

Математический Анализ - 2

Серёжа Рахманов | [telegram](#), [website](#)

Максим Николаев | [telegram](#)

Версия от 08.09.2020 12:09

Содержание

1	Лекция 1 - 01.09.2020 - Ряды	2
1.1	Определение ряда	2
1.2	Необходимое условие сходимости	2
1.3	Критерий Коши	2
1.4	Положительные ряды	3
1.5	Признаки сравнения	3
1.6	Отсутствие универсального ряда сравнения	4
2	Лекция 2 - 08.09.2020 - Положительные ряды	5
2.1	Признак Лобачевского-Коши	5
2.2	Теорема Штольца и оценка частичных сумм гармонического ряда	5
2.3	Признак Даламбера и радикальный признак Коши	6
2.4	Радикальный признак сильнее признака Даламбера	6
2.5	Признак Гаусса	6
2.6	Сравнение с интегралом	6
2.7	Улучшение сходимости ряда	7

1 Лекция 1 - 01.09.2020 - Ряды

1.1 Определение ряда

Определение 1. Пусть a_n – последовательность, т.е. $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Формальная бесконечная сумма: $a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

называется рядом. $S_N = \sum_{n=1}^N a_n$ – частичная сумма, сумма ряда: $S = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N$

Возможны 3 случая:

1. $\exists S \in \mathbb{R}$
2. $\exists S = \infty$
3. $\nexists S$

В первом случае говорят, что ряд сходится, иначе – что ряд расходится.

Пример.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0 + 0 + \dots + 0 = 0$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + \dots + 1 = \infty$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - \dots$ не существует

Определение 2. Если ряд сходится, т.е. $S_N \rightarrow S$ при $N \rightarrow \infty$, то $S - S_N = r_N$ – остаток ряда

$$r_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n, r_N \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty$$

1.2 Необходимое условие сходимости

Замечание. Если ряд сходится, то $a_n \rightarrow 0$

Доказательство. $a_n = S_n - S_{n-1} \rightarrow 0$, т.к. $S_n \rightarrow S$ и $S_{n-1} \rightarrow S$ ■

1.3 Критерий Коши

Определение 3. a_n называется фундаментальной, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > m > N \implies |S_n - S_m| < \varepsilon$

Теорема 1.1. S_n – сходится $\Leftrightarrow S_n$ – фундаментальная

Доказательство. $S_n - S_m = \sum_{k=m+1}^n a_k$ Тогда $\sum a_n$ – сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > m > N |a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n| < \varepsilon$ ■

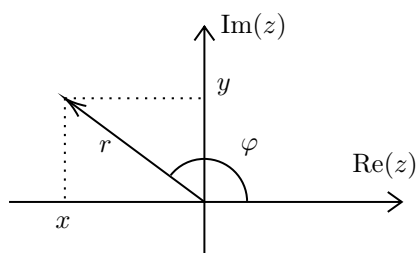
Пример.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Заметим, что $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} \right) = 1 - \frac{1}{N+1} \rightarrow 1$

Этот ряд сходится при $N \rightarrow \infty$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

2. $z \in \mathbb{C}, z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$



Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots$

$$S_N = 1 + z + z^2 + \dots + z^N = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z}$$

Ряд сходится $\Leftrightarrow |z| < 1$

$$|z| < 1 \Rightarrow z^n \rightarrow 0, S_N = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z} \rightarrow \frac{1}{1 - z}$$

1.4 Положительные ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \geq 0, S_n \uparrow, \text{ т.к. } S_{n+1} \geq S_n$$

Возможны 2 случая:

$$1. \exists S \in \mathbb{R}$$

$$2. \exists S = \infty$$

Обозначение 1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ – ряд сходится, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ – ряд расходится.

1.5 Признаки сравнения

1. Сравнение с помощью неравенства.

$$a_n \leq b_n \text{ при всех } n \geq n_0$$

$$\text{Ряд } \sum b_n \text{ сходится} \Rightarrow \text{ряд } \sum a_n \text{ сходится}$$

$$\text{Ряд } \sum a_n \text{ расходится} \Rightarrow \text{ряд } \sum b_n \text{ расходится}$$

2. Сравнение отношений.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \text{ при всех } n \geq n_0$$

$$\text{Ряд } \sum b_n \text{ сходится} \Rightarrow \text{ряд } \sum a_n \text{ сходится}$$

$$\text{Ряд } \sum a_n \text{ расходится} \Rightarrow \text{ряд } \sum b_n \text{ расходится}$$

Доказательство.

$$a_{n_0+1} \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+1}$$

$$a_{n_0+2} \leq \frac{a_{n_0+1}}{b_{n_0+1}} \cdot b_{n_0+2} \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+2}$$

\vdots

$$a_{n_0+k} \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+k} \Rightarrow \sum_{n=n_0}^N a_n \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot \sum_{n=n_0}^N b_n$$

■

3. Сравнение с помощью предела.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0; +\infty) \Rightarrow \text{сходимость } \sum a_n \Leftrightarrow \text{сходимость } \sum b_n$$

Доказательство.

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$$

$$\forall \varepsilon \exists n_0 : c - \varepsilon \leq \frac{a_n}{b_n} \leq c + \varepsilon, \forall n \geq n_0$$

$$\text{Возьмём } \varepsilon : c - \varepsilon > 0 \Rightarrow (c - \varepsilon) \cdot b_n \leq a_n \leq (c + \varepsilon) \cdot b_n$$

Сходимость следует из правой части неравенства, а расходимость из левой.

■

1.6 Отсутствие универсального ряда сравнения

Предложение. Не существует ряда $\sum c_n$, $c_n > 0$:

- 1) $\frac{a_n}{c_n} \rightarrow 0 \implies$ ряд $\sum a_n$ сходится.
- 2) $\frac{b_n}{c_n} \rightarrow \infty \implies$ ряд $\sum b_n$ расходится.

Доказательство.

1. Если ряд $\sum c_n$ расходится, то пусть $S_N = \sum_{n=1}^N c_n \rightarrow \infty, S_0 = 0$, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}})}_{a_n}$ расходится так как:

$$(a) \sum_{n=1}^N (\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}}) = \sqrt{S_1} - \sqrt{S_0} + \sqrt{S_2} - \sqrt{S_1} + \dots + \sqrt{S_N} - \sqrt{S_{N-1}} = \sqrt{S_N} - \sqrt{S_0} = \sqrt{S_N} \rightarrow \sqrt{S}$$

$$(b) \frac{\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}}}{c_n} = \frac{\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}}}{S_n - S_{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}}} \implies \frac{a_n}{c_n} \rightarrow 0$$

Ряд расходится, но по предположению сходится, получили противоречие.

2. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, то рассмотрим r_n - его n -ый остаток, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n})}_{b_n}, r_0 = S = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, так как:

$$(a) \sum_{n=1}^N (\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}) = \sqrt{r_0} - \sqrt{r_1} + \sqrt{r_1} - \sqrt{r_2} + \dots + \sqrt{r_{N-1}} - \sqrt{r_N} = \sqrt{r_0} - \sqrt{r_N} = \sqrt{S} - \sqrt{r_N} \rightarrow \sqrt{S}, \text{ т.к. } r_N \rightarrow 0$$

$$(b) \frac{\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}}{c_n} = \frac{\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}}{r_{n-1} - r_n} = \frac{1}{\sqrt{r_{n-1}} + \sqrt{r_n}} \rightarrow \infty, \text{ т.к. } \sqrt{r_{n-1}} \rightarrow 0 \text{ и } \sqrt{r_n} \rightarrow 0$$

Ряд сходится, но по предположению расходится, получили противоречие.

■

2 Лекция 2 - 08.09.2020 - Положительные ряды

2.1 Признак Лобачевского-Коши

Предложение. Пусть $a_n > 0$ и $a_n \downarrow$

Тогда ряды $\sum a_n$ и $\sum 2^n \cdot a_{2^n}$ ведут себя одинаково

Доказательство. $a_1 + (a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + \dots + a_8) + \dots$

$$a_2 \leq a_1$$

$$a_2 \leq a_2$$

$$a_3 + a_4 \leq 2a_2$$

$$a_3 + a_4 \geq 2a_4$$

$$a_5 + \dots + a_8 \leq 4a_4$$

$$a_5 + \dots + a_8 \geq 4a_8$$

...

$$a_1 + \sum_{n=0}^{m-1} 2^n a_{2^n} \leq \sum_{n=1}^{2^m} a_n \leq a_1 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^m 2^n a_{2^n}$$

■

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ – обобщённый гармонический ряд, $p > 0$

$$a_n = \frac{1}{n^p} \downarrow a_{2^n} = \frac{1}{(2^n)^p}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}} \right)^n$$

Это сумма геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{2^{p-1}}$

$q < 1 \iff p > 1$ – ряды сходятся, иначе расходятся

Пример. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^p n}, p > 0$

$$\frac{1}{n \cdot \ln^p n} \downarrow, a_{2^n} = \frac{1}{2^n \cdot \ln^p 2^n} = \frac{1}{2^n \cdot n^p \cdot \ln^p 2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \cdot n^p \cdot \ln^p 2} = \frac{1}{\ln^p 2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

2.2 Теорема Штольца и оценка частичных сумм гармонического ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

$$A_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} - \ln n$$

$$B_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$$

$$A_n \uparrow, B_n \downarrow$$

$$B_n > A_n$$

$$B_1 > B_2 > \dots > B_n > B_n > \dots A_1 \forall n \in \mathbb{N}$$

$$B_n - A_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

Значит, $\exists \lim A_n = \lim B_n = \gamma \approx 0.5772 \dots$ – число Эйлера-Маскерони

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \ln N + \gamma + o(1)$$

Теорема 2.1. (Штольца.) Если $p_n, q_n \rightarrow 0, q_n \downarrow$ и $\exists \lim \frac{p_{n+1} - p_n}{q_{n+1} - q_n}$, то $\lim \frac{p_n}{q_n} = \lim \frac{p_{n+1} - p_n}{q_{n+1} - q_n}$

Пример. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln N - \gamma}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} - \ln(1 + \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} - 1)}$

$$1 + \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\text{Получаем, что } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

2.3 Признак Даламбера и радикальный признак Коши

Теорема 2.2. *Признак Даламбера.* Пусть $a_n > 0$. $\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies$ ряд $\sum a_n$ сходится. $\underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies$ ряд $\sum a_n$ расходится.

Теорема 2.3. *Радикальный признак Коши.* Пусть $a_n \geq 0$. $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} < 1 \implies$ ряд $\sum a_n$ сходится. $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} > 1 \implies$ ряд $\sum a_n$ расходится.

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{n!}$

$$a_n = \frac{p^n}{n!}, \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{p^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{p^n} = \frac{p}{n+1} \rightarrow 0 \implies \text{ряд сходится}$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{p^n}{n!}} = \frac{p}{\sqrt[n]{n!}} \rightarrow 0 \implies \text{ряд сходится.}$$

2.4 Радикальный признак сильнее признака Даламбера

Пусть $a_n > 0$. Тогда:

$$\underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} < 1$$

$$\underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} < 1$$

2.5 Признак Гаусса

Если $\exists \delta > 0, p: \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right)$ то:

$$p \leq 1 \implies \text{ряд } \sum a_n \text{ расходится}$$

$$p > 1 \implies \text{ряд } \sum a_n \text{ сходится}$$

2.6 Сравнение с интегралом

Рассмотрим $f(x) \downarrow$ при $x \geq n_0 - 1$ и ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$, где $a_n = f(n)$

$$f(n+t) \leq a_n \leq f(n-1+t), t \in [0; 1]$$

$$\int_n^{n+1} f(x) dx \leq a_n \leq \int_{n-1}^n f(x) dx$$

$$\int_{n_0}^{N+1} f(x) dx \leq \sum_{n=n_0}^N a_n \leq \int_{n_0-1}^N f(x) dx$$

$$\implies \sum a_n \text{ ведёт себя как несобственный интеграл } \int_{n_0-1}^{\infty} f(x) dx$$

2.7 Улучшение сходимости ряда

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2 + 2} - \frac{1}{n(n+1)} \right) &\approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \end{aligned}$$