Математический Анализ 2, Коллоквиум III

Версия от 20.03.2021 19:13

Содержание

1. Собственный интеграл, зависящий от параметра. Теорема о непрерывности по параметру. Теорема о дифференцировании по параметру под знаком интеграла. Теорема об интегрировании по параметру под знаком интеграла.

1.1. Собственный интеграл, зависящий от параметра.

Определение. Собственным интегралом, зависящем от параметра, будем называть интеграл вида

$$F(y) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\mathrm{d}x,$$

где α и β это некие функции, определенные для y из некоторого отрезка $[c;d]$.
Часто α и β являются константами и интеграл принимает следующий вид:

$$F(y) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

1.2. Теорема о непрерывности по параметру

Теорема. Рассмотрим $G = [a;b] \times [c;d]$ и пусть функция $f\colon G \to \mathbb{R}$ — непрерывна на ограниченном замкнутом множестве, откуда следует, что она равномерно непрерывна.
Пусть α, β непрерывны на отрезке $[c;d]$, тогда функция

$$F(y) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$$

равномерно непрерывна на $[c;d]$.

Доказательство. Докажем непрерывность.
Пусть функция f ограничена каким-то числом M.
В силу непрерывности α и β для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что из условия $|y - y_0| < \delta$ следует $|\alpha(y) - \alpha(y_0)| < \varepsilon$ и $|\beta(y) - \beta(y_0)| < \varepsilon$.
В силу равномерной непрерывности f для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что из условия $|y - y_0| < \delta$ следует $|f(x,y) - f(x,y_0)| < \varepsilon$.
Воспользуемся этим:

$$\begin{aligned}
|F(y) - F(y_0)| &= \Big| \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\mathrm{d}x - \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y_0)\mathrm{d}x \Big| \\
&\left[\text{— прибавим и вычтем член } \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)\mathrm{d}x \right] \\
&= \Big| \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\mathrm{d}x - \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)\mathrm{d}x + \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)\mathrm{d}x - \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y_0)\mathrm{d}x \Big| \\
&\leqslant \Big| \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\mathrm{d}x - \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)\mathrm{d}x \Big| + \Big| \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)\mathrm{d}x - \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y_0)\mathrm{d}x \Big| \\
&[\text{ — оценим слагаемое с модулем интеграла как интеграл модуля }] \\
&\leqslant \Big| \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\mathrm{d}x - \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)\mathrm{d}x \Big| + \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \Big| f(x,y) - f(x,y_0) \Big| \mathrm{d}x \\
&[\text{ — раскроем первое слагаемое; для понимания представьте, что } \alpha(y) < \alpha(y_0) < \beta(y_0) < \beta(y) \text{ }]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Big| \int\limits_{\alpha(y)}^{\alpha(y_0)} f(x,y)\mathrm{d}x + \int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)\mathrm{d}x \Big| + \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \Big| f(x,y) - f(x,y_0) \Big| \mathrm{d}x \\
&\leqslant \int\limits_{\alpha(y)}^{\alpha(y_0)} \underbrace{|f(x,y)|}_{\leqslant M} \mathrm{d}x + \int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} \underbrace{|f(x,y)|}_{\leqslant M} \mathrm{d}x + \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \underbrace{\Big| f(x,y) - f(x,y_0) \Big|}_{\leqslant \varepsilon} \mathrm{d}x \\
&\leqslant (\alpha(y_0) - \alpha(y)) \cdot M + (\beta(y) - \beta(y_0)) \cdot M + (\beta(y_0) - \alpha(y_0)) \cdot \varepsilon \\
&= 2 \cdot \varepsilon \cdot M + (\beta(y) - \alpha(y)) \cdot \varepsilon = \varepsilon',
\end{aligned}$$

то есть выбирая $\delta > 0$ мы можем сделать так, что $|F(y) - F(y_0)| < \varepsilon'$ для любого $\varepsilon' > 0$. ■

Теперь немного о том, зачем нам эта теорема. Если вместо отрезка $[c; d]$ рассмотреть $[c; +\infty)$, то утверждение из теоремы остается верным и из равномерной непрерывности $f(x,y)$ на $[a; b] \times [c; +\infty)$ следует

$$\exists \lim_{y \to +\infty} F(y) = \lim_{y \to +\infty} \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\mathrm{d}x = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \lim_{y \to +\infty} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

1.3. Теорема о дифференцировании по параметру под знаком интеграла.

Для простоты изложения будем рассматривать $a = \alpha(y)$ и $b = \beta(y)$. Тогда

$$F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\mathrm{d}x.$$

Теорема. Если f непрерывна на $G = [a; b] \times [c; d]$, а также производная $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ существует и непрерывна на G, то F непрерывно дифференцируема на $[c; d]$.
Причем эта производная может быть вычислена:

$$F'(y) = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}x.$$

Доказательство. Необходимо доказать, что отношение стремится в пределе к интегралу:

$$D = \frac{F(y) - F(y_0)}{y - y_0} - \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \frac{f(x,y) - f(x,y_0)}{y - y_0}\mathrm{d}x - \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\mathrm{d}x.$$

По теореме о среднем (теорема Лагранжа, 1 курс) на отрезке $[y_0; y]$ найдется точка y^* такая, что

$$f(x,y) - f(x,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y^*) \cdot (y - y_0).$$

Подставим в нашу разность:

$$\begin{aligned}
|D| = \ldots &= \Big| \int\limits_a^b \frac{f(x,y) - f(x,y_0)}{y - y_0}\mathrm{d}x - \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\mathrm{d}x \Big| = \Big| \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y^*)\mathrm{d}x - \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\mathrm{d}x \Big| \\
&= \Big| \int\limits_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y^*) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0) \right) \mathrm{d}x \Big| \leqslant \int\limits_a^b \underbrace{\Big| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y^*) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0) \Big|}_{\leqslant \varepsilon} \mathrm{d}x \leqslant (b - a) \cdot \varepsilon.
\end{aligned}$$

Последний переход получается в силу равномерной непрерывности $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ на G и того, что $|y^* - y^*| \leqslant |y - y_0| < \varepsilon$.

То есть мы доказали, что $\dfrac{F(y) - F(y_0)}{y - y_0}$ равномерно стремится к числу $\displaystyle\int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\mathrm{d}x$, то есть существует предел, который мы и называем производной $F'(y)$.
Непрерывность производной получается как следствие предыдущей теоремы (о непрерывности по параметру), где в роли непрерывной функции выступает $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. ■

Иногда мы не можем взять какой-то интеграл, но с помощью этой теоремы мы можем взять производную интеграла, а зная производную потом найти сам интеграл.

1.4. Теорема об интегрировании по параметру под знаком интеграла.

Пусть $F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$. Мы хотим эту функцию проинтегрировать, то есть найти $\int\limits_c^d F(y)\mathrm{d}y$. Возникает вопрос, можно ли переставить интегралы.

Теорема. Если f непрерывна на множестве $G = [a;b] \times [c;d]$ (то есть она интегрируема на G), и выполняются следующие два пункта:

- при любом значении $y \in [c;d]$ функция $f(x,y)$ интегрируема по x, то есть существует $\int\limits_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$;
- при любом значении $x \in [a;b]$ функция $f(x,y)$ интегрируема по y, то есть существует $\int\limits_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$;

то эти интегралы равны друг другу, то есть

$$\int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_c^d \int\limits_a^b f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Доказательство. Доказательство следует из теоремы Фубини о том, что повторные интегралы равны двойном интегралу по прямоугольнику:

$$\int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_c^d \int\limits_a^b f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

■

Интегрирование по параметру также иногда позволяет вычислить интеграл, который по-другому вычислить невозможно.

2. Равномерная сходимость семейства функций. Определение. Критерий Коши равномерной сходимости.

2.1. Равномерная сходимость семейства функций

Мы будем рассматривать фактически функции от двух переменных $f(x,y)$, где $x \in D$, $y \in H$. Будем говорить про $f(x,y)$ как про *семейство функций*, понимая, что это либо функция от x при фиксированном y, либо функция от y при фиксированном x.

Определение 1. Пусть точка a принадлежит замыканию множества D (обозн. $a \in \overline{D}$), то есть лежит либо во множестве D, либо на его границе. Семейство функций $f(x,y)$ *сходится* при $x \to a$ к функции $g(y)$, если для любого $y \in H$

$$f(x,y) \underset{x\to a}{\to} g(y).$$

Определение 2. Семейство $f(x,y)$ сходится при $x \to a$ *равномерно* по $y \in H$, если

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0\colon 0 < |x-a| < \delta \implies \forall y \in H\ |f(x,y) - g(y)| < \varepsilon.$$

Равномерность здесь состоит в том, что при данном ε мы можем найти $\delta > 0$ одинаковое для всех y. Альтернативно, определение можно переписать через супремумы,

$$\sup_{y\in H} |f(x,y) - g(y)| \underset{x\to a}{\to} 0.$$

Пример Рассмотрим функцию $f(x,y) = y^x - y^{2x}$, и будем считать, что $x \in [1,+\infty)$, $y \in [0,1]$, $x \to +\infty$. Мы можем сказать, что параметр x стремится к бесконечности, а переменной является y, либо правильнее, наверное, будет сказать, что то, что стремится — переменная, а то, что не стремится — параметр. Поэтому такие обозначения субъективны и мы считаем f просто функцией двух переменных. Понятно, что

$$y^x \to \begin{cases} 0, & y \in [0,1), \\ 1, & y = 1. \end{cases} \implies y^x - y^{2x} \to 0.$$

Таким образом, мы имеем предельную функцию $g(y) = 0$ для любого $y \in [0,1]$. Для ответа на вопрос о равномерности сходимости семейства f к функции g, нужно вычислить супремум

$$\sup_{y\in[0,1]} |f(x,y) - g(y)| = \sup_{y\in[0,1]} \left|y^x - y^{2x} - 0\right| = [t = y^x] = \sup_{t\in[0,1]} \left|t - t^2\right| = \frac{1}{4} \underset{x\to+\infty}{\not\to} 0.$$

Супремум отделен от нуля, поэтому равномерной сходимости нет. Получаем, что f сходится поточечно к g (при $x \to +\infty$), но не сходится равномерно.

2.2. Критерий Коши

Теорема 0.1. *Семейство функций $f(x,y)$ сходится равномерно по $y \in H$, при $x \to a$, к функции $g(y)$ тогда и только тогда, когда*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0\colon \begin{cases} 0 < |x_1 - a| < \delta, \\ 0 < |x_2 - a| < \delta; \end{cases} \implies |f(x_1,y) - f(x_2,y)| < \varepsilon.$$

Поскольку «свойство Коши» (выражение выше в кванторах) не зависит от функции g, мы можем что-то утверждать про равномерную сходимость семейства функций f без вычисления самой предельной функции g.

Доказательство. $\implies$

$$|f(x_1,y) - f(x_2,y)| = |f(x_1,y) - g(y) + g(y) - f(x_2,y)| \leqslant |f(x_1,y) - g(y)| + |g(y) - f(x_2,y)|.$$

Поскольку имеет место равномерная сходимость, то

$$\exists\delta\colon 0 < |x_1 - a| < \delta \implies |f(x_1,y) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2},$$
$$\exists\delta\colon 0 < |x_2 - a| < \delta \implies |f(x_2,y) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда,

$$|f(x_1,y) - f(x_2,y)| \leqslant |f(x_1,y) - g(y)| + |g(y) - f(x_2,y)| < \varepsilon.$$

$\impliedby$ Давайте зафиксируем $y \in H$, то есть будем рассматривать $|f(x_1,y) - f(x_2,y)|$ как функцию от x_1 и x_2. Положим $F(x) = f(x,y)$ (мы можем так сделать, потому что y фиксировано). Тогда, $F(x)$ при $x \to a$ удовлетворяет критерию Коши, то есть существует **константа** g такая, что $F(x) \underset{x\to a}{\to} g$. Если мы будем менять y, то получится, что существует **функция** $g(y)$ такая, что $f(x,y) \underset{x\to a}{\to} g(y)$. Докажем равномерность этой сходимости. Для этого рассмотрим неравенство

$$|f(x_1,y) - f(x_2,y)| < \varepsilon,$$

и устремим $x_2 \to a$, тогда, поскольку предельный переход может повлиять разве что на строгость неравенства, имеем

$$|f(x_1,y) - g(y)| \leqslant \varepsilon,$$

что равносильно определению равномерной сходимости.

■

3. Свойства равномерно сходящегося семейства функций. Теорема о предельном переходе. Теорема о непрерывности по параметру. Теорема об интегрировании по параметру. Теорема о дифференцировании по параметру.

3.1. Теорема о пределльном переходе

Теорема (Теорем о предельном переходе)**.**
Пусть:

- $f(x,y) \overset{y\in H}{\underset{x\to a}{\rightrightarrows}} g(y)$
- $\forall x \in D : f(x,y) \underset{y\to b}{\to} h(x)$
- $h(x) \underset{x\to a}{\to} c$

Тогда $\lim\limits_{y\to b} g(y) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = c$

Доказательство теоремы о предельном переходе. Необходимо доказать, что $|g(y) - c|$ мала.
$|g(y) - c| \leqslant |g(y) - f(x,y)| + |f(x+y) - h(x)| + |h(x) - c|$

- $|g(y) - f(x,y)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$, при $0 < |x-a| < \delta_1,\ \forall y \in H$
- $|h(x) - c| < \dfrac{\varepsilon}{3}$, при $0 < |x-a| < \delta_2$
- $|f(x,y) - h(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ при фиксированном x и $0 < |y-b| < \delta_3$

Для $\delta = min(\delta_1, \delta_2, \delta_3) : |g(y) - c| < \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ ■

3.2. Теорема о непрерывности по параметру

Теорема (Теорема о непрерывности по параметру)**.** Пусть

- $f(x,y) \overset{y\in H}{\underset{x\to a}{\rightrightarrows}} g(y)$
- $f(x,y), \forall x \in D$ – непрерывна как функция от y в точке $y = b$

Тогда $g(y)$ – непрерывна в точке $y = b$

Доказательство теоремы о непрерывности по парметру. Необходимо доказать, что предел разности $|g(y)-g(b)|$ равен нулю.
$|g(y) - g(b)| \leqslant |g(y) - f(x,y)| + |f(x,y) - f(x,b)| + |f(x,b) - g(b)|$

- $|g(y) - f(x,y)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$, при $0 < |x-a| < \delta_1, \forall y \in H$ (в силу условий равномерной сходимости)
- $|f(x,b) - g(b)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ – это частный случай предыдущего пункта (так как $b \in H$ по условию теоремы)
- $|f(x,y)-f(x,b)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ при фиксированном x и, в виду непрерывности $f(x,y)$ по y в точки $y = b$ (условие теоремы), $|y-b| < \delta_2$

Для $\delta = min(\delta_1, \delta_2) : |g(y) - g(b)| < \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ ■

3.3. Теорема об интегрировании по параметру

Теорема (Теорема об интегрировании по параметру)**.** Пусть

- Пусть H – жорданово множество
- $f(x,y)$ – ограничена на $D \times H$
- $\forall x \in D : f(x,y)$ – интегрируема по y
- $f(x,y) \underset{x \to a}{\overset{y \in H}{\rightrightarrows}} g(y)$

Тогда функция $g(y)$ интегрируема и $\int\limits_H g(y)dy = \lim\limits_{x \to a} \int\limits_H f(x,y)dy$

Доказательство теоремы об интегрировании по параметру. Сначала докажем, что функция $g(y)$ – интегрируема. Случай, когда $\mu(H) = 0$ – тривиален: любая функция интегрируема на этом множестве и интеграл равен нулю. Поэтому далее рассматриваем случай $\mu(H) \neq 0$.

Для этого воспользуемся критерием Дарбу.

Пусть $\{H_i\}$ – разбиение множества H. Тогда необходимо доказать:

$\sum\limits_i \sup\limits_{y_1, y_2 \in H_i} |g(y_1) - g(y_2)| \mu(H_i) = \sum\limits_i \omega_g(H_i)\mu(H_i) < \varepsilon$, где $\mu(H_i)$ – мера множества H_i.

$|g(y_1) - g(y_2) \leqslant |g(y_1) - f(x,y_1)| + |f(x,y_1) - f(x,y_2)| + |f(x,y_2) - g(y_2)|$

- $|g(y_1) - f(x,y_1)| < \dfrac{\varepsilon}{3\mu(H)}$, при $0 < |x-a| < \delta_1,\ \forall y_1 \in H$
- $|f(x,y_2) - g(y_2)| < \dfrac{\varepsilon}{3\mu(H)}$, при $0 < |x-a| < \delta_2,\ \forall y_2 \in H$

Теперь перепишем сумму с учётом оценок выше для $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$:

$$\sum_i \sup_{y_1, y_2 \in H_i} |g(y_1) - g(y_2)|\mu(H_i) \leqslant \sum_i \frac{\varepsilon}{3\mu(H)}\mu(H_i) + \sum_i \sup_{y_1, y_2 \in H} |f(x,y_1) - f(x,y_2)|\mu(H_i) + \sum_i \frac{\varepsilon}{3\mu(H)}\mu(H_i)$$

- $\sum\limits_i \sup\limits_{y_1, y_2 \in H} |f(x,y_1) - f(x,y_2)|\mu(H_i) < \dfrac{\varepsilon}{3}$ по критерию Дарбу, так как $f(x,y)$ интегрируема по y при фиксированном x (условие теоремы)

Таким образом, $\sum\limits_i \sup\limits_{y_1, y_2 \in H_i} |g(y_1) - g(y_2)|\mu(H_i) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \Rightarrow g$ – интегрируема по критерию Дарбу

Теперь докажем вторую часть утверждения – научимся брать интеграл от функции g.

$$\left|\int\limits_H (g(y) - f(x,y))dy\right| \leqslant \int\limits_H |(g(y) - f(x,y)|dy$$

- $|(g(y) - f(x,y)| < \varepsilon$ при $0 < |x-a| < \delta$ и $\forall y \in H$

Следовательно, $\left|\int\limits_H (g(y) - f(x,y))dy\right| < \varepsilon\mu(H)$

$$\Rightarrow \int\limits_H ((g(y) - f(x,y))dy \underset{x \to a}{\to} 0$$

$$\int\limits_H f(x,y)dy = \int\limits_H g(y)dy + \int\limits_H ((g(y) - f(x,y))dy \to \int\limits_H g(y)dy$$ ■

3.4. Теорема о дифференцировании по параметру

Теорема (Теорема о дифференцировании по параметру)**.** Пусть

- H – выпуклое ограниченное множество (например: отрезок $[c,d]$)
- $\forall x \in D : f(x,y)$ – дифференцируема по $y \in H$

- $f(x,y) \overset{y\in H}{\underset{x\to a}{\to}} g(y), a \in \overline{D}$
- $f'_y(x,y) \overset{y\in H}{\underset{x\to a}{\rightrightarrows}} h(y)$

Тогда $g(y)$ – дифференцируема на множестве H и $g'(y) = h(y)$

Доказательство теоремы о дифференцировании по параметру. Сначала докажем, что $f(x,y) \overset{y\in H}{\underset{x\to a}{\rightrightarrows}} g(y)$. Для этого воспользуемся критерием Коши: хотим доказать, что $|f(x_1,y) - f(x_2,y)| < \varepsilon$ равномерно по всем y, если только x_1 и x_2 достаточно близко к точке a лежат. Тогда будет выполнено условие Коши, а значит, что семейство $f(x,y)$ равномерно сходится к своей предельной функции g.

Возьмём какое-нибудь $y_0 \in H$, тогда:

$|f(x_1,y) - f(x_2,y)| = |(f(x_1,y) - f(x_2,y)) - (f(x_1,y_0) - f(x_2,y_0))| + |(f(x_1,y_0) - f(x_2,y_0))|$

Теперь зафиксируем x_1 и x_2, тогда можем рассматривать функцию $q(y) = (f(x_1,y) - f(x_2,y))$. Так как мы из условия теоремы знаем, что $f(x,y)$ дифференцируема по $y \in H$, то и функции $q(y)$ дифференцируема по $y \in H$. Теперь необходимо применить теорему Лагранжа для функции $q(y)$. Модифицируем равенство дальше:

$|f(x_1,y) - f(x_2,y)| = |q(y) - q(y_0)| + |q(y_0)| =$ [Теорема Лагранжа] $= |q'(y*)| \cdot |y - y_0| + |q(y_0)|$, где $y* \in [min(y_0,y), max(y_0,y)]$

Вернёмся к записи через функцию f:

$|f(x_1,y) - f(x_2,y)| = |f'_y(x_1,y*) - f'_y(x_2,y*)| \cdot |y - y_0| + |(f(x_1,y_0) - f(x_2,y_0))|$

- По условию теоремы $f'_y(x,y) \overset{y\in H}{\underset{x\to a}{\rightrightarrows}} h(y) \Rightarrow$, применив критерий Коши для производной можем сказать, что $|f'_y(x_1,y*) - f'_y(x_2,y*)| < \dfrac{\varepsilon}{2 \cdot diam(H)}$
- $|y - y_0| < diam(H)$
- $|(f(x_1,y_0) - f(x_2,y_0))| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, так как $f(x,y_0) \to g(y_0)$

Итого: $|f(x_1,y) - f(x_2,y)| < \varepsilon$

Теперь хотим доказать $\dfrac{f(x,y) - f(x,b)}{y-b} \rightrightarrows \dfrac{g(y) - g(b)}{y-b}$, $b \in H, y \neq b$

Для этого давайте снова воспользуемся критерием Коши:

$|\dfrac{f(x_1,y) - f(x_1,b)}{y-b} - \dfrac{f(x_2,y) - f(x_2,b)}{y-b}|$

Снова введём функцию $F(y) = f(x_1,y) - f(x_2,y)$ как в первой части доказательства и снова воспользуемся для неё формулой Лагранжа. Перепишем равенство:

$|\dfrac{f(x_1,y) - f(x_1,b)}{y-b} - \dfrac{f(x_2,y) - f(x_2,b)}{y-b}| = |\dfrac{F'(y*) \cdot (y-b)}{y-b}| = |F'(y*)|$, где $y* \in [b,y]$

Тогда, вернувшись к записи с f получаем:

$|\dfrac{f(x_1,y) - f(x_1,b)}{y-b} - \dfrac{f(x_2,y) - f(x_2,b)}{y-b}| = |f'_y(x_1,y*) - f'_y(x_2,y*)| < \varepsilon$, так как по условию теоремы $f'_y(x,y) \overset{y\in H}{\underset{x\to a}{\rightrightarrows}} h(y)$

Теперь осталось воспользоваться теоремой о внесении предела под знак равномерной сходимости:

$\lim\limits_{y\to b} \dfrac{g(y) - g(b)}{y-b} =$ [см. пункт 3.1 лекций] $= \lim\limits_{x\to a} \lim\limits_{y\to b} \dfrac{f(x,y) - f(x,b)}{y-b} = \lim\limits_{x\to a} f'_y(x,b) = h(b) \Rightarrow g'(y) = h(y)$, что и требовалось доказать. ■

4. Равномерная сходимость несобственного интеграла. Определение. Критерий Коши равномерной сходимости несобственного интеграла. Мажорантный признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственного интеграла. Вторая интегральная теорема о среднем (для собственного интеграла). Признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости несобственного интеграла.

4.1. Равномерная сходимость несобственного интеграла.

Определение. Несобственным интегралом, зависящим от параметра y называется следующий интеграл:

$$\int_a^\omega f(x,y)dx = \lim_{t\to\omega}\int_a^t f(x,y)dx = F(y)$$

где ω это либо ∞, либо точка в которой подынтегральная функция имеет особенность, то есть стремится к бесконечности, f интегрируема на $[a;t]$ при $\forall t \in (a,\omega)$ и при $\forall y \in H$

Определение. Несобственный интеграл, зависящий от параметра y называется сходящимся, если существует конечный предел из определения выше, то есть

$$\exists \lim_{t\to\omega}\int_a^t f(x,y)dx < \infty$$

Определение. Пусть несобственный интеграл, зависящий от параметра сходится $\forall y \in H$, тогда несобственный интеграл является равномерно сходящимся, если

$$g(t,y) = \int_a^t f(x,y)dx \underset{t\to\omega}{\overset{y\in H}{\rightrightarrows}} F(y)$$

4.2. Критерий Коши равномерной сходимости несобственного интеграла.

Теорема.

$$\int_a^\omega f(x,y)dx \text{ сходится равномерно по } y\in H \iff \forall\varepsilon>0\ \exists U_\varepsilon(\omega)\colon\ \forall t_1,t_2\in U_\varepsilon(\omega)\quad \Big|\int_{t_1}^{t_2} f(x,y)dx\Big| < \varepsilon$$

где $U_\varepsilon(\omega)$ это некоторая окрестность ω, зависящая от ε

Доказательство. Рассмотрим семейство функций

$$g(t,y) = \int_a^t f(x,y)dx \overset{?}{\rightrightarrows} F(y)$$

Знаем, что равномерная сходимость несобственного интеграла равносильна равномерной сходимости данного семейства функций, с другой стороны

$$\int_{t_1}^{t_2} f(x,y)dx = g(t_2,y) - g(t_1,y) \implies \Big|\int_{t_1}^{t_2} f(x,y)dx\Big| < \varepsilon \iff |g(t_2,y) - g(t_1,y)| < \varepsilon$$

Заметим, что последнее неравенство это критерий Коши (условие Коши) для равномерной сходимости семейства функций при $t\to\omega$.
Немного пояснений: Мы знаем, что критерием наличия равномерной сходимости является критерий (условие) Коши, который заключается в последнем неравенстве, которое в нашем случае эквивалентно неравентсву для соответствующего интеграла (интеграл равен разности), то есть критерий Коши для несобственного интеграла это просто критерий Коши для соответствующей первообразной. ■

4.3. Мажорантный признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственного интеграла.

Теорема. Пусть $f(x,y)$ интегрируема по $x \in [a,t]$, $\forall t \in (a,\omega)$, $\forall y \in H$, и пусть $|f(x,y)| \leqslant g(x,y)$, где $(x,y) \in [a,\omega] \times H$ (в силу свойств несобственного интеграла можем требовать, чтобы неравенство выполнялось в сколь угодно близких точках по x к ω), причем $g(x,y)$ интегрируема по $x \in [a,\omega)$ в несобственном смысле при $\forall y \in H$ и $\int\limits_a^\omega g(x,y)dx$ сходится равномерно по y, тогда

$$\int\limits_a^\omega f(x,y)dx \text{ равномерно сходится и удовлетворяет неравеснтву } \Big|\int\limits_a^\omega f(x,y)dx\Big| \leqslant \int\limits_a^\omega g(x,y)dx$$

Доказательство. В силу того, что $|f(x,y)| \leqslant g(x,y)$ верно, что

$$\Big|\int\limits_{t_1}^{t_2} f(x,y)dx\Big| \leqslant \int\limits_{t_1}^{t_2} g(x,y)dx$$

тогда, так как $g(x,y)$ по условию сходится равномерно, значит для него выполнется критерий Коши, то есть $\int\limits_{t_1}^{t_2} g(x,y)dx < \varepsilon$, тогда получаем, что

$$\Big|\int\limits_{t_1}^{t_2} f(x,y)dx\Big| \leqslant \int\limits_{t_1}^{t_2} g(x,y)dx < \varepsilon \implies \Big|\int\limits_{t_1}^{t_2} f(x,y)dx\Big| < \varepsilon \implies \text{[по критерию Коши] } f(x,y) \text{ равномерно сходится}$$

Для доказателства неравенства, заметим, что для любой точки t оно выполнено (по свойству интеграла), затем устремляем t к ω и в пределе получаем нужное нам неравенсвто с ω, а именно

$$\Big|\int\limits_a^\omega f(x,y)dx\Big| \leqslant \int\limits_a^\omega g(x,y)dx$$

■

4.4. Вторая интегральная теорема о среднем для собственного интеграла(частный случай).

Теорема.

Частный случай: Если функции $f(x)$, $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$ и функция $g(x) \geqslant 0$, $g(x) \downarrow$(невозрастает), то

$$\exists c \in [a,b]\colon \int\limits_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \cdot \int\limits_a^c f(x)dx$$

Доказательство.

1. $a = x_0 < x_1 .. < x_n = b$

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \sum_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)g(x)dx = \sum_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \Big(f(x)g(x) + \underbrace{g(x_{k-1}) - g(x_{k-1})}_{\text{прибавили и вычли}}\Big)dx =$$

$$= \sum_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \Big(f(x)(g(x) - g(x_{k-1})\Big)dx + \sum_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) \cdot \underbrace{g(x_{k-1})}_{\text{не зависит от x}} dx =$$

$$= \sum_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \Big(f(x)(g(x) - g(x_{k-1})\Big)dx + \sum_{k=1}^n g(x_{k-1}) \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx = (*)$$

- $f(x)$ интегрируема на отрезке, значит она ограничена, то есть $|f(x)| < const$
- $|g(x) - g(x_{k-1})| \leqslant \omega$ (колебание функции g) на $[x_{k-1}, x_k]$

- $g(x)$ интегрируема по условию, тогда по критерию Дарбу (g интегрируема $\Longrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \cdot \mu(D_i) < \varepsilon$) сумма произведения колебаний на отрезке на длинну отрезка сколь угодно мала ($< \varepsilon$)

  Тогда из выше сказанного следует, что

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \Big(f(x)(g(x) - g(x_{k-1})\Big)dx\Big| < \varepsilon$$

  Следовательно,

$$(*) = \lim_{\triangle \to 0} \sum_{k=1}^{n} g(x_{k-1}) \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx,\ \triangle - \text{диаметр разбиения}$$

2. Рассмотрим эту сумму.

   Введем $F(t) = \int\limits_{a}^{t} f(x)dx$, $F(a) = 0$ Пусть $M = \max\limits_{x\in[a,b]} F(x)$, $m = \min\limits_{x\in[a,b]} F(x)$

   Выражая $\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx$, как разность занчений F, мы можем записать, что

$$\sum_{k=1}^{n} g(x_{k-1}) \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} g(x_{k-1}) \cdot (F(x_k) - F(x_{k-1})) =$$

[распишем формулу суммирования по частям]

$$= \sum_{k=1}^{n} \Big(g(x_k)F(x_k) - g(x_{k-1})F(x_{k-1})\Big) - \sum_{k=1}^{n} \Big((g(x_k) - g(x_{k-1}))F(x_k)\Big) = (*)$$

   Заметим, что первая сумма равна $F(x_n) \cdot g(x_n) - F(x_0) \cdot g(x_0) = F(b) \cdot g(b) - \underbrace{F(a)}_{0} \cdot g(a) = F(b) \cdot g(b)$

   Следовательно,

$$(*) = F(b) \cdot g(b) - \sum_{k=1}^{n} \Big((g(x_k) - g(x_{k-1}))F(x_k)\Big)$$

   Оценим, нашу сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} g(x_{k-1}) \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx$:

$$\begin{cases} g(x) \downarrow \Longrightarrow \quad \forall k: \ g(x_k) - g(x_{k-1}) \leqslant 0 \\ \sum\limits_{k=1}^{n} g(x_k) - g(x_{k-1}) = g(x_n) - g(x_0) = g(b) - g(a) \\ m \leqslant F(x_k) \leqslant M \end{cases} \Longrightarrow m \cdot g(a) \leqslant \sum_{k=1}^{n} g(x_{k-1}) \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \leqslant M \cdot g(a)$$

   Так как в полученном неравенстве нигде не фигурирует разбиение ортрезка $[a,b]$, то, устремляя $\triangle$ к 0, мы получим в пределе, что

$$m \cdot g(a) \leqslant \int\limits_{a}^{b} f(x)g(x)dx \leqslant M \cdot g(a)$$

3. Рассмотрим подробнее полученное двойное неравенство $m \cdot g(a) \leqslant \int\limits_{a}^{b} f(x)g(x)dx \leqslant M \cdot g(a)$, возникает два случая:

   (a) $g(a) = 0 \Longrightarrow \int\limits_{a}^{b} f(x)g(x)dx = 0 = g(a) \cdot \int\limits_{c}^{b} f(x)dx$

(b) $g(a) > 0 \implies$ поделим обе части неравенства на $g(a)$, получим $m \leqslant \dfrac{1}{g(a)} \displaystyle\int\limits_a^b f(x)g(x)dx \leqslant M$, так как $F(x)$ непрерывная функция, принимающая значения от m до M, то $\exists c\colon\ F(c) = \dfrac{1}{g(a)} \displaystyle\int\limits_a^b f(x)g(x)dx$, а это и есть то, что нам надо доказать

■

Теорема.
Если функции $f(x)$, $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$ и функция $g(x)$ монотонная, то

$$\exists c \in [a,b]\colon\ \int\limits_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \cdot \int\limits_a^c f(x)dx + g(b) \cdot \int\limits_c^b f(x)dx$$

Доказательство. Сведем наше докозательство к докозательству предыдущей теоремы(частного случая). Так как $g(x)$ монотонная =6 то возникает два случая:

1. $g(x) \uparrow$, тогда берем $G(x) = g(b) - g(x)$
2. $g(x) \downarrow$, тогда берем $G(x) = g(x) - g(b)$

Заметим, что в обоих условиях функция $G(x)$ удовлетворяет условиям предыдущей теоремы. ■

4.5. Признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости несобственного интеграла.

Рассмотрим $\displaystyle\int\limits_a^\omega f(x,y)g(x,y)dx$

Теорема. Признак Дирихле.
Если $\exists M\colon\ \forall b \in [a,\omega),\ \forall y \in H\ \left|\displaystyle\int\limits_a^b f(x,y)dx\right| \leqslant M$ и $\forall y\ g(x,y)$ монотонна по x и $g(x,y) \underset{x\to\omega}{\overset{y\in H}{\rightrightarrows}} 0$, то $\displaystyle\int\limits_a^\omega f(x,y)g(x,y)dx$ сходится равномерно

Доказательство. Рассмотрим $\displaystyle\int\limits_{t_1}^{t_2} f(x,y)g(x,y)dx$

По второй теореме о среднем $\exists t \in [t_1,t_2]$: $$\int\limits_{t_1}^{t_2} f(x,y)g(x,y)dx = \underbrace{g(t_1,y)}_{\underset{x\to\omega}{\overset{y\in H}{\rightrightarrows}} 0} \cdot \underbrace{\int\limits_{t_1}^{t} f(x,y)dx}_{|\cdot|\leqslant M \text{ (по усл.)}} + \underbrace{g(t_2,y)}_{\underset{x\to\omega}{\overset{y\in H}{\rightrightarrows}} 0} \cdot \underbrace{\int\limits_{t}^{t_2} f(x,y)dx}_{|\cdot|\leqslant M \text{ (по усл.)}}$$

Значит эта линейная комбинация может быть сделана сколь угодно малой, а значит по критерию Коши исходный интеграл сходится равномерно ■

Теорема. Признак Абеля.
Пусть $\displaystyle\int\limits_a^\omega f(x,y)dx$ сходится равномерно, $\forall y\ g(x,y)$ монотонна по x и $\exists M\colon\ |g(x,y)| \leqslant M$, тогда $\displaystyle\int\limits_a^\omega f(x,y)g(x,y)dx$ сходится равномерно

Доказательство. Рассмотрим $\displaystyle\int\limits_{t_1}^{t_2} f(x,y)g(x,y)dx$

По второй теореме о среднем $\exists t \in [t_1,t_2]$: $$\int\limits_{t_1}^{t_2} f(x,y)g(x,y)dx = \underbrace{g(t_1,y)}_{|\cdot|\leqslant M \text{ (по усл.)}} \cdot \int\limits_{t_1}^{t} f(x,y)dx + \underbrace{g(t_2,y)}_{|\cdot|\leqslant M \text{ (по усл.}} \cdot \int\limits_{t}^{t_2} f(x,y)dx$$

Из условия также ясно, что $\displaystyle\int\limits_{t_1}^{t} f(x,y)dx$ и $\displaystyle\int\limits_{t}^{t_2} f(x,y)dx$ равномерно сходятся, а значит по критерию Коши их можно сделать сколь угодго малыми, вне зависимости от y, а значит и всю сумму можно сделать сколь угодно малой, а значит по критерию Коши, исходный интеграл сходится. ■

5. Свойства равномерно сходящегося несобственного интеграла. Теорема о предельном переходе под знаком несобственного интеграла. Монотонный предельный переход и теорема Дини и равномерной сходимости семейства функций. Следствие из теоремы Дини о монотонном предельном переходе под знаком несобственного интеграла. Теорема о непрерывности несобственного интеграла по параметру.

5.1. Свойства равномерно сходящегося несобственного интеграла.

Свойства. 1. Предельный переход под знаком интеграла.

Пример.

$$\int\limits_0^{+\infty} f(x,n)\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int\limits_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx$$

Покажем, что $f(x,n) \rightrightarrows \varphi(x)$ недостаточно:

$$f(x,n) = \begin{cases} \frac{n}{x^3}\,e^{-\frac{n}{2x^2}}, & x > 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \text{ непрерывна на } [0;+\infty)$$

Проверяем равномерную сходимость $f(x,n) \rightrightarrows \varphi(x) = 0$:

$$\sup_{x\geq 0} |f(x,n) - \varphi(x)| = \sup_{x>0} \frac{n}{x^3}\,e^{-\frac{n}{2x^2}} \underset{\substack{\uparrow \\ x=\sqrt{\frac{n}{3}}}}{=} 3\sqrt{\frac{3}{n}}\,e^{-3/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \;\Rightarrow\; \text{сходимость равномерная}$$

Проверяем значение интеграла:

$$\int\limits_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 0$$

$$\int\limits_0^{+\infty} f(n,x)\,dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{n}{x^3}\,e^{-\frac{n}{2x^2}}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{0} e^z\,dz = e^z\,\Big|_{-\infty}^{0} = 1$$

$$z = -\frac{n}{2x^2},\; dz = \frac{n}{x^3}\,dx$$

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{+\infty} f(x,n)\,dx \neq \int\limits_0^{+\infty} \lim_{n\to\infty} f(x,n)\,dx$$

Требуется равномерная сходимость несобственного интеграла.

Теорема. О предельном переходе под знаком несобственного интеграла.

Рассмотрим $f(x,y)$, определенную на $[a;\omega) \times H$ (ω — особая точка).

Пусть

$\forall y \in H \;\; f(x,y)$ несобственно интегрируема на $[a;\omega)$,

причем $\displaystyle\int\limits_a^{\omega} f(x,y)\,dx$ сходится равномерно по $y \in H$,

$\forall t \in [a;\omega) \;\; f(x,y) \underset{y\to y_0}{\overset{x\in[a;t]}{\rightrightarrows}} \varphi(x),\; y_0 \in H.$

Тогда φ несобственно интегрируема на $[a;\omega)$, причем

$$\lim_{y\to y_0} \int\limits_a^{\infty} f(x,y)\,dx = \int\limits_a^{\omega} \varphi(x)\,dx$$

Доказательство. (a) Покажем, что $\int\limits_a^\omega \varphi(x)\,dx$ сходится:

$a \le t_1 < t_2 < \omega$

По критерию Коши для равномерно сходящегося несобственного интеграла $\int\limits_a^\omega f(x,y)\,dx$

$$\left|\int\limits_{t_1}^{t_2} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon \quad \forall t_1, t_2 \in U(\omega),\ \forall y \in H$$

$$y \to y_0 : \quad \lim_{y\to y_0} \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x,y)\,dx = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right) dx = \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi(x)\,dx \quad (\text{т.к. } f(x,y) \underset{y\to y_0}{\overset{x\in[a;t]}{\rightrightarrows}} \varphi(x))$$

$$\Rightarrow \left|\int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi(x)\,dx\right| \le \varepsilon \quad \forall t_1, t_2 \in U(\omega)$$

$\Rightarrow \varphi$ несобственно интегрируема

(b) Покажем, что $\left|\int\limits_a^\omega f(x,y)\,dx - \int\limits_a^\omega \varphi(x)\,dx\right| \xrightarrow[y\to y_0]{} 0$:

$$\left|\int\limits_a^\omega f(x,y)\,dx - \int\limits_a^\omega \varphi(x)\,dx\right| \le \underbrace{\left|\int\limits_a^\omega f(x,y)\,dx - \int\limits_a^t f(x,y)\,dx\right|}_{<\frac{\varepsilon}{3} \quad \begin{array}{l}\forall t \in U(\omega)\\ \forall y \in H\end{array}} +$$

$$+ \underbrace{\left|\int\limits_a^t f(x,y)\,dx - \int\limits_a^t \varphi(x)\,dx\right|}_{<\frac{\varepsilon}{3} \quad \begin{array}{c}\text{При фикс. } t \in U(\omega)\\ |y-y_0| < \delta\end{array}} + \underbrace{\left|\int\limits_a^t \varphi(x)\,dx - \int\limits_a^\omega \varphi(x)\,dx\right|}_{<\frac{\varepsilon}{3}\ \forall t \in U(\omega)} < \varepsilon \ \ \forall \varepsilon > 0, \quad \text{что и требовалось}$$

■

2. Монотонный предельный переход

Теорема. Теорема Дини

Пусть

$f(x,y) \ge 0$ и непрерывна $\forall y \in H$ по $x \in [a;\omega)$,
при $\forall x \in [a;\omega)$ $\ f(x,y) \uparrow$ по y и $f(x,y) \xrightarrow[y\to y_0]{} \varphi(x)$,
φ — непрерывна на $[a;\omega)$.

Тогда $f(x,y) \underset{y\to y_0}{\overset{[a;t]}{\rightrightarrows}} \varphi(x) \ \ \forall t \in (a;\omega)$

Доказательство. В силу монотонности по y:

$$(\varphi(x) - f(x,y)) \downarrow \text{ по } y,\ \varphi(x) - f(x,y) \ge 0$$

$$\forall y_1 < y_2 \quad \varphi(x) - f(x,y_1) \ge \varphi(x) - f(x,y_2) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sup_x |\varphi(x) - f(x,y_1)| \ge \sup_x |\varphi(x) - f(x,y_2)| \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi(y) = \sup_x |\varphi(x) - f(x,y)| \text{ — убывает и } \ge 0$$

Докажем, что $\psi(y) \xrightarrow[y\to y_0]{} 0$. От противного: пусть $\psi(y) \geq \varepsilon > 0$.

Тогда $\exists\{(x_n, y_n)\}: \ y_n \nearrow y_0, \ \varphi(x_n) - f(x_n, y_n) \geq \varepsilon/2$

$\{x_n\} \subset [a;t] \ \Rightarrow$ из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такую, что $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} c \in [a;t]$.

$$\varphi(x_{n_k}) - f(x_{n_k}, y) \geq \varepsilon/2$$

$$k \to \infty: \ \varphi(c) - f(c, y) \geq \varepsilon/2 \quad \forall y \in U(y_0)$$

— противоречит тому, что $f(x,y) \to \varphi(x)$. ■

Следствие. Пусть $f(x,y) \geq 0$ и непрерывна по $x \in [a;\omega)$ $\forall y \in H$,

$\forall x \in [a;\omega)$ $f(x,y) \uparrow$ по y и $f(x,y) \underset{y\to y_0}{\nearrow} \varphi(x)$,

$\int\limits_a^\omega \varphi(x)\,dx$ — сходится.

Тогда $\lim\limits_{y\to y_0} \int\limits_a^\omega f(x,y)\,dx = \int\limits_a^\omega \varphi(x)\,dx$

Доказательство. По теореме Дини: $f(x,y) \underset{y\to y_0}{\overset{[a;t]}{\rightrightarrows}} \varphi(x)\varphi(x) \quad \forall t \in (a;\omega)$

$0 \leq f(x,y) \leq \varphi(x)$

Т.к. $\int\limits_a^\omega \varphi(x)\,dx$ сходится, то $\int\limits_a^\omega f(x,y)\,dx$ сходится равномерно (по признаку Вейерштрасса) ■

Пример.

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = ?$$

$$\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\nearrow} e^{x^2} \quad \forall x \geq 0$$

Т.к. функции непрерывны, сходимость равномерная (по теореме Дини)

$\Rightarrow$ равномерно сходится $f(x,n) = \left(1 + \dfrac{x^2}{n}\right)^{-n} \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} e^{-x^2} = \varphi(x)$

Но последовательность $f(x,n)$ убывает — рассмотрим разность

$$g(x,n) = f(x,1) - f(x,n) = \left(1+x^2\right)^{-1} - \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n \geq 0 \ \uparrow \ \text{по } n$$

$$g(x,n) \rightrightarrows \psi(x) = (1+x^2)^{-1} - e^{-x^2} \geq 0 \qquad \int\limits_0^{+\infty} \psi(x)\,dx \quad \text{сходится}$$

По следствию из теоремы Дини:

$$\Rightarrow \int\limits_0^{+\infty} g(x,n)\,dx \to \int\limits_0^{+\infty} \psi(x)\,dx$$

$$\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n}\right) dx \to \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+x^2} - e^{-x^2}\right) dx$$

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n}$$

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n} = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \sqrt{n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Формула Валлиса: $\prod\limits_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{4k^2-1} \to \frac{\pi}{2}$

3. Непрерывность интеграла

$$f(x,y) \quad [a;\omega) \times [c;d]$$

Пусть $f(x,y)$ непрерывна на $[a;\omega) \times [c;d]$

$$F(y) = \int\limits_a^{\omega} f(x,y)\,dx \text{ сходится равномерно на } [c;d]$$

Тогда $F(y)$ непрерывна на $[c;d]$

Доказательство.

$$g(t,y) = \int\limits_a^{t} f(x,y)\,dx \text{ — непрерывна по } y \in [c;d] \quad \forall t \in (a;\omega)$$

$$\int\limits_a^{t} f(x,y)\,dx \text{ — сходится равномерно } \Leftrightarrow\ g(t,y) \overset{y\in[c;d]}{\underset{t\to\omega}{\rightrightarrows}} F(y)$$

Равномерно сходящееся семейство непрерывных функций сходится к непрерывной функции:

$$|F(y)-F(y_0)| \le \underbrace{|F(y)-g(t,y)|}_{<\frac{\varepsilon}{3} \ \begin{matrix}\forall t \in U(\omega) \\ \forall y \in H\end{matrix}} + \underbrace{|g(t,y)-g(t,y_0)|}_{<\frac{\varepsilon}{3} \ \begin{matrix}\text{При фикс. } t \in U(\omega) \\ |y-y_0|<\delta\end{matrix}} + \underbrace{|g(t,y_0)-F(y_0)|}_{<\frac{\varepsilon}{3} \ \begin{matrix}\forall t \in U(\omega) \\ \forall y \in H\end{matrix}} < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

■

6. Свойства равномерно сходящегося несобственного интеграла. Теорема о дифференцировании по параметру под знаком несобственного интеграла. Теорема о собственном интегрировании по параметру под знаком несобственного интеграла. Теорема о несобственном интегрировании по параметру под знаком несобственного интеграла.

6.1. Свойства равномерно сходящегося несобственного интеграла.

Свойства. 1. Дифференцирование по параметру

$$F(y) = \int\limits_a^{\omega} f(x,y)\,dx, \quad y \in [c;d]$$

Пусть: $f(x,y),\ f'_y(x,y)$ — непрерывны на $[a;\omega) \times [c;d]$

$$\Phi(y) = \int\limits_a^{\omega} f'_y(x,y)\,dx \text{ — сходится равномерно на } [c;d]$$

$$\int\limits_a^{\omega} f(x,y)\,dx \text{ сходится хотя бы в 1 точке } y_0 \in [c;d]$$

Тогда:

$$\int\limits_a^{\omega} f(x,y)\,dx \text{ сходится равномерно на } [c;d],$$

причем $F(y)$ дифференцируема на $[c;d]$ и $F'(y) = \Phi(y)$

Доказательство.

$$g(t,y)=\int\limits_a^t f(x,y)\,dx$$

По теореме о дифференцировании собственного интеграла по параметру, $g(t,y)$ дифференцируема по y на $[c;d]$ и

$$g'_y(t,y)=\int\limits_a^t f'_y(x,y)\,dx \overset{y\in[c;d]}{\underset{t\to\omega}{\rightrightarrows}} \Phi(y)$$

По условию $g(t,y_0)\xrightarrow[t\to\omega]{} F(y_0)$

Рассмотрим семейство $g(t,y)$. По теореме о дифференцировании семейства функций по параметру:

$$g(t,y) \overset{y\in[c;d]}{\underset{t\to\omega}{\rightrightarrows}} F(y),\quad F'(y)=\Phi(y)$$

■

Пример. Вычислим интеграл Дирихле: $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$

Рассмотрим вспомогательный интеграл: $F(y)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\cdot e^{-xy}\,dx,\ y>0$

$$f(x,y)=\frac{\sin x}{x}\cdot e^{-xy},\quad f'_y(x,y)=-\sin x\cdot e^{-xy} \text{ — непрерывна на } [0;+\infty)\times[c;d],$$

где $[c;d]\subset(0;+\infty)$

$$\Phi(y)=-\int\limits_0^{+\infty}\sin x\cdot e^{-xy}\,dx \text{ — вспомогательный интеграл}$$

$$\left|\sin x\cdot e^{-xy}\right|\le e^{-xy},\ xy\ge cx,\quad \int\limits_0^{+\infty}e^{-cx}\,dx \text{ — сходится}$$

$$\Rightarrow \int\limits_0^{+\infty}\sin x\cdot e^{-xy}\,dx \text{ — равномерно сходится по признаку Вейерштрасса}$$

При $y_0>0$ $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\cdot e^{-xy}\,dx$ сходится по признаку Абеля

(т.к. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}$ — сходится, а e^{-xy} — монотонная и ограниченная)

$\Rightarrow$ по теореме можно внести $\frac{d}{dy}$ под знак интеграла:

$$F'(y)=-\int\limits_0^{+\infty}\sin x\cdot e^{-xy}\,dx=\star$$

$$\int\sin x\cdot e^{-xy}\,dx=-\int e^{-xy}\,d(\cos x)=-e^{-xy}\cos x-y\int\cos x\cdot e^{-xy}\,dx=$$

$$=-e^{-xy}\cos x-y\int e^{-xy}\,d(\sin x)=-e^{-xy}\cos x-ye^{-xy}\sin x-y^2\int\sin x\cdot e^{-xy}\,dx$$

$$\Rightarrow;\ \int\sin x\cdot e^{-xy}\,dx=-\frac{e^{-xy}(\cos x+y\sin x)}{1+y^2}+C\quad(y>0)$$

$$\star = -\left(0 + \frac{1}{1+y^2}\right)$$

Т.е. $F'(y) = -\dfrac{1}{1+y^2} \;\Rightarrow\; F(y) = -\operatorname{arctg} y + C$

Вычислим $\lim\limits_{y\to+\infty} F(y) = \lim\limits_{y\to+\infty} \displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\cdot e^{-xy}\,dx$

$$\begin{cases} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\cdot e^{-xy}\,dx \text{ — сходится равномерно,} \\ \lim_{y\to+\infty} \frac{\sin x}{x}\cdot e^{-xy} = 0 \quad \text{при } x\in[a;b]\subset(0;+\infty), \\ \text{причем } \ \frac{\sin x}{x}\cdot e^{-xy} \underset{y\to+\infty}{\overset{x\in[a;b]}{\rightrightarrows}} 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ можно внести $\lim\limits_{y\to+\infty}$ под знак интеграла

$$\lim_{y\to+\infty} F(y) = \int\limits_0^{+\infty} 0\,dx = 0 \;\Rightarrow\; C = \frac{\pi}{2}$$

Итак: $F(y) = -\operatorname{arctg} y + \dfrac{\pi}{2}$ Осталось внести $\lim\limits_{y\to+\infty}$ под интеграл $F(y)$ и получить интеграл Дирихле

$$\begin{cases} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy}\,dx \text{ — сходится равномерно по признаку Абеля,} \\ \lim_{y\to+0} \frac{\sin x}{x} e^{-xy} = \frac{\sin x}{x}, & x\in[a;b]\subset(0;+\infty) \\ \left|\frac{\sin x}{x} e^{-xy} - \frac{\sin x}{x}\right| \le \frac{|\sin x|}{x}\cdot(1-e^{-xy}) \le \frac{1}{a}\cdot\left(1-e^{-by}\right) \\ \Rightarrow \ \frac{\sin x}{x} e^{-xy} \rightrightarrows \frac{\sin x}{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{y\to+0} F(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

$$\Rightarrow \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{y\to+0}\left(-\operatorname{arctg} y + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

2. Собственный интеграл по параметру

$$\int\limits_c^d F(y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^\omega f(x,y)\,dx$$

Пусть

$f(x,y)$ непрерывна на $[a,\omega)\times[c,d]$

$F(y) = \displaystyle\int\limits_a^\omega f(x,y)\,dx$ — сходится равномерно на $[c,d]$

Тогда F — непрерывна на $[c,d]$ (следовательно, интегрируема) и

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_a^\omega f(x,y)\,dx = \int\limits_a^\omega dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy$$

Доказательство. Пусть $a < t < \omega$. Для собственного интеграла

$$g(t,y) = \int\limits_a^t f(x,y)\,dx$$

возможность внесения $\int\limits_c^d dy$ следует из непрерывности f:

$$\begin{array}{ccc} \int\limits_c^d g(t,y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^t f(x,y)\,dx & = & \underbrace{\int\limits_a^t dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy}_{\text{непр. ф-ция}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \int\limits_c^d F(y)\,dy & = & \int\limits_a^\omega dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy \end{array}$$

$$\lim_{t\to\omega} \int\limits_c^d dy \left(\int\limits_a^t f(x,y)\,dx \right) = \int\limits_c^d \left(\lim_{t\to\omega} \int\limits_a^t f(x,y)\,dx \right) dy = \int\limits_c^d F(y)\,dy$$

■

3. Несобственный интеграл по параметру

$$\int\limits_c^{\tilde\omega} F(y)\,dy = \int\limits_c^{\tilde\omega} dy \int\limits_a c^\omega f(x,y)\,dx$$

Пусть

$f(x,y)$ непрерывна на $[a,\omega) \times [c,\tilde\omega]$

$F(y) = \int\limits_a^\omega f(x,y)\,dx$ — сходится равномерно на $[c,\tau]$, где $c < \tau < \omega$,

хотя бы 1 из интегралов:

$$\int\limits_c^{\tilde\omega} dy \int\limits_a^\omega |f(x,y)|\,dx, \quad \int\limits_a^\omega dx \int\limits_c^{\tilde\omega} |f(x,y)|\,dy$$

сходится.

Тогда $\int\limits_c^{\tilde\omega} dy \int\limits_a^\omega f(x,y)\,dx = \int\limits_a^\omega dx \int\limits_c^{\tilde\omega} f(x,y)\,dy$

Доказательство.

$$\forall \tau \in (c;\tilde\omega) \qquad \int\limits_c^\tau dy \int\limits_a^\omega f(x,y)\,dx = \int\limits_a^\omega dx \int\limits_c^\tau f(x,y)\,dy$$

Рассмотрим предельный переход $\tau \to \tilde\omega$:

$$\lim_{\tau\to\tilde\omega} \int\limits_a^\omega dx \int\limits_c^\tau f(x,y)\,dy$$

$$\varphi(\tau,x) = \int\limits_c^\tau f(x,y)\,dy \underset{\tau\to\tilde\omega}{\overset{x\in[a;t]}{\rightrightarrows}} \Phi(x) = \int\limits_c^{\tilde\omega} f(x,y)\,dy$$

— по условию

$$|\varphi(\tau,x)| \le \int\limits_c^{\tilde\omega} |f(x,y)|\,dy, \quad \int\limits_a^\omega |\varphi(\tau,x)|\,dx \le \int\limits_a^\omega dx \int\limits_c^{\tilde\omega} |f(x,y)|\,dy$$

— сходятся по условию

$\Rightarrow$ по признаку Вейерштрасса $\int\limits_a^\omega \varphi(\tau,x)\,dx$ сходится равномерно ■

7. Эйлеровы B- и Γ- функции. Определение B-функции, ее область определения и свойства: симметричность, формула понижения, случайно натурально-значных аргументов. Формула Эйлера – Гаусса. Формула дополнения (с использованием разложения sin в бесконечное произведение без доказательства). Связь между B- и Γ-функциями.

7.1. Бета-функция Эйлера

$$B(p,q)=\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

Чтобы понять что это за интеграл, нам нужно внимательно присмотреться к нашей функции, зависящей от двух парметров p и q. Мы понимаем, что потенциально здесь возможна неприятность в 0 и 1 из-за того, что степень может оказаться отрицательной. Нам никто не запрещает рассматривать степени $p<1$ или $q<1$, поэтому степень x или $(1-x)$ может оказаться отрицательной. Это означает, что нам нужно посмотреть как себя ведёт подинтегральная функция при $x\to 0$ и при $x\to 1$.

$x\to 0: x^{p-1}(1-x)^{q-1}=x^{p-1}\cdot(1+o(1)) \implies$ инт. сходится при $p-1>-1 \implies p>0$

$x\to 1: x^{p-1}(1-x)^{q-1}=(1-x)^{q-1}\cdot(1+o(1)) \implies$ инт. сходится при $q-1>-1 \implies q>0$

Из этого следует, что область определения Бета функции — первая четверть на плоскости pq (положительные p и q)

Отметим ещё одну важную формулу Бета-функции, сделав замену $x=\dfrac{t}{1+t}, t\in[0;+\infty)$

$$B(p,q)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}dt$$

Свойства:

1. Симметричность $x=1-y,\ y\in[0;1]$

   $$B(p,q)=\int\limits_0^1(1-y)^{p-1}\cdot y^{q-1}dy=\int\limits_0^1 x^{q-1}\cdot(1-x)^{p-1}dx=B(q,p)$$

2. Формула понижения $p>0,\ q>0$

   здесь юзнём интегрирование по частям: $\int udv=uv-\int vdu$

   $$B(p+1,q)=\int\limits_0^1 x^p\cdot(1-x)^{q-1}dx=-\frac{1}{q}\int\limits_0^1 x^p\cdot d((1-x)^q)=\begin{bmatrix} u=x^p & v=(1-x)^q \\ du=px^{p-1}dx & dv=-q(1-x)^{q-1}dx\end{bmatrix}=$$

   $$=-\frac{1}{q}x^p\cdot(1-x)^q\Big|_0^1+\frac{1}{q}\cdot\int\limits_0^1(1-x)^q\cdot px^{p-1}dx=\left[(1-x)^q=(1-x)\cdot(1-x)^{q-1}=(1-x)^{q-1}-x\cdot(1-x)^{q-1}\right]=$$

   $$=\frac{p}{q}\cdot\int\limits_0^1 x^{p-1}\cdot((1-x)^{q-1}-x\cdot(1-x)^{q-1})dx=\frac{p}{q}\cdot B(p,q)-\frac{p}{q}B(p+1,q)$$

   $$(1+\frac{p}{q})B(p+1,q)=\frac{p}{q}B(p,q)\implies B(p+1,q)=\frac{p}{p+q}\cdot B(p,q)$$

   Воспользовавшись тем, что функция симметрична можно легко вывести аналогичную формулу для $B(p,q+1)$

   Итог:

   $$B(p+1,q)=\frac{p}{p+q}\cdot B(p,q)$$
   $$B(p,q+1)=\frac{q}{p+q}\cdot B(p,q)$$

3. Поведение при натуральных аргументах

   - $q=n\in\mathbb{N}$

     $$B(p,1)=\int\limits_0^1 x^{p-1}dx=\frac{1}{p}$$

     $$B(p,n)=\frac{n-1}{p+n-1}\cdot B(p,n-1)=\dots=\frac{n-1}{p+n-1}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{p+1}\cdot B(p,1)=\frac{(n-1)!}{p(p+1)\ldots(p+n-1)}$$

- $p = n \in \mathbb{N}, q = m \in \mathbb{N}$
  $B(n,m) = \dfrac{(n-1)!(m-1)!}{(n+m-1)!}$

7.2. Гамма-функция Эйлера

$$\Gamma(p) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1} \cdot e^{-x} dx$$

Аналогично с Бета-функцией можно вывести, что область определения Гамма-функции — $p > 0$:
В бесконечности отсутствие проблем очевидно, проверим 0.
$x \to 0$: $x^{p-1} \cdot e^{-x} = x^{p-1} \cdot (1 + \text{o}(1)) \implies$ инт. сходится при $p - 1 > -1 \implies p > 0$
Свойства:

1. Формула понижения

   здесь юзнём интегрирование по частям: $\displaystyle\int udv = uv - \int vdu$

   $$\Gamma(p+1) = \int\limits_0^{+\infty} x^p \cdot e^{-x} dx = -\int\limits_0^{+\infty} x^p \cdot d(e^{-x}) = \begin{bmatrix} u = x^p & v = e^{-x} \\ du = px^{p-1}dx & dv = -e^{-x}dx \end{bmatrix} =$$

   $$= -x^p \cdot e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} \cdot px^{p-1} dx = p \cdot \Gamma(p)$$

   Итог: $\Gamma(p+1) = p \cdot \Gamma(p)$

2. Случай натурального аргумента, $p = n \in \mathbb{N}$

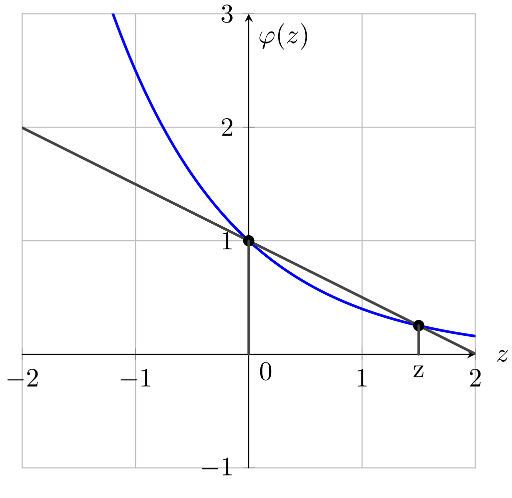
   $$\Gamma(1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$$

   $\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n) = n \cdot (n-1)\Gamma(n-1) = \dots = n!$

3. Формула Эйлера-Гаусса

   $$\Gamma(p) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx = \left[x = -\ln t = \ln\frac{1}{t},\ t \in [0;1]\right] = \int\limits_0^1 \ln^{p-1}\left(\frac{1}{t}\right) dt$$

   Пусть $\varphi(z) = t^z, t \in (0;1)$ — выпуклая $\implies$ при стремлении $z \to +0$ наклонный коэффициент секущей, проведённой через $(0, \varphi(0))$ и $(z, \varphi(z))$ будет убывать в силу выпуклости функции, а в пределе даст нам производную:
   $\dfrac{t^z - t^0}{z - 0} \underset{z \to +0}{\searrow} \varphi'(0) = \ln t$
   $z = \dfrac{1}{n}$: $n \cdot (t^{\frac{1}{n}} - 1) \underset{n \to +\infty}{\searrow} \ln t$, а если мы поменяем знак, то получится $n \cdot (1 - t^{\frac{1}{n}}) \underset{n \to +\infty}{\nearrow} \ln\dfrac{1}{t}$. И сама функция, и её предельная функция непрерывны, сходимость монотонная, по теореме Дини получаем равномерную сходимость по t на любом отрезке $[a, b] \subset (0;1)$

   Получаем $\Gamma(p) = \displaystyle\int\limits_0^1 \ln^{p-1}\left(\frac{1}{t}\right) dt, \ln\frac{1}{t} = \lim_{n \to \infty} \underbrace{n \cdot (1 - t^{\frac{1}{n}})}_{f_n(t)}$

$$\left.\begin{aligned}&f_n(t) \geqslant 0 \text{ и непрерывны при } t \in (0;1), \forall n\\ &n \to \infty\ f_n(t) \searrow \ln\frac{1}{t}\\ &\ln\frac{1}{t} \text{ — непрерывна}\\ &\int\limits_0^1 \ln^{p-1}\left(\frac{1}{t}\right) dt \text{ сходися}\end{aligned}\right\} \implies \text{можем внести предел под знак интеграла (следует из теоремы}$$

Дини по пункту 5.2)

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^1 (n\cdot(1-t^{\frac{1}{t}}))^{p-1}dt = \int\limits_0^1 \ln^{p-1}\left(\frac{1}{t}\right)dt$$

$$\implies \Gamma(p) = \lim_{n\to\infty}\int\limits_0^1 n^{p-1}\cdot(1-\frac{1}{n})^{p-1}dt = [t = z^n] = \lim_{n\to\infty} n^p\cdot\underbrace{\int\limits_0^1 z^{n-1}\cdot(1-z)^{p-1}dz}_{B(n,p)} = \lim_{n\to\infty} n^p\cdot \mathrm{B}(n,p) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^p\cdot(n-1)!}{p(p+1)\dots(p+n-1)}$$

Итог:

$$\Gamma(p) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^p\cdot(n-1)!}{p(p+1)\dots(p+n-1)} \text{ — формула Эйлера-Гаусса}$$

4. Формула дополнения, $p \in (0;1)$

$$\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p) = [\text{формула Эйлера-Гаусса}] = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^p\cdot(n-1)!}{p(p+1)\dots(p+n-1)}\cdot\frac{n^{1-p}\cdot(n-1)!}{(1-p)(2-p)\dots(n-p)}\right) =$$
$$= [\text{поделили в обеих дробях числитель и знаменатель на } (n-1)!] =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{p}{p(n-p)}\cdot\frac{1}{(\frac{p}{1}+1)(\frac{p}{2}+1)\dots(\frac{p}{n-1}+1)}\cdot\frac{1}{(1-\frac{p}{1})(1-\frac{p}{2})\dots(1-\frac{p}{n-1})} =$$
$$= \frac{1}{p}\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left(1-\left(\frac{p}{k}\right)^2\right)}$$

Далее нам придётся воспользоваться формулой бесконечного произведения для синуса

$$\sin(\pi p) = \pi p\cdot\prod_{k=1}^{\infty}(1-\frac{p^2}{k^2})$$

$$\implies \Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)} \text{ — формула дополнения}$$

Если мы возьмём $p = \dfrac{1}{2}$, то получим $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} \implies \Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Это даёт нам ещё один способ вычисления интеграла Эйлера-Пуассона

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx = \left[x = t^2\right] = 2\cdot\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}dt \implies \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

7.3. Связь между B и Γ

$$\Gamma(p) = \int\limits_0^{+\infty} t^{p-1}e^{-t}dt = [t = x(y+1), y > 0, y = \text{const}] = (1+y)^p\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x(1+y)}dx$$

$$\frac{\Gamma(p+q)\cdot y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}} = y^{p-1}\cdot\int\limits_0^{+\infty} x^{p+q+1}\cdot e^{-x(1+y)}dx$$

$$\Gamma(p+q)\cdot\mathrm{B}(p,q) = \Gamma(p+q)\cdot\int\limits_0^{+\infty}\frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}dy = \int\limits_0^{+\infty}dy\int\limits_0^{+\infty} y^{p-1}\cdot x^{p+q-1}\cdot e^{-x(1+y)}dx = [\text{потом обоснуем}] =$$
$$= \int\limits_0^{+\infty}dx\int\limits_0^{+\infty} y^{p-1}\cdot x^{p+q-1}\cdot e^{-x(1+y)}dy = \int\limits_0^{+\infty}dx\cdot x^{q-1}\cdot e^{-x}\cdot\int\limits_0^{+\infty}(xy)^{p-1}\cdot e^{-xy}\cdot x\cdot dy = \Gamma(p)\cdot\int\limits_0^{+\infty}dx\cdot x^{q-1}\cdot e^{-x} = \Gamma(p)\cdot\Gamma(q)$$

$$\implies \mathrm{B}(p,q) = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma p+q}$$

"Потом обоснуем": нам надо обосновать внесение одного несобственного интеграла внутрь другого несобственного интеграла

$f(x,y) = x^{p+q-1} \cdot y^{p-1} \cdot e^{-(1+y)x} \geqslant 0$ и непрерывна на $(0;+\infty) \times (0;\infty)$

$\int\limits_0^{+\infty} dx \int\limits_0^{+\infty} f(x,y)dy$ — сходится в силу того что равен произведению Гамма функций и там всё хорошо

Оба интеграла $\int\limits_0^{+\infty} f(x,y)dx$ и $\int\limits_0^{+\infty} dy$ сходятся равномерно на любом вложенном $[a;b]$, потому что любую из степеней икса и игрека мы можем мажорировать через экспоненту $\implies \int\limits_0^{+\infty} dy$ можно внести внутрь $\int\limits_0^{+\infty} dx$

8. Абстрактные ряды Фурье. Пространство квадратично-интегрируемых функций $\mathcal{R}_2$ (определение). Скалярное произведение и норма в этом пространстве (определение). Ортогональная и ортонормированная система элементов (определение). Стандартная тригонометрическая система на $[-\pi;\pi]$, ее ортогональность и нормы элементов. Ряд в пространстве квадратично-интегрируемых функций и его сходимость (определение). Непрерывность скалярного произведения. Равенство Парсеваля.

8.1. Пространство квадратично-интегрируемых функций $\mathcal{R}_2$ (определение).

Пусть $D \subset \mathbb{R}^m$ — ограниченное замкнутое жорданово множество.

Определение. Пространство квадратично интегрируемых функций

$$\mathcal{R}_2 := \left\{ f : D \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{matrix} f \text{ интегрируема на } D \text{ в собственном или несобственном смысле} \\ |f(x)|^2 \text{ интегрируема на } D \text{ в собственном или несобственном смысле} \end{matrix} \right\}$$

Здесь понадобится рассматривать не только числовые функции, но и комплексные функции (от действительных переменных). Для этого будет использоваться символ $\mathcal{R}_2(D,\mathbb{C}) = \{f : D \to \mathbb{C} \mid \ldots\}$.

Для комплекснозначной функции мы можем расписать её как $f(x) = u(x) + iv(x)$. Интегрируемость понимается как интегрируемость одновременно действительной части и мнимой. Кроме того,

$$\int\limits_D f(x)dx = \int\limits_D u(x)dx + i\int\limits_D v(x)dx$$

8.2. Скалярное произведение и норма в этом пространстве (определение).

Раскроем квадрат модуля квадратично интегрируемой функции:

$$|f(x)|^2 = f(x) \cdot f(x)^* = (u(x) + iv(x))(u(x) - iv(x)) = u(x)^2 + v(x)^2$$

Благодаря интегрируемости квадрата модуля можно ввести скалярное произведение:

$$\forall f, g \in \mathcal{R}_2(D,\mathbb{C}) \quad \int\limits_D f(x)g(x)^* dx \text{ сходится, так как } |f \cdot g^*| \leqslant \frac{1}{2}\left(|f|^2 + |g|^2\right)$$

Определение. Скалярное произведение двух квадратично интегрируемых функций введём следующим образом:

$$\langle f, g\rangle = \int\limits_D f(x)g(x)^* dx \quad \text{удовлетворяет аксиомам скалярного произведения}$$

Определение. Норма в пространстве квадратично интегрируемых функций вводится так:

$$||f||^2 = \langle f, f\rangle = \int\limits_D |f(x)|^2 dx \quad \text{удовлетворяет аксиомам нормы, если понимать } f = 0 \text{ в смысле } f \underset{\mathcal{R}_2}{=} 0$$

Для нормы выполняются все аксиомы нормы, кроме того, что если норма равна нулю, это необязательно значит, что функция поточечно равна нулю. Но она будет равна нулю почти всюду (везде кроме множества жордановой меры нуль) в Жордановом смысле (что мы и отражаем значком $f \underset{\mathcal{R}_2}{=} 0$).

8.3. Ортогональная и ортонормированная система элементов (определение).

Определение. Система $f_1, \ldots, f_n$ называется **ортогональной**, если $\langle f_i, f_j \rangle = 0$ при $i \neq j$.

Определение. Ортогональная система называется **ортонормированной**, если выполнено условие

$$\langle f_i, f_j \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}.$$

Любая ортогональная система без нулевых элементов может быть преобразована в ортонормированную:

$$f_1, \ldots, f_n \to \frac{f_1}{||f_1||}, \ldots, \frac{f_n}{||f_n||}$$

Заметим, что ортогональная система линейно независима (знаем из курса линейной алгебры).

8.4. Стандартная тригонометрическая система на $[-\pi;\pi]$, ее ортогональность и нормы элементов.

Пример. Рассмотрим следующие функции:

$$\cos nx, \quad n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

$$\sin nx, \quad n \in \mathbb{N}$$

Заметим, что:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos kx dx = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ \pi, & n = k \neq 0 \\ ||1||^2 = 2\pi, & n = k = 0 \end{cases}$$

Следовательно, $||\cos nx|| = \begin{cases} \sqrt{\pi}, & n \in \mathbb{N} \\ ||1|| = \sqrt{2\pi}, & n = 0 \end{cases}.$

Теперь разберёмся с синусом:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin kx dx = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ \pi, & n = k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Кроме того,

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \sin kx dx = 0$$

Получаем, что следующая система ортогональна в пространстве $\mathcal{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$:

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots$$

8.5. Ряд в пространстве квадратично-интегрируемых функций и его сходимость (определение).

Мы определяем сходимость ряда в пространстве кв-но интегр. функций так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ сходится} \iff \exists f \in \mathcal{R}_2 : ||f - \sum_{n=1}^{N} f_n|| \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$$

При этом f — сумма ряда в $\mathcal{R}_2$, то есть $f \underset{\mathcal{R}_2}{=} \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$. Это новый вид сходимости — не поточечная или равномерная, а в среднеквадратичном. С точки зрения поточечной сходимости ряд вообще может быть расходящимся при том, что он сходится в среднеквадратичном.

8.6. Непрерывность скалярного произведения.

Теорема. Если $||f - f_n|| \to 0$, $||g - g_n|| \to 0$, то $\langle f_n, g_n \rangle \to \langle f, g \rangle$.

Доказательство. Рассмотрим модуль разности:

$$|\langle f_n, g_n \rangle - \langle f, g \rangle| = |\langle (f_n - f) + f, (g_n - g) + g \rangle - \langle f, g \rangle| \leqslant$$

$$\leqslant \underbrace{|\langle f_n - f, g_n - g \rangle|}_{\leqslant ||f_n - f|| \cdot ||g_n - g||} + \underbrace{|\langle f_n - f, g \rangle|}_{\leqslant ||f_n - f|| \cdot ||g||} + \underbrace{|\langle f, g_n - g \rangle|}_{\leqslant ||f|| \cdot ||g_n - g||} < \varepsilon \quad \text{в силу неравенства Коши-Буняковского}$$

■

Следствие (1). Если $f \underset{\mathcal{R}_2}{=} \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, то $\langle f, g \rangle = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \langle f_n, g \rangle$.

Доказательство.

$$f = \sum_{n=1}^{N} f_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n \quad \Big| \cdot g$$

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=1}^{N} \langle f_n, g \rangle + \underbrace{\langle \overbrace{\sum_{N+1}^{\infty} f_n}^{\xrightarrow[\mathcal{R}_2]{} 0}, g \rangle}_{\to 0}$$

(Поскольку ряд сходится, то остаток стремится в $\mathcal{R}_2$ к нулю.) Осталось только устремить N к бесконечности.

■

Следствие (2). Если $\{e_n\}$ — ортонормированная система и $f \underset{\mathcal{R}_2}{=} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot e_n$, $g \underset{\mathcal{R}_2}{=} \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \cdot e_n$, то $\langle f, g \rangle = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n^*$.

Доказательство. Докажем, пользуясь предыдущим свойством:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \langle e_n, g \rangle; \quad \langle e_n, g \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle e_n, b_k e_k \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^* \langle e_n, e_k \rangle = b_n^*.$$

■

8.7. Равенство Парсеваля.

Следствие (3). Если $f \underset{\mathcal{R}_2}{=} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e_n$, то $||f||^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$

Доказательство. Воспользуемся предыдущим следствием:

$$||f||^2 = \langle f, f \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot a_n^* = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$$

■

9. Абстрактные ряды фурье. Коэффициенты и ряды Фурье (определение). Коэффициенты и ряд Фурье по стандартной тригонометрической системе на $[-\pi; \pi]$. Лемма о перпендикуляре. Неравенство Бесселя. Из полноты пространства следует сходимость ряда Фурье. Ряд и частичная сумма ряда Фурье как наилучшее приближение. Полная ортогональная система (определение). Критерии полноты ортогональной системы (представимость любого элемента его рядом Фурье; равенство Парсеваля; отсутствие ненулевого элемента, ортогонального всем элементам системы).

9.1. Коэффициенты и ряды Фурье (определение).

Введём следующие обозначения:

$\{l_n\}$ $\quad l_1, l_2, \ldots$ — ортогональная система (без нулевых элементов)

$\{e_n\} \quad e_1, e_2, \dots$ — ортонормированная система

Заметим, что $f \underset{\mathcal{R}_2}{=} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n l_n$ и $l_k \underset{\mathcal{R}_2}{=} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta_{nk} l_n$. Воспользуемся следствием 2 из непрерывности скалярного произведения. Здесь будет небольшое отличие — так как наша система ортогональна, а не ортонормированна, то в произведении появится $||l_n||^2$. Распишем:

$$\langle f, l_k \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \delta_{nk}^* \cdot ||l_n||^2 = a_k \cdot ||l_k||^2 \implies a_n = \frac{\langle f, l_n \rangle}{||l_n||^2}$$

Определение. $a_n = \dfrac{\langle f, l_n \rangle}{||l_n||^2}$ — **коэффициенты Фурье** элемента f по ортогональной системе l_n.

Определение. В соответствие элементу f ставится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\langle f, l_n \rangle}{||l_n||^2} l_n$ — **ряд Фурье** (элемента f по ортогональной системе l_n).

Обозначение. $f \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\langle f, l_n \rangle}{||l_n||^2} l_n$

Мы пока не можем тут писать знак $=$, потому что ещё не доказали сходимость ряда хотя бы в $\mathcal{R}_2$.

9.2. Коэффициенты и ряд Фурье по стандартной тригонометрической системе на $[-\pi; \pi]$.

Рассмотрим следующую ортогональную систему:

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$$

Для такой системы есть два типа коэффициентов Фурье:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, n \in \mathbb{N}$$

Тогда наш ряд Фурье для элемента f по стандартной тригонометрической системе (помним, что норма единицы — это $\sqrt{2\pi}$, поэтому a_0 надо дополнительно поделить на 2. Если непонятно, обратите внимание на определение коэффициентов Фурье и на определение a_n):

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

9.3. Лемма о перпендикуляре.

Теорема. Пусть $f \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\langle f, l_n \rangle}{||l_n||^2} l_n \underset{\mathcal{R}_2}{=} f'$. Тогда $h = f - f' \perp f'$ и вообще $\perp$ подпространству, порождённому в $\mathcal{R}_2$ элементами $\{l_n\}$ и подпространству, являющемуся его замыканием.

Доказательство. Рассмотрим разность:

$$h = f - f' \underset{\mathcal{R}_2}{=} f - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, l_n \rangle}{||l_n||^2} l_n \quad \Big| \cdot l_k$$

По следствиям 1 и 2 непрерывности скалярного произведения:

$$\langle h, l_k \rangle = \langle f, l_k \rangle - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, l_n \rangle}{||l_n||^2} \cdot \langle l_n, l_k \rangle = \langle f, l_k \rangle - \frac{\langle f, l_k \rangle}{||l_k||^2} \cdot \langle l_k, l_k \rangle = 0$$

Следовательно, $\langle h, f' \rangle = 0$ и вообще для $g \underset{\mathcal{R}_2}{=} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot l_n$ верно, что $\langle h, g \rangle = 0$.

Более того, если $g = \lim\limits_{N \to \infty} \sum\limits_{n=1}^{N} a_{Nn} l_n$, то так как $\langle h, \sum\limits_{n=1}^{N} a_{Nn} l_n \rangle = 0 \implies \langle h, g \rangle = 0$. ■

9.4. Неравенство Бесселя.

Теорема. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|\langle f, l_n\rangle|^2}{||l_n||^2}$ сходится и справедливо неравенство $||f||^2 \geqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|\langle f, l_n\rangle|^2}{||l_n||^2}$.

Доказательство. Распишем $||f||^2$:

$$||f||^2 = ||f - f' + f'||^2 = [f - f' \perp f'] = ||f - f'||^2 + ||f'||^2 \geqslant ||f'||^2 = [\text{равенство Парсеваля}] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\langle f, l_n\rangle|^2}{||l_n||^2}$$

Отсюда автоматически следует условие теоремы (мы показали неравенство, а сходимость ряда следует из того, что его сумма равна $||f'||^2$).

■

9.5. Из полноты пространства следует сходимость ряда Фурье.

Теорема. Если пространство полное, то ряд Фурье любого элемента f сходится к некоторому элементу f' этого пространства.

Доказательство. Воспользуемся критерием Коши. По равенству Парсеваля:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall m > N, \forall k \implies ||\sum_{n=m}^{m+k}\frac{\langle f, l_n\rangle}{||l_n||^2}\cdot l_n||^2 = \sum_{n=m}^{m+k}\frac{|\langle f, l_n\rangle|^2}{||l_n||^2}.$$

Но по неравенству Бесселя ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|\langle f, l_n\rangle|^2}{||l_n||^2}$ сходится, значит, $\sum\limits_{n=m}^{m+k}\dfrac{|\langle f, l_n\rangle|^2}{||l_n||^2} < \varepsilon$.

Следовательно, **при условии полноты пространства** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\langle f, l_n\rangle}{||l_n||^2}\cdot l_n$ сходится к некоторому элементу пространства (в полном пространстве любая фундаментальная последовательность элементов пространства сходится к некоторому элементу этого пространства).

■

Если $f \in \mathcal{R}_2$, то $f' \in L_2$ — пополнение пространства $\mathcal{R}_2$ (пространство Лебега).

9.6. Ряд и частичная сумма ряда Фурье как наилучшее приближение.

Теорема. Если $f \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\langle f, l_n\rangle}{||l_n||^2}\cdot l_n \underset{\mathcal{R}_2}{=} f'$, то f' является наилучшим приближением для f среди всех элементов $g \underset{\mathcal{R}_2}{=} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n l_n$.

Доказательство.

$$||f - g||^2 = ||(f - f') + (f' - g)||^2 = [f - f' \perp f' - g] = ||f - f'||^2 + ||f' - g||^2 \geqslant ||f - f'||^2$$

У нас получилось, что расстояние между элементами f и g больше расстояния между f и f', то есть $||f - g|| \geqslant ||f - f'||$ (в каком-то смысле f' — это проекция элемента f на пространство всех g).

■

9.7. Полная ортогональная система (определение).

Определение. Ортогональная система $\{l_n\}$ называется **полной** в пространстве $\mathcal{R}_2$, если $\forall f \in \mathcal{R}_2$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \{a_n\}, N \in \mathbb{N} \subset \mathbb{C} : ||f - \sum_{n=1}^{N} a_n l_n|| < \varepsilon$$

9.8. Критерии полноты ортогональной системы (представимость любого элемента его рядом Фурье; равенство Парсеваля; отсутствие ненулевого элемента, ортогонального всем элементам системы).

Теорема (Критерии полноты ортогональной системы)**.** Следующие утверждения равносильны:

a) Ортогональная система $\{l_n\}$ полная в $\mathcal{R}_2$

b) $\forall f \in \mathcal{R}_2 \quad f \underset{\mathcal{R}_2}{=} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, l_n\rangle}{||l_n||^2} \cdot l_n$

c) $\forall f \in \mathcal{R}_2 \quad ||f||^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\langle f, l_n\rangle|^2}{||l_n||^2}$

d) В полном пространстве L_2 нет элемента $g \underset{L_2}{\neq} 0$ (т.е. $||g|| \neq 0$), ортогонального всем l_n.

Доказательство.

- $(a) \implies (b)$. Раз система полная, то любой элемент может быть сколько угодно точно приближен линейной комбинацией ортогональной системы. Но так как ряд Фурье — наилучшее приближение элемента f, то $||f - \sum\limits_{n=1}^{N} a_n l_n|| < \varepsilon \implies ||f - \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{\langle f, l_n\rangle}{||l_n||^2} \cdot l_n|| < \varepsilon$. Значит, ряд Фурье сходится к f.
- $(b) \implies (a)$. Если любая функция равна сумме своего ряда Фурье, то автоматически любую функцию мы можем по норме пространства $\mathcal{R}_2$ представить сколь угодно точно линейной комбинацией элементов l_n (можно взять частичную сумму ряда Фурье).
- $(a) \implies (c)$. $a \implies b$, а в прошлом билете показали, что $b \implies c$. (см. равенство Парсеваля)
- $(c) \implies (b)$ Выполнено равенство Парсеваля. Рассмотрим:

$$||f - \underbrace{\sum_{n=1}^{N} \frac{\langle f, l_n\rangle}{||l_n||^2} \cdot l_n}_{}||^2_{f'} + ||f'||^2 = [f - f' \perp f'; \text{по теореме Пифагора}] = ||f||^2$$

Но так как $||f'||^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\langle f, l_n\rangle|^2}{||l_n||^2}$, то:

$$||f - \sum_{n=1}^{N} \frac{\langle f, l_n\rangle}{||l_n||^2} \cdot l_n||^2 = ||f||^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\langle f, l_n\rangle|^2}{||l_n||^2} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

- $(a) \implies (d)$. От противного. Пусть $g\perp$ всем l_n. Тогда $g \underset{L_2}{=} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\overbrace{\langle g, l_n\rangle}^{=0}}{||l_n||^2} \underset{L_2}{=} 0$, то есть $||g|| = 0$.
- $(d) \implies (b)$. Сопоставим элементу f его ряд Фурье: $f \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, l_n\rangle}{||l_n||^2} l_n = f' \in L_2$. Рассмотрим $f - f' \perp$ всем $l_n \implies f - f' \underset{L_2}{=} 0$ по условию теоремы.

■

10. Тригонометрический ряд Фурье. Теорема о сходимости тригонометрического ряда Фурье в средне-квадратичном (без доказательства полноты тригонометрической системы). Представление частичной суммы ряда Фурье через ядро Дирихле. Лемма Римана. Условие Дини и теорема о поточечной сходимости ряда Фурье. Разложение sin в бесконечное произведение.

Лекции 3.8 (примерно с часа) и 3.9

10.1. Тригонометрический ряд Фурье

Тригонометрическая система: $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \dots\}$. Ряд Фурье, который пользуется именно этой системой, и является тригонометрическим.

10.2. Теорема о сходимости тригонометрического ряда Фурье в средне-квадратичном (без доказательства полноты тригонометрической системы).

Если тригонометрическая система $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \dots\}$ полна в $\mathcal{R}_2\left([-\pi, \pi], \mathbb{R}\right)$ (а это так, но без доказательства), то:

1. $\forall f \in \mathcal{R}_2$ ряд Фурье сходится в $\mathcal{R}_2$ к f. (Это не поточечная сходимость, а среднеквадратичная!)

$$f(x) \underset{\mathcal{R}_2}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)$$

2. Выполняется равенство Парсеваля

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

Если функция не в $\mathcal{R}_2\left([-\pi, \pi], \mathbb{R}\right)$, а в $\mathcal{R}_2\left([-\pi, \pi], \mathbb{C}\right)$, то

$$f(x) \underset{\mathcal{R}_2}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \text{ где } c_n = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

, а равенство Парсеваля выглядит как

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

10.3. Представление частичной суммы ряда Фурье через ядро Дирихле.

$f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ — продолжаем периодически на всю вещественную прямую, разрывы нам здесь не страшны

$$\text{Частичная сумма Фурье} \quad S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} =$$

$$= \sum_{k=-n}^{n} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dx \right) e^{ikx} = \textit{суммирование конечное, поэтому заносим под интеграл} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt = (*)$$

$$\left.\begin{array}{ll} D_n(u) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{ikn} = \frac{e^{i(n+1)u} - e^{-inu}}{e^{iu} - 1} \left(\frac{\frac{1}{e^{in/2}}}{\frac{1}{e^{in/2}}} \right) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) u}{\sin \frac{1}{2} u}, & u \neq 2\pi k \\ D_n(u) = 2n + 1, & u = 2\pi k \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{— Ядро Дирихле.} \\ \text{Доопределили там,} \\ \text{где потребовалось} \end{array}$$

$$\text{Свойства:} \qquad D_n(u)\ 2\pi \text{ периодическая;} \quad D_n(u) =_n (-u); \quad \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(u) du = 1$$

$$\text{Заметим, что если } g(t) \text{ — } T \text{ периодическая, то } \int\limits_{0}^{T} g(t) dt = \int\limits_{x}^{T+x} g(t) dt$$

$$(*) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt = \{t' = x - t\}\ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-t') D_n(t') dt' = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t') D_n(t') dt' =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{0} f(x-t') D_n(t') dt' + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{\pi} f(x-t') D_n(t') dt' = \left\{ \begin{array}{c} t^* = -t' \\ \text{слева} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{\pi} f(x+t^*) D_n(t^*) dt^* + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{\pi} f(x-t') D_n(t') dt' = \text{переобозначим } t = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{\pi} D_n(t) \left(f(x+t) + f(x-t) \right) dt$$

10.4. Лемма Римана.

Лемма. Если $f(\omega_1, \omega_2) \to \mathbb{R}$ (бесконечности тоже можно) локально интегрируема (интегрируема на любом подотрезке) и абсолютно интегрируема хотя бы в несобственном смысле на всем (ω_1, ω_2), то

$$\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} f(x) e^{i\lambda x} dx \xrightarrow[\lambda \to \infty]{} 0$$

Доказательство. Так как f абсолютно интегрируема, $\exists [a, b] \subset (\omega_1, \omega_2) : \left| \int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} f(x) e^{i\lambda x} dx - \int\limits_{a}^{b} f(x) e^{i\lambda x} dx \right| \leqslant \varepsilon$. Утверждать так можем потому что $|f(x) e^{i\lambda x}| = |f(x)| \Rightarrow f(x) e^{i\lambda x}$ тоже абс. инт.

Рассмотрим нижнюю сумму Дарбу: $0 \leqslant \int\limits_{a}^{b} f(x) dx - \sum\limits_{j=1}^{n} m_j \Delta x_j < \varepsilon$. Здесь возникает разбиение $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Построим по нему кусочную функцию

$$h(x) = \begin{cases} m_1, & x \in [x_0, x_1) \\ m_2, & x \in [x_1, x_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ m_n, & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

Заметим тогда, что

$$0 \leqslant \left| \int\limits_{a}^{b} f(x) e^{i\lambda x} dx - \int\limits_{a}^{b} h(x) e^{i\lambda x} dx \right| \leqslant \int\limits_{a}^{b} |f(x) - h(x)| \underbrace{|e^{i\lambda x}|}_{=1} dx = \underbrace{\int\limits_{a}^{b} |f(x) - h(x)| dx < \varepsilon}_{\text{Дарбу!}}$$

Разложим $h(x)$ по частям

$$\int\limits_a^b h(x)e^{i\lambda x}dx=\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} m_je^{i\lambda x}dx\overset{\substack{\text{руками взять интеграл}\\ \downarrow}}{=}\frac{1}{i\lambda}\sum_{j=1}^{n}m_j\left(e^{i\lambda x_j}-e^{i\lambda x_{j-1}}\right)\xrightarrow[\lambda\to\infty]{}0$$

Так как все множители под суммой ограничены, n от лямбды не зависит, а мы еще делим на бесконечно большую лямбду

А теперь вспоминаем те интегралы, которые отличаются друг от друга на сколь угодно малую величину:

$$\int\limits_a^b h(x)e^{i\lambda x}dx\to 0\quad\Longrightarrow\quad\int\limits_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx\to 0\quad\Longrightarrow\quad\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)e^{i\lambda x}dx\to 0$$

■

На самом деле функция может быть и комплекснозначной, для этого придется раскрыть $e^{i\lambda x}$ на синус и косинус и силой рук посчитать. Получается и вещественная часть $f(x)e^{i\lambda x}$ будет интегрироваться в ноль, и комплексная. Доказательства этого не требуется, но стоит запомнить для следующего пункта.

10.5. Условие Дини и теорема о поточечной сходимости ряда Фурье.

Запомните ПМИшники, $\displaystyle\sum_{n=-N}^{N}c_ne^{inx}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$

Теорема. Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 2π периодическая (хотя можно и другой период, но мы упрощаем себе жизнь), абсолютно интегрируемая на $[-\pi,\pi]$ и удовлетворяет в точке x_0 условию Дини:

1. $\exists f(x_0\pm 0)$ — конечные
2. $\exists\varepsilon>0:\quad\displaystyle\int\limits_0^{\varepsilon}\left(\frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{t}+\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}\right)dt$ — сходится абсолютно

Тогда разложение Фурье функции f сходится в точке x_0: $\displaystyle\sum_{n=-N}^{N}c_ne^{inx}\to\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$

Доказательство. Тут несложно, но много писать

$$\begin{aligned}&S_N(x_0)-\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}=\\&=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(f(x_0-t)+f(x_0+t)\right)\frac{\sin\left(N+\frac12\right)t}{\sin\frac t2}dt-\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}\cdot\overset{\substack{\frac{2}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin\left(N+\frac12\right)t}{\sin\frac t2}dt\\ \downarrow}}{\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(N+\frac12\right)t}{\sin\frac t2}dt}_{=1}}=\\&=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\Big(\left(f(x_0-t)+f(x_0+t)\right)-\left(f(x_0-0)+f(x_0+0)\right)\Big)\frac{\sin\left(N+\frac12\right)t}{\sin\frac t2}dt=\\&=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\underbrace{\left(\frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{t}+\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}\right)}_{\text{абс. инт. по условию Дини}}\underbrace{\frac{t}{2\sin\frac t2}}_{1\text{ при }t\to0}\underbrace{\sin\left(N+\frac12\right)t}_{\sim\operatorname{Im}e^{i\lambda t}}\,dt\xrightarrow[N\to\infty]{}0\text{ по Риману}\end{aligned}$$

Здесь в последнем переходе как раз было махание руками про комплексные значения, объясняется что “если очень захотеть, то можно и доказать, но долго и неинтересно” ■

Определение. Функция $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ называется кусочно-дифференцируемой, если

1. множество точек разрыва M конечно, и каждая точка разрыва первого рода (слева справа разные конечные значения)
2. Функция дифференцируема во всех точках $x\in[a,b]\setminus M$
3. $\forall x_0\in M$ существуют конечные левая и правая производные.

Кусочно-дифференцируемая функция удовлетворяет условию Дини, чем сейчас и воспользуемся

10.6. Разложение $\sin$ в бесконечное произведение.

Рассмотрим функцию $f(x) = \cos ax, [-\pi, \pi], |a| < 1$. Периодически продолжим на всю вещественную прямую, получится кусочно-дифференцируемая функция. А это значит, что с полученным рядом Фурье будет равенство.
Функция четная, поэтому $b_n = 0$.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos ax \cos nx dx = \frac{(-1)^n \sin \pi a}{\pi}\frac{2a}{a^2 - n^2}$$

$$\cos ax = \frac{2a \sin \pi a}{\pi}\left(\frac{1}{2a^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2 - n^2}\cos nx\right) \text{ верно } \forall x \in [-\pi, \pi]$$

$$\boldsymbol{x = \pi}\textbf{:}\ \operatorname{ctg} \pi a - \frac{1}{\pi a} = \frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^2 - n^2} \text{ сходится равномерно при } a \in [-a_0, a_0]; a_0 < 1 \text{ — проинтегрируем!}$$

$$\int\limits_0^x \left(ctg\pi a - \frac{1}{\pi a}\right) da = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^x \frac{2a}{a^2 - n^2} da \quad \text{интегрируем обе стороны}$$

$$\ln \frac{\sin \pi x}{\pi x} = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right), \quad |x| < 1$$

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) \text{ ну вот и все}$$

11. Тригонометрический ряд Фурье. Теорема о почленном дифференцировании ряда Фурье. Теорема о связи гладкости функции и скорости убывания ее коэффициентов Фурье. Теорема о связи гладкости функции и скорости сходимости ее ряда Фурье. Теорема о полноте тригонометрической системы.

11.1. Теорема о почленном дифференцировании ряда Фурье.

Теорема. Если непрерывная функция $f \in C([-\pi; \pi], \mathbb{C})$, принимающая на концах отрезка $[-\pi; \pi]$ равные значения, т.е. $f(\pi) = f(-\pi)$, кусочно непрерывно дифференцируема на $[-\pi; \pi]$, то ряд Фурье ее производной $f' \sim \sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_n(f') \cdot e^{inx}$ может быть получен формальным дифференцированием ряда Фурье самой функции $f \sim \sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_n(f) \cdot e^{inx}$, то есть получаем $c_n(f') = inc_n(f), n \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Из определения коэффициентов Фурье (9.1.) интегрированием по частям находим

$$c_n(f') = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-inx}\, dx = \frac{1}{2\pi} f(x)e^{-inx}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{in}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\, dx = inc_n(f), \text{ т.к. } f(\pi)e^{-in\pi} - f(-\pi)e^{in\pi} = 0.$$

■

11.2. Теорема о связи гладкости функции и скорости убывания ее коэффициентов Фурье.

Теорема. Пусть $f(x) : [-\pi; \pi] \to \mathbb{C}$ такова, что

1) функция $(m - 1)$ раз непрерывно дифференцируема на $[-\pi; \pi]$, $m \in \mathbb{N}$,

2) $f^{(k)}(-\pi) = f^{(k)}(\pi)$ при всех $k = 0,1,\ldots,(m - 1)$,

3) функция (m) раз кусочно–непрерывно дифференцируема (другими словами: $f(x)$ имеет на $[-\pi; \pi]$ кусочно непрерывную производную $f^{(m)}$ порядка m),

тогда $c_n(f^{(m)}) = (in)^m \cdot c_n(f), n \in \mathbb{Z}$ и $|c_n(f)| = \dfrac{\gamma_n}{|n|^m} = o\left(\dfrac{1}{n^m}\right)$, причем $\gamma_n = |c_n(f^{(m)})|$ и ряд $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}\gamma_n^2$ сходится при $n \to \infty, n \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Первое соотношение получается в результате m–кратного использования равенства $c_n(f') = inc_n(f)$ (из пункта выше): $c_n(f^{(m)}) = (in) \cdot c_n(f^{(m-1)}) = \ldots = (in)^m c_n(f)$.

Второе соотношение получается с учетом неравенства Бесселя (9.4.): $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} |c_n(f^{(m)})|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f^{(m)}|^2(x)\, dx$ – это число

$\Longrightarrow \gamma_n = |c_n(f^{(m)})| \to 0$, и ряд $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} |c_n(f^{(m)})|^2 = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} \gamma_n^2$ сходится. Следовательно, $c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^m}\right)$.

■

11.3. Теорема о связи гладкости функции и скорости сходимости ее ряда Фурье.

Теорема. Если $f(x) : [-\pi; \pi] \to \mathbb{C}$ такова, что

1) функция $(m-1)$ раз непрерывно дифференцируема на $[-\pi; \pi]$, $m \in \mathbb{N}$,
2) $f^{(k)}(-\pi) = f^{(k)}(\pi)$ при всех $k = 0{,}1, \ldots, (m-1)$,
3) функция (m) раз кусочно–непрерывно дифференцируема (другими словами: $f(x)$ имеет на $[-\pi; \pi]$ кусочно непрерывную производную $f^{(m)}$ порядка $m \geqslant 1$),

то ряд Фурье функции f сходится к f абсолютно и равномерно на отрезке $[-\pi; \pi]$, причем отклонение n–й частичной суммы $S_n(x)$ ряда Фурье от $f(x)$ на всем отрезке $[-\pi; \pi]$ имеет оценку $|f(x) - S_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon_n}{n^{m-1/2}}$, где ε_n – стремящаяся к нулю последовательность положительных чисел при $n \to \infty$.

Доказательство. Частичную сумму ряда Фурье(9.6.) запишем в компактной форме: $S_n(x) = \sum\limits_{-n}^{n} c_k(f) e^{ikx}$.

В соответствии с условиями на функцию f и по теореме о связи гладкости функции и скорости убывания ее коэффициентов Фурье имеем: $|c_k(f)| = \frac{\gamma_k}{|k|^m}$, причем $\sum \frac{\gamma_k}{|k|^m} < \infty$ (поскольку $0 \leqslant \frac{\gamma_k}{|k|^m} \leqslant \frac{1}{2}\left(\gamma_k^2 + \frac{1}{k^{2m}}\right)$ по неравенству о среднем и $m \geqslant 1$, имеем $\sum \frac{\gamma_k}{|k|^m} < \infty$). Значит, последовательность $S_n(x)$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ равномерно сходится по мажорантному признаку Вейерштрасса для рядов (или критерию Коши для последовательностей).
В силу достаточного условия сходимости ряда Фурье в точке предел $S(x)$ последовательности $S_n(x)$ совпадает с $f(x)$, поскольку функция f удовлетворяет условиям Дини в каждой точке отрезка $[-\pi; \pi]$ и т.к. $f(-\pi) = f(\pi)$, то функция f периодически продолжается на $\mathbb{R}$ с сохранением условий Дини в любой точке $x \in \mathbb{R}$.
Переходим к оценке. Используем последнее равенство из конца формулировки теоремы 11.2:

$$|f(x) - S_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{\pm k = n+1}^{\infty} c_k(f) e^{ikx} \right| \leqslant \sum_{\pm k = n+1}^{\infty} |c_k(f)| = \sum_{\pm k = n+1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{|k|^m} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sum_{\pm k = n+1}^{\infty} \gamma_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{\pm k = n+1}^{\infty} 1/k^{2m} \right)^{1/2}$$

Первый множитель в правой части неравенства Коши–Буняковского стремится к нулю при $n \to \infty$, т.к. $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} \gamma_k^2 < \infty$.

Далее (см. рис.104) оценка:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}} \leqslant \int\limits_{n}^{\infty} \frac{dx}{x^{2m}} = \frac{1}{2m-1} \cdot \frac{1}{n^{2m-1}}.$$

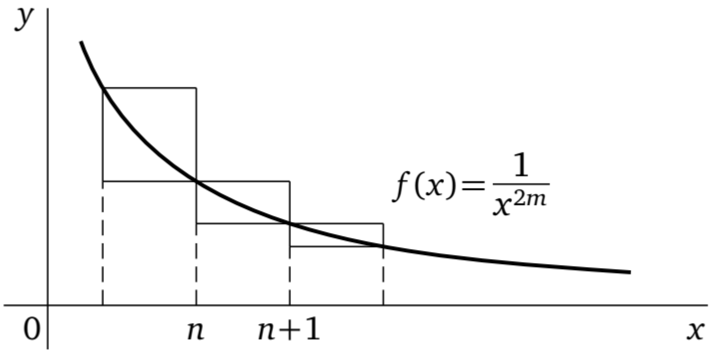


Рис. 104

Таким образом, получается то, что и утверждает теорема. ■

11.4. Теорема о полноте тригонометрической системы.

Теорема. Любая функция $f \in \mathcal{R}_2([-\pi;\pi],\mathbb{R})$ (т.е. f интегрируема на любом отрезке $[a;b] \subset (-\pi;\pi)$ и $f^2(x)$ интегрируема хотя бы в несобственном смысле на отрезке $[-\pi;\pi]$) может быть сколь угодно точно приближена (по–научному: апроксимирована) в средне–квадратичном тригонометрическими многочленами.

Доказательство. Любую функцию $f \in \mathcal{R}_2$ можно сколь угодно точно приблизить финитной функцией $g \in \mathcal{R}_2$ на $[-\pi;\pi]$, интегрируемой по Риману на этом отрезке (функция g называется *финитной* на $[-\pi;\pi]$, если существует $[a;b] \subset (-\pi;\pi)$ и $g = 0$ при $x \in [-\pi;\pi] \backslash [a;b]$). Функцию g мы приближаем кусочно постоянной функцией h на отрезке $[-\pi;\pi]$. Функцию h приближаем ломанной функцией l, которая на концах отрезка будет равна нулю. Тогда ломанная l – это кусочно непрерывная дифференцируема функция, и она сколь угодно точно приближается тригонометрическим многочленом. Из всего этого получаем, что любая функция $f \in \mathcal{R}_2$ по норме пространства $\mathcal{R}_2$ сколь угодно точно приближается тригонометрическим многочленом. ■