

**Предложение.**

1.  $x_0$  — псевдорешение  $Ax = b \iff x_0$  — решение для  $Ax = c$ .
2. Если столбцы  $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$  линейно независимы, то псевдорешение единственно и может быть найдено по формуле  $x_0 = (A^T A)^{-1} A^T b$ .

*Доказательство.*

1.

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad Ax = x_1 A^{(1)} + \dots + x_n A^{(n)} \implies \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\} = S \implies \min_{x \in \mathbb{R}^n} \rho(Ax, b) = \rho(S, b).$$

По теореме о расстоянии от вектора до подпространства минимум достигается при  $Ax = c = \text{pr}_S b$ .

2. Так как  $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$  линейно независимы, то с единственным образом представим в виде линейной комбинации этих столбцов.

Следовательно,  $x_0$  единственно.

Знаем, что  $A \underbrace{(A^T A)^{-1} A^T}_{\text{матрица Гессе}} b = c$ . Значит,  $x_0 = (A^T A)^{-1} A^T b$ . ■

## 11. Формула для расстояния между вектором и подпространством в терминах матриц Грама

Пусть  $\mathbb{E}$  — евклидово пространство,  $\dim \mathbb{E} = n < \infty$ .

$S \subseteq \mathbb{E}$  — подпространство,  $e_1, \dots, e_k$  — базис в  $S$ .

**Теорема.**  $\forall x \in \mathbb{E} \quad \rho(x, S)^2 = \frac{\det G(e_1, \dots, e_k, x)}{\det G(e_1, \dots, e_k)}$ .

*Доказательство.* Пусть  $z := \text{ort}_S x$ , тогда  $\rho(x, S)^2 = |z|^2$ .

1.  $x \in S \implies \rho(x, S) = 0$ :

так как  $e_1, \dots, e_k$  линейно независимы, то  $\det G(e_1, \dots, e_k, x) = 0$ .

2.  $x \notin S$ .

Ортогонализация Грама-Шмидта:  $e_1, \dots, e_k, x \rightsquigarrow f_1, \dots, f_k, z$ .

По свойству (♥) получаем

$$\frac{\det G(e_1, \dots, e_k, x)}{\det G(e_1, \dots, e_k)} = \frac{\det G(f_1, \dots, f_k, z)}{\det G(f_1, \dots, f_k)} = \frac{|f_1|^2 \dots |f_k|^2 |z|^2}{|f_1|^2 \dots |f_k|^2} = |z|^2 = \rho(x, S)^2.$$

## 12. Две формулы для объёма $k$ -мерного параллелепипеда в евклидовом пространстве

**Теорема.**  $\text{vol } P(a_1, \dots, a_k)^2 = \det G(a_1, \dots, a_k)$ .

*Доказательство.* Индукция по  $k$ :

$k = 1$ :  $|a_1|^2 = (a_1, a_1)$  — верно.

$k > 1$ :  $\text{vol } P(a_1, \dots, a_k)^2 = \text{vol } P(a_1, \dots, a_{k-1})^2 \cdot h^2 = \det G(a_1, \dots, a_{k-1}) \cdot h^2 = (\star)$ .

Если  $a_1, \dots, a_{k-1}$  линейно независимы, то  $h^2 = \frac{\det G(a_1, \dots, a_k)}{\det G(a_1, \dots, a_{k-1})}$ . Тогда,  $(\star) = \det G(a_1, \dots, a_k)$ .

Если же  $a_1, \dots, a_{k-1}$  линейно зависимы, то  $\det G(a_1, \dots, a_{k-1}) = 0 \implies (\star) = 0$ . Но  $a_1, \dots, a_k$  тоже линейно зависимы, а значит  $\det G(a_1, \dots, a_k) = 0$ . ■

Пусть  $(e_1, \dots, e_n)$  — ортонормированный базис в  $\mathbb{E}$ ,

$(a_1, \dots, a_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot A$ ,  $A \in M_n(\mathbb{R})$ .

**Предложение.**  $\text{vol } P(a_1, \dots, a_n) = |\det A|$ .

*Доказательство.*

$$G(a_1, \dots, a_n) = A^T \cdot A \implies \text{vol } P(a_1, \dots, a_n)^2 = \det(A^T A) = (\det A)^2$$

■.

## 2.5 Элементы аналитической геометрии и линейные многообразия

1. Теорема о векторном произведении и формуле для него в координатах в положительно ориентированном ортонормированном базисе

**Лемма.** Пусть  $v_1, v_2 \in \mathbb{E}$ . Тогда,  $(v_1, x) = (v_2, x) \quad \forall x \in \mathbb{E} \implies v_1 = v_2$ .

*Доказательство.* Имеем  $(v_1 - v_2, x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{E}$ . Тогда,  $v_1 - v_2 \in \mathbb{E}^\perp = \{0\} \implies v_1 - v_2 = 0 \implies v_1 = v_2$ . ■

**Теорема.** Пусть  $a, b \in \mathbb{R}^3$ . Тогда

1.  $\exists! v \in \mathbb{E}$ , такой что  $(v, x) = \text{Vol}(a, b, x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$ .

2. Если  $e = (e_1, e_2, e_3)$  — положительно ориентированный ортонормированный базис и  $a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$ ,

$$b = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$$

то

$$v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} := \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} e_3. \quad (\star)$$

*Доказательство.*

**Единственность** если  $v'$  — другой такой вектор, то  $(v, x) = (v', x) \forall x \in \mathbb{R}^3$ , а значит  $v' = v$  по лемме.

**Существование** Покажем, что  $v$ , заданный формулой  $(\star)$  подойдёт.

$$\begin{aligned} x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \implies (v, x) &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} x_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} x_3 \\ &= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = \text{Vol}(a, b, x). \end{aligned}$$

■

## 2. Критерий коллинеарности двух векторов трёхмерного евклидова пространства

**Предложение.**  $a, b \in \mathbb{E}$  коллинеарны  $\iff [a, b] = 0$ .

*Доказательство.*

$\implies$

$$(a, b, x) = 0 \forall x \implies ([a, b], x) = 0 \forall x \implies [a, b] = 0.$$

$\impliedby$

$$[a, b] = 0 \implies ([a, b], x) = 0 \forall x \implies (a, b, x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Если  $a, b$  линейно независимы, то можно взять  $x$ , который дополняет их до базиса в  $\mathbb{R}^3$ .

Тогда,  $(a, b, x) \neq 0$  — противоречие. Значит  $a, b$  линейно зависимы  $\implies$  коллинеарны.

■

## 3. Геометрические свойства векторного произведения

**Предложение.**

1.  $[a, b] \perp \langle a, b \rangle$ .
2.  $|[a, b]| = \text{vol } P(a, b)$ .
3.  $\text{Vol}(a, b, [a, b]) \geq 0$ .

*Доказательство.*

1.  $([a, b], a) = (a, b, a) = 0 = (a, b, b) = ([a, b], b)$ .
2. Если  $a, b$  коллинеарны, то обе части равны 0.  
Пусть  $[a, b] \neq 0$ .

$$|[a, b]|^2 = ([a, b], [a, b]) = (a, b, [a, b]) = (\#) > 0.$$

$$[a, b] \perp \langle a, b \rangle \implies (\#) = \text{vol } P(a, b, [a, b]) = \text{Vol}(a, b, [a, b]) = \text{vol } P(a, b, \cdot) \cdot |[a, b]|.$$

Сокращая на  $|[a, b]| \neq 0$ , получаем требуемое.

3.  $\text{Vol}(a, b, [a, b]) = ([a, b], [a, b]) \geq 0$ .

■

## 4. Антикоммутативность и билинейность векторного произведения

**Предложение.**

1.  $[a, b] = -[b, a] \quad \forall a, b$  (антикоммутативность).
2.  $[\cdot, \cdot]$  билинейно (то есть линейно по каждому аргументу).

*Доказательство.*

1.  $([a, b], x) = (a, b, x) = -(b, a, x) = -([b, a], x) = (-[b, a], x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \implies [a, b] = -[b, a]$



2. Пусть  $u = [\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, b]$ ,  $v = \lambda_1 [a_1, b] + \lambda_2 [a_2, b]$ . Тогда  $\forall x \in \mathbb{R}^3$ :

$$\begin{aligned}(u, x) &= (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, b, x) \\ &= \lambda_1 (a_1, b, x) + \lambda_2 (a_2, b, x) \\ &= \lambda_1 ([a_1, b], x) + \lambda_2 ([a_2, b], x) \\ &= (\lambda_1 [a_1, b] + \lambda_2 [a_2, b], x) = (v, x).\end{aligned}$$

Значит  $u = v$ . Аналогично линейность по второму аргументу. ■

## 5. Линейные многообразия как сдвиги подпространств

Пусть  $Ax = b$  — СЛУ,  $\emptyset \neq L \subseteq \mathbb{R}^n$  — множество решений,  $x_z \in L$  — частное решение.

Было: Лемма:  $L = x_z + S$ , где  $S$  — множество решений ОСЛУ  $Ax = 0$ .

**Предложение.** Множество  $L \subseteq \mathbb{R}^n$  является линейным многообразием  $\iff L = v_0 + S$  для некоторых  $v_0 \in \mathbb{R}^n$  и подпространства  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ .

*Доказательство.*

$\implies$  Из леммы.

$\Leftarrow$   $L = v_0 + S$ . Значит существует ОСЛУ  $Ax = 0$ , для которой  $S$  является множеством решений. Тогда,  $L$  — множество решений СЛУ  $Ax = Av_0$  (по лемме). ■

## 6. Критерий равенства двух линейных многообразий

**Предложение.** Пусть  $L_1 = v_1 + S_1$  и  $L_2 = v_2 + S_2$  — два линейных многообразия в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда,

$$L_1 = L_2 \iff \begin{cases} S_1 = S_2 (= S) \\ v_1 - v_2 \in S \end{cases}.$$

*Доказательство.*

$\Leftarrow$   $L_1 = v_1 + S_1 = v_1 + S_2 = v_2 + (v_1 - v_2) + S = v_2 + S = L_2$ .

$\implies$   $v_1 = v_1 + 0 \in L_1 = L_2 = v_2 + S_2 \implies v_1 - v_2 \in S_2$ ,

$v \in S_1 \implies v + v_1 \in L_1 = L_2 = v_2 + S_2 \implies v \in (v_2 - v_1) + S_2 = S_2 \implies S_1 \subseteq S_2$ .

Аналогично,  $v_1 - v_2 \in S_1$  и  $S_2 \subseteq S_1$ . ■

## 7. Теорема о плоскости, проходящей через $k + 1$ точку в $\mathbb{R}^n$

**Теорема.**

а) Через любые  $k + 1$  точек в  $\mathbb{R}^n$  проходит плоскость размерности  $\leq k$ .

б) Если эти точки не лежат в плоскости размерности  $< k$ , то через них проходит ровно одна плоскость размерности  $k$ .

*Доказательство.*

а) Пусть  $v_0, v_1, \dots, v_k$  — данные точки. Тогда через них проходит плоскость  $P = v_0 + \langle v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0 \rangle$ . Ясно, что  $\dim P \leq k$ .

б) Из условия следует, что  $\dim P = k \implies v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0$  линейно независимы.

Если  $P' = v_0 + S$  — другая плоскость размерности  $k$ , содержащая  $v_0, \dots, v_k$ , то  $v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0 \in S \implies S = \langle v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0 \rangle \implies P' = P$ . ■