Линейная алгебра

Бобень Вячеслав
@darkkeks, GitHub
Большую часть исходного кода предоставила Левина Александра.
Благодарность выражается Левину Александру за видеозаписи лекций.

2019 — 2020

> “К коллоку можете даже не готовиться”.
>
> — Роман Сергеевич Авдеев

Содержание

1 Лекция 9.09.2019 **6**
- 1.1 Матрицы . . . 6
- 1.2 Операции над матрицами . . . 6
- 1.3 Пространство $\mathbb{R}^n$, его отождествление с матрицами-столбцами высоты n . . . 6
- 1.4 Транспонирование матриц, его простейшие свойства . . . 7
- 1.5 Умножение матриц . . . 7

2 Лекция 12.09.2019 **9**
- 2.1 Отступление о суммах . . . 9
- 2.2 Основные свойства умножения матриц . . . 9
- 2.3 Диагональные матрицы . . . 10
- 2.4 Единичная матрица и её свойства . . . 10
- 2.5 След квадратной матрицы и его свойства . . . 11
- 2.6 Системы линейных уравнений. . . . 11
  - 2.6.1 Совместные и несовместные системы . . . 12
  - 2.6.2 Матричная форма записи СЛУ . . . 12

3 Лекция 14.09.2019 **13**
- 3.1 Расширенная матрицы системы линейных уравнений . . . 13
- 3.2 Эквивалентные системы . . . 13
- 3.3 Как решить СЛУ? . . . 13
  - 3.3.1 Элементарные преобразования СЛУ и соответствующие преобразования строк её расширенной матрицы . . . 13
  - 3.3.2 Сохранение множества решений системы линейных уравнений при элементарных преобразованиях 14
- 3.4 Ступенчатые матрицы . . . 14
  - 3.4.1 Улучшенный ступенчатый вид матрицы . . . 14
- 3.5 Реализация элементарных преобразований строк матрицы при помощи умножения слева на подходящую матрицу . . . 15

4 Лекция 19.09.2019 **16**
- 4.1 Метод Гаусса решения систем линейных уравнений . . . 16
- 4.2 Однородные системы линейных уравнений . . . 17
- 4.3 Связь между множеством решений системы линейных уравнений и множеством решений соответствующей однородной системы. . . . 17
- 4.4 Матричные уравнения вида $AX = B$ и $XA = B$, общий метод их решения . . . 17
- 4.5 Обратные матрицы . . . 18
- 4.6 Перестановки на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$ . . . 18

5 Лекция 23.09.2019 **19**
5.1 Инверсии в перестановке . . . 19
5.2 Знак и чётность перестановки . . . 19
5.3 Произведение перестановок . . . 19
5.4 Ассоциативность произведения перестановок . . . 19
5.5 Тождественная перестановка . . . 19
5.6 Обратная перестановка и её знак . . . 20
5.7 Теорема о знаке произведения перестановок . . . 20
5.8 Транспозиции, знак транспозиции . . . 20
5.9 Определитель квадратной матрицы . . . 21
5.10 Определители порядков 2 и 3 . . . 21

6 Лекция 26.09.2019 **22**
6.1 Свойства определителей . . . 22
6.2 Поведение определителя при элементарных преобразованиях строк (столбцов) . . . 24

7 Лекция 30.09.2019 **25**
7.1 Определитель с углом нулей . . . 25
7.2 Определитель произведения матриц . . . 25
7.3 Дополнительные миноры и алгебраические дополнения к элементам квадратной матрицы . . . 26
7.4 Лемма об определителе матрицы, содержащей ровно один ненулевой элемент в некоторой строке . . . 26
7.5 Разложение определителя по строке (столбцу) . . . 26
7.6 Лемма о фальшивом разложении определителя . . . 27
7.7 Обратная матрица, её единственность . . . 27
7.8 Невырожденные матрицы . . . 27
7.9 Определитель обратной матрицы . . . 27
7.10 Присоединённая матрица . . . 27
7.11 Критерий обратимости квадратной матрицы, явная формула для обратной матрицы . . . 27

8 Лекция 2.11.2019 **29**
8.1 Следствия из критерия обратимости квадратной матрицы . . . 29
8.2 Формулы Крамера . . . 29
8.3 Понятие поля. . . . 29
8.4 Простейшие примеры. . . . 29
8.5 Построение поля комплексных чисел. . . . 30
8.5.1 Формальная конструкция поля $\mathbb{C}$ . . . 30
8.5.2 Проверка аксиом . . . 30
8.6 Алгебраическая форма комплексного числа, его действительная и мнимая части. . . . 31
8.7 Комплексное сопряжение. . . . 31
8.7.1 Свойства комплексного сопряжения . . . 31
8.8 Геометрическая модель комплексных чисел, интерпретация сложения и сопряжения в этой модели. . . . 31

9 Лекция 7.11.2019 **32**
9.1 Модуль комплексного числа, его свойства . . . 32
9.2 Аргумент комплексного числа . . . 32
9.3 Тригонометрическая форма комплексного числа . . . 32
9.4 Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме . . . 33
9.5 Возведение в степень комплексных чисел в тригонометрической форме, формула Муавра . . . 33
9.6 Извлечение корней из комплексных чисел . . . 33
9.7 Основная теорема алгебры комплексных чисел (без доказательства) . . . 33
9.8 Деление многочленов с остатком . . . 34
9.9 Теорема Безу . . . 34
9.10 Кратность корня многочлена . . . 34
9.11 Утверждение о том, что всякий многочлен степени n с комплексными коэффициентами имеет ровно n корней с учётом кратностей . . . 34

10 Лекция 14.11.2019 **35**
10.1 Векторные пространства, простейшие следствия из аксиом . . . 35
10.1.1 Определение векторного пространства . . . 35
10.1.2 Простейшие следствия из аксиом . . . 35
10.2 Подпространства векторных пространств . . . 36
10.3 Утверждение о том, что множество решений однородной системы линейных уравнений с n неизвестными является подпространством в F^n . . . 36
10.4 Линейная комбинация конечного набора векторов . . . 36

10.5 Линейная оболочка подмножества векторного пространства, примеры . . . 36

11 Лекция 21.11.2019 **37**

11.1 Утверждение о том, что линейная оболочка системы векторов является подпространством объемлющего векторного пространства . . . 37
11.2 Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов . . . 37
11.3 Критерий линейной зависимости конечного набора векторов . . . 38
11.4 Основная лемма о линейной зависимости . . . 38
11.5 Базис векторного пространства . . . 39
11.6 Конечномерные и бесконечномерные векторные пространства . . . 39
11.7 Независимость числа элементов в базисе векторного пространства от выбора базиса . . . 39
11.8 Размерность конечномерного векторного пространства . . . 39

12 Лекция 28.11.2019 **40**

12.1 Характеризация базисов в терминах единственности линейного выражения векторов . . . 40
12.2 Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений . . . 40
12.3 Метод построения фундаментальной системы решений . . . 40
12.4 Утверждение о возможности выбора из конечной системы векторов базиса её линейной оболочки . . . 42
12.5 Дополнение конечной линейно независимой системы векторов до базиса конечномерного векторного пространства . . . 42
12.6 Лемма о добавлении вектора к конечной линейной независимой системе . . . 42

13 Лекция 5.12.2019 **43**

13.1 Размерность подпространства конечномерного векторного пространства . . . 43
13.2 Ранг системы векторов . . . 43
13.3 Связь ранга системы векторов с размерностью её линейной оболочки . . . 43
13.4 Ранг матрицы: столбцовый и строковый . . . 43
13.5 Сохранение линейных зависимостей между столбцами матрицы при элементарных преобразованиях строк 44
13.6 Инвариантность столбцового и строкового рангов матрицы при элементарных преобразованиях строк и столбцов . . . 44
13.7 Столбцовый и строковый ранги матрицы, имеющей улучшенный ступенчатый вид . . . 44
13.8 Равенство столбцового и строкового рангов матрицы . . . 45
13.9 Связь ранга квадратной матрицы с её определителем . . . 45
13.10 Подматрицы . . . 45
13.11 Связь рангов матрицы и её подматрицы . . . 45

14 Лекция 12.12.2019 **46**

14.1 Миноры . . . 46
14.2 Теорема о ранге матрицы . . . 46
14.3 Приложения ранга матрицы к исследованию СЛУ . . . 46
14.3.1 Теорема Кронекера-Капелли . . . 46
14.3.2 Критерий существования единственного решения у совместной системы линейных уравнений в терминах ранга её матрицы коэффициентов . . . 46
14.3.3 Критерий существования единственного решения у системы линейных уравнений с квадратной матрицей коэффициентов в терминах её определителя . . . 47
14.3.4 Размерность пространства решений однородной системы линейных уравнений в терминах ранга её матрицы коэффициентов . . . 47
14.3.5 Реализация подпространства в F^n в качестве множества решений однородной системы линейных уравнений . . . 47
14.4 Координаты вектора по отношению к фиксированному базису векторного пространства . . . 47
14.5 Описание всех базисов конечномерного векторного пространства в терминах одного базиса и матриц координат . . . 48
14.6 Матрица перехода от одного базиса конечномерного векторного пространства к другому . . . 48
14.7 Формула преобразования координат вектора при замене базиса . . . 48

15 Лекция 9.01.2020 **50**

15.1 Сумма двух подпространств векторного пространства . . . 50
15.2 Связь размерностей двух подпространств с размерностями их суммы и пересечения . . . 50
15.3 Сумма нескольких подпространств векторного пространства . . . 51
15.4 Линейно независимые подпространства, пять эквивалентных условий . . . 51
15.5 Разложение векторного пространства в прямую сумму нескольких подпространств . . . 52
15.6 Проекция вектора на подпространство вдоль дополнительного подпространства . . . 52

16 Лекция 16.01.2020 53
16.1 Линейные отображения векторных пространств 53
16.2 Примеры линейных отображений 53
16.2.1 Пример 0 53
16.2.2 Пример 1 53
16.2.3 Пример 2 53
16.2.4 Пример 3 54
16.2.5 Пример 4 54
16.2.6 Пример 5 54
16.3 Простейшие свойства линейных отображений 54
16.4 Изоморфизм векторных пространств 54
16.5 Отображение, обратное к изоморфизму 55
16.6 Композиция двух линейных отображений, композиция двух изоморфизмов 55
16.7 Изоморфные векторные пространства 55
16.8 Отношение изоморфности на множестве всех векторных пространств 55
16.9 Классы изоморфизма векторных пространств 55
16.10 Критерий изоморфности двух конечномерных векторных пространств 56
16.11 Задание линейного отображения путём задания образов векторов фиксированного базиса 56

17 Лекция 23.01.2020 57
17.1 Матрица линейного отображения 57
17.2 Примеры 57
17.3 Связь координат вектора и его образа при линейном отображении 58
17.4 Формула изменения матрицы линейного отображения между векторными пространствами V и W при замене их базисов 58
17.5 Операции сложения и умножения на скаляр на множестве всех линейных отображений между двумя векторными пространствами 59
17.6 Матрица суммы двух линейных отображений и произведения линейного отображения на скаляр 59
17.7 Изоморфизм между пространством $\mathrm{Hom}(V,W)$ и пространством $(m\times n)$-матриц, где $n = \dim V$, $m = \dim W$ 59
17.8 Матрица композиции двух линейных отображений 59
17.9 Ядро и образ линейного отображения; утверждение о том, что они являются подпространствами в соответствующих векторных пространствах 60

18 Лекция 25.01.2020 61
18.1 Критерий инъективности линейного отображения в терминах его ядра 61
18.2 Характеризация изоморфизмов в терминах их ядер и образов 61
18.3 Связь размерности образа линейного отображения с рангом его матрицы 61
18.4 Инвариантность ранга матрицы относительно умножения на квадратную невырожденную матрицу слева или справа 61
18.5 Свойство образов векторов, дополняющих базис ядра до базиса всего пространства 62
18.6 Теорема о связи размерностей ядра и образа линейного отображения 62
18.7 Приведение матрицы линейного отображения к диагональному виду с единицами и нулями на диагонали 62
18.8 Линейные функции на векторном пространстве 62
18.9 Примеры 62
18.10 Двойственное (сопряжённое) векторное пространство, его размерность в конечномерном случае 63
18.11 Двойственный базис 63

19 Лекция 6.02.2020 64
19.1 Утверждение о том, что всякий базис сопряжённого пространства двойствен некоторому базису исходного пространства 64
19.2 Билинейные формы на векторном пространстве 64
19.3 Примеры 64
19.3.1 64
19.3.2 64
19.3.3 64
19.4 Матрица билинейной формы по отношению к фиксированному базису 65
19.5 Существование и единственность билинейной формы с заданной матрицей 65
19.6 Формула изменения матрицы билинейной формы при переходе к другому базису 65
19.7 Ранг билинейной формы 66
19.8 Симметричные билинейные формы 66
19.9 Критерий симметричности билинейной формы в терминах её матрицы в каком-либо базисе 66
19.10 Квадратичные формы на векторном пространстве 66
19.11 Примеры 66

19.11.1 . . . 66
19.11.2 . . . 67
19.11.3 . . . 67
19.12 Соответствие между симметричными билинейными формами и квадратичными формами . . . 67

20 Лекция 13.02.2020 **68**
20.1 Симметризация билинейной формы и поляризация квадратичной формы . . . 68
20.2 Канонический вид квадратичной формы . . . 68
20.3 Теорема о приведении квадратичной формы к каноническому виду. Метод Лагранжа . . . 68
20.4 Угловые миноры матрицы квадратичной формы . . . 69
20.5 Метод Якоби приведения квадратичной формы к каноническому виду . . . 70
20.6 Нормальный вид квадратичной формы над полем $\mathbb{R}$ . . . 71
20.7 Приведение квадратичной формы над R к нормальному виду . . . 71

1 Лекция 9.09.2019

1.1 Матрицы

Определение 1. *Матрица размера* $n \times m$ — это прямоугольная таблица высоты m и ширины n.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ij} – элемент на пересечении i-й строки и j-го столбца

Краткая запись – $A = (a_{ij})$

Множество всех матриц размера $m \times n$ с коэффициентами из $\mathbb{R}$ (множество всех действительных чисел) — $\mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$ или $\mathrm{Mat}_{n\times m}$

Определение 2. Две матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{n\times m}$ и $B \in \mathrm{Mat}_{p\times q}$ называются *равными*, если $m = p$, $n = q$, и соответствующие элементы равны

Пример. $\begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix}$

1.2 Операции над матрицами

Для любых $A, B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$

- *Сложение* $A + B := (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$
- *Умножение на скаляр* $\lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda A := (\lambda a_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$

Свойства суммы и произведения на скаляр

$\forall A, B, C \in \mathrm{Mat}_{m\times n} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

1) $A + B = B + A$ (коммутативность)
2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (ассоциативность)
3) $A + 0 = 0 + A = A$, где
$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ — нулевая матрица.}$$
4) $A + (-A) = 0$
$-A = (-a_{ij})$ – противоположная матрица
5) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
6) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
7) $\lambda(\mu A) = \lambda(\mu A)$
8) $1A = A$

Упражнение на дом. *Доказать эти свойства.*

Замечание. Из свойств 1) – 8) следует, что $\mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$ является векторным пространством над $\mathbb{R}$

1.3 Пространство $\mathbb{R}^n$, его отождествление с матрицами-столбцами высоты n

$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\ \forall i = 1, \dots, n\}$

$\mathbb{R}$ – числовая прямая

$\mathbb{R}^2$ – плоскость

$\mathbb{R}^3$ – трехмерное пространство

Договоримся отождествлять $\mathbb{R}^n$ со столбцами высоты n

$(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – *вектор столбец*

$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\ \forall i = 1, \dots, n \right\} = \mathrm{Mat}_{n\times 1}(\mathbb{R})$

$\left[x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \right] \implies [x = y \iff x_i = y_i\ \forall i]$

$x + y := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$

$\lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda x_i := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$

1.4 Транспонирование матриц, его простейшие свойства

$$A \in \mathrm{Mat}_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A^T \in \mathrm{Mat}_{n\times m} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ — \textit{транспонированная матрица.}}$$

Свойства:
1) $(A^T)^T = A$
2) $(A + B)^T = A^T + B^T$
3) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

Пример. $\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Пример. $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}$

Пример. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

1.5 Умножение матриц

Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$

$A_{(i)} = \left(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}\right)$ — i-я строка матрицы A

$A^{(j)} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ — j-й столбец матрицы A

1) Частный случай: умножение строки на столбец той же длинны

$$\underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_{1\times n}\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{n\times 1} = x_1 \cdot y_1 + \dots + x_n \cdot y_n$$

2) Общий случай:

A – матрица размера $m \times \underline{n}$

B – матрица размера $\underline{n} \times p$

$AB := C \in \mathrm{Mat}_{m\times p}$, где

$$C_{ij} = A_{(i)}B^{(j)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Количество столбцов матрицы A равно количеству строк матрицы B — условие согласованности матриц.

Пример. $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_2y_1 & \dots & x_ny_1 \\ x_1y_2 & x_2y_2 & \dots & x_ny_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1y_n & x_2y_m & \dots & x_ny_m \end{pmatrix}$

Пример. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 0\cdot 0 + 2\cdot 1 & 1\cdot(-1) + 0\cdot 5 + 2\cdot 1 \\ 0\cdot 2 + (-1)\cdot 0 + 3\cdot 1 & 0\cdot(-1) + (-1)\cdot 5 + 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

2 Лекция 12.09.2019

2.1 Отступление о суммах

Пусть $S_p, S_{p+1}, \dots, S_q$ – набор чисел.

Тогда, $\sum_{i=p}^{q} S_i := S_p + S_{p+1} + \dots + S_q$ – сумма по i от p до q

Например, $\sum_{i=1}^{100} i^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + 100^2$

Свойства сумм:

1. $\lambda \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda S_i$
2. $\sum_{i=1}^{n} (S_i + T_i) = \sum_{i=1}^{n} S_i + \sum_{i=1}^{n} T_i$
3. $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} S_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} S_{ij}$ — сумма всех элементов матрицы $S = (S_{ij})$

2.2 Основные свойства умножения матриц

Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n},\ B \in \mathrm{Mat}_{n\times p}$

1. $\underbrace{A(B+C)}_{x} = \underbrace{AB + AC}_{y}$ — левая дистрибутивность.

   Доказательство.

$$\begin{aligned} x_{ij} = A_{(i)}(B+C)^{(j)} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} \\ &= A_{(i)}B^{(j)} + A_{(i)}C^{(j)} = y_{ij}. \end{aligned}$$

■

2. $(A+B)C = AC + BC$ — правая дистрибутивность, доказывается аналогично.
3. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
4. $(AB)C = A(BC)$ — ассоциативность.

   Доказательство. $\underbrace{(AB)}_{u}C = x,\ A\underbrace{(BC)}_{v} = y.$

$$\begin{aligned} x_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} u_{ik} \cdot c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{p} a_{il}b_{lk} \right) c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} (a_{il}b_{lk}c_{kj}) \\ &= \sum_{l=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} (a_{il}b_{lk}c_{kj}) = \sum_{l=1}^{p} a_{il} \sum_{k=1}^{n} (b_{lk}c_{kj}) = \sum_{l=1}^{p} a_{il}v_{lj} = y_{ij}. \end{aligned}$$

■

5. $\underbrace{(AB)^T}_{x} = \underbrace{B^T A^T}_{y}.$

   Доказательство.

$$\begin{aligned} x_{ij} = [AB]_{ji} = A_{(j)}B^{(i)} &= \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \cdot b_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^{n} b_{ki} \cdot a_{jk} = B^T_{(i)}(A^T)^{(j)} = y_{ij}. \end{aligned}$$

■

Умножение матриц не коммутативно.
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Определение 3. $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}$ называется *квадратной матрицей* порядка n

Обозначение $M_n := \mathrm{Mat}_{n\times n}$
$A \in M_n$

2.3 Диагональные матрицы

Определение 4. Матрица $A \in M_n$ называется *диагональной* если все ее элементы вне главной диагонали равны нулю ($a_{ij} = 0$ при $i \neq j$)

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} \implies A = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Лемма 2.1. $A = diag(a_1, \dots, a_n) \in M_n \implies$

1. $\forall B \in \mathrm{Mat}_{n\times p} \implies AB = \begin{pmatrix} a_1 B_{(1)} \\ a_2 B_{(2)} \\ \vdots \\ a_n B_{(n)} \end{pmatrix}$

2. $\forall B \in \mathrm{Mat}_{m\times n} \implies BA = \begin{pmatrix} a_1 B^{(1)} & a_2 B^{(2)} & \dots & a_n B^{(n)} \end{pmatrix}$

Доказательство.

1. $[AB]_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_i & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_i b_{ij}$

2. $[BA]_{ij} = \begin{pmatrix} b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{im} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ a_j \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = b_{ij} a_j$

■

2.4 Единичная матрица и её свойства

Определение 5. Матрица $E = E_n = diag(1, 1, \dots, 1)$ называется *единичной матрицей* порядка n.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Свойства:

1. $EA = A \quad \forall A \in \mathrm{Mat}_{n\times p}$.

2. $AE = A \quad \forall A \in \mathrm{Mat}_{p\times n}$.

3. $AE = EA = A \quad \forall A \in M_n$.

2.5 След квадратной матрицы и его свойства

Определение 6. *Следом* матрицы $A \in M_n$ называется число $trA = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Свойства:

1. $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$.
2. $\operatorname{tr} \lambda A = \lambda \operatorname{tr} A$.
3. $\operatorname{tr} A^T = \operatorname{tr} A$.
4. $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.
   $\forall A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}, B \in \mathrm{Mat}_{n\times m}$.

   Доказательство. $AB = x \in M_m$, $BA = y \in M_n$.

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} x = \sum_{i=1}^{m} x_{ii} &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}b_{ji}) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(b_{ji}a_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} y_{jj} = \operatorname{tr} y.\end{aligned}$$ ■

Пример. $A = (1,2,3), B = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$

$tr(AB) = tr(1\cdot 4 + 2\cdot 5 + 3\cdot 6) = 32$

$tr(BA) = \operatorname{tr}\begin{pmatrix}4 & 8 & 12\\ 5 & 10 & 15\\ 6 & 12 & 18\end{pmatrix} = 4 + 10 + 18 = 32$

2.6 Системы линейных уравнений.

Линейное уравнение: $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$.
$a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$ – коэффициенты.
$x_1, x_2, \ldots, x_n$ – неизвестные.

Система линейных уравнений (СЛУ):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

m уравнений, n неизвестных

Определение 7.

1. *Решение одного уравнения* – это такой набор значений неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, при подстановке которого в уравнение получаем тождество.
2. *Решение СЛУ* – такой набор значений неизвестных, который является решением каждого уравнения СЛУ.

Основная задача: решить СЛУ, т.е. найти все решения.

Пример. $n = m = 1$
$ax = b$, $a, b \in \mathbb{R}$, x – неизвестная

1. $a \neq 0 \implies x = \frac{b}{a}$ – единственное
2. $a = 0 \implies 0x = b$
   $b \neq 0 \implies$ решений нет.
   $b = 0 \implies x$ – любое $\implies$ бесконечно много решений.

2.6.1 Совместные и несовместные системы

Определение 8. СЛУ называется
– *совместной*, если у нее есть хотя бы одно решение,
– *несовместной*, если решений нет.

2.6.2 Матричная форма записи СЛУ

$AX = B$.

$$A \in Mat_{m\times n}(R) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ — матрица коэффициентов}$$

$$B \in \mathrm{Mat}_{m\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ — столбец правых частей}$$

$$X \in \mathrm{Mat}_{m\times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ — столбец неизвестных}$$

3 Лекция 14.09.2019

3.1 Расширенная матрицы системы линейных уравнений

$Ax = b$, $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$
Полная информация о СЛУ содержится в её *расширенной матрице.*

$$\big(A \mid b\big) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

3.2 Эквивалентные системы

Определение 9. Две системы уравнений от одних и тех же неизвестных называются *эквивалентными*, если они имеют одинаковые множества решений.

Пример. Рассмотрим несколько СЛУ

A) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \iff \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$

B) $\begin{cases} 2x_1 = 1 \\ 2x_2 = 1 \end{cases} \iff \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$

C) $x_1 + x_2 = 1 \iff \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

A и B эквиваленты, так как обе имеют единственное решение $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
A и C не эквивалентны, так как C имеет бесконечно много решений.

3.3 Как решить СЛУ?

Идея: выполнить преобразование СЛУ, сохраняющее множество её решений, и привести её к такому виду, в котором СЛУ легко решается.

Пример. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = b_1 \\ x_2 = b_2 \\ \vdots \\ x_n = b_n \end{cases}$

3.3.1 Элементарные преобразования СЛУ и соответствующие преобразования строк её расширенной матрицы

тип	СЛУ	расширенная матрица
1.	К i-му уравнению прибавить j-ое, умноженное на $\lambda \in \mathbb{R}$ $(i \neq j)$	$Э_1(i, j, \lambda)$
2.	Переставить i-е и j-е уравнения $(i \neq j)$	$Э_2(i, j)$
3.	Умножить i-ое уравнение на $\lambda \neq 0$	$Э_3(i, \lambda)$

1. $Э_1(i, j, \lambda)$: к i-ой строке прибавить j-ую, умноженную на λ (покомпонентно),
   $a_{ik} \mapsto a_{ik} + \lambda a_{jk}$ $\forall k = 1, \dots, n$,
   $b_i \mapsto b_i + \lambda b_j$.
2. $Э_2(i, j)$: переставить i-ую и j-ую строки.
3. $Э_3(i, \lambda)$: умножить i-ю строку на λ (покомпонентно).

$Э_1, Э_2, Э_3$ называются *элементарными преобразованиями строк расширенной матрицы.*

3.3.2 Сохранение множества решений системы линейных уравнений при элементарных преобразованиях

Лемма 3.1. Элементарные преобразования СЛУ не меняют множество решений

Доказательство. Пусть мы получили СЛУ($\star\star$) из СЛУ($\star$) путем применения элементарных преобразований.
1. Всякое решение системы ($\star$) является решением ($\star\star$).
2. ($\star$) получается из ($\star\star$) путем элементарных преобразований.

$(\star) \to (\star\star)$	$(\star\star) \to (\star)$
$Э_1(i,j,\lambda)$	$Э_1(i,j,-\lambda)$
$Э_2(i,j)$	$Э_2(i,j)$
$Э_3(i,\lambda)$	$Э_3(i,\frac{1}{\lambda})$

Следовательно, всякое решение ($\star\star$) является решением ($\star$) $\implies$ множества решений совпадают. ■

3.4 Ступенчатые матрицы

Определение 10. Строка $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ называется *нулевой*, если $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ и *ненулевой* иначе $(\exists i : a_i \neq 0)$.

Определение 11. *Ведущим элементом* ненулевой строки называется первый её ненулевой элемент.

Определение 12. Матрица $M \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$ называется *ступенчатой*, или имеет ступенчатый вид, если:

1. Номера ведущих элементов её ненулевых строк строго возрастают.

2. Все нулевые строки стоят в конце.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \diamond & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \diamond & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \diamond & * & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \diamond & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \diamond \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\diamond \neq 0$, $*$ – что угодно.

3.4.1 Улучшенный ступенчатый вид матрицы

Определение 13. M имеет *улучшенный ступенчатый вид*, если:
1. M имеет обычный ступенчатый вид.
2. Все ведущие элементы равны 1.
3. В одном столбце с любым ведущим элементом стоят только нули.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & 0 & * & 0 & 0 & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & * & 0 & 0 & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 3.2. *1) Всякую матрицу элементарными преобразованиями можно привести к ступенчатому виду.*
2) Всякую ступенчатую матрицу элементарными преобразованиями строк можно привести к улучшенному ступенчатому виду.

Следствие. Всякую матрицу элементарными преобразованиями строк можно привести к **улучшенному** ступенчатому виду.

Доказательство.

1. Алгоритм. Если M - нулевая, то конец. Иначе:

Шаг 1: Ищем первый ненулевой столбец, пусть j — его номер.

Шаг 2: Переставляем строки, если нужно, добиваемся того, что $a_{1j} \neq 0$

Шаг 3: Зануляем элементы в этом столбце используя первую строку – $Э_1(2, 1, -\frac{a_{2j}}{a_{1j}}), \dots, Э_1(m, 1, -\frac{a_{mj}}{a_{1j}})$.
В результате $a_{ij} = 0$ при $i = 2, 3, \dots m$.

Дальше повторяем все шаги для подматрицы M' (без первой строки и столбцов $1, \ldots, j$).

2. Алгоритм. Пусть $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \ldots, a_{rj_r}$ – ведущие элементы ступенчатой матрицы.

Шаг 1: Выполняем $Э_3(1, \frac{1}{a_{1j_1}}), \ldots, Э_3(r, \frac{1}{a_{rj_r}})$, в результате все ведущие элементы равны 1.

Шаг 2: Выполняем $Э_1(r-1, r, -a_{r-1,\, j_r}), Э_1(r-2, r, -a_{r-2,\, j_r}), \ldots, Э_1(1, r, -a_{1,\, j_r})$. В результате все элементы над a_{rj_r} равны 0.

Аналогично обнуляем элементы над всеми остальными ведущими.

Итог: матрица имеет улучшенный ступенчатый вид. ■

3.5 Реализация элементарных преобразований строк матрицы при помощи умножения слева на подходящую матрицу

Всякое элементарное преобразование строк матрицы реализуется умножением как умножение слева на подходящую "элементарную матрицу".

- $Э_1(i, j, \lambda)$: $A \mapsto U_1(i, j, \lambda)A$, где

$$U_1(i,j,\lambda) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccccc} & & & & & j & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(на диагонали стоят единицы, на i-м j-м месте стоит λ, остальные элементы нули)

- $Э_2(i, j)$: $A \mapsto U_2(i, j)A$, где

$$U_2(i,j) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccccc} & i & & & & j & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(на диагонали стоят единицы, кроме i-го и j-го столбца (на i-м j-м и j-м i-м местах стоит 1, остальные нули)

- $Э_3(i, \lambda)$: $A \mapsto U_3(i, \lambda)A$, где

$$U_3(i,\lambda) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccccc} & i & & & & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(на диагонали стоят единицы, кроме i-го столбца, там λ, остальные элементы нули)

Элементарные преобразования столбцов — умножение на соответствующую матрицу справа.

Упражнение на дом. Доказательство.

4 Лекция 19.09.2019

Дана СЛУ с расширенной матрицей $(A \mid b)$.
Было: элементарные преобразования строк в $(A \mid b)$ сохраняют множество решений.

4.1 Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Прямой ход метода Гаусса.
Выполняя элементарные преобразования строк в $(A|b)$, приведем A к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 0 & \dots & 0 & a_{ij_1} & * & \dots & \dots & b_1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_{2j_2} & * & \dots & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{rj_r} & b_r \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{r+1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Случай 1 $\exists i \geqslant r+1 : b_i \neq 0$ (в A есть нулевая строка с $b_i \neq 0$)

Тогда в новой СЛУ i-е уравнение $0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_n = b_i$, т.е. $0 = b_i \implies$ СЛУ несовместна.

Случай 2 либо $r = m$, либо $b_i = 0 \quad \forall i \geqslant r+1$

Выполняя элементарные преобразования строк приводим матрицу к улучшенному ступенчатому виду – обратный ход метода Гаусса

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|c} 0 & \dots & 0 & 1 & * & 0 & * & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & * & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & b_3 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & b_r \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Неизвестные $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_r}$ называются *главными*, а остальные *свободными*, где j_i – индексы столбцов с ведущими элементами.

Подслучай 2.1 $r = n$, т.е. все неизвестные – главные

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = b_1 \\ x_2 = b_2 \\ \quad\vdots \\ x_r = b_r \end{cases} \quad \text{— единственное решение.}$$

Подслучай 2.2 $r < n$, т.е. есть хотя бы одна свободная неизвестная.

Перенесем в каждом уравнении все члены со свободными неизвестными в правую часть, получаем выражения всех главных неизвестных через свободные, эти выражения называется *общим решением исходной СЛУ.*

Пример. Улучшенный ступенчатый вид:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

Главные неизвестные: x_1, x_3.
Свободные неизвестные: x_2, x_4.
$x_2 = t_1, x_4 = t_2$ – параметры.

$$\begin{cases} x_1 = -1 - 3t_1 - t_2 \\ x_2 = t1 \\ x_3 = 4 + 2t_2 \\ x_4 = t_2 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - 3t_1 - t_2 \\ t_1 \\ 4 + 2t_2 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = -1 - 3x_2 - x_4 \\ x_3 = 4 + 2x_4 \end{cases}$$

Следствие. Всякая СЛУ с коэффициентами из $\mathbb{R}$ имеет либо 0 решений, либо одно решение, либо бесконечно много решений.

4.2 Однородные системы линейных уравнений

Определение 14. СЛУ называется однородной (ОСЛУ), если все её правые части равны 0. Расширенная матрица: $(A \mid 0)$.

Очевидный факт. Всякая ОСЛУ имеет нулевое решение ($x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$).

Следствие. Всякая ОСЛУ либо имеет ровно 1 решение (нулевое), либо бесконечно много решений.

Следствие. Всякая ОСЛУ, у которой число неизвестных больше числа уравнений, имеет ненулевое решение (бесконечно много ненулевых решений).

Доказательство. В ступенчатом виде будет хотя бы одна свободная неизвестная. Придавая ей ненулевое значение, получим ненулевое решение. ■

4.3 Связь между множеством решений системы линейных уравнений и множеством решений соответствующей однородной системы.

Частное решение СЛУ — это какое-то одно её решение.

Утверждение 4.1. *Пусть $Ax = b$ – совместная СЛУ,*
x_0 – частное решение $Ax = b$,
$S \subset \mathbb{R}^n$ – множество решений ОСЛУ $Ax = 0$,
$L \subset \mathbb{R}^n$ – множество решений $Ax = b$.
Тогда, $L = x_0 + S$, где $x_0 + S = \{x_0 + v \mid v \in S\}$.

Доказательство.

1. Пусть $u \in L$ (u – решение $Ax = b$), положим $v = u - x_0$.
   Тогда, $Av = A(u - x_0) = Au - Ax_0 = b - b = 0 \implies v \in S \implies L \subseteq x_0 + S$.
2. Пусть $v \in S$ (v – решение $Ax = 0$), положим $u = x_0 + v$.
   Тогда, $Au = A(x_0 + v) = Ax_0 + Av = b + 0 = b \implies u \in L \implies x_0 + S \subseteq L$.

Значит, $x_0 + S = L$. ■

4.4 Матричные уравнения вида $AX = B$ и $XA = B$, общий метод их решения

Два типа матричных уравнений:

1. $AX = B$
   A и B известны, X – неизвестная матрица.
2. $XA = C$
   A и C известны, X – неизвестная матрица.

Из второго типа получается первый транспонированием матриц: $XA = C \iff A^T X^T = B^T$, то есть достаточно уметь решать только уравнения первого типа.

$\underset{n\times m}{A}\underset{m\times p}{X} = \underset{n\times p}{B}$ – это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} AX^{(1)} = B^{(1)} \\ AX^{(2)} = B^{(2)} \\ \qquad\vdots \\ AX^{(p)} = B^{(p)} \end{cases}$$

Этот набор СЛУ надо решать одновременно методом Гаусса.

Записываем матрицу $(A \mid B)$ и элементарными преобразованиями строк с ней приводим A к улучшенному ступенчатому виду.

Получаем $(A' \mid B')$, где A' имеет улучшенный ступенчатый вид.

Остается выписать общее решение для каждой СЛУ

$$\begin{cases} A'x^{(1)} = B'^{(1)} \\ A'x^{(2)} = B'^{(2)} \\ \qquad\vdots \\ A'x^{(p)} = B'^{(p)} \end{cases}$$

4.5 Обратные матрицы

Определение 15. Матрица $B \in M_n$ называется *обратной*, к A, если $AB = BA = E$.
Обозначение: $B = A^{-1}$.

Факты:

1. Если $\exists A^{-1}$, то она определена однозначно

   Доказательство. Пусть B, B' – две матрицы, обратные к A. Тогда $B = B(AB') = (BA)B' = B'$. ■

2. Если $AB = E$ для некоторой $B \in M_n$, то $BA = E$ автоматически и тогда $B = A^{-1}$

   Замечание. Доказывается на Лекции 8.

Следствие. A^{-1} является решение матричного уравнения $AX = E$ (если решение существует).

4.6 Перестановки на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$

Определение 16. *Перестановкой (подстановкой)* на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$ называется всякое биективное (взаимно однозначное) отображение множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ в себя.

$$\sigma\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}.$$

S_n – множество всех перестановок на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Запись:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix} \text{ либо } \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \ldots & i_n \\ \sigma(i_1) & \sigma(i_2) & \sigma(i_3) & \ldots & \sigma(i_n) \end{pmatrix}.$$

Здесь, $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Замечание. Количество всех перестановок длины n: $|S_n| = n!$

5 Лекция 23.09.2019

5.1 Инверсии в перестановке

Обозначение: S_n – множество всех перестановок из n элементов.

Пусть $\sigma \in S_n$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$

Определение 17. Пара $\{i, j\}$ (неупорядоченная) образует *инверсию* в σ, если числа $i - j$ и $\sigma(i) - \sigma(j)$ имеют разный знак (то есть либо $i < j$ и $\sigma(i) > \sigma(j)$, либо $i > j$ и $\sigma(i) < \sigma(j)$).

5.2 Знак и чётность перестановки

Определение 18. *Знак* перестановки σ – это число $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{<\text{число инверсий в } \sigma>}$.

Определение 19. Перестановка σ называется *четной*, если $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$ (четное количество инверсий), и *нечетной* если $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$ (нечетное количество инверсий).

Примеры.

σ	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
число инверсий	0	1
$\mathrm{sgn}(\sigma)$	1	-1
четность	четная	нечетная

σ	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
число инверсий	0	1	2	3	2	1
$\mathrm{sgn}(\sigma)$	1	-1	1	-1	1	-1
четность	четная	нечетная	четная	нечетная	четная	нечетная

Замечание. число инверсий в $\sigma \in S_n \leqslant \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, равенство достигается при $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ n & n-1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$

5.3 Произведение перестановок

Определение 20. *Произведением* (или *композицией*) двух перестановок $\sigma, \rho \in S_n$ называется такая перестановка $\sigma\rho \in S_n$, что $(\sigma\rho)(x) := \sigma(\rho(x)) \quad \forall x \in \{1, \ldots, n\}$.

Пример.
$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
$\sigma\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$
$\rho\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
Видно, что $\sigma\rho \neq \rho\sigma \implies$ произведение перестановок не обладает свойством коммутативности.

5.4 Ассоциативность произведения перестановок

Утверждение 5.1. *Умножение перестановок ассоциативно, то есть* $\sigma(\tau\pi) = (\sigma\tau)\pi \ \forall \sigma, \tau, \pi \in S_n$.

Доказательство. $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ имеем:
$[\sigma(\tau\pi)](i) = \sigma((\tau\pi)(i)) = \sigma(\tau(\pi(i)))$.
$[(\sigma\tau)\pi](i) = (\sigma\tau)(\pi(i)) = \sigma(\tau(\pi(i)))$. ∎

5.5 Тождественная перестановка

Определение 21. Перестановка $id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix} \in S_n$ называется *тождественной* перестановкой.

Свойства:
$\forall \sigma \in S_n \quad id \cdot \sigma = \sigma \cdot id = \sigma$.
$\mathrm{sgn}(id) = 1$.

5.6 Обратная перестановка и её знак

Определение 22. $\sigma \in S_n$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \implies$ подстановка $\sigma^{-1} := \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ называется *обратной* к σ перестановкой.

Свойства: $\sigma \cdot \sigma^{-1} = id = \sigma^{-1} \cdot \sigma$

5.7 Теорема о знаке произведения перестановок

Теорема 5.2. $\sigma, \rho \in S_n \implies \operatorname{sgn}(\sigma\rho) = \operatorname{sgn}\sigma \cdot \operatorname{sgn}\rho$.

Доказательство. Для каждой пары $i < j$ введем следующие числа:

$$\alpha(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{если } \{i,j\} \text{ образует инверсию в } \rho \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\beta(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{если } \{\rho(i),\rho(j)\} \text{ образует инверсию в } \sigma \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\gamma(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{если } \{i,j\} \text{ образует инверсию в } \sigma\rho \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

"число инверсий в ρ" $= \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \alpha(i,j)$
"число инверсий в $\sigma\rho$" $= \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \gamma(i,j)$
"число инверсий в σ" $= \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \beta(i,j)$ – Почему?

Когда $\{i,j\}$ пробегает все неупорядоченные пары в $\{1,2,\dots,n\}$, пара $\{\rho(i),\rho(j)\}$ тоже пробегает все неупорядоченные пары в $\{1,2,\dots,n\}$.

Зависимость $\gamma(i,j)$ от $\alpha(i,j)$ и $\beta(i,j)$:

$\alpha(i,j)$	0	0	1	1
$\beta(i,j)$	0	1	0	1
$\gamma(i,j)$	0	1	1	0

Вывод: $\alpha(i,j) + \beta(i,j) \equiv \gamma(i,j) \pmod 2$.

Тогда $\operatorname{sgn}(\sigma\rho) = (-1)^{\sum \gamma(i,j)} = (-1)^{\sum \beta(i,j) + \sum \alpha(i,j)} = (-1)^{\sum \alpha(i,j)} \cdot (-1)^{\sum \beta(i,j)} = \operatorname{sgn}\sigma \cdot \operatorname{sgn}\rho$. ■

Следствие. $\sigma \in S_n \implies \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma)$.

Доказательство. $\sigma\sigma^{-1} = id \implies \operatorname{sgn}(\sigma\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(id) \implies \operatorname{sgn}\sigma \operatorname{sgn}\sigma^{-1} = 1 \implies \operatorname{sgn}\sigma = \operatorname{sgn}\sigma^{-1}$. ■

Упражнение на дом: *Показать, что число инверсий в σ^{-1} такое же, как в σ.*

5.8 Транспозиции, знак транспозиции

Пусть $i, j \in \{1,2,\dots,n\}$, $i \neq j$.
Рассмотрим перестановку $\tau_{ij} \in S_n$, такую что
$\tau_{ij}(i) = j$.
$\tau_{ij}(j) = i$.
$\tau_{ij}(k) = k \ \forall k \neq i, j$.

Определение 23. Перестановки вида τ_{ij} называются *транспозициями.*

Замечание. τ – траспозиция $\implies \tau^2 = id, \tau^{-1} = \tau$.

Определение 24. Перестановки вида $\tau_{i,i+1}$ называются *элементарными траспозициями.*

Лемма 5.3. $\tau \in S_n$ – транспозиция $\implies \operatorname{sgn}(\tau) = -1$.

Доказательство. Пусть $\tau = \tau_{ij}$, можем считать, что $i < j$.

$$\tau := \begin{pmatrix} 1 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n \\ 1 & \dots & i-1 & j & i+1 & \dots & j-1 & i & j+1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Посчитаем инверсии:
$\{i, j\}$
$\{i, k\}$ при $i+1 \leqslant k \leqslant j-1$, всего $= j-i-1$
$\{k, j\}$ при $i+1 \leqslant k \leqslant j-1$, всего $= j-i-1$
Значит, всего инверсий $2(j-i-1)+1 \equiv 1 \pmod 2 \implies \operatorname{sgn}(\tau) = -1$. ■

Следствие. При $n \geqslant 2$ отображение $\sigma \to \sigma\tau_{12}$ является биекцией между множеством четных перестановок в S_n и множеством нечетных перестановок в S_n.

Следствие. При $n \geqslant 2$ количество нечетных перестановок в S_n равно количеству четных перестановок в S_n и равно $\frac{n!}{2}$.

Теорема 5.4. *Всякая перестановка $\sigma \in S_n$ может быть разложена в произведение конечного числа элементарных транспозиций.*

Доказательство.

$$\sigma \in S_n := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\sigma\tau_{i,i+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & i+1 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(i+1) & \sigma(i) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

При умножении справа на $\tau_{i,i+1}$ в нижней строке меняются местами i-ый и $(i+1)$-ый элементы.

Тогда, домножив σ на подходящее произведение $\tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \dots \cdot \tau_k$ элементарных траспозиций, можем добиться, что нижняя строка есть $(1, 2, \dots, n) \implies \sigma\tau_1\tau_2 \dots \tau_k = id$.

Теперь, домножая справа на $\tau_k\tau_{k-1} \dots \tau_1$, получим $\sigma = \tau_k\tau_{k-1} \dots \tau_1$. ■

5.9 Определитель квадратной матрицы

Определение 25. Определителем матрицы $A \in M_n$ называется число

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}.$$

($\sum_{\sigma \in S_n}$ – сумма по всем перестановкам)

Другие обозначения: $|A|$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

5.10 Определители порядков 2 и 3

- $n = 2$
  $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$
  $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
- $n = 3$
  $S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}$
  $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$

6 Лекция 26.09.2019

Напомним что такое определитель:

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}. \tag{$\star$}$$

Замечание. Каждое слагаемое содержит ровно 1 элемент из каждой строки и ровно 1 элемент из каждого столбца.

6.1 Свойства определителей

Свойство T $\det A = \det A^T$.

Доказательство. Пусть $B = A^T$, тогда $b_{ij} = a_{ji}$.

$$\begin{aligned}
\det A^T = \det B = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} \dots b_{n\sigma(n)} &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)^{-1}} a_{2\sigma(2)^{-1}} \dots a_{n\sigma(n)^{-1}} \quad // \text{ замена } \sigma^{-1} = \rho \text{ } // \\
&= \sum_{\rho \in S_n} \operatorname{sgn}(\rho) a_{1\rho(1)} a_{2\rho(2)} \dots a_{n\rho(n)} = \det A.
\end{aligned}$$

■

Свойство 0 Если в A есть нулевая строка или нулевой столбец, то $\det A = 0$.

Доказательство. В связи со свойством T можно доказать только для строк.

Так как в каждом слагаемом $(\star)$ присутствует элемент из каждой строки, то все слагаемые в $(\star)$ равны 0 $\implies$ $detA = 0$. ■

Свойство 1 Если в A все элементы одной строки или одного столбца домножить на одно и то же число λ, то $\det A$ тоже умножается на λ.

$$\begin{vmatrix} * & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda * & \lambda * & \lambda * & \lambda * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & \dots & * \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} * & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & * & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & \dots & * \end{vmatrix}$$

Доказательство. В связи со свойством T можно доказать только для строк.

$A_{(i)} \to \lambda A_{(i)} \implies a_{ij} \to \lambda a_{ij} \ \forall j \implies$ в $(\star)$ каждое слагаемое умножается на $\lambda \implies \det A$ умножается на λ. ■

Свойство 2 Если $A_{(i)} = A^1_{(i)} + A^2_{(i)}$, то $\det A = \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A^1_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A^2_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$.

Пример:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

Аналогично, если $A^{(j)} = A^{(j)}_1 + A^{(j)}_2$, то $\det A = \det(A^{(1)} \cdots A^{(j)}_1 \cdots A^{(n)}) + \det(A^{(1)} \cdots A^{(j)}_2 \cdots A^{(n)})$.

Доказательство. В связи со свойством T можно доказать только для строк.

Пусть $A^1_{(i)} = (a'_{i1} a'_{i2} \cdots a'_{in})$, $A^2_{(i)} = (a''_{i1} a''_{i2} \dots a''_{in}) \implies a_{ij} = a'_{ij} + a''_{ij}$.

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots (a'_{i\sigma(i)} + a''_{i\sigma(i)}) \dots a_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a'_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a''_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} \\
&= \det A_1 + \det A_2.
\end{aligned}$$

■

Свойство 3 Если в A поменять местами две строки или два столбца, то $\det A$ поменяет знак.

Доказательство. В связи со свойством T можно доказать только для строк.

Пусть $A = (a_{ij}) \in M_n$, $B = (b_{ij}) \in M_n$ – матрица, полученная из A перестановкой p-ой и q-ой строк.

Так же, $\tau = \tau_{pq}$.

$$b_{ij} = a_{\tau(i)j} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{если } i \neq p, q \\ a_{qj}, & \text{если } i = p \\ a_{pj}, & \text{если } i = q \end{cases}$$

$$b_{ij} = a_{\tau(i)j} \implies b_{i\sigma(i)} = a_{\tau(i)\sigma(i)} = a_{\tau(i),(\sigma\tau\tau)(i)}$$

$$\begin{aligned}
\det B &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot b_{1\sigma(1)}\cdot b_{2\sigma(2)}\dots b_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot a_{\tau(1),\sigma(1)}\cdot a_{\tau(2),\sigma(2)}\dots a_{\tau(n),\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot a_{\tau(1),(\sigma\tau\tau)(1)}\cdot a_{\tau(2),(\sigma\tau\tau)(2)}\dots a_{\tau(n),(\sigma\tau\tau)(n)} \\
&\quad \text{// уберем } \tau(i)\text{, переупорядочив элементы в произведении //} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot a_{1,(\sigma\tau)(1)}\cdot a_{2,(\sigma\tau)(2)}\dots a_{n,(\sigma\tau)(n)} \\
&= -\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma\tau)\cdot a_{1,(\sigma\tau)(1)}\cdot a_{2,(\sigma\tau)(2)}\dots a_{n,(\sigma\tau)(n)} \\
&\quad \text{// замена } \rho = \sigma\tau \text{ //} \\
&= -\sum_{\rho\in S_n} \operatorname{sgn}(\rho)\cdot a_{1,\rho(1)}\cdot a_{2,\rho(2)}\dots a_{n,\rho(n)} \\
&= -\det A.
\end{aligned}$$

■

Свойство 4 Если к строке (столбцу) прибавить другую строку (столбец), умноженный на скаляр, то $\det A$ не изменится.

Доказательство. В связи со свойством T можно доказать только для строк.

$$A \to A' = \begin{pmatrix} \dots \\ A_{(i)} + \lambda A_{(j)} \\ \dots \\ A_{(j)} \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$|A'| = \begin{vmatrix} \dots \\ A_{(i)} \\ \dots \\ A_{(j)} \\ \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dots \\ \lambda A_{(j)} \\ \dots \\ A_{(j)} \\ \dots \end{vmatrix} = |A| + \lambda \begin{vmatrix} \dots \\ A_{(j)} \\ \dots \\ A_{(j)} \\ \dots \end{vmatrix} = |A| + \lambda 0 = |A|.$$

■

Свойство 5 Если в A есть две одинаковые строки (столбца), то $\det A = 0$.

Доказательство. В связи со свойством T можно доказать только для строк.

При перестановке двух одинаковых строк (столбцов):

– A не изменится $\implies$ $\det A$ не изменится

– по свойству 3: $\det A$ меняет знак

Значит, $\det A = -\det A \implies \det A = 0$. ■

Определение 26. Матрица называется *верхнетреугольной*, если $a_{ij} = 0$ при $i > j$, *нижнетреугольной*, если $a_{ij} = 0$ $i < j$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ – верхнетреугольная}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ – нижнетреугольная}$$

Замечание. Всякая ступенчатая квадратная матрица верхнетреугольна.

Свойство 6 Если A верхнетреугольная или нижнетреугольная, то $\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.

Доказательство. В связи со свойством T можно доказать только для строк.

Выделим в ($\star$) слагаемые, которые могут быть отличны от нуля.

$$a_{1,\sigma(1)}\dots a_{n-1,\sigma(n-1)}a_{n,\sigma(n)} \neq 0$$

$$\implies a_{n\sigma(n)} \neq 0 \implies \sigma(n) = n.$$

$$\implies a_{n-1,\sigma(n-1)} \neq 0 \implies \sigma(n-1) \in \{n-1, n\},$$

но n уже занято, значит $\sigma(n-1) = n-1$, и так далее.

Рассуждая аналогично, получаем $\sigma(k) = k\ \forall k \implies \sigma = id$ – это единственное слагаемое в ($\star$), которое может быть не равно 0.

$$\operatorname{sgn}(id) = +1 \implies \det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

■

Следствие. $\det \operatorname{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1a_2\dots a_4$.

Следствие. $\det E = 1$.

6.2 Поведение определителя при элементарных преобразованиях строк (столбцов)

$Э_1(i, j, \lambda)$: $\det A$ не меняется.
$Э_2(i, j)$: $\det A$ меняет знак.
$Э_3(i, \lambda)$: $\det A$ умножается на λ.

Алгоритм. Элементарными преобразованиями строк A приводится к ступенчатому ($\to$ верхнетреугольному) виду, в котором $\det A$ легко считается.

7 Лекция 30.09.2019

7.1 Определитель с углом нулей

Предложение.

$$A = \left(\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline 0 & R \end{array}\right) \text{ или } A = \left(\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline Q & R \end{array}\right),\ P \in M_k,\ R \in M_{n-k} \implies \det A = \det P \det R.$$

Матрица с углом нулей:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} * & * & * & * \\ \hline 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{array}\right)$$

НЕ матрица с углом нулей:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ \hline 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{array}\right)$$

Доказательство. В силу свойства T достаточно доказать для строк.

1. Элементарными преобразованиями строк в A, приведем $(P \mid Q)$ к виду $(P' \mid Q')$, в котором P' имеет ступенчатый вид. При этом $\det A$ и $\det P$ умножаются на один и тот же скаляр $\alpha \neq 0$.
2. Элементарными преобразованиями строк в A, приведем $(0 \mid R)$ к виду $(0 \mid R')$, в котором R' имеет ступенчатый вид. При этом $\det A$ и $\det R$ умножаются на один и тот же скаляр $\beta \neq 0$.

$\begin{pmatrix} P' & Q' \\ 0 & R' \end{pmatrix}$ – верхнетреугольная $\implies \det \begin{pmatrix} P' & Q' \\ 0 & R' \end{pmatrix} = \det P' \det R'$.

$$\alpha\beta \det A = \det \begin{pmatrix} P' & Q' \\ 0 & R' \end{pmatrix} = \det P' \det R' = (\alpha \det P)(\beta \det R) = \alpha\beta \det P \det R. \qquad \blacksquare$$

7.2 Определитель произведения матриц

Теорема 7.1. $A, B \in M_n \implies \det(AB) = \det A \det B$.

Доказательство. Выполним с матрицей A одно элементарное преобразование строк, получим матрицу A'.

$$A \rightsquigarrow A' = UA.$$

Такое же преобразование строк с AB.

$$AB \rightsquigarrow U(AB) = (UA)B = A'B.$$

Таким образом, сначала выполнив элементарное преобразование и домножив на матрицу B, либо домножив на B и затем применив элементарное преобразование, получим тот же результат.

Тогда, цепочка элементарных преобразований строк:

$$A \rightsquigarrow C \text{ – улучшенный ступенчатый вид.}$$

Так же цепочка для AB:

$$AB \rightsquigarrow CB.$$

При этом, $\det A$ и $\det AB$ умножились на один и тот же скаляр $\alpha \neq 0$

$$\det C = \alpha \det A.$$

$$\det CB = \alpha \det AB.$$

Случай 1 Последняя строка состоит из нулей:

$$\begin{aligned} &C_{(n)} = (0 \dots 0) \\ &\implies [CB]_{(n)} = C_{(n)}B = (0 \dots 0) \\ &\implies \det CB = 0 = 0 \cdot \det B = \det C \det B. \end{aligned}$$

Случай 2 Последняя строка ненулевая:
$$C_{(n)} \implies C = E,$$

так как матрица C имеет улучшенный ступенчатый вид.

Значит,
$$\det CB = \det B = 1 \cdot \det B = \det C \cdot \det B.$$

Из этих двух случаем следует, что $\det CB = \det C \det B$.
Сокращая α получаем,
$$\det CB = \det C \det B \implies \det AB = \det A \det B.$$
■

Замечание. Пусть $A \in M_n$, $A_{\text{ул}}$ – её улучшенный ступенчатый вид.
$$\det A \neq 0 \iff A_{\text{ул}} = E.$$

7.3 Дополнительные миноры и алгебраические дополнения к элементам квадратной матрицы

Определение 27. *Дополнительным минором* к элементу a_{ij} называется определитель $(n-1) \times (n-1)$ матрицы, получающейся из A вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.
Обозначение: $\overline{M}_{ij}$.

Определение 28. *Алгебраическим дополнением* к элементу a_{ij} называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j}\overline{M}_{ij}$.

7.4 Лемма об определителе матрицы, содержащей ровно один ненулевой элемент в некоторой строке

Лемма 7.2. Пусть $a_{ik} = 0$ при всех $k \neq j$. Тогда $\det A = a_{ij} \cdot A_{ij}$.

Доказательство.
$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} P & U & Q \\ \hline 0\dots0 & a_{ij} & 0\dots0 \\ \hline R & V & S \end{array}\right).$$

Переставляя соседние строки $i-1$ раз, вытолкнем i-ю строку наверх.
$$A' = \left(\begin{array}{c|c|c} 0\dots0 & a_{ij} & 0\dots0 \\ \hline P & U & Q \\ \hline R & V & S \end{array}\right)$$

Переставляя соседние столбцы $j-1$ раз, переместим j-й столбец на первое место.
$$A'' = \left(\begin{array}{c|c|c} a_{ij} & 0\dots0 & 0\dots0 \\ \hline U & P & Q \\ \hline V & R & S \end{array}\right)$$

$\det A'' = a_{ij} \det \left(\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline R & S \end{array}\right) = a_{ij}\overline{M}_{ij}.$

$\implies detA = (-1)^{i-1+j-1} \det A'' = (-1)^{i+j} a_{ij}\overline{M}_{ij} = a_{ij}A_{ij}.$ ■

7.5 Разложение определителя по строке (столбцу)

Теорема 7.3. *При любом фиксированном* $i \in \{1, 2, \dots, n\}$,
$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \text{ – разложение по } i\text{-й строке.}$$

Аналогично, для любого фиксированного $j \in \{1, 2, \dots, n\}$,
$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \text{ – разложение по } j\text{-у столбцу.}$$

Доказательство. В силу свойства T достаточно доказать для строк.
$$A_{(i)} = (a_{i1}, 0, \dots, 0) + (0, a_{i2}, 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, 0, a_{in}).$$

Требуемое следует из свойства 2 определителей и леммы. ■

7.6 Лемма о фальшивом разложении определителя

Лемма 7.4.

1. При любых $i, k \in \{1, 2, \dots, n\} : i \neq k \implies \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = 0$,
2. При любых $j, k \in \{1, 2, \dots, n\} : j \neq k \implies \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ik} = 0$.

Доказательство. В силу свойства T достаточно доказать для строк.

Пусть $B \in M_n$ – матрица, полученная из A заменой k-й строки на i-ю.

$$B = \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \dots \\ A_{(i)} \\ \dots \\ A_{(i)} \\ \dots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$$

В B есть две одинаковые строки $\implies \det B = 0$.

Разлагая $\det B$ по k-й строке, получаем

$$\det B = \sum_{j=1}^{n} b_{kj} B_{kj} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj}.$$ ■

7.7 Обратная матрица, её единственность

Пусть дана $A \in M_n$.

Определение 29. Матрица $B \in M_n$ называется *обратной* к A, если $AB = BA = E$.

Обозначение: A^{-1}.

Лемма 7.5. Если $\exists A^{-1}$, то она единственна.

Доказательство. Пусть $B, C \in M_n$ такие, что $AB = BA = E$ и $AC = CA = E$. Тогда,

$$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C \implies B = C.$$ ■

7.8 Невырожденные матрицы

Определение 30. Матрица $A \in M_n$ называется *невырожденной*, если $\det A \neq 0$, и *вырожденной* иначе (то есть $\det A = 0$).

7.9 Определитель обратной матрицы

Лемма 7.6. Если $\exists A^{-1}$, то $\det A \neq 0$.

Доказательство. $AA^{-1} = E \implies \det(AA^{-1}) = \det E \implies \det A \det(A^{-1}) = 1.$ ■

7.10 Присоединённая матрица

Определение 31. *Присоединенной* к A матрицей называется матрица $\widehat{A} = (A_{ij})^T$.

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

7.11 Критерий обратимости квадратной матрицы, явная формула для обратной матрицы

Теорема 7.7. *A обратима (то есть $\exists A^{-1}$) $\iff$ A невырождена ($\det A \neq 0$), при этом $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widehat{A}$.*

Доказательство. Утверждение в одну сторону следует из леммы 2.

Пусть $\det A \neq 0$. Покажем, что $\frac{1}{detA}\widehat{A} = A^{-1}$. Для этого достаточно доказать, что $A\widehat{A} = \widehat{A}A = \det A \cdot E$.
Для $X = A\widehat{A}$ имеем

$$x_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}[\widehat{A}]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} detA, & \text{при } i = j \\ 0, & \text{при } i \neq j \end{cases}.$$

Для $Y = \widehat{A}A$ имеем

$$y_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [\widehat{A}]_{ik}a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ki}a_{kj} = \begin{cases} detA, & \text{при } i = j \\ 0, & \text{при } i \neq j \end{cases}.$$

■

8 Лекция 2.11.2019

8.1 Следствия из критерия обратимости квадратной матрицы

Следствие. Если $AB = E$, то $BA = E$ (и тогда $A = B^{-1}$, $B = A^{-1}$).

Доказательство.
$$AB = E \implies \det A \det B = 1 \implies \det A \neq 0 \implies \exists A^{-1}.$$
$$BA = EBA = (A^{-1}A)BA = A^{-1}(AB)A = A^{-1}A = E.$$
■

Следствие. $A, B \in M_n \implies AB$ обратима $\iff$ обе A, B обратимы. При этом $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Доказательство. Эквивалентность ($\iff$) следует из условия $\det AB = \det A \det B$.
$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = E.$$
■

8.2 Формулы Крамера

Пусть есть СЛУ $Ax = b(\star)$, $A \in M_n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Также, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $A_i = (A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, b, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)})$.

Теорема 8.1. *Если* $\det A \neq 0$*, то СЛУ* $(\star)$ *имеет единственное решение и его можно найти по формулам:*
$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}.$$

Доказательство. $\det A \neq 0 \implies \exists A^{-1} \implies (\star) \iff x = A^{-1}b$ – единственное решение.
$$b = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 A^{(1)} + x_2 A^{(2)} + \dots + x_n A^{(n)}.$$

$$\begin{aligned}
\det A_i &= \det \left(A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, x_1 A^{(1)} + \dots + x_n A^{(n)}, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)}\right) \\
&= x_1 \det \left(A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, A^{(1)}, A^{(i+1)}), \dots A^{(n)}\right) \\
&\quad + x_2 \det \left(A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, A^{(2)}, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)}\right) \\
&\quad + \dots + \\
&\quad + x_n \det \left(A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, A^{(n)}, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)}\right) \\
&= x_i \det A \quad \text{// Все слагаемые кроме i-го равны 0.}
\end{aligned}$$
■

8.3 Понятие поля.

Определение 32. *Полем* называется множество F, на котором заданы две операции "сложение" ($(a, b) \to a + b$) и "умножение" ($(a, b) \to a \cdot b$), причем $\forall a, b, c \in F$ выполнены следующие условия:

1. $a + b = b + a$ (коммутативность сложения)
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность сложения)
3. $\exists 0 \in F : 0 + a = a + 0 = a$ (нулевой элемент)
4. $\exists(-a) \in F : a + (-a) = (-a) + a = 0$ (противоположный элемент)
   $\uparrow$ абелева группа $\uparrow$
5. $a(b + c) = ab + ac$ (дистрибутивность)
6. $ab = ba$ (коммутативность умножения)
7. $(ab)c = a(bc)$ (ассоциативность умножения)
8. $\exists 1 \in F \setminus \{0\} : 1a = a1 = a$ (единица)
9. Если $a \neq 0$, $\exists a^{-1} \in F : aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ (обратный элемент)

8.4 Простейшие примеры.

$\mathbb{Q}$ – Рациональные числа.
$\mathbb{R}$ – Действительные числа.
$F_2 = \{0, 1\}$, сложение и умножение по модулю 2.

8.5 Построение поля комплексных чисел.

Ближайшая цель — построить поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел.

Неформально, $\mathbb{C}$ – это наименьшее поле со следующими свойставми:

1. $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$.
2. Многочлен x^2+1 имеет корень, то есть $\exists i : i^2 = -1$.

8.5.1 Формальная конструкция поля $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}.$$

- $(a_1,b_1)+(a_2,b_2) = (a_1+a_2, b_1+b_2)$
- $(a_1,b_1)(a_2,b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1)$

Неформально, каждой такой паре (a,b) соответствует комплексное число $a+bi$:

- $(a,b) \iff a+bi$
- $(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i) = (a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$
- $(a_1+b_1i)(a_2+b_2i) = a_1a_2 + a_1b_2i + a_2b_1i + b_1b_2\underbrace{i^2}_{=-1} = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2+a_2b_1)i$

8.5.2 Проверка аксиом

1, 2. Очевидны.

3. $0 = (0,0)$.
4. $-(a,b) = (-a,-b)$.
5. Дистрибутивность
$$\begin{aligned}(a_1+b_1i)((a_2+b_2i)+(a_3+b_3i)) &= (a_1+b_1i)((a_2+a_3)+(b_2+b_3)i)\\ &= (a_1(a_2+a_3) - b_1(b_2+b_3)) + (a_1(b_2+b_3)+b_1(a_2+a_3))i\\ &= a_1a_2 + a_1a_3 - b_1b_2 - b_1b_3 + (a_1b_2 + a_1b_3 + b_1a_2 + b_1a_3)i\\ &= ((a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i) + ((a_1a_3 + b_1b_3) + (b_1a_3 + a_1b_3)i)\\ &= (a_1+b_1i)(a_2+b_2i) + (a_1+b_1i)(a_3+b_3i)\end{aligned}$$
6. Коммутативность умножения – из явного вида формулы.
$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2+a_2b_1)i$$
7. Ассоциативность умножения
$$\begin{aligned}(a_1,b_1)(a_2,b_2)(a_3,b_3) &= (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1)(a_3,b_3)\\ &= (a_1a_2a_3 - b_1b_2a_3 - a_1b_2b_3 - b_1a_2b_3, a_1a_2b_3 - b_1b_2b_3 + a_1b_2a_3 + b_1a_2a_3)\\ &= (a_1,b_1)(a_2a_3 - b_2b_3, a_2b_3 + b_2a_3)\\ &= (a_1,b_1)(a_2,b_2)(a_3,b_3).\end{aligned}$$
8. $1 = (1,0)$.
9. $(a,b) \neq 0 \implies a^2+b^2 \neq 0$. Тогда, $(a,b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$.

   $(a,b)\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) = \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}, \frac{-ab}{a^2+b^2} + \frac{ba}{a^2+b^2}\right) = (1,0)$.

Итак, $\mathbb{C}$ – поле.

Проверка свойств

1. $a \in \mathbb{R} \leftrightarrow (a,0) \in \mathbb{C}$.

   $a+b \leftrightarrow (a,0)+(b,0) = (a+b,0)$.

   $ab \leftrightarrow (a,0)(b,0) = (ab,0)$

   Значит, $\mathbb{R}$ отождествляется в $\mathbb{C}$.
2. $i = (0,1) \implies i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$.

8.6 Алгебраическая форма комплексного числа, его действительная и мнимая части.

Определение 33. Представление числа $z \in \mathbb{C}$ в виде $a+bi$, где $a, b \in \mathbb{R}$ называется его *алгебраической формой*. Число i называется *мнимой единицей*.

$a =: Re(z)$ – *действительная* часть числа z.

$b =: Im(z)$ – *мнимая* часть числа z.

Числа вида bi, где $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, называются *чисто мнимыми*.

8.7 Комплексное сопряжение.

Определение 34. Число $\overline{z} := a - bi$ называется *комплексно сопряженным* к числу $z = a + bi$.

Операция $z \to \overline{z}$ называется *комплексным сопряжением*.

8.7.1 Свойства комплексного сопряжения

- $\overline{\overline{z}} = z$.
- $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$.
- $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

Доказательство.

- $\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{a+bi}} = \overline{a-bi} = a + bi = z$.
- $\overline{z+w} = \overline{(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)} = \overline{(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i} = (a_1+a_2)-(b_1+b_2)i = (a_1-b_1i)+(a_2-b_2i) = \overline{z}+\overline{w}$.
- $\overline{z} \cdot \overline{w} = (a_1-b_1i)(a_2-b_2i) = (a_1a_2-b_1b_2)-(a_1b_2+a_2b_1)i = \overline{zw}$. ■

8.8 Геометрическая модель комплексных чисел, интерпретация сложения и сопряжения в этой модели.

Числу $z = a+bi$ соответствует точка (или вектор) на плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами (a, b). Сумме $z+w$ соответствует сумма соответствующих векторов. Сопряжение $z \to \overline{z}$ – это отражение z относительно действительной оси.

9 Лекция 7.11.2019

9.1 Модуль комплексного числа, его свойства

Определение 35. Число $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ называется *модулем числа* $z = a + bi \in \mathbb{C}$ (то есть длина соответствующего вектора).

Свойства

1. $|z| \geqslant 0$, причем $|z| = 0 \iff z = 0$.
2. $|z + w| \leqslant |z| + |w|$ (неравенство треугольника).
   Пусть $z = a + bi$, $w = c + di$.
$$
\begin{aligned}
|z+w| &\leqslant |z| + |w| \\
\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} &\leqslant \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \\
(a+c)^2 + (b+d)^2 &\leqslant a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \\
ac + bd &\leqslant \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \\
ac + bd &\leqslant \sqrt{(ac)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 + (bd)^2} \\
(ac)^2 + (bd)^2 + 2acbd &\leqslant (ac)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 + (bd)^2 \\
2acbd &\leqslant (ad)^2 + (bc)^2 \\
0 &\leqslant (ad)^2 + (bc)^2 - 2abcd \\
0 &\leqslant (ad - bc)^2
\end{aligned}
$$
3. $z\overline{z} = |z|^2$.
   $z\overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$
4. $|zw| = |z||w|$.
   $|zw|^2 = (zw) \cdot (\overline{zw}) = z \cdot w \cdot \overline{z} \cdot \overline{w} = |z|^2|w|^2$.

Замечание. Из 3) следует, что для $\forall z \neq 0$, $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, то есть $(a+bi)^{-1} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$

9.2 Аргумент комплексного числа

Пусть $z = a + bi \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$.
Тогда, $z = |z|\left(\frac{a}{|z|} + \frac{b}{|z|}i\right)$, при этом $\left(\frac{a}{|z|}\right)^2 + \left(\frac{b}{|z|}i\right)^2 = 1$
Значит, $\frac{a}{|z|}$ и $\frac{b}{|z|}$ являются синусом и косинусом некоторого угла.

Определение 36. *Аргументом числа* $z = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ называется число $\varphi \in \mathbb{R}$, такое что

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

$$\sin\varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

В геометрических терминах, φ есть угол между осью Ox и соответствующим вектором.

Замечание. При $z \neq 0$, аргумент определен с точностью до $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Замечание. При $z = 0$, удобно считать что любое φ является аргументом.

9.3 Тригонометрическая форма комплексного числа

$Arg(z) :=$ множество всех аргументов числа z.
$arg(z) :=$ единственное значение из $Arg(z)$, лежащее в $[0; 2\pi)$.
$Arg(z) = arg(z) + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$
$Arg(z) = \{\varphi \in \mathbb{R} \mid \cos\varphi = \frac{a}{|z|}, \sin\varphi = \frac{b}{|z|}\}$
Тогда, $\forall z \in \mathbb{C}$, $z = |z|\left(\frac{a}{|z|} + \frac{b}{|z|}i\right) = |z|\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$, где $\varphi \in Arg(z)$.

Определение 37. Представление числа $z \in \mathbb{C}$ в виде $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется его *тригонометрической формой*.

9.4 Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме

Предложение. Пусть $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, тогда

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1||z_2|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \\ &= |z_1||z_2|((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)) \\ &= |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)). \end{aligned}$$

∎

Следствие. В условиях предложения, предположим, что $z_2 \neq 0$.

Тогда $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$.

В частности, $\frac{1}{|z_2|}(\cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2)) = \frac{1}{|z_2|}(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2) = \frac{\overline{z}_2}{|z_2|^2}$.

9.5 Возведение в степень комплексных чисел в тригонометрической форме, формула Муавра

Следствие. Пусть $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) \text{ – формула Муавра.}$$

Замечание. В комплексном анализе функция $\exp\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x \to e^x$, доопределяется до функции $\exp\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $z \to e^z$ с сохранением всех привычных свойств.

Доказывается $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $\forall\varphi\in\mathbb{C}$ – формула Эйлера.

Тогда $\forall z \in \mathbb{C}$ представляется в виде $z = |z|e^{i\varphi}$, где $\varphi \in Arg(z)$ – *показательная форма.*

9.6 Извлечение корней из комплексных чисел

Пусть $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

Определение 38. *Корнем степени n* (или *корнем n-й степени)* из числа z называется всякое число $w \in \mathbb{C}$, что $w^n = z$.

Положим $\sqrt[n]{z} := \{w \in \mathbb{C} \mid w^n = z\}$.

Опишем множество $\sqrt[n]{z}$.
$w = \sqrt[n]{z} \implies w^n = z \implies |w|^n = |z|$.
Если $z = 0$, то $|z| = 0 \implies |w| = 0 \implies w = 0 \implies \sqrt[n]{0} = \{0\}$.

Далее считаем, что $z \neq 0$.
$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
$w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$
$z = w^n = |w|^n(\cos(n\psi) + i\sin(n\psi))$
Отсюда,

$$z = w^n \iff \begin{cases} |z| = |w|^n \\ n\psi = \varphi + 2\pi k, \text{ для некоторого } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ \psi = \frac{\varphi+2\pi k}{n}, \text{ для некоторого } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

С точностью до $2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$, получается ровно n различных значений для ψ, при $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

В результате $\sqrt[n]{z} = \{w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}\}$, где $w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$

Замечание. Числа $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ лежат в вершинах правильного n-угольника с центром в начале координат.

Примеры.
$\sqrt{1} = \{\pm 1\}$
$\sqrt{-1} = \{\pm i\}$
$\sqrt[3]{1} = \{1, -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\}$
$\sqrt[4]{1} = \{\pm 1, \pm i\}$

9.7 Основная теорема алгебры комплексных чисел (без доказательства)

$\sqrt[n]{z} = \{$ корни многочлена $x^n - z\}$.

Теорема 9.1. *Всякий многочлен степени $\geqslant 1$ с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень.*

Пусть $f = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z_1 + a_0$, $n \geqslant 1$, $a_n \neq 0$, $a_i \in \mathbb{C}$, тогда $\exists c \in \mathbb{C} : f(c) = 0$.

Замечание. Свойство поля $\mathbb{C}$, сформулированное в теореме, называется *алгебраической замкнутостью.*

9.8 Деление многочленов с остатком

Пусть $\mathbb{F}$ – поле.
$\mathbb{F}[x]$:= все многочлены от переменной x с коэффициентами из $\mathbb{F}$.
$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0 \implies \deg f = n$.
$\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g$.

Определение 39. Многочлен $f(x) \in F[x]$ *делится* на $g(x) \in F[x]$, если $\exists h(x) \in F[x]$, такой что $f(x) = g(x)h(x)$.

Если $f(x)$ не делится на $g(x)$, то можно поделить с остатком.

Предложение (деление с остатком)**.** Если $f(x), g(x) \in F[x]$, $g(x) \neq 0$, то $\exists! q(x), r(x) \in F[x]$, такие что

$$\begin{cases} f(x) = q(x)g(x) + r(x) \\ \text{либо } r(x) = 0, \text{ либо } \deg r(x) < \deg g(x) \end{cases}$$

Пример. $f(x) = x^3 - 2x$, $g(x) = x + 1$.
$f(x) = (x^2 - x - 1)(x + 1) + 1$, $q(x) = (x^2 - x - 1)$, $r(x) = 1$.

9.9 Теорема Безу

Частный случай деления многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$ с остатком: $g(x) = x - c$, $\deg g(x) = 1$:
$f(x) = q(x)(x - c) + r(x)$, где либо $r(x) = 0$, либо $\deg r(x) < g(x) = 1$
Значит, $r(x) \equiv r = const \in F$.

Теорема 9.2. $r = f(c)$.

Доказательство. Подставить $x = c$ в $f(x) = (x - c)g(x) + r(x)$. ■

Следствие. Элемент $c \in F$ является корнем многочлена $f(x) \in F[x]$ тогда и только тогда, когда $f(x)$ делится на $(x - c)$.

9.10 Кратность корня многочлена

Определение 40. *Кратностью* корня $c \in F$ многочлена $f(x)$ называется наибольшее целое k такое что, $f(x)$ делится на $(x - c)^k$.

9.11 Утверждение о том, что всякий многочлен степени n с комплексными коэффициентами имеет ровно n корней с учётом кратностей

Следствие. Пусть $f(z) \in F[z]$, $\deg f = n \geqslant 1$.
$f(x) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$.
$c_1, \dots c_s$ – корни f, $k_1, \dots, k_s$ – их кратности.

Любой многочлен с комплексными коэффициентами разлагается в произведение линейных множителей:

$$f(x) = a_n (x - c_1)^{k_1} (x - c_2)^{k_2} \dots (x - c_s)^{k_s}.$$

Иными словами, $f(z)$ имеет ровно n корней с учетом кратностей.

10 Лекция 14.11.2019

10.1 Векторные пространства, простейшие следствия из аксиом

10.1.1 Определение векторного пространства

Фиксируем поле F (можно считать, что $F = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$)

Определение 41. Множество V называется *векторным (линейным) пространством* над полем F, если на V заданы две операции

- "сложение": $V \times V \to V$, $(x, y) \mapsto x + y$.
- "умножение на скаляр": $F \times V \to V$, $(\alpha \in F, x \in V) \mapsto \alpha x$.

а также, $\forall x, y, z \in V$ и $\alpha, \beta \in F$ выполнены следующие условия (называются *аксиомами векторного пространства*):

1. $x + y = y + x$.
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$.
3. $\exists \overrightarrow{0} \in V : x + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + x = x$ (нулевой элемент).
4. $\exists -x : -x + x = x + (-x) = \overrightarrow{0}$ (противоположный элемент).
5. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.
6. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.
7. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.
8. $1 \cdot x = x$.

Определение 42. Элементы векторного пространства называются (абстрактными) *векторами.*

Пример.

1. $\mathbb{R}$ над $\mathbb{R}$ (или F над F).
2. Пространство $\mathbb{R}^n$ над $\mathbb{R}$ (или F^n над F) реализованное как пространство столбцов или строк длины n.
3. $\mathrm{Mat}_{m \times n}(F)$.
4. $F[x]$ – многочлены то переменной x с коэффициентами в $\mathbb{R}$.
5. Пространство функций на множестве M с значениями в F:

   $f : M \to \mathbb{R}$

   - сложение $(f_1 + f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x)$.
   - умножение на скаляр $(\alpha f)(x) := \alpha f(x)$.

   – это векторное пространство над F.

   Например, множество всех функций $[0, 1] \to R$.

10.1.2 Простейшие следствия из аксиом

$\forall \alpha \in F, x \in V$.

1. Элемент $\overrightarrow{0}$ единственный.

   Если $\overrightarrow{0}'$ – другой такой ноль, то $\overrightarrow{0}' = \overrightarrow{0}' + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.
2. Элемент $-x$ единственный.

   Если $(-x)'$ – другой такой противоположный элемент, то

$$(-x)' = (-x)' + \overrightarrow{0} = (-x)' + (x + (-x)) = ((-x)' + x) + (-x) = \overrightarrow{0} + (-x) = -x.$$

3. $\alpha\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.

   Рассмотрим равенство $\overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$. Домножив на α получаем $\alpha(\overrightarrow{0} + \overrightarrow{0}) = \alpha\overrightarrow{0}$.

   Раскроем скобки, $\alpha\overrightarrow{0} + \alpha\overrightarrow{0} = \alpha\overrightarrow{0}$.

   Прибавим к обоим частям обратный элемент к $\alpha\overrightarrow{0}$, получим $\alpha\overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} \implies \alpha\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.
4. $\alpha(-x) = -(\alpha x)$.

   Рассмотрим равенство $x + (-x) = \overrightarrow{0}$.

$$x + (-x) = \overrightarrow{0} \implies ax + a(-x) = 0 \implies a(-x) = -(ax).$$

5. $0 \cdot x = \overrightarrow{0}$.

   Доказывается так же, как пункт 3, но с 0 вместо $\overrightarrow{0}$.

6. $(-1) \cdot x = -x$.

   Рассмотрим равенство $1 + (-1) = 0$. Домножив на x получаем $(1 + (-1))x = 0x$.

   Раскроем скобки и воспользуемся пунктом 5 — $1x + (-1)x = 0$ или $x + (-1)x = 0$.

   Прибавим к обоим частям $-x$, получим $0 + (-1)x = -x$ или $(-1)x = -x$.

10.2 Подпространства векторных пространств

Пусть V – векторное пространство над F.

Определение 43. Подмножество $U \subseteq V$ называется *подпространством* (в V), если

1. $\overrightarrow{0} \in U$.
2. $x, y \in U \implies x + y \in U$.
3. $x \in U, \alpha \in F \implies \alpha x \in U$.

Замечание. Всякое подпространство само является векторным пространством относительно тех же операций.

Пример.

1. $\{\overrightarrow{0}\}$ и V – всегда подпространства в V.

   они называются *несобственными* подпространствами, остальные называются *собственными.*

2. Множество всех верхнетреугольных, нижнетреугольных, диагональных матриц в $M_n(F)$.

3. $F[x]_{\leqslant n}$ все многочлены в $F[x]$ степени $\leqslant n$ – подпространство в $F[x]$.

10.3 Утверждение о том, что множество решений однородной системы линейных уравнений с n неизвестными является подпространством в F^n

Предложение. Множество решений любой ОСЛУ $Ax = 0$ ($A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(F)$, $x \in F^n$) является подпространством в F^n.

Доказательство. Пусть S – множество решений ОСЛУ Ax = 0.

1. $\overrightarrow{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in S$.

2. $x, y \in S \implies Ax = \overrightarrow{0}$ и $Ay = \overrightarrow{0} \implies A(x + y) = Ax + Ay = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} \implies x + y \in S$.

3. $x \in S, \alpha \in F \implies Ax = \overrightarrow{0} \implies A(\alpha x) = \alpha(Ax) = \alpha\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} \implies \alpha x \in S$. ■

10.4 Линейная комбинация конечного набора векторов

Пусть V – векторное пространство над F и $v_1, \ldots, v_k \in V$ – набор векторов.

Определение 44. *Линейной комбинацией* векторов $v_1, \ldots, v_k$ называется всякое выражение вида $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$, где $\alpha_i \in F$.

10.5 Линейная оболочка подмножества векторного пространства, примеры

Пусть $S \subseteq V$ – подмножество векторного пространства.

Определение 45. *Линейной оболочкой* множества S называются множество всех векторов из V, представимых в виде линейной комбинации какого-то конечного набора векторов из S.

Обозначение: $\langle S \rangle$.

Если $S = \{v_1, \ldots, v_k\}$ конечно и состоит из векторов $v_1, \ldots, v_k$, то еще пишут $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ и говорят "линейная оболочка векторов $v_1, \ldots, v_k$".

Соглашение: $\langle \varnothing \rangle = \{\overrightarrow{0}\}$.

Пример.

1. $\langle \overrightarrow{0} \rangle = \{\overrightarrow{0}\}$.

2. $V = \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$, $\langle v \rangle = \{\alpha v \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ – прямая.

3. $V = \mathbb{R}^3$, v_1, v_2 – пара неколлинеарных векторов.

   Тогда, $\langle v_1, v_2 \rangle = \{a_1 v_1 + a_2 v_2 \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ – плоскость натянутая на v_1, v_2.

11 Лекция 21.11.2019

Напомним, если V – векторное пространство над полем F, то при $S \subseteq V$, линейная оболочка
$\langle S \rangle = \{$все линейные комбинации конечных наборов векторов из $S\}$

Пример.

4. $V = F^n$, $S = \{e_1, \dots, e_n\}$, где

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \; \dots \;, \; e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\langle S \rangle = \langle e_1, \dots, e_n \rangle = F^n$.

Так как для любого $x \in F^n \implies x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n.$

11.1 Утверждение о том, что линейная оболочка системы векторов является подпространством объемлющего векторного пространства

Пусть V – векторное пространство, $S \subseteq V$.

Предложение. $\langle S \rangle$ является подпространством в V.

Доказательство.

1. Два случая:
   $S = \varnothing \implies \langle \varnothing \rangle = \{\overrightarrow{0}\} \implies \overrightarrow{0} \in \langle S \rangle$.
   $S \neq \varnothing \implies \exists V \in S \implies \underbrace{0V}_{\in \langle S \rangle} = \overrightarrow{0} \implies \overrightarrow{0} \in \langle S \rangle$.

2. Пусть $v, w \in \langle S \rangle$:
   $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$,
   $w = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_n w_n$, где $v_i, w_i \in S$, $\alpha_i, \beta_i \in F$.
   Тогда, $v + w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m + \beta_1 w_1 + \dots + \beta_n w_n \in \langle S \rangle$.
   (если $v_i = w_j$, то $\alpha_i v_i + \beta_j w_j = (\alpha_i + \beta_j) w_j$)

3. $v \in \langle S \rangle$, $\alpha \in F \implies v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$
   $\implies \alpha v = (\alpha\alpha_1)v_1 + \dots + (\alpha\alpha_m)v_m \in \langle S \rangle$. ■

11.2 Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов

Определение 46. Линейная комбинация $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ называется *тривиальной*, если $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ и *нетривиальной* иначе (то есть $\exists i : a_i \neq 0$ или $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)$).

Пример. $v + (-v)$ – нетривиальная линейная комбинация векторов v и $-v$.

Определение 47.

1. Векторы $v_1, \dots, v_n \in V$ называются *линейно зависимыми* если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная $\overrightarrow{0}$ (то есть $\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)$, такие что $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \overrightarrow{0}$) и *линейно независимыми* иначе (то есть из условия $\alpha_1 v_1 + \dots \alpha_n v_n = \overrightarrow{0}$ следует $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$).

2. Множество $S \subseteq V$ (возможно бесконечное, возможно с повторяющимися элементами) называется *линейно зависимым* если существует конечное линейно зависимое подмножество, и *линейно независимым* если любое конечное подмножество линейно независимо.

Соглашение. *Система векторов* – множество векторов, в котором возможны повторения.

Пример.

1. $S = \{\overrightarrow{0}\}$ $\quad 1 \cdot \overrightarrow{0}$ – нетривиальная линейная комбинация $\implies$ $\overrightarrow{0}$ линейно зависимо.

2. $S = \{v\}$, $v \neq \overrightarrow{0}$ – линейно независимо.

   Пусть $\lambda v = \overrightarrow{0} \implies \overrightarrow{0} = \lambda^{-1}\overrightarrow{0} = \lambda^{-1}(\lambda v) = (\lambda^{-1}\lambda)v = 1v = v$ – противоречие.

3. $S = \{v_1, v_2\} \implies S$ линейно зависимо тогда и только тогда, когда v_1 и v_2 пропорциональны (то есть либо $v_2 = \lambda_1 v_1$, $\lambda_1 \in F$, либо $v_1 = \lambda_2 v_2$, $\lambda_2 \in F$).

   Доказательство.

   $(\implies)$ $\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 = \overrightarrow{0}$, $(\mu_1, \mu_2) \neq (0, 0)$.
   Если $\mu_1 \neq 0$, то $v_1 = -\frac{\mu_2}{\mu_1} v_2$.
   Аналогично для $\mu_2 \neq 0$.

   $(\impliedby)$ $v_2 = \lambda_1 v_1 \implies \lambda_1 v_1 + (-1)v_2 = \overrightarrow{0} \implies v_1, v_2$ линейно зависимы.
   Аналогично для $v_1 = \lambda_2 v_2$. ■

4. $V = F^n$, $S = \{e_1, \ldots, e_n\} \implies S$ линейно независимо.

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n = \overrightarrow{0} \iff \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} \iff \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

11.3 Критерий линейной зависимости конечного набора векторов

Предложение. Пусть $v_1, \ldots, v_n \in V$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, тогда следующие условия эквивалентны:

1. $\exists (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in F^n$, такой что $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \overrightarrow{0} (\star)$ и $\alpha_i \neq 0$.
2. $v_i \in \langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n \rangle$.

Доказательство.

(1) $\implies$ (2) $\alpha_i \neq 0$ в $(\star) \implies v_i = -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_i} v_1 - \cdots - \dfrac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} v_{i-1} - \dfrac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} v_{i+1} - \cdots - \dfrac{\alpha_n}{\alpha_i} v_n \in \langle v_1, \ldots v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n \rangle$.

(2) $\implies$ (1) $v_i = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_{i-1} v_{i-1} + \beta_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \beta_n v_n \implies$

$$\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_{i-1} v_{i-1} + \underbrace{(-1)}_{\neq 0} v_i + \beta_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \beta_n v_n = \overrightarrow{0}.$$

(нетривиальная линейная комбинация с i-м скаляром $\neq 0$). ■

Следствие. Векторы $v_1, \ldots, v_n$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда $\exists i \in \{1, \ldots, n\}$, такое что $v_i \in \langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n \rangle$.

11.4 Основная лемма о линейной зависимости

Лемма 11.1. Пусть есть две системы векторов $v_1, \ldots, v_m$ и $w_1, \ldots, w_n$, причем $m < n$ и $w_i \in \langle v_1, \ldots, v_m \rangle \quad \forall i = 1, \ldots, n$. Тогда векторы $w_1, \ldots, w_n$ линейно зависимы.

Доказательство.

$$w_1 = a_{11} v_1 + a_{21} v_2 + \cdots + a_{m1} v_m = (v_1, \ldots, v_m) \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

$$\ldots$$

$$w_n = a_{1n} v_1 + a_{2n} v_2 + \cdots + a_{mn} v_m = (v_1, \ldots, v_m) \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

$$\implies (w_1, \ldots, w_n) = (v_1, \ldots, v_m) A, \qquad (\star)$$

где $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(F)$.

Так как $m < n$, то ОСЛУ $Ax = \overrightarrow{0}$ имеет ненулевое решение $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \ldots \\ z_n \end{pmatrix} \in F^n$.

Тогда умножим ($\star$) справа на z:

$$(w_1, \ldots, w_n) \cdot z = (v_1, \ldots, v_m) \cdot \underbrace{A \cdot z}_{=\overrightarrow{0}} = (v_1, \ldots, v_m) \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{0}.$$

$$\implies (w_1, \ldots, w_n) \begin{pmatrix} z_1 \\ \ldots \\ z_n \end{pmatrix} = \overrightarrow{0} \implies z_1 w_1 + \ldots z_n w_n = \overrightarrow{0}.$$

Это нетривиальная линейная комбинация, так как $z \neq 0$.

Следовательно, $w_1, \ldots, w_n$ линейно зависимы. ∎

Пример. Любые $n+1$ векторов в F^n линейно зависимы, так как $F^n = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$.

11.5 Базис векторного пространства

Определение 48. Подмножество $S \subseteq V$ называется *базисом* пространства V, если
1. S линейно независимо,
2. $\langle S \rangle = V$.

Пример. $e_1, \ldots, e_n$ – это базис в F^n. Он называется *стандартным базисом* в F^n.

Замечание. Всякая линейно независимая система векторов является базисом своей линейной оболочки.

11.6 Конечномерные и бесконечномерные векторные пространства

Определение 49. Векторное пространство V называется *конечномерным*, если в нем есть конечный базис, и *бесконечномерным* иначе.

11.7 Независимость числа элементов в базисе векторного пространства от выбора базиса

Предложение. V – конечномерное векторное пространство. Тогда, все базисы в V содержат одно и то же количество элементов.

Доказательство. V конечномерно, тогда существует конечный базис $e_1, \ldots, e_n$.

Пусть $S \subseteq V$ – другой базис. Так как $\langle e_1, \ldots, e_n \rangle = V$, то $\forall v \in S \implies v \in \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$. Тогда любые $n+1$ векторов в S линейно зависимы по основной лемме о линейной зависимости. Но S линейно независимо, значит $|S| \leqslant n$.

Пусть $S = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$, где $m \leqslant n$. Тогда $\forall i = 1, \ldots, n \quad e_i \in \langle e'_1, \ldots, e'_m \rangle$, по основной лемме о линейной зависимости получаем $n \leqslant m$.

То есть $m = n$. ∎

11.8 Размерность конечномерного векторного пространства

Определение 50. *Размерностью* конечномерного векторного пространства называется число элементов в (любом) его базисе.

Обозначение: $\dim V$.

Пример.

1. $\dim F^n = n$,
2. $V = \{\overrightarrow{0}\} \implies \dim V = 0$ так как базисом V будет $\varnothing$.

12 Лекция 28.11.2019

Пусть V – векторное пространство над полем F.
Обозначение $\dim V < \infty$ – V конечномерно.

12.1 Характеризация базисов в терминах единственности линейного выражения векторов

Утверждение 12.1. *Пусть* $\dim V < \infty$, $e_1, \dots, e_n \in \langle V \rangle$.
$e_1, \dots, e_n$ *— базис* V *тогда и только тогда, когда,* $\forall v \in V$ *единственным образом представим в виде*

$$v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \quad x_i \in F.$$

Доказательство.

$\Longrightarrow$ Пусть есть два представления $v = x_1 e_1 + \dots x_n e_n = x_1' e_1 + \dots + x_n' e_n$.
Тогда, $(x_1 - x_1')e_1 + \dots + (x_n - x_n')e_n = \overrightarrow{0}$.
Так как $e_1, \dots, e_n$ линейно независимы, то $(x_1 - x_1') = \dots = (x_n - x_n') = 0$.
Значит, $x_i = x_i' \quad \forall i$.

$\Longleftarrow$ $\forall v \in V$ имеем $v \in \langle e_1, \dots, e_n \rangle$.
Значит, $\langle e_1, \dots, e_n \rangle = V$.
Для $v = \overrightarrow{0}$ существует единственное представление $\overrightarrow{0} = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$.
Но мы знаем, что $\overrightarrow{0} = 0e_1 + \dots + 0e_n$.
Следовательно $\alpha_1 = \dots \alpha_n = 0$, то есть $e_1, \dots, e_n$ линейно независимо.

Итог: $e_1, \dots, e_n$ – базис V. ■

12.2 Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений

$$Ax = 0 \text{ – ОСЛУ}. \tag{$\star$}$$

$A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(F), x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in F^n$.
$S \subseteq F^n$ – множество решений.
Знаем, что S – подпространство в F^n.

Определение 51. *Фундаментальной системой решений* (ФСР) для ОСЛУ ($\star$) называется всякий базис пространства её решений.

Замечание. У одной ОСЛУ может быть много разных ФСР.

12.3 Метод построения фундаментальной системы решений

Приведем матрицу к улучшенному ступенчатому виду элементарными преобразовиями строк.

$$(A|\overrightarrow{0}) \rightsquigarrow (B|\overrightarrow{0}) \quad \leftarrow \text{ улучшенный ступенчатый вид.}$$

Пусть r – число ненулевых строк в B.
Тогда будет r главных неизвестных и $n - r$ свободных.
Выполнив перенумерацию будем считать что,

$$x_1, \dots, x_r \text{ – главные неизвестные,}$$
$$x_{r+1}, \dots, x_n \text{ – свободные.}$$

Тогда, общее решение для ($\star$) имеет вид

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11}x_{r+1} + c_{12}x_{r+2} + \dots + c_{1,n-r}x_n \\ x_2 &= c_{21}x_{r+1} + c_{22}x_{r+2} + \dots + c_{2,n-r}x_n \\ &\dots \\ x_r &= c_{r1}x_{r+1} + c_{r2}x_{r+2} + \dots + c_{r,n-r}x_n. \end{aligned}$$

Предъявим некоторую систему решений

$$u_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \dots \\ c_{r1} \\ \underline{1} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \dots \\ c_{r2} \\ 0 \\ \underline{1} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},\ \dots,\ u_{n-r} = \begin{pmatrix} c_{1,n-r} \\ c_{2,n-r} \\ \dots \\ c_{r,n-r} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \underline{1} \end{pmatrix}.$$

$u_1, \dots, u_{n-r} \in S$

Предложение. $u_1, \dots, u_{n-r}$ – это ФСР для ОСЛУ ($\star$).

Доказательство.

1. Линейная независимость.
   Пусть $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{n-r} u_{n-r} = \overrightarrow{0}$.
   При любом $k \in \{1, \dots, n-r\}$, $(r+k)$-я координата левой части равна α_k, значит $\alpha_k = 0$.
   Следовательно $\alpha_1 = \dots = \alpha_{n-r} = 0$.

2. $\langle u_1, \dots, u_{n-r} \rangle = S$.

   “$\subseteq$” Верно, так как $u_1, \dots, u_{n-r} \in S$.

   “$\supseteq$” Пусть $u \in S$, тогда

$$u = \begin{pmatrix} * \\ \dots \\ * \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_{n-r} \end{pmatrix} \text{ для некоторых } \alpha_1, \dots, \alpha_{n-r} \in F.$$

   Положим $v := u - \alpha_1 u_1 - \dots - \alpha_{n-r} u_{n-r}$.
   Тогда, $v \in S$, но

$$v = \begin{pmatrix} * \\ \dots \\ * \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Тогда формулы для общего решения дают $v = \overrightarrow{0}$.
   Поэтому $u = \alpha_i u_1 + \dots + \alpha_{n-r} u_{n-r}$.

   Значит $\langle u_1, \dots, u_{n-r} \rangle = S$. ∎

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = 3x_2 - x_4 \\ x_3 = 2x_4 \end{cases}$$

Тогда ФСР:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

12.4 Утверждение о возможности выбора из конечной системы векторов базиса её линейной оболочки

Пусть V – векторное пространство над F.

Наблюдение: если $v, v_1, \dots, v_m \in V$ и $v \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$, тогда $\langle v, v_1, \dots, v_m \rangle = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$

Предложение. Из всякой конечной системы векторов $S \subseteq V$ можно выбрать подсистему, которая является базисом в линейной оболочке $\langle S \rangle$.

Доказательство. Пусть $S = \{v_1, \dots, v_m\}$.

Индукция по m.

База $m = 1$: $S = \{v_1\}$.

Если $v_1 = \overrightarrow{0}$, то $\langle S \rangle = \{\overrightarrow{0}\}$, значит в качестве базиса берем $\varnothing$.

Если $v_1 \neq 0$, то S линейно независимо.

Следовательно S – базис в $\langle S \rangle$.

Шаг Пусть доказано для $< m$, докажем для m.

Если $v_1, \dots, v_m$ линейно независимо, то $v_1, \dots, v_m$ – это уже базис в $\langle S \rangle$.

Иначе, $\exists i : v_i \in \langle S \setminus \{v_i\} \rangle$.

Положим $S' := S \setminus \{v_i\}$.

Тогда, $\langle S' \rangle = \langle S \rangle$.

Так как $|S'| = m - 1 < m$, то по предположению индукции в S' можно выбрать базис для $\langle S' \rangle = \langle S \rangle$. ■

12.5 Дополнение конечной линейно независимой системы векторов до базиса конечномерного векторного пространства

Предложение. Пусть $\dim V < \infty$, тогда всякую линейно независимую систему векторов в V можно дополнить до базиса всего пространства V.

Доказательство. Пусть $v_1, \dots, v_m$ – данная линейно независимая система.

Так как $\dim V < \infty$, в V есть конечный базис $e_1, \dots, e_n$.

Рассмотрим систему векторов $v_1, \dots, v_m, e_1, \dots, e_n$.

Пройдемся по этим векторам слева направо и выбросим те, которые линейно выражаются через предыдущие (не выброшенные).

При этом:

1) линейная оболочка системы сохраняется и равна $\langle v_1, \dots, v_m, e_1, \dots, e_n \rangle = V$;
2) $v_1, \dots, v_m$ останутся в системе, так как они линейно независимы;
3) в новой системе никакой вектор линейно не выражается через предыдущие.

Пусть новая система - это $S' = \{v_1, \dots, v_m, e_{i_1}, \dots, e_{i_t}\}$.

Докажем, что S' – базис в V.

По свойству 1) имеем, что $\langle S' \rangle = V$.

Осталось доказать, что S' линейно независимо.

Пусть $\alpha_1 v_1 + \dots \alpha_n v_n + \beta_1 e_{i_1} + \dots + \beta_t e_{i_t} = \overrightarrow{0}$.

Предположим, что эта линейная комбинация нетривиальна.

Так как $v_1, \dots, v_m$ линейно независимы, то $\exists k : \beta_{i_k} \neq 0$.

Выберем k максимальным с этим свойством.

Тогда, e_{i_k} линейно выражается через предыдущие — противоречие. ■

Следствие. Если $\dim V = n$ и $v_1, \dots, v_n$ – линейно независимая система, тогда $v_1, \dots, v_m$ – базис V.

12.6 Лемма о добавлении вектора к конечной линейной независимой системе

Лемма 12.2. Пусть $v, v_1, \dots, v_m \in V$ и $v_1, \dots, v_m$ линейно независимы, тогда либо $v, v_1, \dots, v_m$ линейно независимы, либо $v \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$.

Доказательство. Пусть $v, v_1, \dots, v_m$ линейно зависимы, тогда $\exists (\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \neq (0, \dots, 0)$, такой что

$$\alpha v + \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = \overrightarrow{0}.$$

Но, так как $v_1, \dots, v_m$ линейно независимы, то $\alpha \neq 0$. Значит, $v \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ по предложению. ■

13 Лекция 5.12.2019

13.1 Размерность подпространства конечномерного векторного пространства

Пусть V – конечномерное векторное пространство.

Предложение. Если $U \subseteq V$ – подпространство V, тогда U тоже конечномерно, причем $\dim U \leqslant \dim V$.
Кроме того, $\dim U = \dim V \iff U = V$.

Доказательство. Пусть $n = \dim V$.
Построим в U конечный базис.
Если $U = \{\overrightarrow{0}\}$, то в качестве базиса берем $\varnothing$.
Далее считаем, что $U \neq \{\overrightarrow{0}\}$.
Выберем $v_1 \in U \setminus \{\overrightarrow{0}\}$. Если $\langle v_1 \rangle = U$, то конец. Иначе, выберем $v_2 \in U \setminus \langle v_1 \rangle$.
Если $\langle v_1, v_2 \rangle = U$, то конец.
Иначе, выберем $v_3 \in U \setminus \langle v_1, v_2 \rangle$, и так далее.
Получаем систему векторов $v_1, v_2, \ldots$. Она линейно независима по лемме.

По основной лемме о линейной зависимости процесс закончится не позднее шага n, значит U конечномерно и $\dim U \leqslant \dim V$.
Если $\dim U = n$, то $v_1, \ldots, v_n$ – базис U. По следствию, если $v_1, \ldots, v_n$ – базис U, то $U = V$. ■

13.2 Ранг системы векторов

Пусть $\dim V < \infty$ и $S \subseteq V$ – система векторов.

Определение 52. *Рангом* системы векторов S называется число $\operatorname{rk} S$, равное наибольшему числу векторов в линейно независимой подсистеме из S.

$$\operatorname{rk} S = \max\{|S'| \mid S' \subseteq S \text{ – линейно независимая подсистема}\}.$$

13.3 Связь ранга системы векторов с размерностью её линейной оболочки

Предложение. $\operatorname{rk} S = \dim\langle S \rangle$.

Доказательство. Пусть $\operatorname{rk} S = r$.
Тогда существует линейно независимая подсистема $S' = \{v_1, \ldots, v_r\}$.
По определению ранга и лемме получаем $S \subseteq \langle v_1, \ldots, v_r \rangle$.
Значит, $\langle S \rangle = \langle v_1, \ldots, v_r \rangle$ (так как $v_1, \ldots, v_r \in S$).
Следовательно $\dim S = r$. ■

13.4 Ранг матрицы: столбцовый и строковый

Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(F)$.

Определение 53. *Столбцовым рангом* (или просто *рангом*) матрицы A называется ранг системы её столбцов

$$A^{(1)}, \ldots, A^{(n)} \subseteq F^n.$$

Обозначение: $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}\{A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}\}$.

Определение 54. *Строковым рангом* матрицы A называется число $\operatorname{rk} A^T$, то есть ранг системы строк

$$A_{(1)}, \ldots, A_{(n)} \in F^n.$$

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Любые два столбца линейно независимы (не пропорциональны), то есть $\operatorname{rk} A \geqslant 2$.
Но, $A^{(2)} = \frac{1}{2}\left(A^{(1)} + A^{(3)}\right)$, значит $A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}$ линейно зависимы $\implies \operatorname{rk} A = 2$.

13.5 Сохранение линейных зависимостей между столбцами матрицы при элементарных преобразованиях строк

Предложение. Элементарные преобразования строк сохраняют линейные зависимости между столбцами матрицы. Если $A \rightsquigarrow B$ элементарным преобразованиями строк, то

$$\alpha_1 A^{(1)} + \dots + \alpha_n A^{(n)} = \overrightarrow{0} \iff \alpha_1 B^{(1)} + \dots + \alpha_n B^{(n)} = \overrightarrow{0}.$$

В частности, при $1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n$

$$A^{(i_1)}, \dots, A^{(i_k)} \text{ линейно независимы } \iff B^{(i_1)}, \dots, B^{(i_k)} \text{ линейно независимы.}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\alpha_1 A^{(1)} + \dots + \alpha_n A^{(n)} = \overrightarrow{0} &\iff A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \overrightarrow{0} \\
&\iff \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \text{ — решение ОСЛУ } Ax = \overrightarrow{0} \\
&\iff \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \text{ — решение ОСЛУ } Bx = \overrightarrow{0} \\
&\iff B \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \overrightarrow{0} \iff \alpha_1 B^{(1)} + \dots + \alpha_n B^{(n)} = \overrightarrow{0}.
\end{aligned}$$

■

13.6 Инвариантность столбцового и строкового рангов матрицы при элементарных преобразованиях строк и столбцов

Следствие. При элементарных преобразованиях строк (столбцовый) ранг матрицы сохраняется.

Предложение. При элементарных преобразованиях столбцов линейная оболочка $\langle A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \rangle$ сохраняется.

Доказательство. Пусть $A \rightsquigarrow B$ элементарными преобразованиями столбцов.
Тогда,

$$B^{(1)}, \dots, B^{(n)} \in \langle A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \rangle.$$

Значит,

$$\langle B^{(1)}, \dots, B^{(n)} \rangle \subseteq \langle A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \rangle.$$

Так как элементарные преобразования обратимы, то включение верно и в другую сторону. ■

Следствие. При элементарных преобразованиях столбцов (столбцовый) ранг матрицы сохраняется.

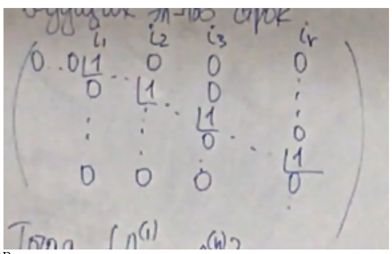
Следствие. Строковый ранг матрицы сохраняется при элементарных преобразованиях строк и столбцов.

13.7 Столбцовый и строковый ранги матрицы, имеющей улучшенный ступенчатый вид

Предложение. Если A имеет улучшенный ступенчатый вид, то оба числа $\operatorname{rk} A$ и $\operatorname{rk} A^T$ равны числу ненулевых строк в A.

Доказательство. Пусть r – число ненулевых строк в A и пусть $i_1 < \dots < i_r$ – номера ведущих элементов строк.

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & & & i_1 & & i_2 & & i_3 & & i_r
\end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cccccccccc}
0 & \dots & 0 & 1 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & & 0 & \dots & 1 & & 0 & & \vdots \\
 & & & \vdots & & 0 & \dots & 1 & & 0 \\
 & & & \vdots & & \vdots & & 0 & \dots & 1 \\
 & & & 0 & & 0 & & 0 & & 0
\end{array}\right)$$



жалкая попытка повторить шедевр

Тогда, $\{A^{(1)}, \dots, A^{(n)}\} \ni e_1, \dots, e_r$, где

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i.$$

Значит, $\langle A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \rangle \supseteq \langle e_1, \dots, e_r \rangle$.
Заметим, что $A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \in \langle e_1, \dots, e_r \rangle$, то есть $\langle A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \rangle \subseteq \langle e_1, \dots, e_r \rangle$.

Теперь покажем, что строки $A_{(1)}, \dots, A_{(r)}$ линейно независимы.
Пусть $\alpha_1 A_{(1)} + \dots + \alpha_r A_{(r)} = \overrightarrow{0}\,(\star)$.
$\forall k = 1, \dots, r$ на месте i_k в левой части $(\star)$ стоит α_k, значит $\alpha_k = 0$.
То есть $\alpha_i = 0\ \forall i$, следовательно $A_{(1)}, \dots, A_{(r)}$ линейно независимы.
$\implies \operatorname{rk} A^T = r$. ■

13.8 Равенство столбцового и строкового рангов матрицы

Теорема 13.1. *Пусть $A \in Mat_{m\times n}(F)$, тогда $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A^T$, причем оба числа равны количеству строк в ступенчатом виде матрицы A.*

Доказательство. $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A^T$ следует из следствий, предыдущего предложения и теоремы о приведении матрицы к улучшенному ступенчатому виду.

Остальное вытекает из предложения и того, что при переходе от ступенчатого виду к улучшенному ступенчатому виду число ненулевых строк сохраняется. ■

13.9 Связь ранга квадратной матрицы с её определителем

Следствие. Пусть $A \in M_n(F)$ – квадратная матрица. Тогда,

$$\operatorname{rk} A = n \iff \det A \neq 0,$$
$$\operatorname{rk} A < n \iff \det A = 0.$$

Доказательство. При элементарных преобразованиях строк $\operatorname{rk} A$ сохраняется, условия $\det A \neq 0$ и $\det A = 0$ тоже.

Следовательно, достаточно доказать для ступенчатых матриц. В этом случае

$$\operatorname{rk} A = n \iff n \text{ ненулевых строк} \iff \det A \neq 0,$$
$$\operatorname{rk} A < n \iff \text{есть нулевые строки} \iff \det A = 0.$$ ■

13.10 Подматрицы

Определение 55. *Подматрицей* матрицы A называется всякая матрица, получающаяся из A вычёркиванием каких-то строк и каких-то столбцов.

13.11 Связь рангов матрицы и её подматрицы

Предложение. S подматрица $\implies \operatorname{rk} S \leqslant \operatorname{rk} A$.

Доказательство. Пусть $\operatorname{rk} S = r$, значит в S есть линейно независимая система из r столбцов. Но тогда соответствующие r столбцов в матрице A будут и подавно линейно независимы. ■

14 Лекция 12.12.2019

14.1 Миноры

Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(F)$.

Определение 56. *Минором* матрицы A называется определитель всякой квадратной подматрицы в A.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

- 6 миноров порядка 1,
- 3 минора порядка 2
  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}.$

14.2 Теорема о ранге матрицы

Теорема 14.1. *Для любой $A \in Mat_{m\times n}(F)$ следующие 3 числа равны:*
(1) $\mathrm{rk}\, A$ (столбцовый ранг),
(2) $\mathrm{rk}\, A$ (строковый ранг),
(3) наибольший порядок ненулевого минора в A.

Доказательство. (1) = (2) – уже знаем.
Пусть S – квадратная подматрица в A порядка r и $\det S \neq 0$. Тогда $r = \mathrm{rk}\, S \leqslant \mathrm{rk}\, A$. Отсюда, (3) $\leqslant$ (1).

Пусть теперь $\mathrm{rk}\, A = r$. Найдем в A ненулевой минор порядка r.
Так как $\mathrm{rk}\, A = r$, в A есть r линейно независимых столбцов $A^{(i_1)}, \dots, A^{(i_r)}$.
Составим из них матрицу B. Тогда $\mathrm{rk}\, B = r$.
Так как (1) = (2) для B, то в B можно найти r линейно независимых строк.
Пусть S – подматрица в B, составленная из этих строк.
S – квадратная подматрица порядка r и $\mathrm{rk}\, S = r \implies \det S \neq 0 \implies$ нашли. Значит, (3) $\geqslant$ (1).

Итог: (3) = (1). ∎

14.3 Приложения ранга матрицы к исследованию СЛУ

Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(F)$, $b \in F^m$, $x \in F^n$ – столбец неизвестных.

$$Ax = b. \qquad (\star)$$

$(A \mid b)$ – расширенная матрица.

14.3.1 Теорема Кронекера-Капелли

Теорема 14.2 (Кронекера-Капелли)**.** *СЛУ* $(\star)$ *совместна* $\iff \mathrm{rk}(A \mid b) = \mathrm{rk}\, A$.

Доказательство. При элементарных преобразованиях строк
– сохраняется множество решений,
– сохраняются числа $\mathrm{rk}(A \mid b)$ и $\mathrm{rk}\, A$.

Следовательно, вопрос сводится к ситуации когда A имеет ступенчатый вид.
В ступенчатом виде СЛУ совместна тогда и только тогда, когда нет строк вида $(0, \dots, 0 \mid \underbrace{\star}_{\neq 0})$.

То есть матрицы $(A \mid b)$ и A имеют одно и то же число ненулевых строк.
Значит, $\mathrm{rk}(A \mid b) = \mathrm{rk}\, A$. ∎

14.3.2 Критерий существования единственного решения у совместной системы линейных уравнений в терминах ранга её матрицы коэффициентов

Теорема 14.3. *Пусть СЛУ* $(\star)$ *совместна. Тогда, она имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $\mathrm{rk}\, A = n$, где n – число неизвестных.*

Доказательство. Снова все сводится к ситуации, когда $(A \mid b)$ имеет ступенчатый вид.
Тогда, единственное решение $\iff$ нет свободных неизвестных $\iff$ ступенек ровно n $\iff \mathrm{rk}\, A = n$. ∎

14.3.3 Критерий существования единственного решения у системы линейных уравнений с квадратной матрицей коэффициентов в терминах её определителя

Следствие. Пусть A квадратна (то есть $m = n$). Тогда СЛУ ($\star$) имеет единственное решение $\iff$ $\det A \neq 0$.

Доказательство. Единственное решение $\iff$ $\operatorname{rk} A = n$ $\iff$ $\det A \neq 0$. ■

Замечание. Это единственное решение равно $x = A^{-1}b$.

14.3.4 Размерность пространства решений однородной системы линейных уравнений в терминах ранга её матрицы коэффициентов

Пусть теперь СЛУ однородна, то есть $b = 0$.

$$Ax = 0. \tag{$\star$}$$

Пусть $S \subseteq F^n$ – множество её решений. Знаем, что S – подпространство в F^n.

Предложение. $\dim S = n - \operatorname{rk} A$.

Доказательство. Пусть r – число ненулевых строк в ступенчатом виде матрицы A. Тогда $r = \operatorname{rk} A$.
Мы уже строили ФСР для ($\star$) из $n - r$ векторов.
Значит, $\dim S = n - r = n - \operatorname{rk} A$. ■

14.3.5 Реализация подпространства в F^n в качестве множества решений однородной системы линейных уравнений

Пусть $b_1, \dots, b_p \in F^n$,

$$B := (b_1, \dots, b_p) \in \mathrm{Mat}_{n\times p}(F).$$

Пусть $a_1, \dots, a_q \in F^n$ — ФСР для ОСЛУ $B^T x = 0$.

$$A := (a_1, \dots, a_q) \in \mathrm{Mat}_{n\times q}(F).$$

Предложение. $\langle b_1, \dots, b_p\rangle$ есть множество решений ОСЛУ $A^T x = 0$.

Доказательство. Пусть $S = \{x \in F^n \mid A^T x = 0\}$.

$$\begin{aligned} \forall i = 1, \dots, q \quad B^T a_i = 0 &\implies B^T A = 0 \\ &\implies A^T B = 0 \implies A^T b_j = 0 \quad \forall j = 1, \dots, p. \end{aligned}$$

Значит, $b_j \in S \quad \forall j = 1, \dots, p$.
Но тогда, $\langle b_1, \dots, b_p\rangle \subseteq S$.
Пусть $r = \operatorname{rk}\{b_1, \dots, b_p\} = \dim\langle b_1, \dots, b_p\rangle = \operatorname{rk} B$.
При этом, $\operatorname{rk} A = q = n - r$.
Тогда, $\dim S = n - \operatorname{rk} A = n - (n - r) = r$.
Следовательно, $\langle b_1, \dots, b_p\rangle = S$. ■

Следствие. Всякое подпространство в F^n является решением некоторой ОСЛУ.

14.4 Координаты вектора по отношению к фиксированному базису векторного пространства

Пусть V — векторное пространство, $\dim V = n$, $e_1, \dots, e_n$ — базис.
Знаем, что $\forall v \in V\ \exists! \alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$, такие что, $v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$.

Определение 57. Скаляры $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ называются координатами вектора v в базисе $e_1, \dots, e_n$.

Пример. $V = F^n$.
$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$.
Тогда, $x_1, \dots, x_n$ – координаты вектора v в стандартном базисе пространства F^n.

14.5 Описание всех базисов конечномерного векторного пространства в терминах одного базиса и матриц координат

Пусть теперь $e_1', \dots, e_n'$ – какой то другой набор векторов в V. Тогда,

$$\begin{aligned} e_1' &= c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + \dots + c_{n1}e_n \\ e_2' &= c_{21}e_1 + c_{22}e_2 + \dots + c_{n2}e_n \\ &\dots \\ e_n' &= c_{n1}e_1 + c_{2n}e_2 + \dots + c_{nn}e_n. \end{aligned}$$

$$(e_1', \dots, e_n') = (e_1, \dots, e_n) \cdot C, \text{ где } C = (c_{ij}).$$

в j-м столбце матрицы C стоят координаты вектора e_j' в базисе $e_1, \dots, e_n$.

Предложение. $(e_1', \dots, e_n')$ – базис в $V \iff \det C \neq 0$.

Доказательство.

$\implies$ $e_1', \dots, e_n'$ – базис, значит $(e_1, \dots, e_n) = (e_1', \dots, e_n') \cdot C' = (e_1, \dots, e_n) \cdot C \cdot C'$.
Так как $e_1, \dots, e_n$ линейно независимы, то $C \cdot C' = E \implies \det C \neq 0$.

$\impliedby$ $\det C \neq 0 \implies \exists C^{-1}$.
Достаточно доказать, что $e_1', \dots, e_n'$ линейно независимы.
Пусть

$$\alpha_1 e_1' + \dots + \alpha_n e_n' = 0.$$

Тогда,

$$(e_1', \dots, e_n') \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0 \implies (e_1, \dots, e_n) \cdot C \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0.$$

Так как $e_1, \dots, e_n$ линейно независимы, то

$$C \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0.$$

Домножаем слева на C^{-1}, получаем

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

■

14.6 Матрица перехода от одного базиса конечномерного векторного пространства к другому

Пусть $(e_1, \dots, e_n)$ и $(e_1', \dots, e_n')$ — два базиса в V,

$$(e_1', \dots, e_n') = (e_1, \dots, e_n) \cdot C,$$

при этом $\det C \neq 0$.

Определение 58. Матрица C называется *матрицей перехода* от базиса $(e_1, \dots, e_n)$ к базису $(e_1', \dots, e_n')$.

Замечание. Матрица перехода от $(e_1', \dots, e_n')$ к $(e_1, \dots, e_n)$ — это C^{-1}.

14.7 Формула преобразования координат вектора при замене базиса

Пусть $v \in V$, тогда

$$\begin{aligned} v &= x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \\ v &= x_1' e_1' + \dots + x_n' e_n'. \end{aligned}$$

Предложение.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ \dots \\ x_n' \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Имеем

$$v = (e_1, \ldots, e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

С другой стороны,

$$v = (e'_1, \ldots, e'_n) \begin{pmatrix} x'_1 \\ \ldots \\ x'_n \end{pmatrix} = (e_1, \ldots, e_n) \cdot C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \ldots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Так как $e_1, \ldots, e_n$ линейно независимы, то

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \ldots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

■

15 Лекция 9.01.2020

15.1 Сумма двух подпространств векторного пространства

Пусть V – векторное пространство над F.
$U, W \subseteq V$ – подпространства.
Тогда, $U \cap W$ – тоже подпространство. (можно проверить по определению)

Определение 59. *Суммой* подпространств U, W называется множество

$$U + W := \{u + w \mid v \in U, w \in W\}.$$

Упражнение. $U + W$ – подпространство.

Замечание. Имеем $U \cap W \subseteq U = U + 0 \subseteq U + W$.
Значит, $\dim(U \cap W) \leqslant \dim U \leqslant \dim(U + W)$.

15.2 Связь размерностей двух подпространств с размерностями их суммы и пересечения

Теорема 15.1. $\dim(U \cap W) + \dim(U + W) = \dim U + \dim W$.

Пример. Всякие две плоскости в $\mathbb{R}^3$ (содержащие 0) имеют общую прямую.
Здесь $V = \mathbb{R}^3$, $\dim U = 2$, $\dim W = 2$.
При этом $\dim(U + W) \leqslant 3$.
Тогда, $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) \geqslant 2 + 2 - 3 = 1$.

Доказательство. Пусть $\dim(U \cap W) = p$, $\dim U = q$, $\dim W = r$.
Пусть $a = \{a_1, \ldots, a_p\}$ – базис в $U \cap W$.
Тогда, a можно дополнить до базиса в U и в W:
$b = \{b_1, \ldots, b_{q-p}\}$ – такая система, что $a \cup b$ – базис в U.
$c = \{c_1, \ldots, c_{r-p}\}$ – такая система, что $a \cup c$ – базис в W.

Докажем, что $a \cup b \cup c$ – базис в $U + W$.

1. $\langle a \cup b \cup c \rangle = U + W$:

   $v \in U + W \implies \exists u \in U, w \in W$, такие что $v = u + w$.

   $u \in U = \langle a \cup b \rangle \subseteq \langle a \cup b \cup c \rangle$.

   $w \in W = \langle a \cup c \rangle \subseteq \langle a \cup b \cup c \rangle$.

   Значит, $v \in \langle a \cup b \cup c \rangle$.

2. $a \cup b \cup c$ линейно независимо.

   Пусть $\underbrace{\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_p a_p}_{x} + \underbrace{\beta_1 b_1 + \cdots + \beta_{q-p} b_{q-p}}_{y} + \underbrace{\gamma_1 c_1 + \cdots + \gamma_{r-p} c_{r-p}}_{z} = 0$, где $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k \in F$.

   Тогда, $z = -\underset{\in U}{x} - \underset{\in U}{y} \in U$.

   Но, $z \in W$, значит $z \in U \cap W$.

   То есть $z = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_p a_p$, $\lambda_i \in F$.

   Тогда, $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_p a_p - \gamma_1 c_1 - \cdots - \gamma_{r-p} c_{r-p} = 0$

   Так как $a \cup c$ линейно независимо, то $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = \gamma_1 = \cdots = \gamma_{r-p} = 0$ и $z = 0$.

   Следовательно, $x + y = 0$, то есть $\alpha_1 a_1 + \ldots \alpha_p a_p + \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_{q-p} b_{q-p} = 0$.

   Так как $a \cup b$ линейно независимо, то $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = \beta_1 = \cdots = \beta_{q-p} = 0$.

   Получаем, что $a \cup b \cup c$ линейно независимо.

Итог: $a \cup b \cup c$ – базис в $U + W$.

$$\begin{aligned}
\dim(U + W) &= |a| + |b| + |c| \\
&= p + q - p + r - p \\
&= q + r - p \\
&= \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).
\end{aligned}$$

■

.

15.3 Сумма нескольких подпространств векторного пространства

Пусть $U_1, \dots U_k \subseteq V$ – подпространства.

Определение 60. *Суммой* подпространств $U_1, \dots U_k$ называется множество

$$U_1 + \dots + U_k = \{u_1 + \dots + u_k \mid u_i \in U_i\}.$$

Упражнение. Доказать, что $U_1 + \dots + U_k$ – подпространство.

Замечание. $\dim(U_1 + \dots + U_k) \leqslant \dim U_1 + \dots + \dim U_k$.

15.4 Линейно независимые подпространства, пять эквивалентных условий

Определение 61. Подпространства $U_1, \dots, U_k$ называются *линейно независимыми*, если $\forall u_1 \in U_1, \dots, u_k \in U_k$ из условия $u_1 + \dots + u_k = 0$ следует $u_1 = \dots = u_k = 0$.

Пример. Если $\dim U_i = 1$ и $U_i = \langle u_i \rangle \ \forall i$, то $U_1, \dots, U_k$ линейно независимы $\iff$ $u_1, \dots, u_k$ линейно независимы.

Теорема 15.2. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) $U_1, \dots, U_k$ *линейно независимы.*

(2) всякий $u \in U_1 + \dots + U_k$ *единственным образом представим в виде* $u = u_1 + \dots + u_k$*, где* $u_i \in U_i$.

(3) Если $\mathbb{e}_i$ *— базис в* U_i $\forall i$*, то* $\underbrace{\mathbb{e}_1 \sqcup \mathbb{e}_2 \sqcup \dots \sqcup \mathbb{e}_k}_{\text{объединение мультимножеств}}$ *— базис в* $U_1 + \dots + U_k$.

(4) $\dim(U_1 + \dots + U_k) = \dim U_1 + \dots + \dim U_k$.

(5) $\forall i = 1, \dots, k \quad U_i \cap (U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_k) = 0$.

Пример. Если $\mathbb{e}_1 = \{e_1, e_2\}, \mathbb{e}_2 = \{e_2, e_3\}$, то
- $\mathbb{e}_1 \cup \mathbb{e}_2 = \{e_1, e_2, e_3\}$ – 2 элемента,
- $\mathbb{e}_1 \sqcup \mathbb{e}_2 = \{e_1, e_2, e_2, e_3\}$ – 4 элемента.

Доказательство. Пусть $\widehat{U}_i = U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_k$.

(1) $\Longrightarrow$ **(2)** Пусть $u_1 + \dots + u_k = u_1' + \dots + u_k'$, где $u_i, u_i' \in U_i$.

Тогда, $\underset{\in U_1}{(u_1 - u_1')} + \underset{\in U_2}{(u_2 - u_2')} + \dots + \underset{\in U_k}{(u_k - u_k')} = 0 \implies u_i - u_i' = \dots = u_k - u_k' = 0$.

То есть, $u_1 = u_1', \dots, u_k = u_k'$.

(2) $\Longrightarrow$ **(3)** Пусть $u \in U_1 + \dots + U_k$ – произвольный.

u единственным образом представим в виде $u = u_1 + \dots + u_k$, где $u_i \in U_i$,

u_i единственным образом представим в виде линейной комбинации векторов из $\mathbb{e}_i$.

Следовательно, u единственным образом представим в виде линейной комбинации векторов из $\mathbb{e}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathbb{e}_k$.

То есть, $\mathbb{e}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathbb{e}_k$ — базис в $U_1 + \dots + U_k$.

(3) $\Longrightarrow$ **(4)** Очевидно.

(4) $\Longrightarrow$ **(5)**

$$\begin{aligned}
\dim(U_i \cap \widehat{U}_i) &= \dim U_i + \dim \widehat{U}_i - \dim(U_1 + \dots + U_k) \\
&\leqslant \dim U_i + (\dim U_1 + \dots + \dim U_{i-1} + \dim U_{i+1} + \dots + \dim U_k) - (\dim U_1 + \dots + \dim U_k) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(5) $\Longrightarrow$ **(1)** $u_1 + \dots + u_k = 0$, где $u_i \in U_i$.

Тогда, $\underset{\in U_i}{u_i} = \underbrace{-u_1 - \dots - u_{i-1} - u_{i+1} - \dots - u_k}_{\in \widehat{U}_i}$

Следовательно, $u_i \in U_i \cap \widehat{U}_i = 0 \implies u_i = 0$. ∎

Следствие. Пусть $k = 2$, тогда
U_1, U_2 линейно независимы $\iff$ $U_1 \cap U_2 = 0$.

15.5 Разложение векторного пространства в прямую сумму нескольких подпространств

Определение 62. Говорят, что векторное пространство V разлагается в *прямую сумму* $U_1, \dots, U_k$, если

1. $V = U_1 + \dots + U_k$,
2. $U_1, \dots, U_k$ линейно независимы.

Обозначение: $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k$.

Пример. Если $e_1, \dots, e_n$ – базис V, то $V = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle e_n \rangle$

15.6 Проекция вектора на подпространство вдоль дополнительного подпространства

Замечание. При $k = 2$:

1. $V = U_1 \oplus U_2 \iff \begin{cases} V = U_1 + U_2, \\ U_1 \cap U_2 = 0, \end{cases}$
2. $V = U_1 \oplus U_2 \implies \forall v \in V \ \exists! u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$, такие что $v = u_1 + u_2$.
   Тогда, u_1 называется проекцией вектора v на U_1 вдоль U_2.
   Так же, u_2 называется проекцией вектора v на U_2 вдоль U_1.

16 Лекция 16.01.2020

16.1 Линейные отображения векторных пространств

Пусть V, W — векторные пространства над F.

Определение 63. Отображение $\varphi\colon V \to W$ называется *линейным*, если

1. $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$,

2. $\varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v)$.

$\forall v_1, v_2, v \in V$, $\forall \lambda \in F$.

Упражнение. 1 и 2 эквивалентны тому, что
$\varphi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1\varphi(v_1) + \lambda_2\varphi(v_2)$.
$\forall v_1, v_2 \in V$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in F$.

16.2 Примеры линейных отображений

Презентация (продублирована ниже)

16.2.1 Пример 0

$\varphi\colon V \to W$ — нулевое отображение,
$\varphi(v) := \overrightarrow{0} \quad \forall v \in V$

1) $\varphi(v_1 + v_2) = \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$,
2) $\varphi(\lambda \cdot v) = \overrightarrow{0} = \lambda\overrightarrow{0} = \lambda \cdot \varphi(v)$.

16.2.2 Пример 1

$\varphi\colon V \to W$ — тождественное отображение,
$\varphi(v) := v \quad \forall v \in V$.
Обозначение: $\varphi =: \mathrm{Id}$.

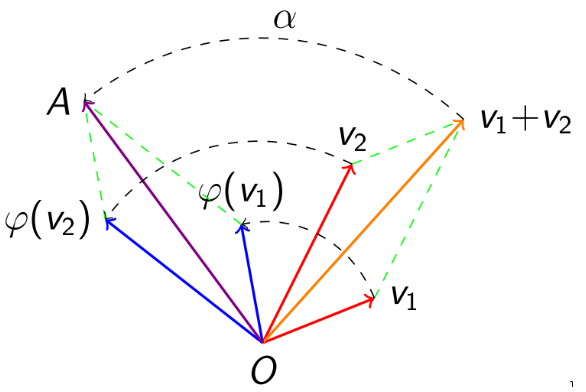
1) $\varphi(v_1 + v_2) = v_1 + v_2 = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$,
2) $\varphi(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot v = \lambda \cdot \varphi(v)$.

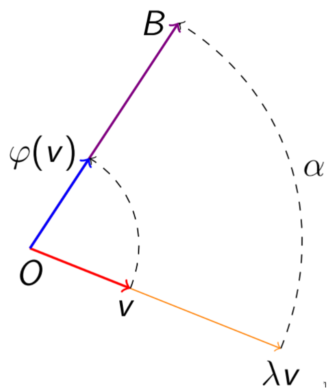
16.2.3 Пример 2

$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — поворот на угол α вокруг начала координат.

Два красных вектора v_1, v_2 и их сумму $v_1 + v_2$ повернули на угол α, получив $\varphi(v_1)$, $\varphi(v_2)$ а так же точку A. Свойство 1 говорит нам, что точка A это не просто сумма образов, она так же является образом суммы $v_1 + v_2$. То есть точку A можно получить двумя разными способами: сложить $\varphi(v_1)$ и $\varphi(v_2)$ или повернуть $v_1 + v_2$.

Вторая картинка показывает свойство 2: точка B это с одной стороны $\varphi(v) \cdot \lambda$, а с другой — образ $\lambda \cdot v$.





1) $\varphi(v_1) + \varphi(v_2) = A = \varphi(v_1 + v_2)$,
2) $\varphi(\lambda \cdot v) = B = \lambda \cdot \varphi(v)$.

16.2.4 Пример 3

$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ — ортогональная проекция на плоскость Oxy.

$\langle$ Конкурс на лучшую картинку $\rangle$

16.2.5 Пример 4

$\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — пространство многочленов от x степени $\leqslant n$ с коэффициентами из $\mathbb{R}$.
$\Delta\colon f(x) \mapsto f'(x)$ — отображение дифференцирования.

1) $(f+g)' = f' + g'$,
2) $(\lambda \cdot f)' = \lambda \cdot f' \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

1) и 2) $\implies$ Δ — линейное отображение $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n} \to \mathbb{R}[x]_{\leqslant n-1}$.

16.2.6 Пример 5

V — векторное пространство над F, $\dim V = n$.
$(e_1, \dots, e_n)$ — базис V.
$\varphi\colon V \to F^n$

$v = x_1e_1 + \dots + x_ne_n \implies \varphi(v) := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Покажем, что оно линейно:
Пусть

$$v = x_1e_1 + \dots + x_ne_n \implies \varphi(v) := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

$$w = y_1e_1 + \dots + y_ne_n \implies \varphi(w) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Тогда,

1) $v + w = (x_1+y_1)e_1 + \dots + (x_n+y_n)e_n \implies \varphi(v+w) = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \varphi(v) + \varphi(w)$,

2) $\lambda \cdot v = (\lambda x_1)e_1 + \dots + (\lambda x_n)e_n \implies \varphi(\lambda \cdot v) = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda\varphi(v)$.

16.3 Простейшие свойства линейных отображений

Здесь $\overrightarrow{0_V}$ — нулевой вектор в векторном пространстве V.

1. $\varphi(\overrightarrow{0_V}) = \overrightarrow{0_W}$.

   Доказательство: $\varphi(\overrightarrow{0_V}) = \varphi(0 \cdot \overrightarrow{0_V}) = 0 \cdot \varphi(\overrightarrow{0_V}) = \varphi(\overrightarrow{0_W})$.

2. $\varphi(-v) = -\varphi(v)$.

   Доказательство: $\varphi(-v) + \varphi(v) = \varphi(-v+v) = \varphi(0) = \varphi(\overrightarrow{0_V}) = \overrightarrow{0_W} \implies \varphi(-v) = -\varphi(v)$.

16.4 Изоморфизм векторных пространств

Определение 64. Отображение $\varphi\colon V \to W$ называется *изоморфизмом* если оно линейно и биективно.
Обозначение: $\varphi\colon V \xrightarrow{\sim} W$.

В примерах выше:

0. φ — изоморфизм $\iff \begin{cases} V = \{\vec{0}\}, \\ W = \{\vec{0}\} \end{cases}$
1. да
2. да
3. нет
4. φ — изоморфизм $\iff n = 0$
5. да!

16.5 Отображение, обратное к изоморфизму

Предложение. Если $\varphi\colon V \to W$ — изоморфизм, то φ^{-1} — тоже изоморфизм.

Доказательство. Биективность есть, так как φ^{-1} — обратное отображение.

Проверим линейность

1) $w_1, w_2 \in W \implies w_1 = \varphi(\varphi^{-1}(w_1)),\ w_2 = \varphi(\varphi^{-1}(w_2))$

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(w_1 + w_2) &= \varphi^{-1}\Big(\underbrace{\varphi\left(\varphi^{-1}(w_1)\right)}_{w_1} + \underbrace{\varphi\left(\varphi^{-1}(w_2)\right)}_{w_2}\Big) \\
&= \underbrace{\varphi^{-1}(\varphi}_{Id}\left(\varphi^{-1}(w_1) + \varphi^{-1}(w_2)\right)) \\
&= \varphi^{-1}(w_1) + \varphi^{-1}(w_2).
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(\lambda \cdot w_1) &= \varphi^{-1}\left(\lambda \cdot \varphi\left(\varphi^{-1}(w_1)\right)\right) \\
&= \underbrace{\varphi^{-1}(\varphi}_{Id}\left(\lambda \cdot \varphi^{-1}(w_1)\right)) \\
&= \lambda \varphi^{-1}(w_1).
\end{aligned}$$

■

16.6 Композиция двух линейных отображений, композиция двух изоморфизмов

Пусть $U \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{\varphi} W$, тогда $\varphi \circ \psi : U \to W$ — композиция.

Предложение.
1. Если φ, ψ линейны, то $\varphi \circ \psi$ тоже линейна.
2. Если φ, ψ — изоморфизмы, то $\varphi \circ \psi$ — тоже изоморфизм.

Доказательство.

1. (1) $(\varphi \circ \psi)(u_1 + u_2) = \varphi(\psi(u_1 + u_2)) = \varphi(\psi(u_1) + \psi(u_2)) = \varphi(\psi(u_1)) + \varphi(\psi(u_2)) = (\varphi \circ \psi)(u_1) + (\varphi \circ \psi)(u_2)$.
   (2) $(\varphi \circ \psi)(\varphi u) = \varphi(\psi(\lambda u)) = \varphi(\lambda \psi(u)) = \lambda \varphi(\psi(u)) = \lambda(\varphi \circ \psi)(u)$.
2. из 1 следует, что $(\varphi \circ \psi)$ линейно, но при этом биективно как композиция двух биекций. ■

16.7 Изоморфные векторные пространства

Определение 65. Два векторных пространства V, W называются *изоморфными*, если существует изоморфизм $\varphi\colon V \xrightarrow{\sim} W$.

Обозначается: $V \simeq W$ (либо $V \cong W$).

16.8 Отношение изоморфности на множестве всех векторных пространств

Теорема 16.1. *Отношение изоморфности является отношением эквивалентности на множестве всех векторных пространств над фиксированным полем F.*

Доказательство.

1. Рефлексивность: $Id : V \xrightarrow{\sim} V$.
2. Симметричность: $V \simeq W \implies W \simeq V$ следует из Предложения 1.
3. Транзитивность: $U \simeq V$, $V \simeq W \implies U \simeq W$ следует из Предложения 2. ■

16.9 Классы изоморфизма векторных пространств

Определение 66. Классы эквивалентности называются *классами изоморфизма.*

Пример. $F[x]_{\leqslant n} \simeq F^{n+1}$:

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

16.10 Критерий изоморфности двух конечномерных векторных пространств

Теорема 16.2. *Пусть V, W — два конечномерных векторных пространства над F.*
Тогда, $V \simeq W \iff \dim V = \dim W$.

Лемма 16.3. $\dim V = n \implies V \simeq F^n$.

Доказательство. Фиксируем базис $(e_1, \dots, e_n)$ в V.
Тогда, отображение $\varphi\colon V \to F^n$ из Примера 5 — изоморфизм. ∎

Лемма 16.4. Пусть $\varphi\colon V \xrightarrow{\sim} W$ и $e_1, \dots, e_n$ — базис V, тогда $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ — базис W.

Доказательство. Пусть $w \in W$. Тогда $\exists x_1, \dots, x_n \in F$, такие что $\varphi^{-1}(w) = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$.
Тогда, $w = \varphi\left(\varphi^{-1}(w)\right) = \varphi(x_1e_1 + \dots + x_ne_n) = x_1\varphi(e_1) + \dots + x_n\varphi(e_n) \implies W = \langle\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\rangle$.
Теперь докажем линейную независимость:
Пусть $\alpha_1\varphi(e_1) + \dots + \alpha_n\varphi(e_n) = \vec{0}$.
Тогда, $\varphi(\alpha_1e_1 + \dots + \alpha_ne_n) = \vec{0}$.
Применяя φ^{-1} получаем, $\alpha_1e_1 + \dots + \alpha_ne_n = \varphi^{-1}(\vec{0}) = \vec{0}$. Значит, $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.
Итог: $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ — базис в V. ∎

Доказательство теоремы.

$\Longleftarrow$ Пусть $\dim V = \dim W = n$. Тогда по лемме 1 $V \simeq F^n, W \simeq F^n$, значит $V \simeq W$.

$\Longrightarrow$ Пусть $V \simeq W$. Фиксируем изоморфизм $\varphi\colon V \xrightarrow{\sim} W$.
Тогда по лемме 2 получаем, что $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ — базис W, а значит $\dim V = n = \dim W$. ∎

Упражнение. Если $\dim V = n$, то все изоморфизмы $V \xrightarrow{\sim} F^n$ находятся в биекции с базисами пространства V.

16.11 Задание линейного отображения путём задания образов векторов фиксированного базиса

Пусть V, W — векторные пространства над F и $(e_1, \dots, e_n)$ — фиксированный базис в V.

Предложение.

1. Если $\varphi\colon V \to W$ — линейное отображение, то φ однозначно определяется векторами $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$,
2. $\forall w_1, \dots, w_n \in W$ $\exists!$ линейное отображение φ, такое что, $\varphi(e_1) = w_1, \dots, \varphi(e_n) = w_n$.

Доказательство.

1. $v \in V \implies v = x_1e_1 + \dots + x_ne_n \implies \varphi(v) = x_1\varphi(e_1) + \dots + x_n\varphi(e_n)$.
2. Зададим $\varphi\colon V \to W$ формулой $\varphi(x_1e_1 + \dots + x_ne_n) = x_1w_1 + \dots + x_nw_n$.
   Тогда φ — линейное отображение из V в W (упражнение).
   Единственность следует из 1 ∎

17 Лекция 23.01.2020

17.1 Матрица линейного отображения

Пусть V, W — векторные пространства над F.
$\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V,
$\mathbb{f} = (f_1, \dots, f_m)$ — базис W.

Пусть $\varphi\colon V \to W$ — линейное отображение.
$\forall j = 1, \dots, n$

$$\varphi(e_j) = a_{1j}f_1 + a_{2j}f_2 + \dots + a_{mj}f_m = (f_1, \dots, f_m)\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

Тогда, $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = (f_1, \dots, f_m) \cdot A$, где $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(F)$.

Определение 67. A называется матрицей линейного отображения φ в базисах $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$.
Обозначение: $A = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$.

В j-м столбце матрицы A стоят координаты вектора $\varphi(e_j)$ в базисе $\mathbb{f}$.

Обозначение 1. $\mathrm{Hom}(V, W) :=$ множество всех линейных отображений из V в W.

Следствие (из предложения 16.11)**.** При фиксированных базисах $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$ отображение $\varphi \mapsto A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$ является биекцией между $\mathrm{Hom}(V, W)$ и $\mathrm{Mat}_{m\times n}(F)$.

17.2 Примеры

0. $\varphi(v) = 0\ \forall v \implies \forall \mathbb{e}, \mathbb{f}\ A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

3. $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ — проекция на Oxy.
$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{e} \text{ — стандартный базис в } \mathbb{R}^3 \\ \mathbb{f} \text{ — стандартный базис в } \mathbb{R}^2 \end{array}\right\} \implies A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. $\Delta\colon \mathbb{R}[x]_{\leqslant n} \to \mathbb{R}[x]_{\leqslant n-1}$, $f \to f'$.
$\mathbb{e} = (1, x, \dots, x^n)$, $\mathbb{f} = (1, x, \dots, x^{n-1})$.
$$A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix}$$

5. $x_1e_1 + \dots + x_ne_n \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$.
$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n) \\ \mathbb{f} = \text{стандартный базис} \end{array}\right\} \implies A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) = E.$$

6. $\varphi\colon F^n \to F^m$.
$\varphi(x) = A \cdot x$, $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(F)$.
$\mathbb{e} =$ стандартный базис,
$\mathbb{f} =$ стандартный базис.
$A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) = A$.

17.3 Связь координат вектора и его образа при линейном отображении

Предложение. Пусть $\varphi\colon V \to W$ — линейное отображение,
$\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V,
$\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ — базис W,
$A = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$.
$v \in V \implies v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$,
$\varphi(v) = y_1 f_1 + \cdots + y_m f_m$.
Тогда,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Доказательство. $v = (e_1, \ldots, e_m) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Значит,

$$\varphi(v) = (\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (f_1, \ldots, f_m) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

При этом,

$$\varphi(v) = (f_1, \ldots, f_m) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Так как $f_1, \ldots, f_m$ линейно независимы, то

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

■

17.4 Формула изменения матрицы линейного отображения между векторными пространствами V и W при замене их базисов

Пусть теперь $\mathbb{e}'$ — другой базис в V, $\mathbb{f}'$ — другой базис в W.
$\mathbb{e}' = \mathbb{e} \cdot C_{\in M_n}$,
$\mathbb{f}' = \mathbb{f} \cdot D_{\in M_m}$.
$A = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$,
$A' = A(\varphi, \mathbb{e}', \mathbb{f}')$.

Предложение. $A' = D^{-1} A C$.

Доказательство.

$$(e'_1, \ldots e'_n) = (e_1, \ldots, e_n) \cdot C.$$

Применим φ,

$$(\varphi(e'_1), \ldots, \varphi(e'_n)) = (\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) \cdot C = (f_1, \ldots, f_m) \cdot A \cdot C$$

При этом,

$$(\varphi(e'_1), \ldots, \varphi(e'_n)) = (f'_1, \ldots, f'_m) \cdot A' = (f_1, \ldots, f_m) \cdot D \cdot A'.$$

Отсюда,

$$A \cdot C = D \cdot A' \implies A' = D^{-1} \cdot A \cdot C.$$

■

17.5 Операции сложения и умножения на скаляр на множестве всех линейных отображений между двумя векторными пространствами

Пусть $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(V, W)$, $\lambda \in F$.

Определение 68.

1. *Суммой* линейных отображений φ и ψ называется линейное отображение $\varphi + \psi \in \mathrm{Hom}(V, W)$, такое что $(\varphi + \psi)(v) := \varphi(v) + \psi(v)$.
2. Произведение φ на λ — это линейное отображение $\lambda\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$, такое что $(\lambda\varphi)(v) := \lambda\varphi(v)$.

Упражнение. $\varphi + \psi$ и $\lambda\varphi$ — действительно линейные отображения.

Упражнение. $\mathrm{Hom}(V, W)$ с этими операциями является векторным пространством над F.

17.6 Матрица суммы двух линейных отображений и произведения линейного отображения на скаляр

Зафиксируем базисы $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ в V и $\mathbb{f} = (f_1, \dots, f_m)$ в W.

Предложение.

1. $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(V, W)$, $A_\varphi = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$
$$A_\psi = A(\psi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$$
$$A_{\varphi+\psi} = A(\varphi + \varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) \quad \Longrightarrow \quad A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$$
2. $\lambda \in F, \varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$, $A_\varphi = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$
$$A_{\lambda\varphi} = A(\lambda\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) \quad \Longrightarrow \quad A_{\lambda\varphi} = \lambda A_\varphi$$

Доказательство.

1. $$\begin{aligned}(f_1, \dots, f_m) \cdot A_{\varphi+\psi} &= ((\varphi + \psi)(e_1), \dots, (\varphi + \psi)(e_n)) \\ &= (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) + (\psi(e_1), \dots, \psi(e_n)) \\ &= (f_1, \dots, f_m)A_\varphi + (f_1, \dots, f_m)A_\psi \\ &= (f_1, \dots, f_m)(A_\varphi + A_\psi).\end{aligned}$$
Следовательно, $A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$.
2. Аналогично. ■

17.7 Изоморфизм между пространством $\mathrm{Hom}(V,W)$ и пространством $(m\times n)$-матриц, где $n = \dim V$, $m = \dim W$

Следствие. При фиксированном $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$ отображение $\varphi \mapsto A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$ является изоморфизмом между $\mathrm{Hom}(V, W)$ и $\mathrm{Mat}_{m\times n}(F)$.

Доказательство. Биективность была выше. Линейность — из предыдущего предложения. ■

Следствие. $\dim \mathrm{Hom}(V, W) = m \cdot n$.

17.8 Матрица композиции двух линейных отображений

Пусть $U \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{\varphi} W$ — цепочка линейных отображений, а $\varphi \circ \psi : U \to W$ — их композиция,
$\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V,
$\mathbb{f} = (f_1, \dots, f_m)$ — базис W,
$\mathbb{g} = (g_1, \dots, g_k)$ — базис U.
$A_\varphi = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$,
$A_\psi = A(\psi, \mathbb{g}, \mathbb{e})$,
$A_{\varphi\circ\psi} = A(\varphi \circ \psi, \mathbb{g}, \mathbb{f})$.
Тогда, $A_{\varphi\circ\psi} = A_\varphi \cdot A_\psi$.

Доказательство. $(\psi(g_1), \dots, \psi(g_k)) = (e_1, \dots, e_n)A_\psi$. Тогда применяя φ,
$$(\varphi(\psi(g_1)), \dots, \varphi(\psi(g_k))) = (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))\, A_\psi = (f_1, \dots, f_m)A_\varphi A_\psi.$$
С другой стороны,
$$(\varphi(\psi(g_1)), \dots, \varphi(\psi(g_k))) = (f_1, \dots, f_m)A_{\varphi\circ\psi}.$$
Значит, $A_\varphi \cdot A_\psi = A_{\varphi\circ\psi}$. ■

17.9 Ядро и образ линейного отображения; утверждение о том, что они являются подпространствами в соответствующих векторных пространствах

Пусть $\varphi\colon V \to W$.

Определение 69. *Ядро* линейной оболочки φ — это $\ker\varphi := \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\} \subseteq V$.
Образ линейного отображения φ — это $\operatorname{Im}\varphi := \varphi(V) \subseteq W$.

Пример. $\Delta\colon \mathbb{R}[x]_{\leqslant n} \to \mathbb{R}[x]_{\leqslant n},\ f \mapsto f'$,
$\ker\Delta = \{f \mid f = \text{const}\}$,
$\operatorname{Im}\Delta = \mathbb{R}[x]_{\leqslant n-1}$.

Предложение.

1. Ядро — подпространство в V.
2. Образ — подпространство в W.

Доказательство.

1. (a) $\varphi(0_V) = 0_W$,
   (b) $v_1, v_2 \in \ker\varphi \implies \varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = 0 + 0 = 0 \implies v_1 + v_2 \in \ker\varphi$,
   (c) $\lambda \in F, v \in V \implies \varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v) = \lambda 0 = 0 \implies \lambda v \in \ker\varphi$.
2. (a) $0_W = \varphi(W) \in \operatorname{Im}\varphi$,
   (b) $w_1, w_2 \in \operatorname{Im}\varphi \implies \exists v_1, v_2 : w_1 = \varphi(v_1), w_2 = \varphi(v_2) \implies w_1 + w_2 = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \varphi(v_1 + v_2) \in \operatorname{Im}\varphi$,
   (c) $\varphi \in F, w \in \operatorname{Im}\varphi \implies \exists v \in V : w = \varphi(v) \implies \varphi(w) = \lambda\varphi(v) = \varphi(\lambda v) \in \operatorname{Im}\varphi$. ∎

18 Лекция 25.01.2020

18.1 Критерий инъективности линейного отображения в терминах его ядра

Пусть V, W — векторные пространства над F,
$\varphi\colon V \to W$ — линейное отображение.
Ядро: $\ker\varphi := \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\} \subseteq V$.
Образ: $\operatorname{Im}\varphi := \varphi(V) \subseteq W$.

Предложение.

(a) φ инъективно $\iff \ker\varphi = \{0\}$,

(b) φ сюръективно $\iff \operatorname{Im}\varphi = W$.

Доказательство.

(a) $\implies$ очевидно

$\impliedby$ Пусть $v_1, v_2 \in V$ таковы, что $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$. Тогда $\varphi(v_1 - v_2) = 0$, а значит $v_1 - v_2 \in \ker\varphi$.
Но тогда, $v_1 - v_2 = 0$, то есть $v_1 = v_2$.

(b) очевидно. ■

Следствие. φ изоморфизм $\iff \begin{cases} \ker\varphi = \{0\}, \\ \operatorname{Im}\varphi = W. \end{cases}$

18.2 Характеризация изоморфизмов в терминах их ядер и образов

Пусть $U \subseteq V$ — подпространство, $u_1, \ldots, u_k$ — базис в U.

Лемма 18.1. Тогда, $\varphi(U) = \langle\varphi(u_1), \ldots, \varphi(u_k)\rangle$. В частности, $\dim\varphi(U) \leqslant \dim U$ и $\dim\operatorname{Im}\varphi \leqslant \dim V$.

Доказательство. $u \in U \implies u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k$, $\alpha_i \in F$, тогда

$$\varphi(u) = \alpha_1\varphi(u_1) + \cdots + \alpha_k\varphi(u_k) \in \langle\varphi(u_1), \ldots, \varphi(u_k)\rangle\,.$$ ■

18.3 Связь размерности образа линейного отображения с рангом его матрицы

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V,
$\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ — базис W,
$A = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$.

Теорема 18.2. $\operatorname{rk} A = \dim\operatorname{Im}\varphi$.

Доказательство. По лемме, $\operatorname{Im}\varphi = \langle\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)\rangle$. Поэтому, $\dim\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{rk}\{\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)\}$.
Так как j-й столбец матрицы A составлен из координат вектора $\varphi(e_j)$ в базисе $\mathbb{f}$, то

$$\alpha_1\varphi(e_1) + \cdots + \alpha_n\varphi(e_n) = 0 \iff \alpha_1 A^{(1)} + \cdots + \alpha_n A^{(n)} = 0.$$

Значит, $\dim\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{rk}\{\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)\} = \operatorname{rk}\{A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}\} = \operatorname{rk} A$. ■

Замечание. Число $\dim\operatorname{Im}\varphi$ называется *рангом* линейного отображения φ, обозначается $\operatorname{rk}\varphi$.

Следствие. $\operatorname{rk} A$ не зависит от выбора пары базисов $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$.

18.4 Инвариантность ранга матрицы относительно умножения на квадратную невырожденную матрицу слева или справа

Обозначение 2. $M_n^0(F) := \{C \in M_n(F) \mid \det C \neq 0\}$.

Следствие. Ранг матрицы не меняется при умножении слева и/или справа на невырожденную матрицу.

Доказательство. Если $A \in \operatorname{Mat}_{m\times n}$, $C \in M_n^0$, $D \in M_m^0$, то A и $D^{-1}AC$ — это матрицы одного и того же линейного отображения в разных парах базисов. По теореме, $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}\left(D^{-1}AC\right)$. ■

18.5 Свойство образов векторов, дополняющих базис ядра до базиса всего пространства

Предложение. Пусть $e_1, \dots, e_k$ — базис $\ker\varphi$ и векторы $e_{k+1}, \dots, e_n$ дополняют его до базиса всего V.
Тогда, $\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)$ образуют базис в $\operatorname{Im}\varphi$.

Доказательство. $\operatorname{Im}\varphi = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_k), \varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)\rangle = \langle \varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)\rangle$. (так как $\varphi(e_1) = \dots = \varphi(e_k) = 0$).
Осталось показать, что $\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)$ линейно независимы.
Пусть $\alpha_{k+1}\varphi(e_{k+1}) + \dots + \alpha_n\varphi(e_n) = 0$, где $\alpha_i \in F$.
Тогда $\varphi(\alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots \alpha_n e_n) = 0 \implies \alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n \in \ker\varphi$.
Но тогда $\alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots \alpha_n e_n = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_k e_k$, где $\beta_j \in F$.
Так как $(e_1, \dots, e_n)$ — базис V, то $\alpha_i = \beta_j = 0\ \forall i, j$. ■

18.6 Теорема о связи размерностей ядра и образа линейного отображения

Теорема 18.3. $\dim\operatorname{Im}\varphi + \dim\ker\varphi = \dim V$.

Доказательство. Вытекает из предыдущего предложения так как в его доказательстве:
$\dim V = n$,
$\dim\ker\varphi = k$,
$\dim\operatorname{Im}\varphi = n - k$. ■

18.7 Приведение матрицы линейного отображения к диагональному виду с единицами и нулями на диагонали

Предложение. Пусть $\operatorname{rk}\varphi = r$. Тогда существует базис $\mathbb{e}$ в V и базис $\mathbb{f}$ в W, такие что

$$A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) = \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} & r & & & & n-r & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ r \\ \\ \\ \\ m-r \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Доказательство. Пусть $e_{r+1}, \dots, e_n$ — базис $\ker\varphi$. Дополним его векторами $e_1, \dots, e_r$ до базиса всего V.
Положим $f_1 = \varphi(e_1), \dots, f_r = \varphi(e_r)$, тогда $(f_1, \dots, f_r)$ — базис $\operatorname{Im}\varphi$.
Дополним $f_1, \dots, f_r$ до базиса $f_1, \dots, f_m$ всего W.
Тогда, $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ и $\mathbb{f} = (f_1, \dots, f_m)$ — искомые базисы. ■

Следствие. Если $A \in \operatorname{Mat}_{m\times n}(F)$, $\operatorname{rk} A = r$, то $\exists C \in M_n^0(F)$ и $D \in M_m^0(F)$, такие что

$$D^{-1}AC = \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = B.$$

($\iff A = DBC^{-1}$).

Доказательство. Реализуем A как матрицу линейного отображения $\varphi\colon F^n \to F^n$ в некоторой паре базисов, тогда утверждение вытекает из предложения и формулы изменения матрицы линейного отображения при замене базисов. ■

18.8 Линейные функции на векторном пространстве

Определение 70. *Линейной функцией* (или *линейной формой*, или *линейным функционалом*) на V называется всякое линейное отображение $\alpha\colon V \to F$.

Обозначение 3. $V^* := \operatorname{Hom}(V, F)$ — множество всех линейных функций на V.

18.9 Примеры

1. $\alpha\colon F^n \to F$.
$\alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = (a_1, \dots, a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$, где $a_i \in F$ — фиксированные скаляры.

2. $F(X, \mathbb{R})$ — все функции из линейного пространства X в $\mathbb{R}$, $x_0 \in X$,

   $\alpha\colon F(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

   $\alpha(f) := f(x_0)$.

3. $\alpha\colon C[0,1] \to \mathbb{R}$

   $\alpha(f) := \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$

4. $\alpha\colon M_n(F) \to F$

   $\alpha(X) := \operatorname{tr} X$

18.10 Двойственное (сопряжённое) векторное пространство, его размерность в конечномерном случае

Из общей теории линейных отображений:

1. V^* — векторное пространство (оно называется *сопряженным* или *двойственным*).

2. Если $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — фиксированный базис в V, то есть изоморфизм $V^* \simeq \mathrm{Mat}_{1\times n}(F)$ (а это ни что иное, как строки длины n).

   $\alpha \to (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$

   $v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$

   $\alpha(v) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n.$

   $\alpha_i = \alpha(e_i)$ — коэффициенты линейной функции α в базисе $\mathbb{e}$.

Следствие. $\dim V^* = \dim V$ ($\implies V^* \simeq V$).

18.11 Двойственный базис

При $i = 1, \ldots, n$ рассмотрим линейную функцию $\varepsilon_i \in V^*$, соответствующую строке $(0 \ldots 1 \ldots 0)$. Тогда $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ — базис V^*, он однозначно определяется условием $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$. ($\delta_{ij}$ — символ Кронекера)

Определение 71. Базис $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ пространства V^*, определенный условием выше, называется базисом, *двойственным* (сопряженным) к базису $\mathbb{e}$.

Удобная запись условия:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \ldots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} (e_1, \ldots, e_n) = E.$$

19 Лекция 6.02.2020

19.1 Утверждение о том, что всякий базис сопряжённого пространства двойствен некоторому базису исходного пространства

$\varepsilon_i(x_1e_1 + \dots + x_ne_n) = x_i$, поэтому ε_i называется i-й координатной функцией в базисе $\mathbb{e}$.

Предложение. Всякий базис пространства V^* двойствен некоторому базису пространства V.

Доказательство. Пусть $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$ — базис пространства V^*. Фиксируем какой-то базис $\mathbb{e}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ пространства V, и пусть $\varepsilon' = \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \dots \\ \varepsilon'_n \end{pmatrix}$ — соответствующий ему двойственный базис V^*.

Тогда, $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \dots \\ \varepsilon'_n \end{pmatrix}$ для некоторой матрицы $C \in M_n^0(F)$.

Положим $(e_1, \dots, e_n) = (e'_1, \dots, e'_n) \cdot C^{-1}$.
Тогда,

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} (e_1, \dots, e_n) = C \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \dots \\ \varepsilon'_n \end{pmatrix} (e'_1, \dots, e'_n) C^{-1} = CEC^{-1} = E.$$

Значит, ε двойствен к $\mathbb{e}$. ■

Упражнение. $\mathbb{e}$ определён однозначно.

19.2 Билинейные формы на векторном пространстве

Пусть V — векторное пространство над F.

Определение 72. *Биленейная форма* на V — это отображение $\beta\colon V \times V \to F$, линейное по каждому аргументу.

Линейность по 1-му аргументу

- $\beta(x_1 + x_2, y) = \beta(x_1, y) + \beta(x_2, y) \quad \forall x_1, x_2, y \in V$,
- $\beta(\lambda x, y) = \lambda\beta(x, y) \quad \forall x, y \in V,\ \lambda \in F$.

Линейность по 2-му аргументу

- $\beta(x, y_1 + y_2) = \beta(x, y_1) + \beta(x, y_2) \quad \forall x, y_1, y_2 \in V$,
- $\beta(x, \lambda y) = \lambda\beta(x, y) \quad \forall x, y \in V,\ \lambda \in F$.

19.3 Примеры

19.3.1

$V = F^n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$;

$\beta(x, y) := x_1y_1 + \dots + x_ny_n = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = x^Ty$.

19.3.2

$V = F^2$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$;

$\beta(x, y) := \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$.

19.3.3

$V = C[a, b]$;

$\beta(f, g) := \int_a^b f(x)g(x)\,dx$.

19.4 Матрица билинейной формы по отношению к фиксированному базису

Далее считаем, что $\dim V = n < \infty$.
Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V.

Определение 73. Матрицей билинейной формы β в базисе $\mathbb{e}$ называется такая матрица $B \in M_n$, что $b_{ij} = \beta(e_i, e_j)$.
Обозначение: $B(\beta, \mathbb{e})$.

Примеры Матрицы билинейных форм из примеров выше:

1. Пусть $\mathbb{e}$ — стандартный базис, тогда $B(\beta, \mathbb{e}) = E$.

2. Пусть $\mathbb{e}$ — стандартный базис, тогда $B(\beta, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Формула вычисления значений билинейной формы в координатах

Пусть $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$,
$y = y_1e_1 + \dots + y_ne_n$.
Тогда,

$$\begin{aligned}
\beta(x,y) &= \beta\left(\sum_{i=1}^{n} x_ie_i,\ \sum_{j=1}^{n} y_je_j\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \beta\left(e_i,\ \sum_{j=1}^{n} y_je_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_iy_j \underbrace{\beta(e_i,e_j)}_{\beta_{ij}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i\beta_{ij}y_j \\
&= (x_1, \dots, x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

19.5 Существование и единственность билинейной формы с заданной матрицей

Предложение. Пусть $\mathbb{e}$ — фиксированный базис V.

1. Всякая билинейная форма β на V однозначно определяется матрицей $B(\beta, \mathbb{e})$.

2. $\forall B \in M_n(F)\ \exists!$ билинейная форма β на V, такая что $B(\beta, \mathbb{e}) = B$.

Доказательство.

1. Следует из формулы выше.

2. Единственность следует из формулы выше. Докажем существование:
   Определим β по формуле выше.
   Тогда β — билинейная форма на V (упражнение).

$$\beta(e_i,e_j) = \begin{array}{c} \begin{matrix} & & & i & & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \cdot B \cdot \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array} = \beta_{ij}.$$

   Действительно, $B(\beta, \mathbb{e}) = B$. ■

19.6 Формула изменения матрицы билинейной формы при переходе к другому базису

$B = B(\beta, \mathbb{e})$.
Пусть $\mathbb{e}' = (e'_1, \dots e'_n)$ — другой базис V.
$\mathbb{e}' = \mathbb{e} \cdot C$.
$B' := B(\beta, \mathbb{e}')$.

Предложение. $B' = C^TBC$.

Доказательство.

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = x'_1 e'_1 + \dots + x'_n e'_n,$$

$$y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n = y'_1 e'_1 + \dots + y'_n e'_n.,$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} y'_1 \\ \dots \\ y'_n \end{pmatrix}.$$

Тогда,

$$\beta(x,y) = (x_1 \dots x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = (x'_1 \dots x'_n) C^T B C \begin{pmatrix} y'_1 \\ \dots \\ y'_n \end{pmatrix}$$

$$\beta(x,y) = (x'_1 \dots x'_n) B' \begin{pmatrix} y'_1 \\ \dots \\ y'_n \end{pmatrix}.$$

Получаем, что $B' = C^T B C$. ■

Следствие. Величина $\operatorname{rk} B$ не зависит от выбора базисов.

19.7 Ранг билинейной формы

Определение 74. Число $\operatorname{rk} B := \operatorname{rk} B(\beta, \mathbb{e})$ называется *рангом* билинейной формы β.

19.8 Симметричные билинейные формы

Определение 75. Билинейная форма β называется *симметричной*, если $\beta(x,y) = \beta(y,x)\ \forall x, y \in V$.

19.9 Критерий симметричности билинейной формы в терминах её матрицы в каком-либо базисе

Пусть $\mathbb{e}$ — произвольный базис V.

Предложение. β симметрична $\iff B = B^T$.

Доказательство.

$\implies$ $b_{ji} = \beta(e_j, e_i) = \beta(e_i, e_j) = b_{ij}$,

$\impliedby$ $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$,

$y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$,

Тогда,

$$\beta(y,x) = (y_1 \dots y_n) B \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1 \dots x_n) B^T \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1 \dots x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \beta(x,y).$$

■

19.10 Квадратичные формы на векторном пространстве

Пусть $\beta\colon V \times V \to F$ — билинейная форма на V.

Определение 76. Отображение $Q_\beta\colon V \to F$, $Q_\beta(x) = \beta(x,x)$, называется *квадратичной формой*, ассоциированной с билинейной формой β.

Пусть $\mathbb{e}$ — базис V, $x = x_1 e_1 + \dots x_n e_n$, $B = B(\beta, \mathbb{e})$.
Тогда,

$$Q_\beta(x) = (x_1 \dots x_n) B \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (b_{ij} + b_{ji}) x_i x_j.$$

19.11 Примеры

19.11.1

$V = F^n$, $\beta(x,y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \implies Q_\beta(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2$.

19.11.2

$V = F^2$, $\beta(x,y) = 2x_1y_2 \implies Q_\beta(x) = 2x_1x_2$.

Если $\mathbb{e}$ — стандартный базис, то $B(\beta, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

19.11.3

$V = F^2$, $\beta(x,y) = x_1y_2 + x_2y_1 \implies Q_\beta(x) = 2x_1x_2$.

Если $\mathbb{e}$ — стандартный базис, то $B(\beta, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

19.12 Соответствие между симметричными билинейными формами и квадратичными формами

Предложение. Пусть в поле F выполнено условие $1 + 1 \neq 0$ (то есть $2 \neq 0$). Тогда отображение $\beta \mapsto Q_\beta$ является биекцией между симметричными билинейными формами на V и квадратичным формами на V.

Доказательство.

Сюръективность Q — квадратичная форма $\implies Q = Q_\beta$ для некоторой билинейной формы на V.

То есть $Q(x) = \beta(x,x)\ \forall x \in V$.

Положим $\sigma(x,y) = \frac{1}{2}\left[\beta(x,y) + \beta(y,x)\right]$, тогда σ — симметричная билинейная форма.

$$\sigma(x,x) = \frac{1}{2}\left[\beta(x,x) + \beta(x,x)\right] = \beta(x,x).$$

Инъективность β — симметричная билинейная форма на V.

$$Q_\beta(x+y) = \beta(x+y, x+y) = \underbrace{\beta(x,x)}_{Q_\beta(x)} + \underbrace{\beta(x,y) + \beta(y,x)}_{\text{равны между собой}} + \underbrace{\beta(y,y)}_{Q_\beta(y)} \implies \beta(x,y) = \frac{1}{2}\left[Q_\beta(x+y) - Q_\beta(x) - Q_\beta(y)\right].$$

■

20 Лекция 13.02.2020

20.1 Симметризация билинейной формы и поляризация квадратичной формы

Замечание.

1. Билинейная форма $\sigma(x,y) = \frac{1}{2}\left(\beta(x,y) + \beta(y,x)\right)$ называется *симметризацией* билинейной формы β.

   Если B и S — матрицы билинейных форм β и σ в некотором базисе, то $S = \frac{1}{2}(B + B^T)$.

2. Симметричная билинейная форма $\beta(x,y) = \frac{1}{2}\left[Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\right]$ называется *поляризацией* квадратичной формы Q.

Определение 77. Матрицей квадратной формы Q в базисе $\mathbb{e}$ называется матрица соответствующей симметричной билинейной формы (поляризации) в базисе $\mathbb{e}$.

Обозначение: $B(Q, \mathbb{e})$.

Пример. Пусть $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$.

Если $\mathbb{e}$ — стандартный базис, то $B(Q, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

20.2 Канонический вид квадратичной формы

Определение 78. Квадратичная форма Q имеет в базисе $\mathbb{e}$ *канонический вид*, если $B(Q, \mathbb{e})$ диагональна.

Если $B(Q, \mathbb{e}) = \operatorname{diag}(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, то $Q(x_1, \ldots, x_n) = b_1x_1^2 + b_2x_2^2 + \cdots + b_nx_n^2$.

20.3 Теорема о приведении квадратичной формы к каноническому виду. Метод Лагранжа

Теорема 20.1. *Всякую квадратичную форму путём замены базиса можно привести к каноническому виду.*

Доказательство (метод Лагранжа). Индукция по n:

База $n = 1 \implies Q(x) = bx_1^2$ — канонический вид.

Шаг Пусть утверждение доказано для $< n$, докажем для n.

Пусть $B = B(Q, \mathbb{e})$ — матрица квадратичной формы в исходном базисе $\mathbb{e}$.

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n}^{n} 2b_{ij}x_ix_j.$$

Случай 0. $b_{ij} = 0\ \forall i, j$ — доказывать нечего.

Случай 1. $\exists i : b_{ii} \neq 0$. Сделав перенумерацию, считаем $b_{11} \neq 0$.

Тогда,

$$\begin{aligned} Q(x_1, \ldots, x_n) &= b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + \cdots + 2b_{1n}x_1x_n + Q_1(x_2, \ldots, x_n) \\ &= b_{11}\left(x_1^2 + 2\frac{b_{12}}{b_{11}}x_1x_2 + \cdots + 2\frac{b_{1n}}{b_{11}}x_1x_n\right) + Q_1(x_2, \ldots, x_n) \\ &= b_{11}\Bigg(\underbrace{x_1 + \frac{b_{12}}{b_{11}}x_2 + \cdots + \frac{b_{1n}}{b_{11}}x_n}_{x_1'}\Bigg)^2 \underbrace{-\left(\frac{b_{12}}{b_{11}}x_2 + \cdots + \frac{b_{1n}}{b_{11}}x_n\right)^2 + Q_1(x_2, \ldots, x_n)}_{Q_2(x_2, \ldots, x_n)} \\ &= b_{11}(x_1')^2 + Q_2(x_2', \ldots, x_n'), \end{aligned}$$

где

$$\begin{cases} x_1' &= x_1 + \frac{b_{12}}{b_{11}}x_2 + \cdots + \frac{b_{1n}}{b_{11}}x_n, \\ x_2' &= x_2, \\ & \vdots \\ x_n' &= x_n. \end{cases}$$

Здесь важно проследить, что замена действительно соответствует замене базисов (то есть является невырожденной).

Вспомним как происходит замена базиса:

$$\boxed{\begin{gathered}\mathbb{e}' = \mathbb{e} \cdot C \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ \dots \\ x_n' \end{pmatrix}\end{gathered}}$$

Выразим x через x' и запишем матрицу перехода:

$$\begin{cases} x_1 &= x_1' - \frac{b_{12}}{b_{11}} x_2' - \dots - \frac{b_{1n}}{b_{11}} x_n', \\ x_2 &= x_2', \\ &\vdots \\ x_n &= x_n'. \end{cases} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{b_{12}}{b_{11}} & \dots & -\frac{b_{1n}}{b_{11}} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

По предположению индукции, Q_2 можно привести к каноническому виду.

Случай 2. $b_{ii} = 0 \ \forall i$, но $\exists i, j, i \neq j$, такие что $b_{ij} \neq 0$.

Выполнив перенумерацию считаем, что $b_{12} \neq 0$.

Сделаем замену и выпишем матрицу перехода:

$$\begin{cases} x_1 &= x_1' + x_2', \\ x_2 &= x_1' - x_2', \\ x_3 &= x_3', \\ &\vdots \\ x_n &= x_n'. \end{cases} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Получаем $Q(x) = b_{12} x_1^2 - b_{12} x_2^2 + \underbrace{\dots\dots\dots\dots}_{\text{нет квадратов}}$, мы попали в случай 1. ■

Замечание. Базис, в котором Q имеет канонический вид, а так же сам этот вид, определены, вообще говоря, неоднозначно.

Пример. $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

Замена $\mathbb{e}' = (2e_1, 2e_2)$ $[x_1 = 2'x_1, x_2 = x_2']$,

Тогда, $Q(x_1', x_2') = 4x_1'^2 + 4x_2'^2$.

20.4 Угловые миноры матрицы квадратичной формы

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис пространства V.

Рассмотрим систему векторов $e_1', \dots, e_n'$ следующего вида:

$e_1' = e_1$,

$e_2' \in e_2 + \langle e_1 \rangle$,

$e_3' \in e_3 + \langle e_1, e_2 \rangle$,

$\dots$

$e_n' \in e_n + \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle$.

Для любого $k = 1 \dots n$ имеем $(e_1', \dots, e_k') = (e_1, \dots, e_k) \cdot C_k$, где

$$C_k = \begin{pmatrix} 1 & \star & \dots & \star & \star \\ 0 & 1 & \ddots & \star & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \star \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_k(F).$$

Так как $\det C = 1 \neq 0$, то $e_1', \dots, e_k'$ линейно независимы и $\langle e_1, \dots, e_k \rangle = \langle e_1', \dots, e_k' \rangle$.

В частности, $e_1', \dots, e_n'$ — базис V.

Заметим, что C_k — левый верхний $k \times k$ блок в C_n.

Пусть $Q\colon V \to F$ — квадратичная форма, β — соответствующая симметричная билинейная форма.

$B := B(Q, \mathbb{e})$.

B_k — левый верхний $k \times k$ блок в B.

$\delta_k := \delta_k(Q, \mathbb{e}) := \det B_k(Q, \mathbb{e})$ — k-й угловой минор матрицы B.

Для удобства, $\delta_0 := 1$.

Лемма 20.2. Пусть $(e_1', \dots, e_n') = \mathbb{e}'$ — базис V описанного выше вида и $\delta_k' = \delta_k(Q, \mathbb{e}')$. Тогда, $\delta_k' = \delta_k \ \forall k$.

Доказательство. Пусть $B' = B(Q, \mathbb{e})$ и $B_k' = B_k(Q, \mathbb{e}')$.

Так как $\langle e_1', \dots, e_k' \rangle = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$, то $B_k' = C_k^T B_k C_k$. Отсюда, $\delta_k' = \det B_k' = \underbrace{\det C_k^T}_{1} \det B_k \underbrace{\det C_k}_{1} = \det B_k = \delta_k$. ■

20.5 Метод Якоби приведения квадратичной формы к каноническому виду

Теорема 20.3. *Пусть* $\delta_k \neq 0\ \forall k = 1, \ldots, n$.
Тогда, $\exists!$ *базис* $\mathbb{e}' = (e_1', \ldots, e_n')$ *в* V*, такой что*

1. $\mathbb{e}'$ *имеет описанный выше вид;*
2. *В базисе* $\mathbb{e}'$ Q *принимает канонический вид*
   $Q(x_1', \ldots, x_n') = \delta_1 x_1'^2 + \frac{\delta_2}{\delta_1} x_2'^2 + \cdots + \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} x_n'^2$.

   То есть $B(Q, \mathbb{e}') = \operatorname{diag}\left(\delta_1, \frac{\delta_2}{\delta_1}, \ldots, \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}}\right)$

Доказательство. Индукция по n.

База $n = 1 \implies$ верно.

Шаг Пусть доказано для $< n$, докажем для n.

Применяя предположение индукции к ограничению квадратичной формы на подпространство $\langle e_1, .., e_{n-1}\rangle$ получаем, что $\exists$ требуемый базис $e_1', \ldots, e_{n-1}'$ в $\langle e_1, \ldots, e_{n-1}\rangle$ нужного вида.

Тогда, $B(Q, (e_1', \ldots, e_{n-1}', e_n))$ имеет вид

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \delta_1 & 0 & \ldots & 0 & \star \\ 0 & \frac{\delta_2}{\delta_1} & \ldots & 0 & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{\delta_{n-1}}{\delta_{n-2}} & \star \\ \hline \star & \star & \ldots & \star & \star \end{array}\right).$$

Ищем e_n' в виде

$$e_n' = e_n + \lambda_1 e_1' + \cdots + \lambda_{n-1} e_{n-1}'.$$

Для любого $k = 1, \ldots, n-1$

$$\begin{aligned} \beta(e_n', e_k') &= \beta(e_n + \lambda_1 e_1' + \cdots + \lambda_{n-1} e_{n-1}', e_k') \\ &= \beta(e_n, e_k') + \lambda_1 \beta(e_1', e_k') + \cdots + \lambda_{n-1} \beta(e_{n-1}', e_k') \\ &= \beta(e_n, e_k') + \lambda_k \beta(e_k', e_k') \\ &= \beta(e_n, e_k') + \lambda_k \frac{\delta_k}{\delta_{k-1}}. \end{aligned}$$

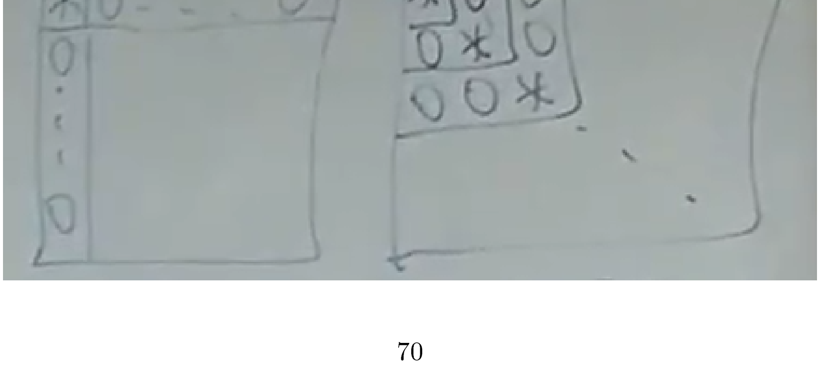
Хотим, $\beta(e_n', e_k') = 0\ \forall k = 1, \ldots, n-1 \iff \lambda_k = -\beta(e_n, e_k') \frac{\delta_{k-1}}{\delta_k}$.

Тогда в базисе $\mathbb{e}' = (e_1', \ldots, e_n')$ матрица Q равна

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\delta_2}{\delta_1} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{\delta_{n-1}}{\delta_{n-2}} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & ? \end{pmatrix}.$$

По лемме, $\delta_n = \delta_n' = \delta_1 \cdot \frac{\delta_2}{\delta_1} \cdot \cdots \cdot \frac{\delta_{n-1}}{\delta_{n-2}} \cdot ? = \delta_{n-1} \cdot ? \implies ? = \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}}$.

Единственность следует из явной формулы для λ_k. ■



20.6 Нормальный вид квадратичной формы над полем $\mathbb{R}$

Определение 79. Квадратичная форма над $\mathbb{R}$ имеет *нормальный вид* в базисе $\mathbb{e}$, если в этом базисе

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \varepsilon x_1^2 + \cdots + \varepsilon_n x_n^2,$$

где $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$.

20.7 Приведение квадратичной формы над R к нормальному виду

Следствие (из метода Лагранжа)**.** Для всякой квадратичной формы Q над $\mathbb{R}$ существует базис, в котором Q имеет нормальный вид.

Доказательство. Из теоремы знаем, что существует базис $\mathbb{e}$, в котором Q имеет канонический вид

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = b_1 x_1^2 + \cdots + b_n x_n^2.$$

Делаем замену

$$x_i = \begin{cases} \frac{x_i'}{\sqrt{|b_i|}}, & b_i \neq 0 \\ x_i, & b_i = 0 \end{cases}.$$

Тогда в новых координатах $Q(x_1', \ldots, x_n') = \varepsilon_1 x_1'^2 + \cdots + \varepsilon_n x_n'^2$,

$$\varepsilon_i = \operatorname{sgn} b_i = \begin{cases} 1, & b_i > 0 \\ 0, & b_i = 0 \\ -1, & b_i < 0 \end{cases}.$$

■