Математический Анализ - 2 - Коллоквиум 1

Серёжа Рахманов | telegram, website

Версия от 07.10.2020 22:18

1. Дайте определения: числовой ряд, частичная сумма ряда, сумма ряда, сходящийся ряд, расходящийся ряд. Рассмотрим ряд с общим членом a_n. Докажите, что $a_n \to 0$.

   Определение 1. Пусть a_n – последовательность, т.е. $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Формальная бесконечная сумма: $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется рядом. $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n$ – частичная сумма, сумма ряда: $S = \lim\limits_{N\to\infty} S_N$

   Возможны 3 случая:

   (a) $\exists S \in \mathbb{R}$
   (b) $\exists S = \infty$
   (c) $\nexists S$

   В первом случае говорят, что ряд сходится, иначе – что ряд расходится.

   Замечание. Если ряд сходится, то $a_n \to 0$

   Доказательство. $a_n = S_n - S_{n-1} \to 0$, т.к. $S_n \to S$ и $S_{n-1} \to S$ ∎

2. Сформулируйте критерий Коши сходимости числовой последовательности. Сформулируйте и докажите критерий Коши сходимости числового ряда.

   Определение 2. a_n называется фундаментальной, если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N : \forall n > m > N, |S_n - S_m| < \varepsilon$

   Теорема 0.1. *S_n – сходится $\Leftrightarrow$ S_n – фундаментальная*

   Доказательство. $S_n - S_m = \sum\limits_{k=m+1}^{n} a_k$ Тогда $\sum a_n$ – сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N : \forall n > m > N \; |a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n| < \varepsilon$ ∎

3. Сформулируйте и докажите признак сравнения положительных числовых рядов, основанный на неравенстве $a_n \leqslant b_n$.

   $a_n \leqslant b_n$ при всех $n \geqslant n_0$

   Ряд $\sum b_n$ сходится $\implies$ ряд $\sum a_n$ сходится

   Ряд $\sum a_n$ расходится $\implies$ ряд $\sum b_n$ расходится

4. Сформулируйте и докажите признак сравнения положительных числовых рядов, основанный на неравенстве $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$.

   Ряд $\sum b_n$ сходится $\implies$ ряд $\sum a_n$ сходится

   Ряд $\sum a_n$ расходится $\implies$ ряд $\sum b_n$ расходится

   Доказательство.

   $$a_{n_0+1} \leqslant \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+1}$$

   $$a_{n_0+2} \leqslant \frac{a_{n_0+1}}{b_{n_0+1}} \cdot b_{n_0+2} \leqslant \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+2}$$

   $$\vdots$$

   $$a_{n_0+k} \leqslant \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+k} \implies \sum_{n=n_0}^{N} a_n \leqslant \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot \sum_{n=n_0}^{N} b_n$$ ∎

5. Сформулируйте и докажите признак сравнения положительных числовых рядов, основанный на пределе $\lim \frac{a_n}{b_n}$.

   $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0;+\infty) \implies$ сходимость $\sum a_n \iff$ сходимость $\sum b_n$

   Доказательство.

   $c = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$

   $\forall \varepsilon\ \exists n_0:\ c-\varepsilon \leqslant \frac{a_n}{b_n} \leqslant c+\varepsilon$, при $n \geqslant n_0$

   Возьмём $c-\varepsilon > 0 \implies (c-\varepsilon)\cdot b_n \leqslant a_n \leqslant (c+\varepsilon)\cdot b_n$

   Сходимость следует из правой части неравенства, а расходимость из левой. ∎

6. Пусть последовательности $\{a_n\}$, $\{A_n\}$ таковы, что $a_n - (A_n - A_{n-1}) = c_n$ и ряд $\sum c_n$ сходится. Докажите, что существует C такое, что $a_1 + a_2 + \dots + a_n = A_n + C + o(1)$.

7. Сформулируйте и докажите признак Лобачевского-Коши.

   Предложение. Пусть $a_n > 0$ и $a_n \downarrow$

   Тогда ряды $\sum a_n$ и $\sum 2^n \cdot a_{2^n}$ ведут себя одинаково

   Доказательство. $a_1 + (a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + \dots + a_8) + \dots$

   $a_2 \leqslant a_1$

   $a_2 \leqslant a_2$

   $a_3 + a_4 \leqslant 2a_2$

   $a_3 + a_4 \geqslant 2a_4$

   $a_5 + \dots + a_8 \leqslant 4a_4$

   $a_5 + \dots + a_8 \geqslant 4a_8$

   $\dots$

   $a_1 + \sum\limits_{n=0}^{m-1} 2^n a_{2n} \leqslant \sum\limits_{n=1}^{2^m} a_n \leqslant a_1 + \frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{m} 2^n a_{2n}$

   ∎

8. Примените признак Лобачевского-Коши к ряду $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln^p(\ln n)}$, $p > 0$

   Рассмотрим данный нам ряд. Заметим, что $\frac{1}{n \ln n \ln^p(\ln n)}$ убывает, поскольку $n \ln n \ln^p(\ln n)$ является возрастающей функцией ($n, \ln n$ и $\ln^p(\ln n)$ сами по себе возрастают). Кроме того, $\forall n, n \geqslant 2, a_n > 0$, поскольку $1 > 0$ и $n \ln n \ln^p(\ln n) > 0$. В таком случае, аналогично данному ряду будет вести себя ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{2^n \ln 2^n \ln^p(\ln 2^n)} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln 2^n \ln^p(\ln 2^n)}, p > 0.$

9. Сформулируйте теорему Штольца о пределе последовательности $\frac{p_n}{q_n}$, p_n, $q_n \to 0$.

   Теорема 0.2. *(Штольца.) Если $p_n, q_n \to 0, q_n \downarrow$ и $\exists lim \frac{p_{n+1}-p_n}{q_{n+1}-q_n}$, то $\lim \frac{p_n}{q_n} = \lim \frac{p_{n+1}-p_n}{q_{n+1}-q_n}$*

10. Покажите на примере, как с помощью теоремы Штольца можно уточнить асимптотическую оценку для частичной суммы ряда.

11. Пусть $\sum a_n$, $\sum a'_n$ - сходящиеся положительные ряды. Говорят, что ряд $\sum a'_n$ сходится быстрее ряда $\sum a_n$, если $a'_n = o(a_n)$. Докажите, что в этом случае также $r'_n = o(r_n)$, где r_n, r'_n - остатки соответствующих рядов.

    Рассмотрим остатки каждого из рядов. $r_n = S - S_N$, где S_N - частичная сумма ряда $\sum a_n$ и $S_N \to S$ при $N \to \infty$. Для $\sum a'_n$ аналогично $r'_n = S' - S'_N$, где S'_N - частичная сумма ряда $\sum a'_n$ и $S'_N \to S'$ при $N \to \infty$. Идёт речь о том, что ряд a'_n сходится быстрее ряда a_n, т.е. оба ряда сходятся и $S = S'$. Но, поскольку члены рядов находятся в отношении $a'_n = o(a_n)$, то мы можем сделать выводы о частичных суммах S_N и S'_N. $\forall N, S'_N = o(S_N)$, что указывает нам в результате на отношение между остатками $r'_n = o(r_n)$.

12. -

13. -

14. -

15. Сформулируйте признак Даламбера для положительного ряда

    Теорема 0.3. *Признак Даламбера. Пусть $a_n > 0$.*
    $\overline{\lim}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies$ *ряд* $\sum a_n$ *сходится.*
    $\underline{\lim}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies$ *ряд* $\sum a_n$ *расходится.*

16. Сформулируйте радикальный признак Коши для положительного ряда.

    Теорема 0.4. *Радикальный признак Коши. Пусть $a_n \geqslant 0$.*
    $\overline{\lim}\sqrt[n]{a_n} < 1 \implies$ *ряд* $\sum a_n$ *сходится.*
    $\underline{\lim}\sqrt[n]{a_n} > 1 \implies$ *ряд* $\sum a_n$ *расходится.*

17. Докажите, что всякий раз, когда признак Даламбера даёт ответ на вопрос о сходимости ряда, то радикальный признак Коши даёт тот же ответ на этот вопрос.

    Пусть $a_n > 0$. Тогда:

    $$\underline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \underline{\lim}\sqrt[n]{a_n} \leqslant \overline{\lim}\sqrt[n]{a_n} \leqslant \overline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

    Если $\overline{\lim}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \overline{\lim}\sqrt[n]{a_n} < 1$
    Если $\underline{\lim}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies \underline{\lim}\sqrt[n]{a_n} > 1$
    Если $\exists \lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, то $\overline{\lim}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \underline{\lim}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow \exists \lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

18. -

19. -

20. -

21. Сформулируйте признак Гаусса для положительного ряда. Приведите пример применения признака Гаусса.

    Если $\exists \delta > 0$, p: $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \dfrac{p}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^{1+\delta}}\right)$ то:

    $p > 1 \implies$ ряд $\sum a_n$ сходится.

    $p \leqslant 1 \implies$ ряд $\sum a_n$ расходится.

22. -

23. -

24. Что такое улучшение сходимости положительного ряда? Покажите на примере как можно улучшить сходимость ряда.

    Пусть у нас есть некоторый ряд $\sum a_n$ и он сходится медленно. В таких случаях для расчёта суммы ряда с необходимой точностью потребуется взять больше членов, что неудобно. Мы можем преобразовать наш ряд для улучшения сходимости, т.е. получить некоторый ряд $\sum a'_n$, который будет сходиться быстрее, чем исходный $\sum a_n$.

    Пример. Пусть у нас есть ряд $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+2} \approx \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$. Воспользуемся методом Куммера. Для улучшения сходимости будем брать ряды вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)} = 1, \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{4}, \ldots$.

    В данном случае нам подойдёт первый ряд в этом списке, поскольку $\dfrac{1}{n^2} \sim \dfrac{1}{n(n+1)}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2+2}-\frac{1}{n(n+1)}\right)=S-1 \implies S=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2+2}-\frac{1}{n(n+1)}\right).$$

$$\frac{1}{n^2+2}-\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n^2}\cdot\left(\frac{1}{\frac{2}{n^2}}-\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)=\frac{1}{n^2}\cdot\left(1-\frac{2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)-1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}-o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Получили ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$, который сходится быстрее, $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\approx\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2}$.

25. Дайте определения: знакопеременный ряд, знакочередующийся ряд, абсолютно сходящийся ряд, условно сходящийся ряд, положительная часть ряда, отрицательная часть ряда.

Определение 3. Пусть существует ряд $\sum a_n$. такой, что $\forall i$, a_i может быть, как больше 0, так и меньше 0. В таком случае ряд $\sum a_n$ называется знакопеременным.

Определение 4. Пусть существует ряд $\sum a_n$. такой, что $\forall i$, $a_i\cdot a_{i+1}<0$. В таком случае ряд $\sum a_n$ называется знакочередующимся.

Определение 5. Рассмотрим дополнительный ряд $\sum |a_n|$. В случае, когда он расходится, мы называем ряд $\sum a_n$ абсолютно сходящимся. Если $\sum |a_n|$ расходится, то $\sum a_n$ называется сходящимся условно.

Определение 6. Введем два ряда: $a_n^+=\begin{cases}a_n, a_n>0\\0\end{cases}$ и $a_n^-=\begin{cases}|a_n|, a_n<0\\0\end{cases}$. Тогда ряды $\sum a_n^+$ и a_n^- соответственно называются положительной и отрицательной частью ряда $\sum a_n$.

26. Докажите, что ряд сходится абсолютно ровно в том случае, когда сходятся его положительная и отрицательная части.

Доказательство. Рассмотрим ряд $\sum a_n$, дополнительный ряд $\sum |a_n|$, а также положительную и отрицательную части $\sum a_n^+$ и $\sum a_n^-$.

1) Пусть ряд $\sum a_n$ сходится абсолютно. В таком случае ряд $\sum |a_n|$ сходится, а так как члены рядов $\sum a_n^+$ и $\sum a_n^-$ все содержатся в ряде $\sum |a_n|$, то для всех их частичных сумм справедливо следующее: $P_k\leqslant A'_n$ и $Q_m\leqslant A'_n$, где P_k и Q_m - частичные суммы положительной и отрицательной части соответственно, а A'_n - частичная сумма дополнительного ряда и $A'_n=P_k+Q_m, n=m+k$. Это значит, что оба ряда $\sum a_n^+$ и $\sum a_n^-$ сходятся.

2) Исходя из того, что $S_n=P_k-Q_m, n=m+k$ и положительных и отрицательных элементов в $\sum a_n$ бесконечное множество, мы получаем, что при $n\to\infty$ одновременно $m\to\infty$ и $k\to\infty$. Переходя к пределу получаем, что исходный ряд сходится абсолютно и его сумма будет равна $P-Q$.

■

27. Докажите, что если ряд сходится условно, то его положительная и отрицательная части расходятся (имеют бесконечные суммы).

Доказательство. Рассмотрим ряд $\sum a_n$, дополнительный ряд $\sum |a_n|$, а также положительную и отрицательную части $\sum a_n^+$ и $\sum a_n^-$. Поскольку ряд $\sum a_n$ сходится условно, то $\sum |a_n|$ расходится. Рассмотри частичные суммы $\sum |a_n|$, $\sum a_n^+$ и $\sum a_n^-$ - A'_n, P_k, Q_m соответственно. Для любого $n=m+k$, $A'_n=P_k+Q_m$. При $n\to\infty$, $m\to\infty$ и $k\to\infty$. Так как ряд $\sum |a_n|$ расходится, то сумма $A'_n\to\infty$. Поскольку число положительных и отрицательных элементов бесконечно, то получаем $P_k\to\infty$ и $Q_m\to\infty$, а значит ряды $\sum a_n^+$ и $\sum a_n^-$ расходятся. ■

28. Сформулируйте мажорантный признак Вейерштрасса. Приведите пример применения признака

Теорема 0.5. *Если $|a_n|\leqslant b_n$ при $n>n_0$ и положительный ряд $\sum b_n$ сходится, то $\sum a_n$ сходится, причём абсолютно.*

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^p}$, $p>0$

$|sin(nx)|\leqslant 1 \implies \left|\frac{sin(nx)}{n^P}\right|\leqslant\frac{1}{n^p}$

$\sum\frac{1}{n^p}$ сходится $(p>1)\implies\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^p}$ сходится абсолютно.

29. Что такое группировка членов ряда? Докажите, что любой ряд, полученный из сходящегося ряда группировкой его членов, сходится и имеет ту же сумму

    Говорят, что ряд $\sum b_k$ получен из $\sum a_n$ группировкой членов, если $\exists n_1 < n_2 < \dots$:

    $b_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1}$

    $b_2 = a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \dots + a_{n_2}$

    $\dots$

    Замечание. Если $\sum a_n$ сходится, то ряд $\sum b_k$ сходится к той же сумме.

    Доказательство. $\sum\limits_{k=1}^{m} b_k = \sum\limits_{n=1}^{n_m} a_n$ ∎

    Обратное утверждение неверно: $(1-1) + (1-1) + \dots$

30. Как с помощью группировки преобразовать знакопеременный ряд в знакочередующийся? Что можно утверждать о сходимости полученного знакочередующегося ряда?

    Знакопеременный ряд при помощи группировки сводится к знакочередующемуся:

    $a_1 \leqslant 0, \dots, a_{n_1} \leqslant 0$; $b_1 = \sum\limits_{i=1}^{n_1} a_i \leqslant 0$

    $a_{n_1+1} \geqslant 0, \dots, a_{n_2} \geqslant 0$; $b_1 = \sum\limits_{i=n_1+1}^{n_2} a_i \leqslant 0$

    При такой группировке сходимость исходного ряда $\iff$ сходимость $\sum b_n$

31. Приведите пример преобразования знакопеременного ряда к знакочередующемуся.

    Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$

    $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$, где $b_k = (-1)^k$

    $|b_k| = \sum\limits_{n=[e^k]+1}^{[e^{k+1}]} \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{[e^k]+1} \cdot ([e^{k+1}] - [e^k]) \approx \dfrac{e^{k+1} - e^k}{e^k} \to e - 1 > 0$

32. -

33. Сформулируйте признак Лейбница для знакочередующегося ряда. Приведите пример применения признака Лейбница.

    Теорема 0.6. *Признак Лейбница. Если $u_n \downarrow 0$, то ряд сходится, причём $|r_n| \leqslant u_{n+1}$*

    Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^p}$, $p > 0$

    $\dfrac{1}{n^p} \downarrow 0 \implies$ ряд сходится (при $\forall p > 0$)

34. -

35. -

36. Сформулируйте признак Дирихле. Приведите пример его применения.

    $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$

    Теорема 0.7. *Признак Дирихле. Если $a_n \downarrow 0$, а частичные суммы $\left|\sum\limits_{n=1}^{N} b_n\right| \leqslant C$ ограничены, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ сходится.*

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(nx)}{n^p}$, $p > 0$

$a_n = \dfrac{1}{n^p} \downarrow 0$, $b_n = \sin nx$

$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_N = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin Nx = \dfrac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left((N+1/2)x\right)}{2\sin\frac{x}{2}}$; $\left|\sum\limits_{n=1}^{N} b_n\right| \leqslant \dfrac{2}{2\sin\frac{x}{2}} = \dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}}$

Ряд сходится по признаку Дирихле

37. Сформулируйте признак Абеля. Выведите утверждение признака Абеля из признака Дирихле.

Теорема 0.8. *Признак Абеля. Если a_n монотонна и ограничена, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ сходится.*

38. Что такое перестановка членов ряда? Приведите пример.

Пусть $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ – биекция

Говорят, что ряд $\sum b_n$ получен из $\sum a_n$ перестановкой членов, если $b_n = a_{f(n)}$

39. Сформулируйте свойство абсолютно сходящегося ряда, связанное с перестановкой членов. (теорема Римана)

Теорема 0.9. *(Римана) Если ряд $\sum a_n$ сходится условно, то для $\forall S \in [-\infty; +\infty]$ то $\exists$ перестановка f такая, что $\sum a_{f(n)} = S$*