

# Математический Анализ - 2 - Коллоквиум 1

Серёжа Рахманов | [telegram](#), [website](#)

Денис Болонин | [telegram](#)

Максим Николаев | [telegram](#)

Версия от 19.03.2021 20:20

Спасибо ребятам из 195-ой (и не только) группы за материалы из репозитория [Matan2-tex](#).

Спасибо Маевскому Евгению Валерьевичу и Колесниченко Елене Юрьевне за проведенные консультации.

## Содержание

<b>1 Вопросы</b>	<b>6</b>
1.1 Дайте определения: числовой ряд, частичная сумма ряда, сумма ряда, сходящийся ряд, расходящийся ряд. Рассмотрим ряд с общим членом $a_n$ . Докажите, что если ряд сходится, то $a_n \rightarrow 0$ .	6
1.2 Сформулируйте критерий Коши сходимости числовой последовательности. Сформулируйте и докажите критерий Коши сходимости числового ряда.	6
1.3 Сформулируйте и докажите признак сравнения положительных числовых рядов, основанный на неравенстве $a_n \leq b_n$ .	6
1.4 Сформулируйте и докажите признак сравнения положительных числовых рядов, основанный на неравенстве $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ .	6
1.5 Сформулируйте и докажите признак сравнения положительных числовых рядов, основанный на пределе $\lim \frac{a_n}{b_n}$ .	7
1.6 Пусть последовательности $\{a_n\}, \{A_n\}$ таковы, что $a_n - (A_n - A_{n-1}) = c_n$ и ряд $\sum c_n$ сходится. Докажите, что существует $C$ такое, что $a_1 + a_2 + \dots + a_n = A_n + C + o(1)$ .	7
1.7 Сформулируйте и докажите признак Лобачевского-Коши.	7
1.8 Сформулируйте теорему Штольца о пределе последовательности. Покажите на примере, как с помощью теоремы Штольца можно уточнить асимптотическую оценку для частичной суммы ряда. $\frac{p_n}{q_n}, p_n, q_n \rightarrow 0$ .	7
1.9 Пусть $\sum a_n, \sum a'_n$ — сходящиеся положительные ряды. Говорят, что ряд $\sum a'_n$ сходится быстрее ряда $\sum a_n$ , если $a'_n = o(a_n)$ . Докажите, что в этом случае также $r'_n = o(r_n)$ , где $r_n, r'_n$ — остатки соответствующих рядов.	8
1.10 Пусть $\sum a_n, \sum a'_n$ — расходящиеся положительные ряды. Говорят, что ряд $\sum a'_n$ расходится медленнее ряда $\sum a_n$ , если $a'_n = o(a_n)$ . Докажите, что в этом случае также $S'_n = o(S_n)$ , где $S_n, S'_n$ — частичные суммы соответствующих рядов.	8
1.11 Пусть положительный ряд $\sum a_n$ сходится и $r_n$ — его остаток. Докажите, что ряд $\sum (\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}})$ также сходится, причём медленнее, чем ряд $\sum a_{n+1}$ .	8
1.12 Пусть положительный ряд $\sum a_n$ расходится и $S_n$ его частичная сумма. Докажите, что ряд $\sum (\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n})$ также расходится, причём медленнее, чем ряд $\sum a_{n+1}$ .	9
1.13 Сформулируйте признак Даламбера для положительного ряда	9
1.14 Сформулируйте радикальный признак Коши для положительного ряда.	9
1.15 Докажите, что всякий раз, когда признак Даламбера даёт ответ на вопрос о сходимости ряда, то радикальный признак Коши даёт (тот же) ответ на этот вопрос.	9

1.16	Докажите, что если для положительного ряда $\sum a_n$ существует $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ , то существует и $\lim \sqrt[n]{a_n} = q$ . . . . .	10
1.17	Приведите пример положительного ряда, вопрос о поведении которого не может быть решен с помощью признака Даламбера, но может быть решен с помощью радикального признака Коши (с обоснованием). . . . .	10
1.18	Приведите пример ряда, который сходится медленнее любого ряда геометрической прогрессии, но быстрее любого обобщенного гармонического ряда (с обоснованием). . . . .	11
1.19	Сформулируйте признак Гаусса для положительного ряда. Приведите пример применения признака Гаусса. . . . .	11
1.20	Приведите пример положительного ряда, вопрос о поведении которого не может быть решен с помощью признака Гаусса (с обоснованием). . . . .	12
1.21	Выведите двустороннюю оценку для частичной суммы ряда через определённый интеграл. Сформулируйте и докажите интегральный признак Коши-Маклорена . . . . .	12
1.22	Что такое улучшение сходимости положительного ряда? Покажите на примере как можно улучшить сходимость ряда. . . . .	12
1.23	Дайте определения: знакопеременный ряд, знакопеременный ряд, абсолютно сходящийся ряд, условно сходящийся ряд, положительная часть ряда, отрицательная часть ряда. . . . .	13
1.24	Докажите, что ряд сходится абсолютно ровно в том случае, когда сходятся его положительная и отрицательная части. . . . .	13
1.25	Докажите, что если ряд сходится условно, то его положительная и отрицательная части расходятся (имеют бесконечные суммы). . . . .	13
1.26	Сформулируйте мажорантный признак Вейерштрасса. Приведите пример применения признака. . . . .	14
1.27	Что такое группировка членов ряда? Докажите, что любой ряд, полученный из сходящегося ряда группировкой его членов, сходится и имеет ту же сумму. . . . .	14
1.28	Как с помощью группировки преобразовать знакопеременный ряд в знакопеременный? Что можно утверждать о сходимости полученного знакопеременного ряда? . . . . .	14
1.29	Приведите пример преобразования знакопеременного (но не знакопеременного) ряда к знакопеременному. . . . .	14
1.30	Для знакопеременного ряда с убывающим по модулю общим членом сформулируйте оценку $n$ -го остатка. Приведите пример применения этой оценки. . . . .	15
1.31	Сформулируйте признак Лейбница для знакопеременного ряда. Приведите пример применения признака Лейбница. . . . .	15
1.32	Покажите на примере, что к знакопеременным рядам неприменим предельный признак сравнения. . . . .	15
1.33	Покажите, что для любых числовых последовательностей $\{a_n\}, \{B_n\}$ справедлива формула суммирования по частям: $\sum_{n=m+1}^N a_n(B_n - B_{n-1}) = (a_N B_N - a_m B_m) - \sum_{n=m+1}^N (a_n - a_{n-1})B_{n-1}$ . . . . .	15
1.34	Сформулируйте признак Дирихле. Приведите пример его применения. . . . .	15
1.35	Сформулируйте признак Абеля. Выведите утверждение признака Абеля из признака Дирихле. . . . .	15
1.36	Что такое перестановка членов ряда? Приведите пример. . . . .	16
1.37	Сформулируйте свойство абсолютно сходящегося ряда, связанное с перестановкой членов. . . . .	16
1.38	Сформулируйте свойство условно сходящегося ряда, связанное с перестановкой членов (теорема Римана). . . . .	16
1.39	Приведите пример условно сходящегося ряда и перестановки, меняющей его сумму (с обоснованием). . . . .	16
1.40	Как определяется произведение рядов? Что можно утверждать о произведении абсолютно сходящихся рядов? . . . . .	17
1.41	Что такое произведение рядов в форме Коши? Приведите пример вычисления такого произведения. . . . .	17
1.42	Дайте определения: бесконечное произведение, частичное произведение, сходящееся бесконечное произведение, расходящееся бесконечное произведение. . . . .	17
1.43	Сформулируйте и докажите необходимое условие сходимости бесконечного произведения. . . . .	17

- 1.44 Пусть последовательности  $\{a_n\}$ ,  $\{A_n\}$ ,  $A_n \neq 0$  таковы, что  $a_n = \frac{A_n}{A_{n-1}} \cdot c_n$  и бесконечное произведение  $\prod c_n$  сходится. Докажите, что существует число  $C \neq 0$ , что  $\prod_{n=1}^N a_n = A_N \cdot (C + o(1))$ . . . . . 17
- 1.45 Как определяется соответствующий бесконечному произведению ряд? Сформулируйте и докажите утверждение об их взаимосвязи. . . . . 18
- 1.46 В каком случае бесконечное произведение называется сходящимся абсолютно? Сформулируйте и докажите критерий абсолютной сходимости бесконечного произведения. . . . . 18
- 1.47 Напишите произведение Валлиса и его значение. Вычисление каких интегралов приводит к этой формуле? 18
- 1.48 Дайте определение дзета-функции ( $\zeta$ -функция) Римана. Сформулируйте тождество Эйлера для  $\zeta$ -функции. . . . . 18
- 1.49 Дайте определения: функциональная последовательность, точка сходимости функциональной последовательности, область (множество) сходимости функциональной последовательности, поточечная сходимость функциональной последовательности на данном множестве. . . . . 18
- 1.50 Что такое равномерная норма? Покажите (исходя из определения нормы), что равномерная норма является нормой в соответствующем линейном пространстве (всех числовых функций, определённых на заданном множестве). . . . . 19
- 1.51 Сформулируйте определения равномерной сходимости функциональной последовательности: в терминах нормы и на языке  $\varepsilon - \delta$ . . . . . 19
- 1.52 Докажите, что из равномерной сходимости следует поточечная сходимость на данном множестве. . . . 19
- 1.53 Приведите пример функциональной последовательности, сходящейся поточечно, но не сходящейся равномерно (с обоснованием). . . . . 19
- 1.54 Приведите пример функциональной последовательности  $\{f_n(x)\}$  (с нетривиальной зависимостью от  $n$  и  $x$ ), равномерно сходящейся на некотором множестве (с обоснованием) . . . . . 19
- 1.55 Докажите, что если две функциональные последовательности сходятся равномерно к предельным функциям, то их сумма также сходится равномерно к сумме этих предельных функций. . . . . 19
- 1.56 Докажите, что если две функциональные последовательности сходятся равномерно к ограниченным предельным функциям, то их произведение также сходится равномерно к произведению этих предельных функций. . . . . 20
- 1.57 Пусть функциональная последовательность  $\{f_n\}$  сходится равномерно на множестве  $D$  к предельной функции  $f$ , отделимой от нуля (т.е.  $\inf_{x \in D} |f(x)| > 0$ ), то функциональная последовательность  $\{f_n\}$  сходится равномерно на  $D$  к  $f$ . . . . . 20
- 1.58 Докажите, что равномерная сходимость последовательности на множестве  $D = D_1 \cup D_2$  равносильно равномерной сходимости этой последовательности на  $D_1$  и  $D_2$  одновременно. . . . . 20
- 1.59 Пусть  $\varphi : G \rightarrow D$  – биекция. Докажите, что равномерная сходимость функциональной последовательности  $\{f_n\}$  на множестве  $D$  равносильна равномерной сходимости функциональной последовательности  $\{f_n \circ \varphi\}$  на множестве  $G$ . . . . . 20
- 1.60 Сформулируйте критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности. . . . . 21
- 1.61 Докажите, что предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций является непрерывной функцией. . . . . 21
- 1.62 Сформулируйте теорему Дини о монотонной сходимости. Приведите пример её применения для доказательства равномерной сходимости функциональной последовательности (с обоснованием). . . . . 21
- 1.63 Приведите контрпример, показывающий, что в формулировке теоремы Дини о монотонной сходимости нельзя отказаться от условия непрерывности предельной функции (с обоснованием) . . . . . 21
- 1.64 Покажите на примере как доказать неравномерность сходимости функциональной последовательности с помощью локализации особенности (с обоснованием). . . . . 22
- 1.65 Сформулируйте и докажите теорему о почленном переходе к пределу в функциональной последовательности. . . . . 22
- 1.66 Сформулируйте теорему о почленном дифференцировании функциональной последовательности. . . . 22

1.67	Сформулируйте теорему о почленном интегрировании функциональной последовательности. . . . .	22
1.68	Как определяются множества абсолютной и условной сходимости функционального ряда? Как они связаны с множеством сходимости? . . . . .	22
1.69	Дайте определение равномерной сходимости функционального ряда. . . . .	23
1.70	Сформулируйте и докажите необходимое условие равномерной сходимости функционального ряда. . .	23
1.71	Сформулируйте критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда. . . . .	23
1.72	Сформулируйте следствие критерия Коши – достаточное условие того, что функциональный ряд не является сходящимся равномерно. . . . .	23
1.73	Приведите пример функционального ряда, сходящегося на некотором множестве поточечно, но не равномерно (с обоснованием). . . . .	23
1.74	Сформулируйте мажорантный признак Вейерштрасса абсолютной и равномерной сходимости функционального ряда. . . . .	23
1.75	Как применяются признаки Даламбера и Коши (радикальный) для исследования сходимости функционального ряда? . . . . .	23
1.76	Сформулируйте неравенство для остатка знакопередающегося функционального ряда (и условия его применимости). . . . .	23
1.77	Сформулируйте признак Лейбница равномерной сходимости знакопередающегося функционального ряда. . .	23
1.78	Сформулируйте признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда. . . . .	24
1.79	Сформулируйте признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда. . . . .	24
1.80	Сформулируйте теорему о почленном переходе к пределу в функциональном ряде. . . . .	24
1.81	Сформулируйте теорему о почленном дифференцировании функционального ряда. . . . .	24
1.82	Сформулируйте теорему о почленном интегрировании функционального ряда. . . . .	24
1.83	Что такое степенной ряд? Как определяются радиус и интервал сходимости степенного ряда? Что можно утверждать о характере сходимости ряда на интервале сходимости? . . . . .	24
1.84	Что можно утверждать про равномерную сходимость степенного ряда? . . . . .	24
1.85	Сформулируйте и докажите теорему Абеля о сходимости степенного ряда. . . . .	25
1.86	Докажите, что если степенной ряд $\sum c_n \cdot (x - x_n)^n$ расходитсЯ в точке $x_1$ , то он расходитсЯ во всех точках $x$ , для которых $ x - x_0  >  x_1 - x_0 $ . . . . .	25
1.87	Выведите формулу Коши-Адамара для радиуса сходимости степенного ряда. . . . .	25
1.88	Приведите примеры степенных рядов, радиус сходимости $R$ которых: $R \in (0, +\infty)$ , $R = 0$ , $R = \infty$ (с обоснованием). . . . .	25
1.89	Пусть $R$ – радиус сходимости степенного ряда. Сформулируйте и докажите теорему о равномерной сходимости степенного ряда на $[0; R]$ . . . . .	25
1.90	Пусть $R$ – радиус сходимости степенного ряда. В каком случае можно утверждать, что $\sum_{n=0}^{\infty} c_n R^n = \lim_{x \rightarrow R-0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ? Обоснуйте ответ. . . . .	26
1.91	Пусть $R$ – радиус сходимости степенного ряда. В каком случае можно утверждать, что степенной ряд сходитсЯ неравномерно на $[0; R)$ ? Обоснуйте ответ. . . . .	26
1.92	Что можно утверждать о радиусе сходимости степенного ряда, полученного почленным дифференцированием исходного ряда? . . . . .	26
1.93	Что можно утверждать о радиусе сходимости степенного ряда, полученного почленным интегрированием исходного ряда? . . . . .	26
1.94	Сформулируйте и докажите теорему о почленном дифференцировании степенного ряда. . . . .	26
1.95	Сформулируйте и докажите теорему о почленном интегрировании степенного ряда. . . . .	26
1.96	Запишите формулу Тейлора для бесконечно дифференцируемой функции с остаточным членом в формах Лагранжа и Коши. . . . .	27
1.97	Сформулируйте и докажите утверждение о единственности разложения функции в степенной ряд. . .	27

1.98	Что такое функция, аналитическая в данной точке? Каково соотношение между понятиями бесконечно дифференцируемости и аналитичности? . . . . .	27
1.99	Приведите пример бесконечно дифференцируемой функции, не являющейся аналитической. . . . .	27
1.100	Запишите разложения в степенной ряд с центром в нуле для функций $e^x$ , $\sin x$ , $\cos x$ . Каково множество сходимости ряда? На каком множестве сумма ряда представляет собой исходную функцию? . . . . .	27
1.101	Запишите разложение в степенной ряд с центром в нуле для функции $(1 + x)^p$ . Каково множество сходимости ряда? На каком множестве сумма ряда представляет собой исходную функцию? . . . . .	27
1.102	Получите разложение для $\ln(1 + x)$ интегрированием разложения для $\frac{1}{1+x}$ . Каково множество сходимости ряда? На каком множестве сумма ряда представляет собой исходную функцию? Обоснуйте ответ. . . . .	28

# 1 Вопросы

1. Дайте определения: числовой ряд, частичная сумма ряда, сумма ряда, сходящийся ряд, расходящийся ряд. Рассмотрим ряд с общим членом  $a_n$ . Докажите, что если ряд сходится, то  $a_n \rightarrow 0$ .

**Определение.** Пусть  $a_n$  – последовательность, т.е.  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . Формальная бесконечная сумма:  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  называется рядом.  $S_N = \sum_{n=1}^N a_n$  – частичная сумма, сумма ряда:  $S = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N$

Возможны 3 случая:

1.  $\exists S \in \mathbb{R}$
2.  $\exists S = \infty$
3.  $\nexists S$

В первом случае говорят, что ряд сходится, иначе – что ряд расходится.

**Замечание.** Если ряд сходится, то  $a_n \rightarrow 0$

*Доказательство.*  $a_n = S_n - S_{n-1} \rightarrow 0$ , т.к.  $S_n \rightarrow S$  и  $S_{n-1} \rightarrow S$  ■

2. Сформулируйте критерий Коши сходимости числовой последовательности. Сформулируйте и докажите критерий Коши сходимости числового ряда.

**Определение.**  $S_n$  называется фундаментальной, если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > m > N, |S_n - S_m| < \varepsilon$

**Теорема.**  $S_n$  – сходится  $\iff S_n$  – фундаментальная

*Доказательство.* Сходимость числового ряда – это сходимость последовательности  $\{S_n\}$ , его частичных сумм, а для сходимости последовательности  $\{S_n\}$  необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной. ■

3. Сформулируйте и докажите признак сравнения положительных числовых рядов, основанный на неравенстве  $a_n \leq b_n$ .

$0 \leq a_n \leq b_n$  при всех  $n \geq n_0$

Ряд  $\sum b_n$  сходится  $\implies$  ряд  $\sum a_n$  сходится

Ряд  $\sum a_n$  расходится  $\implies$  ряд  $\sum b_n$  расходится

*Доказательство.* На основании того, что отбрасывание конечного числа элементов ряда не отражается на его поведении, мы можем считать, что  $0 \leq a_n \leq b_n$  при всех  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Обозначив частные суммы через  $A$  и  $B$  соответственно, имеем  $A_n \leq B_n$ . Пусть ряд  $\sum b_n$  сходится, тогда  $B_n$  ограничена,  $B_n \leq S, S = \text{const}, \forall n$ . В таком случае  $A_n$  также меньше либо равна некоторому  $S$ , что даёт нам ограниченность  $\sum a_n$ . ■

4. Сформулируйте и докажите признак сравнения положительных числовых рядов, основанный на неравенстве  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ .

Ряд  $\sum b_n$  сходится  $\implies$  ряд  $\sum a_n$  сходится

Ряд  $\sum a_n$  расходится  $\implies$  ряд  $\sum b_n$  расходится

*Доказательство.*

$$a_{n_0+1} \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+1}$$

$$a_{n_0+2} \leq \frac{a_{n_0+1}}{b_{n_0+1}} \cdot b_{n_0+2} \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+2}$$

$\vdots$

$$a_{n_0+k} \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+k} \implies \sum_{n=n_0}^N a_n \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot \sum_{n=n_0}^N b_n$$

5. Сформулируйте и докажите признак сравнения положительных числовых рядов, основанный на пределе  $\lim \frac{a_n}{b_n}$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0; +\infty) \implies \text{сходимость } \sum a_n \iff \text{сходимость } \sum b_n$$

*Доказательство.*

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$$

$$\forall \varepsilon \exists n_0 : c - \varepsilon \leq \frac{a_n}{b_n} \leq c + \varepsilon, \text{ при } n \geq n_0$$

$$\text{Возьмём } c - \varepsilon > 0 \implies (c - \varepsilon) \cdot b_n \leq a_n \leq (c + \varepsilon) \cdot b_n$$

Сходимость следует из правой части неравенства, а расходимость из левой. ■

6. Пусть последовательности  $\{a_n\}, \{A_n\}$  таковы, что  $a_n - (A_n - A_{n-1}) = c_n$  и ряд  $\sum c_n$  сходится. Докажите, что существует  $C$  такое, что  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = A_n + C + o(1)$ .

*Доказательство.*

$$\sum_{n=1}^N c_n = \sum_{n=1}^N a_n - \sum_{n=1}^N (A_n - A_{n-1}) = \sum_{n=1}^N a_n - A_N + A_0 \implies a_1 + a_2 + \dots + a_n = A_n + \left( -A_0 + \sum_{n=1}^N c_n \right).$$

$$\text{Получим требуемое, если возьмём } C = \lim_{N \rightarrow \infty} -A_0 + \sum_{n=1}^N c_n. \quad \blacksquare$$

7. Сформулируйте и докажите признак Лобачевского-Коши.

**Предложение.** Пусть  $a_n > 0$  и  $a_n \downarrow$

Тогда ряды  $\sum a_n$  и  $\sum 2^n \cdot a_{2^n}$  ведут себя одинаково

*Доказательство.*  $a_1 + (a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + \dots + a_8) + \dots$

$$a_2 \leq a_1$$

$$a_2 \geq a_2$$

$$a_3 + a_4 \leq 2a_2$$

$$a_3 + a_4 \geq 2a_4$$

$$a_5 + \dots + a_8 \leq 4a_4$$

$$a_5 + \dots + a_8 \geq 4a_8$$

...

$$a_1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^m 2^n a_{2^n} \leq \sum_{n=1}^{2^m} a_n \leq a_1 + \sum_{n=0}^{m-1} 2^n a_{2^n}$$

■

8. Сформулируйте теорему Штольца о пределе последовательности. Покажите на примере, как с помощью теоремы Штольца можно уточнить асимптотическую оценку для частичной суммы ряда.  $\frac{p_n}{q_n}, p_n, q_n \rightarrow 0$ .

**Теорема.** (Штольца.) Если  $p_n, q_n \rightarrow 0, q_n \downarrow$  и  $\exists \lim \frac{p_{n+1} - p_n}{q_{n+1} - q_n}$ , то  $\lim \frac{p_n}{q_n} = \lim \frac{p_{n+1} - p_n}{q_{n+1} - q_n}$

*Пример.* Дан ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ . Пусть  $S$  — сумма соответствующего ряда. Необходимо доказать, что

$$S_N = S - \frac{1}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right).$$

Обозначим  $x_n = S - S_n \rightarrow 0$  и  $y_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ . Рассмотрим предел отношения разностей:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} = \frac{S - S_n - (S - S_{n-1})}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}} = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot (n-1) \rightarrow 1.$$

По теореме Штольца  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$ . То есть

$$\frac{x_n}{y_n} = 1 + o(1) \implies x_n = y_n + o(y_n).$$

Отсюда и получаем то, что было в условии:

$$S_n = S - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

**9. Пусть  $\sum a_n, \sum a'_n$  — сходящиеся положительные ряды. Говорят, что ряд  $\sum a'_n$  сходится быстрее ряда  $\sum a_n$ , если  $a'_n = o(a_n)$ . Докажите, что в этом случае также  $r'_n = o(r_n)$ , где  $r_n, r'_n$  — остатки соответствующих рядов.**

Рассмотрим остатки каждого из рядов;

- $r_n = S - S_n$ , где  $S_n$  — частичная сумма ряда  $\sum a_n$  и  $S_n \rightarrow S$ .
- Для  $\sum a'_n$  аналогично  $r'_n = S' - S'_n$ , где  $S'_n$  — частичная сумма ряда  $\sum a'_n$  и  $S'_n \rightarrow S'$ .

Знаем, что  $r_n$  и  $r'_n$  стремятся к 0. Но так как ряды положительные, то  $r_n$  и  $r'_n$  еще и монотонно стремятся к 0. Значит, мы можем воспользоваться теоремой Штольца:

$$\lim \frac{r'_n}{r_n} = \lim \frac{r'_n - r'_{n-1}}{r_n - r_{n-1}} = \lim \frac{a'_n}{a_n} = 0.$$

Первый переход получается из теоремы Штольца. Последнее равенство дано по условию. Получается, что  $\lim \frac{r'_n}{r_n} = 0$ , что и требовалось доказать.

**10. Пусть  $\sum a_n, \sum a'_n$  — расходящиеся положительные ряды. Говорят, что ряд  $\sum a'_n$  расходится медленнее ряда  $\sum a_n$ , если  $a'_n = o(a_n)$ . Докажите, что в этом случае также  $S'_n = o(S_n)$ , где  $S_n, S'_n$  — частичные суммы соответствующих рядов.**

Здесь можно использовать ту же идею, что и в предыдущем пункте. Но придется использовать видоизмененную формулировку теоремы Штольца с [википедии](#). Мы сможем применить её, так как последовательности из частичных сумм положительный и строго возрастает.

Рассмотрим предел отношения частичных сумм:

$$\lim \frac{S'_n}{S_n} = \lim \frac{S'_n - S'_{n-1}}{S_n - S_{n-1}} = \lim \frac{a'_n}{a_n} = 0.$$

Получается, что  $\lim \frac{S'_n}{S_n} = 0$ , что и требовалось доказать.

**11. Пусть положительный ряд  $\sum a_n$  сходится и  $r_n$  — его остаток. Докажите, что ряд  $\sum (\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}})$  также сходится, причём медленнее, чем ряд  $\sum a_{n+1}$ .**

Вспомним, что  $r_n = S - S_n$ .

Докажем сходимость:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N (\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}}) &= \sqrt{r_1} - \sqrt{r_2} + \sqrt{r_2} - \sqrt{r_3} + \dots + \sqrt{r_N} - \sqrt{r_{N+1}} \\ &= \sqrt{r_1} - \sqrt{r_{N+1}} \\ &= \sqrt{S} - \sqrt{r_{N+1}} \\ &\rightarrow \sqrt{S} \text{ (так как } r_{N+1} \rightarrow 0) \end{aligned}$$



Докажем, что ряд сходится медленнее:

$$\frac{\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}}}{a_{n+1}} = \frac{\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}}}{r_n - r_{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{r_n} + \sqrt{r_{n+1}}} \rightarrow \infty,$$

так как  $\sqrt{r_n} \rightarrow 0$  и  $\sqrt{r_{n+1}} \rightarrow 0$ .

- 12.** Пусть положительный ряд  $\sum a_n$  расходится и  $S_n$  его частичная сумма. Докажите, что ряд  $\sum(\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n})$  также расходится, причём медленнее, чем ряд  $\sum a_{n+1}$ .

Докажем расходимость:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N (\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n}) &= \sqrt{S_1} - \sqrt{S_0} + \sqrt{S_2} - \sqrt{S_1} + \dots + \sqrt{S_{N+1}} - \sqrt{S_N} \\ &= \sqrt{S_{N+1}} - \sqrt{S_0} \\ &= \sqrt{S_{N+1}} \rightarrow \sqrt{S}. \end{aligned}$$

Перейдем ко второй части вопроса:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n}}{a_{n+1}} &= \frac{\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n}}{S_{n+1} - S_n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{S_{n+1}} + \sqrt{S_n}}, \end{aligned}$$

где  $\sqrt{S_{n+1}} + \sqrt{S_n} \rightarrow \infty$ . Это значит, что  $\frac{1}{\sqrt{S_{n+1}} + \sqrt{S_n}}$  стремится к 0. Тогда ряд  $\sum(\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n})$  расходится, причём медленнее, чем ряд  $\sum a_{n+1}$ .

- 13.** Сформулируйте признак Даламбера для положительного ряда

**Теорема.** Признак Даламбера. Пусть  $a_n > 0$ .

$\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies$  ряд  $\sum a_n$  сходится.

$\underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies$  ряд  $\sum a_n$  расходится.

- 14.** Сформулируйте радикальный признак Коши для положительного ряда.

**Теорема.** Радикальный признак Коши. Пусть  $a_n \geq 0$ .

$\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} < 1 \implies$  ряд  $\sum a_n$  сходится.

$\underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} > 1 \implies$  ряд  $\sum a_n$  расходится.

- 15.** Докажите, что всякий раз, когда признак Даламбера даёт ответ на вопрос о сходимости ряда, то радикальный признак Коши даёт (тот же) ответ на этот вопрос.

Пусть  $a_n > 0$ . Тогда заметим, что

$$\underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Докажем правую часть неравенства, левая доказывается аналогично.

*Доказательство.* Пусть  $q = \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n}$  и  $p = \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ . Тогда необходимо доказать, что  $q \leq p$ .

Докажем от противного. Предположим, что  $p < q$ .

Так как мы берем верхний предел, то для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\{n_k\}$ , что  $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geq q - \varepsilon \iff a_{n_k} \geq (q - \varepsilon)^{n_k}$ .

Из определения  $p$  следует, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $n_0$ , что  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq p + \varepsilon$  для любых  $n \geq n_0$ , что равносильно  $a_{n_0+m} \leq a_{n_0} \cdot (p + \varepsilon)^m$ .

Теперь взяв  $a_{n_k}$  можем получить следующее:

$$(q - \varepsilon)^{n_k} \leq a_{n_k} \leq a_{n_0} \cdot (p + \varepsilon)^{n_k - n_0} = a_{n_0} \cdot \frac{(p + \varepsilon)^{n_k}}{(p + \varepsilon)^{n_0}}.$$

Отсюда получаем, что  $\frac{a_{n_0}}{(p + \varepsilon)^{n_0}} \geq \left(\frac{q - \varepsilon}{p + \varepsilon}\right)^{n_k}$  при всех  $k = 1, 2, \dots$ . Но при малом  $\varepsilon$  мы имеем

$$\frac{q - \varepsilon}{p + \varepsilon} > 1.$$

Тогда мы пришли к противоречию, так как в  $\frac{a_{n_0}}{(p + \varepsilon)^{n_0}} \geq \left(\frac{q - \varepsilon}{p + \varepsilon}\right)^{n_k}$  слева записано конечное число, а справа будет бесконечность. ■

$$\text{Если } \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} < 1$$

$$\text{Если } \underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies \underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} > 1$$

$$\text{Если } \exists \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}, \text{ то } \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} \implies \exists \lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

**16. Докажите, что если для положительного ряда  $\sum a_n$  существует  $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ , то существует и  $\lim \sqrt[n]{a_n} = q$ .**

Заметим, что

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \iff \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Вспомним неравенство из предыдущего пункта:

$$\underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Подставим известные значения:

$$q \leq \underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq q.$$

То есть мы зажали предел с двух сторон с помощью  $q$ . Тогда

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = q.$$

**17. Приведите пример положительного ряда, вопрос о поведении которого не может быть решен с помощью признака Даламбера, но может быть решен с помощью радикального признака Коши (с обоснованием).**

Выберем какие-то числа  $a$  и  $b$  такие, что  $0 < a < 1$ ,  $b > 1$  и  $a \cdot b \neq 1$ .

Рассмотрим следующий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{[n/2]} \cdot b^{[(n-1)/2]} = 1 + a + ab + a^2b + a^2b^2 + a^3b^2 + \dots$$

Заметим, что мы не можем применять признак Даламбера:

- Пусть  $n$  чётное. Тогда

$$\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} = b > 1.$$

- Пусть  $n$  нечётное. Тогда

$$\underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a < 1.$$

Но в то же время ряд сходится по радикальному признаку Коши. Заметим следующее:

- Пусть  $n$  чётное. Тогда

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt{a} \cdot b^{(n-2)/2n}.$$

- Пусть  $n$  нечётное. Тогда

$$\sqrt[n]{a_n} = a^{(n-1)/2n} \cdot b^{(n-1)/2n}.$$

Отсюда получаем, что

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \sqrt{ab}.$$

**18. Приведите пример ряда, который сходится медленнее любого ряда геометрической прогрессии, но быстрее любого обобщённого гармонического ряда (с обоснованием).**

Докажем, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$  подходит.

- $\sum q^n$  — ряд геометрической прогрессии,  $0 < q < 1$ ;  $q^n = e^{n \ln q}$ , где  $\ln q < 0$ .
- $\sum \frac{1}{n^p}$  — обобщённый гармонический ряд,  $\frac{1}{n^p} = e^{-p \ln n}$ ,  $p > 1$ .

Заметим, что при любых  $p, q$  и при любом  $n \geq n_0$  выполняется

$$p \ln n < \sqrt{n} < n \ln \frac{1}{q}.$$

Перейдем к доказательствам.

- Докажем, что выбранный ряд сходится медленнее геометрической прогрессии:

$$\frac{e^{-\sqrt{n}}}{q^n} = e^{-\sqrt{n} + n \ln \frac{1}{q}} \rightarrow +\infty,$$

так как  $-\sqrt{n} + n \ln \frac{1}{q} \rightarrow +\infty$ .

- Докажем, что выбранный ряд сходится быстрее гармонического ряда:

$$\frac{e^{-\sqrt{n}}}{1/n^p} = e^{-\sqrt{n} + p \ln n} \rightarrow 0,$$

так как  $-\sqrt{n} + p \ln n \rightarrow -\infty$ .

**19. Сформулируйте признак Гаусса для положительного ряда. Приведите пример применения признака Гаусса.**

Если существует  $\delta > 0$  и  $p$  такие, что  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right)$  то справедливо следующее:

- $p > 1 \implies$  ряд  $\sum a_n$  сходится.
- $p \leq 1 \implies$  ряд  $\sum a_n$  расходится.

*Пример.* Исследуем на сходимость следующий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2.$$

Выполним некоторые преобразования:

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \left( \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{(2n+2)!!}{(2n+1)!!} \right)^2 = \left( \frac{2n+2}{2n+1} \right)^2 = \left( \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{2n}} \right)^2 \\ &\sim \left[ \frac{1}{1+x} \sim 1-x \right] \sim \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^2 \cdot \left( 1 - \frac{1}{2n} \right)^2 \\ &\sim \left( 1 + \frac{2}{n} \right) \cdot \left( 1 - \frac{1}{n} \right) = 1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \end{aligned}$$

Получили  $p = 1$ ,  $\gamma = 1$ . Тогда ряд расходится.

20. Приведите пример положительного ряда, вопрос о поведении которого не может быть решен с помощью признака Гаусса (с обоснованием).

Анализируем положительный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$  с общим членом  $a_n = \frac{1}{n \ln^p n}$ .

Рассмотрим отношение:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{n \ln^p n}{(n+1) \ln^p(n+1)} \\ &= \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\ln^p n}{\ln^p(n+1)} \\ &= \frac{1}{1+1/n} \cdot \frac{\ln^p n}{(\ln n + \ln(1/n))^p} \\ &= [ \text{По формуле Тейлора для } (1+x)^{-1} \text{ и } \ln(1+x) \sim x ] \\ &= \left( 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \cdot \left( 1 + \frac{1/n + o(1/n)}{\ln n} \right)^{-p} \\ &= [ \text{Перешли к менее строгому приближению и снова разложили } (1+x)^{-p} ] \\ &= \left( 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right) \right) \cdot \left( 1 - \frac{p}{n \ln n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right) \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n} - \frac{p}{n \ln n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right). \end{aligned}$$

Для использования признака Гаусса должны получить приближение

$$1 - \frac{q}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right),$$

где  $\delta > 0$ .

Но при этом имеем

$$-\frac{1}{n} - \frac{p}{n \ln n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right) \neq O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right),$$

потому что  $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n^\delta}$  для любых  $\delta > 0$  при  $n$ , стремящемся к  $\infty$ .

21. Выведите двустороннюю оценку для частичной суммы ряда через определённый интеграл. Сформулируйте и докажите интегральный признак Коши-Маклорена

Рассмотрим  $f(x) \downarrow$  при  $x \geq n_0 - 1$  и ряд  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ , где  $a_n = f(n)$ :

$$f(n+t) \leq a_n \leq f(n-1+t), t \in [0; 1].$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^1 dt : \int_n^{n+1} f(x) dx \leq a_n \leq \int_{n-1}^n f(x) dx.$$

Просуммируем полученное:

$$\int_{n_0}^{N+1} f(x) dx \leq \sum_{n=n_0}^N a_n \leq \int_{n_0-1}^N f(x) dx$$

Тогда  $\sum a_n$  ведёт себя так же, как и несобственный интеграл  $\int_{n_0-1}^{\infty} f(x) dx$ .

22. Что такое улучшение сходимости положительного ряда? Покажите на примере как можно улучшить сходимость ряда.

Пусть у нас есть некоторый ряд  $\sum a_n$  и он сходится медленно. В таких случаях для расчёта суммы ряда с необходимой точностью потребуется взять больше членов, что неудобно. Мы можем преобразовать наш ряд для улучшения сходимости, т.е. получить некоторый ряд  $\sum a'_n$ , который будет сходиться быстрее, чем исходный  $\sum a_n$ .

*Пример.* Пусть у нас есть ряд  $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ . Воспользуемся методом Куммера. Для улучшения сходимости будем брать ряды вида  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}, \dots$

В данном случае нам подойдет первый ряд в этом списке, поскольку  $\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n(n+1)}$ .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2+2} - \frac{1}{n(n+1)} \right) = S - 1 \Rightarrow S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2+2} - \frac{1}{n(n+1)} \right)$$

$$\frac{1}{n^2+2} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2} \cdot \left( \frac{1}{1+\frac{2}{n^2}} - \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \right) = \frac{1}{n^2} \cdot \left( 1 - \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left( 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \right) = \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Получили ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ , который сходится быстрее,  $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2}$ .

- 23. Дайте определения: знакопеременный ряд, знакочередующийся ряд, абсолютно сходящийся ряд, условно сходящийся ряд, положительная часть ряда, отрицательная часть ряда.**

**Определение.** Пусть существует ряд  $\sum a_n$ . такой, что для любого  $a_i$  может быть, как больше 0, так и меньше 0. В таком случае ряд  $\sum a_n$  называется знакопеременным.

**Определение.** Пусть существует ряд  $\sum a_n$ . такой, что для любого  $a_i \cdot a_{i+1} < 0$ . В таком случае ряд  $\sum a_n$  называется знакочередующимся.

**Определение.** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  называется абсолютно сходящимся, если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  также сходится.

Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится абсолютно, то он является сходящимся (в обычном смысле). Обратное утверждение неверно.

**Определение.** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  называется условно сходящимся, если сам он сходится, а ряд, составленный из модулей его членов, расходится.

**Определение.** Введем два ряда:  $a_n^+ = \begin{cases} a_n, & a_n > 0 \\ 0 & \end{cases}$  и  $a_n^- = \begin{cases} |a_n|, & a_n < 0 \\ 0 & \end{cases}$ . Тогда ряды  $\sum a_n^+$  и  $\sum a_n^-$  соответственно называются положительной и отрицательной частью ряда  $\sum a_n$ .

- 24. Докажите, что ряд сходится абсолютно ровно в том случае, когда сходятся его положительная и отрицательная части.**

*Доказательство.* Рассмотрим ряд  $\sum a_n$ , дополнительный ряд  $\sum |a_n|$ , а также положительную и отрицательную части  $\sum a_n^+$  и  $\sum a_n^-$ .

1) Пусть ряд  $\sum a_n$  сходится абсолютно. В таком случае ряд  $\sum |a_n|$  сходится, а так как члены рядов  $\sum a_n^+$  и  $\sum a_n^-$  все содержатся в ряде  $\sum |a_n|$ , то для всех их частичных сумм справедливо следующее:  $0 \leq P_k \leq A'_n$  и  $0 \leq Q_m \leq A'_n$ , где  $P_k$  и  $Q_m$  - частичные суммы положительной и отрицательной части соответственно, а  $A'_n$  - частичная сумма дополнительного ряда и  $A'_n = P_k + Q_m, n = m + k$ . Это значит, что оба ряда  $\sum a_n^+$  и  $\sum a_n^-$  сходятся.

2) Исходя из того, что  $S_n = P_k - Q_m, n = m + k$  и положительных и отрицательных элементов в  $\sum a_n$  бесконечное множество, мы получаем, что при  $n \rightarrow \infty$  одновременно  $m \rightarrow \infty$  и  $k \rightarrow \infty$ . Переходя к пределу получаем, что исходный ряд сходится абсолютно и его сумма будет равна  $P - Q$ .

■

- 25. Докажите, что если ряд сходится условно, то его положительная и отрицательная части расходятся (имеют бесконечные суммы).**

*Доказательство.* Рассмотрим ряд  $\sum a_n$ , дополнительный ряд  $\sum |a_n|$ , а также положительную и отрицательную части  $\sum a_n^+$  и  $\sum a_n^-$ .

Поскольку ряд  $\sum a_n$  сходится условно, то  $\sum |a_n|$  расходится. Рассмотрим частичные суммы  $\sum |a_n|$ ,  $\sum a_n^+$  и  $\sum a_n^- - A'_n, P_k, Q_m$  соответственно. Для любого  $n = m + k$ ,  $A'_n = P_k + Q_m$ . При  $n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty$  и  $k \rightarrow \infty$ .

Так как ряд  $\sum |a_n|$  расходится, то сумма  $A'_n \rightarrow \infty$ . Поскольку число положительных и отрицательных элементов бесконечно, то получаем  $P_k \rightarrow \infty$  и  $Q_m \rightarrow \infty$ , а значит ряды  $\sum a_n^+$  и  $\sum a_n^-$  расходятся. ■

## 26. Сформулируйте мажорантный признак Вейерштрасса. Приведите пример применения признака.

**Теорема.** Если  $|a_n| \leq b_n$  при  $n > n_0$  и положительный ряд  $\sum b_n$  сходится, то  $\sum a_n$  сходится, причём абсолютно.

*Пример.*  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^p}, p > 0$

$$|\sin(nx)| \leq 1 \implies \left| \frac{\sin(nx)}{n^p} \right| \leq \frac{1}{n^p}$$

$$\sum \frac{1}{n^p} \text{ сходится } (p > 1) \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^p} \text{ сходится абсолютно.}$$

## 27. Что такое группировка членов ряда? Докажите, что любой ряд, полученный из сходящегося ряда группировкой его членов, сходится и имеет ту же сумму.

Говорят, что ряд  $\sum b_k$  получен из  $\sum a_n$  группировкой членов, если  $\exists n_1 < n_2 < \dots$ :

$$b_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1}$$

$$b_2 = a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \dots + a_{n_2}$$

...

**Замечание.** Если  $\sum a_n$  сходится, то ряд  $\sum b_k$  сходится к той же сумме.

$$\text{Доказательство. } \sum_{k=1}^m b_k = \sum_{n=1}^{n_m} a_n$$

Обратное утверждение неверно:  $(1 - 1) + (1 - 1) + \dots$

## 28. Как с помощью группировки преобразовать знакопеременный ряд в знакочередующийся? Что можно утверждать о сходимости полученного знакочередующегося ряда?

Знакопеременный ряд при помощи группировки сводится к знакочередующемуся:

$$a_1 \leq 0, \dots, a_{n_1} \leq 0; b_1 = \sum_{i=1}^{n_1} a_i \leq 0$$

$$a_{n_1+1} \geq 0, \dots, a_{n_2} \geq 0; b_2 = \sum_{i=n_1+1}^{n_2} a_i \geq 0$$

При такой группировке сходимость исходного ряда  $\iff$  сходимость  $\sum b_n$

## 29. Приведите пример преобразования знакопеременного (но не знакочередующегося) ряда к знакочередующемуся.

$$\text{Пример. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k, \text{ где } b_k = (-1)^k \cdot \sum_{e^k \leq n < e^{k+1}} \frac{1}{n}$$

$$|b_k| = \sum_{n=[e^k]+1}^{[e^{k+1}]} \frac{1}{n} \leq \frac{1}{[e^k]+1} \cdot ([e^{k+1}] - [e^k]) \approx \frac{e^{k+1} - e^k}{e^k} \rightarrow e - 1 > 0$$

30. Для знакопеременующегося ряда с убывающим по модулю общим членом сформулируйте оценку  $n$ -го остатка. Приведите пример применения этой оценки.

31. Сформулируйте признак Лейбница для знакопеременующегося ряда. Приведите пример применения признака Лейбница.

**Теорема.** Признак Лейбница. Если ряд имеет вид  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot u_n$  и  $u_n$  монотонно убывает к 0, то ряд сходится.

*Пример.*  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}, p > 0$

$\frac{1}{n^p} \downarrow 0 \Rightarrow$  ряд сходится (при  $\forall p > 0$ )

32. Покажите на примере, что к знакопеременным рядам неприменим предельный признак сравнения.

Рассмотрим 2 ряда:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n}$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ . Второй ряд сходится по признаку Лейбница.

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} \approx \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n} - (-1)^n)} \approx \frac{1}{n} - \text{расходится}$$

$$\sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n} - (-1)^n)} - \text{расходится как сумма сходящегося и расходящегося ряда.}$$

33. Покажите, что для любых числовых последовательностей  $\{a_n\}, \{B_n\}$  справедлива формула суммирования по частям:  $\sum_{n=m+1}^N a_n(B_n - B_{n-1}) = (a_N B_N - a_m B_m) - \sum_{n=m+1}^N (a_n - a_{n-1})B_{n-1}$ .

Суммируем равенство по индексу  $n$ :

$$\sum_{n=m+1}^N a_n(B_n - B_{n-1}) = \sum_{n=m+1}^N (a_n B_n - a_{n-1} B_{n-1}) - \sum_{n=m+1}^N (a_n - a_{n-1})B_{n-1}.$$

Замечаем, что

$$\sum_{n=m+1}^N (a_n B_n - a_{n-1} B_{n-1}) = a_N B_N - a_m B_m.$$

В итоге получаем

$$\sum_{n=m+1}^N a_n(B_n - B_{n-1}) = (a_N B_N - a_m B_m) - \sum_{n=m+1}^N (a_n - a_{n-1})B_{n-1}.$$

34. Сформулируйте признак Дирихле. Приведите пример его применения.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$$

**Теорема.** Признак Дирихле. Если  $a_n \downarrow 0$ , а частичные суммы  $\left| \sum_{n=1}^N b_n \right| \leq C$  ограничены, то  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$  сходится.

*Пример.*  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^p}, p > 0$

$$a_n = \frac{1}{n^p} \downarrow 0, b_n = \sin nx$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_N = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin Nx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos((N+1/2)x)}{2 \sin \frac{x}{2}}; \left| \sum_{n=1}^N b_n \right| \leq \frac{2}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin \frac{x}{2}}$$

Ряд сходится по признаку Дирихле

35. Сформулируйте признак Абеля. Выведите утверждение признака Абеля из признака Дирихле.

**Теорема.** Признак Абеля. Если  $a_n$  монотонна и ограничена, а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  сходится, то  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$  сходится.

Заметим, что частичные суммы  $B_N$  ограничены. Так как последовательность  $\{a_n\}$  монотонна и ограничена, у неё есть предел:

$$\lim a_n = a.$$

Тогда  $\lim(a_n - a) = 0$ . Заметим, что следующий ряд сходится по признаку Дирихле:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a) \cdot b_n.$$

Но тогда исходный ряд тоже сходится:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a) \cdot b_n + a \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a) \cdot b_n + C,$$

где  $C$  — некоторое конечное число.

### 36. Что такое перестановка членов ряда? Приведите пример.

Пусть  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  — биекция

Говорят, что ряд  $\sum b_n$  получен из  $\sum a_n$  перестановкой членов, если  $b_n = a_{f(n)}$

### 37. Сформулируйте свойство абсолютно сходящегося ряда, связанное с перестановкой членов.

**Теорема.** Если ряд  $\sum a_n$  сходится абсолютно, то любой ряд, полученный из него перестановкой членов, сходится абсолютно к той же сумме.

### 38. Сформулируйте свойство условно сходящегося ряда, связанное с перестановкой членов (теорема Римана).

**Теорема.** (Римана) Если ряд  $\sum a_n$  сходится условно, то для  $\forall S \in [-\infty; +\infty]$  то существует перестановка  $f$  такая, что  $\sum a_{f(n)} = S$

### 39. Приведите пример условно сходящегося ряда и перестановки, меняющей его сумму (с обоснованием).

Рассмотрим следующий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots = -\ln 2$$

Посмотрим, как выглядят положительная и отрицательная части:

$$S_{2n}^+ = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \cdot (\ln n + \gamma) + o(1);$$

$$S_{2n}^- = 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} = \ln 2 + \frac{1}{2} \cdot (\ln n + \gamma) + o(1).$$

Возьмём сначала  $p$  положительных слагаемых, затем  $q$  отрицательных и так далее. Тогда после  $m$  таких действий получим следующее:

$$S_{2mp}^+ = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2mp} = \frac{1}{2} \cdot (\ln(mp) + \gamma) + o(1);$$

$$S_{2mq}^- = 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2mq-1} = \ln 2 + \frac{1}{2} \cdot (\ln(mq) + \gamma) + o(1).$$

Теперь заметим, что мы получили, что после перестановки наш ряд сходится к другому числу:

$$S_{2mp}^+ - S_{2mq}^- = -\ln 2 + \frac{1}{2} \cdot \ln \left( \frac{p}{q} \right) + o(1).$$



**40. Как определяется произведение рядов? Что можно утверждать о произведении абсолютно сходящихся рядов?**

Если следующая сумма имеет предел при  $K, M \rightarrow \infty$ , не зависящий от порядка суммирования, то говорят, что определено произведение рядов.

$$\left(\sum_{k=1}^K a_k\right) \cdot \left(\sum_{m=1}^M b_m\right) = \sum_{1 \leq k \leq K, 1 \leq m \leq M} a_k \cdot b_m = \sum_{n=1}^{\infty} c_n, \quad c_n = \sum_{k=1}^n a_k \cdot b_{n-k}$$

**Теорема.** (Коши) Если  $\sum a_k, \sum b_m$  сходятся абсолютно, то их произведение сходится абсолютно.

**41. Что такое произведение рядов в форме Коши? Приведите пример вычисления такого произведения.**

Произведение рядов по Коши:

$$c_2 = a_1 \cdot b_1$$

$$c_3 = a_2 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_2$$

$$c_4 = a_3 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_3$$

...

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m\right) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n$$

**42. Дайте определения: бесконечное произведение, частичное произведение, сходящееся бесконечное произведение, расходящееся бесконечное произведение.**

$\prod_{n=1}^N a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_N$  – частичное произведение.

Бесконечным произведением называют формальную запись  $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$

Значением бесконечного произведения является предел частичного произведения:

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N a_n$$

Если предел существует и он конечен – то бесконечное произведение сходится, иначе расходится.

**43. Сформулируйте и докажите необходимое условие сходимости бесконечного произведения.**

Если  $P_N = \prod_{n=1}^N a_n$  сходится, то  $a_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} \rightarrow 1$ .

*Доказательство.* Так как бесконечное произведение сходится, имеем

$$P_N \rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} a_n; \quad P_{N-1} \rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Тогда заметим следующий факт:

$$a_N = \frac{P_N}{P_{N-1}} \rightarrow 1.$$

■

**44. Пусть последовательности  $\{a_n\}, \{A_n\}, A_n \neq 0$  таковы, что  $a_n = \frac{A_n}{A_{n-1}} \cdot c_n$  и бесконечное произведение**

$\prod c_n$  сходится. Докажите, что существует число  $C \neq 0$ , что  $\prod_{n=1}^N a_n = A_N \cdot (C + o(1))$ .

Из условия знаем, что  $\prod c_n$  сходится к числу  $P \neq 0$ .

Рассмотрим, чему равно частичное произведение:

$$\prod_{n=1}^N \frac{A_n}{A_{n-1}} \cdot c_n = \frac{A_1}{A_0} \cdot c_1 \cdot \frac{A_2}{A_1} \cdot c_2 \cdot \frac{A_3}{A_2} \cdot c_3 \cdots \frac{A_N}{A_{N-1}} \cdot c_N = \frac{A_N}{A_0} \cdot P_N = A_N \cdot (C + o(1)),$$

где  $C = \frac{P}{A_0}$ ,

45. Как определяется соответствующий бесконечному произведению ряд? Сформулируйте и докажите утверждение об их взаимосвязи.

$$\prod_{n=1}^N a_n = e^{\ln \prod_{n=1}^N a_n} = e^{\sum_{n=1}^N \ln a_n}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = P \iff \sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n = \ln P \quad (P \neq 0, a_n \rightarrow 1)$$

46. В каком случае бесконечное произведение называется сходящимся абсолютно? Сформулируйте и докажите критерий абсолютной сходимости бесконечного произведения.

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n \text{ называется абсолютно сходящимся, если абсолютно сходится соответствующий ему ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n.$$

*Доказательство.* Пусть  $a_n = 1 + \alpha_n$ , где  $\{\alpha_n\}$  — бесконечно малая последовательность, то есть  $\alpha_n \rightarrow 0$ .

Рассмотрим критерий:

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сходится абсолютно тогда и только тогда, когда абсолютно сходится ряд } \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 1).$$

Заметим следующее:

$$\ln a_n = \ln(\alpha_n + 1) = \alpha_n + o(\alpha_n).$$

Отсюда получаем, что  $|\ln a_n| = |\alpha_n| \cdot (1 + o(1))$ , то есть  $|\ln a_n| \simeq |\alpha_n|$ . ■

47. Напишите произведение Валлиса и его значение. Вычисление каких интегралов приводит к этой формуле?

*Пример.* (Произведение Валлиса)  $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1} = \frac{\pi}{2}$  — получается из анализа интегралов  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$

Прим. ред.: есть отличное [видео](#) с интуитивно понятным доказательством.

48. Дайте определение дзета-функции ( $\zeta$ -функция) Римана. Сформулируйте тождество Эйлера для  $\zeta$ -функции.

*Пример.* (Дзета-функция Римана)  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, s > 1$

Тождество Эйлера:

$$\zeta(s) = \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{p_n^s})}, \text{ где } p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots$$

49. Дайте определения: функциональная последовательность, точка сходимости функциональной последовательности, область (множество) сходимости функциональной последовательности, поточечная сходимость функциональной последовательности на данном множестве.

**Определение.** Функциональным рядом (последовательностью) называется такой ряд (последовательность), что его элементами являются не числа, а функции  $f_n(x)$ .

**Определение.** Пусть  $\forall n, n \in \mathbb{N}, f_n : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$

Говорят, что  $a \in D$  — точка сходимости  $\{f_n(x)\}$ , если последовательность  $\{f_n(a)\}$  сходится.

**Определение.** Множество всех точек сходимости называется множеством сходимости.

**Определение.** Говорят, что последовательность сходится на  $D$  поточечно, если  $D$  – множество сходимости.

50. Что такое равномерная норма? Покажите (исходя из определения нормы), что равномерная норма является нормой в соответствующем линейном пространстве (всех числовых функций, определённых на заданном множестве).

**Определение.** Рассмотрим множество всех функций  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ .  $\|f\| = \sup_{x \in D} |f(x)|$  – равномерная норма в пространстве  $D$ .

51. Сформулируйте определения равномерной сходимости функциональной последовательности: в терминах нормы и на языке  $\varepsilon - \delta$ .

**Определение.** 1)  $f_n \xrightarrow{D} f \iff \|f_n - f\| \rightarrow 0$ .

2)  $\sum f_n(x) \Rightarrow S(x) \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) : \forall n \geq N(\varepsilon), |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$ .

52. Докажите, что из равномерной сходимости следует поточечная сходимость на данном множестве.

*Доказательство.* Рассмотрим определения поточечной сходимости и равномерной сходимости:

$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon, x) : \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$  – поточечная сходимость.

$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon, x) : \forall n \geq N, \forall x \in E, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$  – равномерная сходимость.

Заметим, что свойство равномерной сходимости не слабее, чем поточечной, а значит, из равномерной сходимости следует поточечная. ■

53. Приведите пример функциональной последовательности, сходящейся поточечно, но не сходящейся равномерно (с обоснованием).

Рассмотрим последовательность функций вида  $f_n(x) = \arctg(nx)$ . Поточечная сходимость в данном случае обусловлена тем, что при  $n \rightarrow \infty \arctg(nx) \rightarrow 0$ , если  $x = 0$  и  $|\arctg(nx)| \rightarrow \frac{\pi}{2}$ , если  $|x| > 0$ . Но при этом, так как при  $n \rightarrow \infty$  на точке  $x_0 = 0$  происходит разрыв, то функциональная последовательность  $f_n(x) = \arctg(nx)$  не сходится равномерно.

54. Приведите пример функциональной последовательности  $\{f_n(x)\}$  (с нетривиальной зависимостью от  $n$  и  $x$ ), равномерно сходящейся на некотором множестве (с обоснованием)

Нетривиальная зависимость означает, что общий член зависит как от  $n$ , так и от  $x$ .

*Пример.* Пусть  $D = [0; +\infty)$  и  $f_n(x) = \frac{1}{n+x}$ .

Докажем, что  $f_n(x) \xrightarrow{D} 0$ :

$$\|f_n - 0\| = \|f_n\| = \sup_{x \in D} |f_n(x)| = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

55. Докажите, что если две функциональные последовательности сходятся равномерно к предельным функциям, то их сумма также сходится равномерно к сумме этих предельных функций.

**Теорема.** Пусть  $f_n \xrightarrow{D} f$  и  $g_n \xrightarrow{D} g$ , тогда  $(f_n + g_n) \xrightarrow{D} (f + g)$ .

*Доказательство.* По определению равномерной сходимости:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_1(\varepsilon) \quad \forall x \in D; \\ \forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) : |g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_2(\varepsilon) \quad \forall x \in D. \end{aligned}$$

Тогда для любого  $x$  из  $D$  и для любого  $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ :

$$|(f_n(x) + g_n(x)) - (f(x) + g(x))| = |(f_n(x) - f(x)) + (g_n(x) - g(x))| \leq |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Но тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = \max\{N_1, N_2\} : |(f_n(x) + g_n(x)) - (f(x) + g(x))| < \varepsilon \quad n \geq N \quad \forall x \in D,$$

то есть сумма  $(f_n + g_n)$  равномерно сходится к  $(f + g)$  на  $D$ . ■

- 56. Докажите, что если две функциональные последовательности сходятся равномерно к ограниченным предельным функциям, то их произведение также сходится равномерно к произведению этих предельных функций.**

*Доказательство.* Пусть наши последовательности —  $\{f_n\}, \{g_n\}$ ; а их предельные функции —  $f, g$  соотв.

Знаем:  $\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \exists N_1(\varepsilon_1), N_2(\varepsilon_2) : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_1; |g_m(x) - g(x)| < \varepsilon_2$  при  $n \geq N_1(\varepsilon_1), m \geq N_2(\varepsilon_2)$ .

Пусть  $|f(x)|$  ограничен какой-нибудь константой  $C_1$ .

Так как  $|g(x)|$  ограничен, то  $|g_n(x)|$  ограничен какой-нибудь константой  $C_2$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} |f_n(x) \cdot g_n(x) - f(x) \cdot g(x)| &= \\ &= |f_n(x) \cdot g_n(x) - f(x) \cdot g_n(x) + f(x) \cdot g_n(x) - f(x) \cdot g(x)| \leq \\ &\leq |f_n(x) \cdot g_n(x) - f(x) \cdot g_n(x)| + |f(x) \cdot g_n(x) - f(x) \cdot g(x)| = \\ &= |g_n(x)| \cdot |f_n(x) - f(x)| + |f(x)| \cdot |g_n(x) - g(x)| \leq C_2 \cdot \varepsilon_1 + C_1 \cdot \varepsilon_2 \quad (\text{начиная с } n = \max(N_1(\varepsilon_1), N_2(\varepsilon_2))). \end{aligned}$$

Теперь возьмем произвольный  $\varepsilon > 0$ , и положим  $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{3 \cdot C_2}; \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{3 \cdot C_1}$ .

Начиная с  $n = \max\{N_1(\varepsilon_1), N_2(\varepsilon_2)\}$  верно, что  $|f_n(x) \cdot g_n(x) - f(x) \cdot g(x)| \leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 < \varepsilon$ . ■

- 57. Пусть функциональная последовательность  $\{f_n\}$  сходится равномерно на множестве  $D$  к предельной функции  $f$ , отделённой от нуля (т.е.  $\inf_{x \in D} |f(x)| > 0$ ), то функциональная последовательность  $\{f_n\}$  сходится равномерно на  $D$  к  $f$ .**

*Доказательство.*

$$\left\| \frac{1}{f_n} - \frac{1}{f} \right\| = \left\| \frac{f_n - f}{f_n \cdot f} \right\| = \sup_{x \in D} \left| \frac{f_n - f}{f_n \cdot f} \right| \leq \sup_{x \in D} \frac{\varepsilon}{|f_n \cdot f|} \quad \text{при } n \geq N(\varepsilon), \text{ т.к. } \|f_n - f\| \leq \varepsilon \text{ при } n \geq N(\varepsilon).$$

$$\inf |f(x)| = m > 0 \implies |f(x)| \geq m \quad \forall x \in D.$$

$$|f_n| + |f_n - f| \geq |f_n - (f_n - f)| = |f| \iff |f_n| \geq |f| - |f_n - f|. \text{ Поэтому если } \varepsilon < m/2, \text{ то}$$

$$|f_n| \geq |f| - |f_n - f| > m - \varepsilon > m - m/2 = m/2 \quad \text{при } n \geq N(\varepsilon), \text{ ведь } |f| \geq m, |f_n - f| < \varepsilon < m/2.$$

$$|f_n| > m/2 \implies \frac{1}{|f_n|} < \frac{2}{m}; |f| \geq m \implies \frac{1}{|f|} \leq \frac{1}{m}. \text{ Поэтому:}$$

$$\left\| \frac{1}{f_n} - \frac{1}{f} \right\| \leq \sup_{x \in D} \frac{\varepsilon}{|f_n \cdot f|} < \frac{\varepsilon}{m/2 \cdot m} = \varepsilon \cdot \frac{2}{m^2} \quad (\forall n \geq N(\varepsilon))$$

Так как  $\frac{2}{m^2}$  — фиксированное число, а  $\varepsilon$  у нас — сколь угодно малое, то это означает, что  $\left\| \frac{1}{f_n} - \frac{1}{f} \right\| \rightarrow 0$ , что является по определению равномерной сходимостью  $f_n$  к  $f$ . ■

- 58. Докажите, что равномерная сходимость последовательности на множестве  $D = D_1 \cup D_2$  равносильно равномерной сходимости этой последовательности на  $D_1$  и  $D_2$  одновременно.**

- 59. Пусть  $\varphi : G \rightarrow D$  — биекция. Докажите, что равномерная сходимость функциональной последовательности  $\{f_n\}$  на множестве  $D$  равносильна равномерной сходимости функциональной последовательности  $\{f_n \circ \varphi\}$  на множестве  $G$ .**

60. Сформулируйте критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности.
61. Докажите, что предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций является непрерывной функцией.

*Доказательство.* Пусть функция  $s(x)$  — предел некоторой последовательности непрерывных функций  $s_n(x)$ . Тогда непрерывность функции  $s(x)$ , которую нам нужно доказать, по определению будет заключаться в том, что в любой точке  $x_0$  для любого  $\varepsilon > 0$  можно найти такое  $\delta$ , что из  $|h| < \delta$  следует, что  $|s(x_0 + h) - s(x_0)| < \varepsilon$ .

Для любых  $x_0, h, n$  имеем

$$\begin{aligned} |s(x_0 + h) - s(x_0)| &= |s(x_0 + h) - s_n(x_0 + h) + s_n(x_0 + h) - s_n(x_0) + s_n(x_0) - s(x_0)| \\ &\leq |s(x_0 + h) - s_n(x_0 + h)| + |s_n(x_0 + h) - s_n(x_0)| + |s_n(x_0) - s(x_0)|. \end{aligned}$$

По определению равномерной сходимости мы можем взять такое  $n$ , что для любого  $x_0$  будет выполняться неравенство  $|s(x_0) - s_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ . Значит справедливы неравенства:

$$\begin{aligned} |s(x_0 + h) - s_n(x_0 + h)| &< \frac{\varepsilon}{3}; \\ |s(x_0) - s_n(x_0)| &< \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Итак, пусть мы зафиксировали некоторое  $n$ , тогда, поскольку функция  $s_n(x)$  монотонна по условию, найдётся такое  $\delta$ , что для любого  $|h| < \delta$  выполняется неравенство  $|s_n(x_0 + h) - s_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ . Таким образом

$$|s(x_0 + h) - s(x_0)| \leq |s(x_0 + h) - s_n(x_0 + h)| + |s_n(x_0 + h) - s_n(x_0)| + |s_n(x_0) - s(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

■

62. Сформулируйте теорему Дини о монотонной сходимости. Приведите пример её применения для доказательства равномерной сходимости функциональной последовательности (с обоснованием).

**Теорема.** Пусть  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x)$  монотонна по  $n$  при каждом  $x \in [a, b]$ ,  $f_n \rightarrow f$  на  $[a, b]$  и  $f$  непрерывна.

Тогда  $f_n \xrightarrow{D} f$

*Пример.* См. №16-19 листка №4

63. Приведите контрпример, показывающий, что в формулировке теоремы Дини о монотонной сходимости нельзя отказаться от условия непрерывности предельной функции (с обоснованием)

Рассмотрим функциональную последовательность  $f_n(x) = \frac{1}{1 + nx}$  на множестве  $D = [0; 1]$ . Поймём, что некоторые условия для теоремы Дини выполняются:

- $D$  — компакт (ограниченное замкнутое множество).
- $f_n$  монотонно убывает на  $D$ .
- $f_n$  непрерывна на  $D$ .

Докажем, что не выполняется условие на непрерывность предельной функции.

Заметим, что

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0; \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$$

То есть  $f_n$  сходится неравномерно на  $D$ .

64. Покажите на примере как доказывать неравномерность сходимости функциональной последовательности с помощью локализации особенности (с обоснованием).

Надо рассмотреть  $f_n = \frac{1}{x^n}$  на множестве  $D = (1; +\infty)$ .

Заметим, что  $f_n \xrightarrow{D} f = 0$ , но при этом имеем

$$f_n \rightarrow \begin{cases} 1, & x = 1; \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Получили, что, если добавить точку, непрерывная функция стремится к разрывной. То есть локализовали особенность, а значит функциональная последовательность  $f_n$  сходится неравномерно.

65. Сформулируйте и докажите теорему о почленном переходе к пределу в функциональной последовательности.

**Теорема.** Если функциональная последовательность  $f_n(x)$  сходится равномерно на множестве  $x$  к предельной функции  $f(x)$  и все элементы этой последовательности имеют предел в точке  $x_0$ , то и предельная функция имеет предел в точке  $x_0$ , причём  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x))$ , т.е. символ  $\lim_{n \rightarrow \infty}$  предела последовательности и символ  $\lim_{x \rightarrow x_0}$  предела функции можно переставлять местами (или, как говорят, к пределу при  $x \rightarrow x_0$  можно переходить почленно).

66. Сформулируйте теорему о почленном дифференцировании функциональной последовательности.

**Теорема.** Пусть  $a, b \in [-\infty; +\infty]$  и  $D = (a; b)$  или  $D = [a; b]$ .

Пусть  $f_n$  дифференцируема на множестве  $D$ ,  $f'_n \xrightarrow{D} g$  и существует точка  $c \in D$ , что  $\{f_n(c)\}$  сходится.

Тогда существует такая предельная функция  $f$ , что  $f_n \xrightarrow{D} f$ , что  $f$  дифференцируема и  $f' = g$ . И если  $D$  ограничено, то  $f_n \Rightarrow f$ .

Другими словами,

$$\left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x).$$

67. Сформулируйте теорему о почленном интегрировании функциональной последовательности.

**Теорема.** Пусть  $a, b \in [-\infty; +\infty]$  и  $D = (a; b)$  или  $D = [a; b]$ .

Пусть  $f_n$  непрерывна на  $D$  и  $f_n \xrightarrow{D} f$ . Заметим, что из последнего условия следует непрерывность  $f$  на  $D$ .

Тогда

$$\int_a^x f_n(t) dt \xrightarrow{D} \int_a^x f(t) dt.$$

Или другими словами:

$$\int_a^x \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f_n(t) dt.$$

68. Как определяются множества абсолютной и условной сходимости функционального ряда? Как они связаны с множеством сходимости?

**Определение.** Множество абсолютной сходимости – множество всех тех значений  $x$ , при которых ряд сходится абсолютно.

**Определение.** Множество условной сходимости – множество всех тех значений  $x$ , при которых ряд сходится условно.

Объединение множеств абсолютной сходимости и условной сходимости образует множество сходимости.

69. Дайте определение равномерной сходимости функционального ряда.

**Определение.** Функциональный ряд называется равномерно сходящимся, если его частичная суммы  $S_N(x)$  равномерно сходятся.

70. Сформулируйте и докажите необходимое условие равномерной сходимости функционального ряда.

**Теорема.** Если  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$  равномерно сходится к сумме  $S(x)$ , то  $a_n \xrightarrow{D} 0$

*Доказательство.*  $S_n(x) = a_1(x) + \dots + a_n(x)$ ,  $a_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x)$

$$S_n \xrightarrow{D} S \implies a_n \xrightarrow{D} (S - S) = 0$$

■

71. Сформулируйте критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда.

**Теорема.** Функциональный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$  сходится равномерно на  $D \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon), \forall n \geq N, \forall m:$

$$\|a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+m}\| < \varepsilon$$

Т.е.  $|a_n(x) + a_{n+1}(x) + \dots + a_{n+m}(x)| < \varepsilon \forall x \in D$ .

72. Сформулируйте следствие критерия Коши – достаточное условие того, что функциональный ряд не является сходящимся равномерно.

**Следствие.** (Отрицание критерия Коши) Если  $\exists \{x_n\} \subset D, \exists \{m_n\} \in \mathbb{N}, \exists \varepsilon_0:$

$$|a_n(x_n) + a_{n+1}(x_n) + \dots + a_{m_n}(x_n)| > \varepsilon_0$$

73. Приведите пример функционального ряда, сходящегося на некотором множестве поточечно, но не равномерно (с обоснованием).

74. Сформулируйте мажорантный признак Вейерштрасса абсолютной и равномерной сходимости функционального ряда.

**Теорема.** (Признак Вейерштрасса) Если  $|a_n(x)| \leq b_n$  при  $\forall n \geq n_0, \forall x \in D$ , а ряд  $\sum b_n$  сходится, то  $\sum a_n(x)$  сходится на  $D$  абсолютно и равномерно.

75. Как применяются признаки Даламбера и Коши (радикальный) для исследования сходимости функционального ряда?

**Теорема.** (Признак Даламбера) Если  $\exists q < 1: |a_{n+1}(x)| \leq q \cdot |a_n(x)|$  при  $\forall n \geq n_0, \forall x \in D$ , причём  $a_{n_0}(x)$  – ограничена на  $D$ , то  $\sum a_n(x)$  сходится на  $D$  абсолютно и равномерно.

*Пример.*  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, D = [-r; r], r > 0$

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq q \cdot \left| \frac{x^n}{n!} \right|$$

$\left| \frac{x}{n+1} \right| \leq q$ . Пусть  $n_0: \frac{r}{n_0+1} < 1$ , берём  $q = \frac{r}{n_0+1}$ . Значит, ряд абсолютно и равномерно сходится.

76. Сформулируйте неравенство для остатка знакопередающегося функционального ряда (и условия его применимости).

77. Сформулируйте признак Лейбница равномерной сходимости знакопередающегося функционального ряда.

**Теорема.** (Признак Лейбница) Если  $u_n(x) \downarrow_{(n)}$  и  $u_n \xrightarrow{D} 0$ , то ряд сходится равномерно.

**78. Сформулируйте признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда.**

**Теорема.** (Признак Дирихле) Если  $a_n(x) \downarrow_{(n)}$  и  $a_n \xrightarrow{D} 0$ , а  $\|b_1 + \dots + b_n\| \leq C \forall n$ , то ряд равномерно сходится на  $D$ .

**79. Сформулируйте признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда.**

**Теорема.** (Признак Абеля) Если  $a_n(x)$  монотонна по  $n$  (при  $\forall x \in D$ ), и  $\|a_n\| \leq C$  при всех  $n$ , а ряд  $\sum b_n(x)$  сходится равномерно, то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \cdot b_n(x)$  сходится равномерно.

**80. Сформулируйте теорему о почленном переходе к пределу в функциональном ряде.**

**Теорема.**  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ ,  $D = (a; b)$ ,  $D = [a; b]$

Пусть функциональный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x)$  сходится равномерно на  $D$ ,  $x_0 \in D$ ,  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} c_n(x) = y_n$  и  $\exists \sum_{n=1}^{\infty} y_n = y$ .

Тогда  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} c_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n = y$

**81. Сформулируйте теорему о почленном дифференцировании функционального ряда.**

**Теорема.**  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ ,  $D = (a; b)$ ,  $D = [a; b]$

Пусть  $c_n(x)$  дифференцируемы на  $D$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} c'_n(x)$  сходится равномерно на  $D$ .

Тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x)$  сходится на  $D$  (а если  $D$  огр, то сходится равномерно), а его сумма будет дифференцируемой

функцией на  $D$  и  $\left( \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} c'_n(x)$

**82. Сформулируйте теорему о почленном интегрировании функционального ряда.**

**Теорема.**  $-\infty < a < b < +\infty$ ,  $D = (a; b)$ ,  $D = [a; b]$

$\int_a^x \left( \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x c_n(t) dt$  — сходится равномерно на  $D$ .

**83. Что такое степенной ряд? Как определяются радиус и интервал сходимости степенного ряда? Что можно утверждать о характере сходимости ряда на интервале сходимости?**

**Определение.** Степенной ряд —  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x - x_0)^n$

**Определение.** Пусть:

$R_{cv} = \sup\{|x - x_0| : \text{ряд сходится}\}$

$R_{dv} = \inf\{|x - x_0| : \text{ряд расходится}\}$  или  $+\infty$ , если ряд сходится всюду

$\exists R = R_{cv} = R_{dv}$  — радиус сходимости.

**Теорема.** На интервале сходимости степенной ряд сходится абсолютно.

**84. Что можно утверждать про равномерную сходимость степенного ряда?**

**Теорема.** Если  $R > 0$ , то степенной ряд сходится равномерно при  $|x - x_0| \leq r$ , где  $r < R$  (доказательство через признак Вейерштрасса).



**85. Сформулируйте и докажите теорему Абеля о сходимости степенного ряда.**

**Теорема.** (Абеля)

1. Если степенной ряд сходится в точке  $x_1 \neq x_0$ , то он сходится при всех  $x : |x - x_0| < |x_1 - x_0|$
2. Если степенной ряд расходится в точке  $x_2 \neq x_0$ , то он расходится при всех  $x : |x - x_0| > |x_2 - x_0|$

*Доказательство.* 1.  $\left| \sum_{n=m}^N c_n (x - x_0)^n \right| = \left| \sum_{n=m}^N c_n \cdot (x_1 - x_0)^n \cdot \left( \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right)^n \right| \leq \sum_{n=m}^N |c_n \cdot (x_1 - x_0)^n| \cdot \left| \left( \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right)^n \right| \leq \varepsilon (q^m + \dots + q^N) \leq \varepsilon \cdot q^m \cdot \frac{1}{1 - q} \rightarrow 0$

■

**86. Докажите, что если степенной ряд  $\sum c_n \cdot (x - x_0)^n$  расходится в точке  $x_1$ , то он расходится во всех точках  $x$ , для которых  $|x - x_0| > |x_1 - x_0|$ .**

*Доказательство.* Докажем, что если  $\sum c_n (x - x_0)^n$  сходится в точке  $x_1$ , то он сходится во всех точках  $x$ , для которых  $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$  ⊗. Из этого будет следовать сформулированное выше утверждение (методом от противного).

Итак, доказываем ⊗. (Будем рассматривать нетривиальный случай  $x_1 \neq x_0$ , иначе очевидно).

$$\left| \sum_{n=m}^N c_n (x - x_0)^n \right| = \left| \sum_{n=m}^N c_n \cdot (x_1 - x_0)^n \cdot \left( \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right)^n \right| \leq \sum_{n=m}^N |c_n \cdot (x_1 - x_0)^n| \cdot \left| \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right|^n = \star.$$

Заметим, что  $|c_n \cdot (x_1 - x_0)^n| < \varepsilon$  при  $m \geq n_0(\varepsilon)$  (следствие из необходимого условия сходимости).

Далее, (при наших условиях)  $\sum \left| \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right|^n$  образуют геом. прогрессию, где  $q = \left| \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right| < 1$ .

Так что  $\star \leq \varepsilon \cdot (q^m + \dots + q^n) \leq \varepsilon \cdot q^m \cdot \frac{1}{1 - q} \rightarrow 0$ .

Почему к нулю? При  $m \rightarrow \infty$  выражение  $q^m \cdot \frac{1}{1 - q}$  остается ограниченным одной и той же константой, а  $\varepsilon$  - это произвольная сколь угодно малая величина.

Итог: ряд сходится по критерию Коши.

■

**87. Выведите формулу Коши-Адамара для радиуса сходимости степенного ряда.**

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x - x_0)^n$$

Применим радикальный признак Коши:

$$\sqrt[n]{|a_n(x)|} = \sqrt[n]{|c_n|} \cdot |x - x_0|$$

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n(x)|} = |x - x_0| \cdot \overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|}$$

Если  $|x - x_0| \cdot \overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} < 1$ , то ряд сходится

Если  $|x - x_0| \cdot \overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} > 1$ , то ряд расходится

Введём  $R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|}}$  - формулу Коши-Адамара. Получаем, что при  $|x - x_0| < R$  ряд сходится, при  $|x - x_0| > R$  ряд расходится, и мы получили явную формулу радиуса сходимости.

**88. Приведите примеры степенных рядов, радиус сходимости  $R$  которых:  $R \in (0, +\infty)$ ,  $R = 0$ ,  $R = \infty$  (с обоснованием).**

**89. Пусть  $R$  - радиус сходимости степенного ряда. Сформулируйте и докажите теорему о равномерной сходимости степенного ряда на  $[0; R]$ .**

**Теорема.** Пусть  $\sum c_n R^n$  сходится. Тогда степенной ряд  $\sum c_n (x - x_0)^n$  сходится равномерно на  $[x_0, x_0 + R]$

*Доказательство.* В начале доказательства хочу заметить, что доказываю не совсем то, что в вопросе просят, однако это вроде ошибка Маевского, а не моя. Для того, чтобы всё было, как в вопросе, возьмите  $x_0 = 0$ .

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n R^n) \cdot \left( \frac{x - x_0}{R} \right)^n$$

$\sum_{n=0}^{\infty} (c_n R^n)$  – сходится равномерно (от  $x$  не зависит)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{x - x_0}{R} \right)^n \downarrow_{(n)} \quad \forall x \in [x_0, x_0 + R]$$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$  – сходится равномерно на  $[x_0, x_0 + R]$  по признаку Абеля ■

**90.** Пусть  $R$  – радиус сходимости степенного ряда. В каком случае можно утверждать, что  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n R^n =$

$\lim_{x \rightarrow R-0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ? Обоснуйте ответ.

**Теорема.** Пусть  $\sum c_n R^n$  сходится. Тогда степенной ряд  $\sum c_n (x - x_0)^n$  сходится равномерно.

*Доказательство.*  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n \cdot R^n) \cdot \left( \frac{x - x_0}{R} \right)^n$

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot R^n$  сходится  $\Rightarrow$  сходится равномерно (не зависит от  $x$ )

$$\left( \frac{x - x_0}{R} \right)^n \downarrow_n \text{ при } \forall x \in [x_0, x_0 + R]$$

Значит, ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$  сходится равномерно по признаку Абеля. ■

Так как ряд сходится равномерно, то  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n R^n = \lim_{x \rightarrow x_0 + R-0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$

Пусть теперь  $\sum c_n R^n$  расходится. Тогда ряд  $\sum c_n (x - x_0)^n$  не может сходиться равномерно на  $[x_0, x_0 + R)$

**91.** Пусть  $R$  – радиус сходимости степенного ряда. В каком случае можно утверждать, что степенной ряд сходится неравномерно на  $[0; R)$ ? Обоснуйте ответ.

**92.** Что можно утверждать о радиусе сходимости степенного ряда, полученного почленным дифференцированием исходного ряда?

Радиус сходимости при дифференцировании степенного ряда не изменяется.

**93.** Что можно утверждать о радиусе сходимости степенного ряда, полученного почленным интегрированием исходного ряда?

Радиус сходимости при интегрировании степенного ряда не изменяется.

**94.** Сформулируйте и докажите теорему о почленном дифференцировании степенного ряда.

**Теорема.**  $\left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x - x_0)^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot n \cdot (x - x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} (n+1) (x - x_0)^n$

**95.** Сформулируйте и докажите теорему о почленном интегрировании степенного ряда.

**Теорема.**  $\int_{x_0}^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t - x_0)^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}$

96. Запишите формулу Тейлора для бесконечно дифференцируемой функции с остаточным членом в формах Лагранжа и Коши.

Если функция  $f(x)$  бесконечно дифференцируема в точке  $x_0$ , то функции  $f(x)$  можно сопоставить её ряд Тейлора:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

При этом  $f(x) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + r_N(x)$

$$r_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(x_0 + \theta)(x - x_0)}{(N+1)!} (x - x_0)^{N+1}, \theta \in (0; 1) - \text{формула Лагранжа}$$

$$r_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(x_0 + \theta)(x - x_0)}{N!} (1 - \theta)^N (x - x_0)^{N+1}, \theta \in (0; 1) - \text{формула Коши}$$

97. Сформулируйте и докажите утверждение о единственности разложения функции в степенной ряд.

**Теорема.** Если  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ ,  $|x - x_0| < \delta$ , то этот степенной ряд – её ряд Тейлора.

*Доказательство.*  $f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n \cdot n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot (x - x_0)^{n-k}$

$$f^{(k)}(x_0) = c_k \cdot k! \implies c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}. \text{ Значит, степенной ряд – ряд Тейлора.} \quad \blacksquare$$

98. Что такое функция, аналитическая в данной точке? Каково соотношение между понятиями бесконечно дифференцируемости и аналитичности?

Функция называется аналитической в т.  $x_0$ , если она представима в окрестности этой точки в виде степенного ряда. Не всякая бесконечно дифференцируемая функция будет аналитической.

99. Приведите пример бесконечно дифференцируемой функции, не являющейся аналитической.

*Пример.*  $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = 0, \text{ ряд Тейлора при } x_0 = 0 \text{ равен } 0$$

100. Запишите разложения в степенной ряд с центром в нуле для функций  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ . Каково множество сходимости ряда? На каком множестве сумма ряда представляет собой исходную функцию?

$$1. e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, R = \infty$$

Докажем равенство. Оценим остаток по формуле Лагранжа.

$$r_N(x) = \underbrace{e^{\Theta x}}_{\text{const}} \cdot \underbrace{\frac{x^{N+1}}{(N+1)!}}_{\rightarrow 0 \text{ при } \forall x}, \Theta \in (0; 1) \text{ Множество сходимости — } \mathbb{R}, \text{ на множестве } \mathbb{R} \text{ сумма ряда представляет собой исходную функцию.}$$

2. Для  $\cos x$  аналогично:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}, x \in \mathbb{R}, R = \infty$$

3. Для  $\sin x$  аналогично:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, x \in \mathbb{R}, R = \infty$$

101. Запишите разложение в степенной ряд с центром в нуле для функции  $(1+x)^p$ . Каково множество сходимости ряда? На каком множестве сумма ряда представляет собой исходную функцию?

$$(1+x)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(p)_n}{n!} x^n, \text{ где } (p)_n = p(p-1) \dots (p-n+1), R = 1$$

102. Получите разложение для  $\ln(1+x)$  интегрированием разложения для  $\frac{1}{1+x}$ . Каково множество сходимости ряда? На каком множестве сумма ряда представляет собой исходную функцию? Обоснуйте ответ.