Математический Анализ - 2

Серёжа Рахманов | telegram, website
Максим Николаев | telegram

Версия от 13.10.2020 15:29

Содержание

1 Лекция 1 - 01.09.2020 - Ряды

1.1 Определение ряда

Определение 1. Пусть a_n – последовательность, т.е. $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Формальная бесконечная сумма: $a_1+a_2+a_3+\dots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется рядом. $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n$ – частичная сумма, сумма ряда: $S = \lim\limits_{N\to\infty} S_N$

Возможны 3 случая:

1. $\exists S \in \mathbb{R}$
2. $\exists S = \infty$
3. $\nexists S$

В первом случае говорят, что ряд сходится, иначе – что ряд расходится.

Пример.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 0 = 0 + 0 + \dots + 0 = 0$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + \dots + 1 = \infty$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - \dots$ не существует

Определение 2. Если ряд сходится, т.е. $S_N \to S$ при $N \to \infty$, то $S - S_N = r_N$ – остаток ряда

$r_N = \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} a_n$, $r_N \to 0$ при $N \to \infty$

1.2 Необходимое условие сходимости

Замечание. Если ряд сходится, то $a_n \to 0$

Доказательство. $a_n = S_n - S_{n-1} \to 0$, т.к. $S_n \to S$ и $S_{n-1} \to S$ ■

1.3 Критерий Коши

Определение 3. a_n называется фундаментальной, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > m > N \implies |S_n - S_m| < \varepsilon$

Теорема 1.1. *S_n – сходится $\Leftrightarrow$ S_n – фундаментальная*

Доказательство. $S_n - S_m = \sum\limits_{k=m+1}^{n} a_k$ Тогда $\sum a_n$ – сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > m > N\ |a_{m+1}+a_{m+2}+\dots+a_n| < \varepsilon$ ■

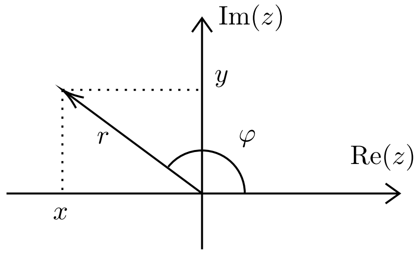
Пример.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

   Заметим, что $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum\limits_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1} \to 1$

   Этот ряд сходится при $N \to \infty$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

2. $z \in \mathbb{C}$, $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$



Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots$

$S_N = 1 + z + z^2 + \dots + z^N = \dfrac{1 - z^{N+1}}{1 - z}$

Ряд сходится $\Leftrightarrow |z| < 1$

$|z| < 1 \Rightarrow z^n \to 0$, $S_N = \dfrac{1 - z^{N+1}}{1 - z} \to \dfrac{1}{1 - z}$

1.4 Положительные ряды

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \geqslant 0$, $S_n \uparrow$, т.к. $S_{n+1} \geqslant S_n$

Возможны 2 случая:

1. $\exists S \in \mathbb{R}$
2. $\exists S = \infty$

Обозначение 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ – ряд сходится, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ – ряд расходится.

1.5 Признаки сравнения

1. Сравнение с помощью неравенства.

   $a_n \leqslant b_n$ при всех $n \geqslant n_0$

   Ряд $\sum b_n$ сходится $\implies$ ряд $\sum a_n$ сходится

   Ряд $\sum a_n$ расходится $\implies$ ряд $\sum b_n$ расходится

2. Сравнение отношений.

   $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ при всех $n \geqslant n_0$

   Ряд $\sum b_n$ сходится $\implies$ ряд $\sum a_n$ сходится

   Ряд $\sum a_n$ расходится $\implies$ ряд $\sum b_n$ расходится

   Доказательство.

   $a_{n_0+1} \leqslant \dfrac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+1}$

   $a_{n_0+2} \leqslant \dfrac{a_{n_0+1}}{b_{n_0+1}} \cdot b_{n_0+2} \leqslant \dfrac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+2}$

   $\vdots$

   $a_{n_0+k} \leqslant \dfrac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+k} \implies \sum\limits_{n=n_0}^{N} a_n \leqslant \dfrac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot \sum\limits_{n=n_0}^{N} b_n$ ∎

3. Сравнение с помощью предела.

   $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} \in (0; +\infty) \implies$ сходимость $\sum a_n \iff$ сходимость $\sum b_n$

   Доказательство.

   $c = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} > 0$

   $\forall \varepsilon\ \exists n_0 :\ c - \varepsilon \leqslant \dfrac{a_n}{b_n} \leqslant c + \varepsilon$, $\forall n \geqslant n_0$

   Возьмём $\varepsilon : c - \varepsilon > 0 \implies (c - \varepsilon) \cdot b_n \leqslant a_n \leqslant (c + \varepsilon) \cdot b_n$

   Сходимость следует из правой части неравенства, а расходимость из левой. ∎

1.6 Отсутствие универсального ряда сравнения

Предложение. Не существует ряда $\sum c_n$, $c_n > 0$:

1) $\dfrac{a_n}{c_n} \to 0 \implies$ ряд $\sum a_n$ сходится.
2) $\dfrac{b_n}{c_n} \to \infty \implies$ ряд $\sum b_n$ расходится.

Доказательство.

1. Если ряд $\sum c_n$ расходится, то пусть $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} c_n \to \infty, S_0 = 0$, тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\underbrace{\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}}}_{a_n})$ расходится так как:

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{N}(\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}}) = \sqrt{S_1} - \sqrt{S_0} + \sqrt{S_2} - \sqrt{S_1} + \dots + \sqrt{S_N} - \sqrt{S_{N-1}} = \sqrt{S_N} - \sqrt{S_0} = \sqrt{S_N} \to \sqrt{S}$

   (b) $\dfrac{\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}}}{c_n} = \dfrac{\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}}}{S_n - S_{n-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}}} \implies \dfrac{a_n}{c_n} \to 0$

   Ряд расходится, но по предположению сходится, получили противоречие.

2. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, то рассмотрим r_n - его n-ный остаток, тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\underbrace{\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}}_{b_n})$, $r_0 = S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, так как:

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{N}(\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}) = \sqrt{r_0} - \sqrt{r_1} + \sqrt{r_1} - \sqrt{r_2} + \dots + \sqrt{r_{N-1}} - \sqrt{r_N} = \sqrt{r_0} - \sqrt{r_N} = \sqrt{S} - \sqrt{r_N} \to \sqrt{S}$, т.к. $r_N \to 0$

   (b) $\dfrac{\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}}{c_n} = \dfrac{\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}}{r_{n-1} - r_n} = \dfrac{1}{\sqrt{r_{n-1}} + \sqrt{r_n}} \to \infty$, т.к. $\sqrt{r_{n-1}} \to 0$ и $\sqrt{r_n} \to 0$

   Ряд сходится, но по предположению расходится, получили противоречие.

■

2 Лекция 2 - 08.09.2020 - Положительные ряды

2.1 Признак Лобачевского-Коши

Предложение. Пусть $a_n > 0$ и $a_n \downarrow$

Тогда ряды $\sum a_n$ и $\sum 2^n \cdot a_{2^n}$ ведут себя одинаково

Доказательство. $a_1 + (a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + \dots + a_8) + \dots$

$a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_2$

$2a_2 \geqslant a_3 + a_4 \geqslant 2a_4$

$4a_4 \geqslant a_5 + \dots + a_8 \geqslant 4a_8$

$\vdots$

$a_1 + \sum\limits_{n=0}^{m-1} 2^n a_{2^n} \geqslant \sum\limits_{n=1}^{2^m} a_n \geqslant a_1 + \dfrac{1}{2} \sum\limits_{n=1}^{m} 2^n a_{2^n}$

■

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ – обобщённый гармонический ряд, $p > 0$

$a_n = \dfrac{1}{n^p} \downarrow \qquad a_{2^n} = \dfrac{1}{(2^n)^p}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \dfrac{1}{(2^n)^p} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2^n)^{p-1}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2^{p-1}}\right)^n$

Это сумма геометрической прогрессии со знаменателем $q = \dfrac{1}{2^{p-1}}$

$q < 1 \iff p > 1$ – ряды сходятся, например: $\sum \dfrac{1}{n^{1,001}}$, $\sum \dfrac{1}{n^2}$

$q \geqslant 1 \iff p \leqslant 1$ – ряды расходятся, например: $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $\sum \dfrac{1}{n}$

Пример. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \cdot \ln^p n}$, $p > 0$

$\dfrac{1}{n \cdot \ln^p n} \downarrow$, $a_{2^n} = \dfrac{1}{2^n \cdot \ln^p 2^n} = \dfrac{1}{2^n \cdot n^p \cdot \ln^p 2}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \dfrac{1}{2^n \cdot n^p \cdot \ln^p 2} = \dfrac{1}{\ln^p 2} \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$

2.2 Теорема Штольца и оценка частичных сумм гармонического ряда

Гармонический ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dots$

$A_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dots + \dfrac{1}{n-1} - \ln n$

$B_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dots + \dfrac{1}{n} - \ln n$

$A_n \uparrow, B_n \downarrow$

$B_n > A_n$

$B_1 > \dots > B_{n-1} > B_n > A_n > A_{n-1} > \dots > A_1, \forall n \in \mathbb{N}$

$B_n - A_n = \dfrac{1}{n} \to 0$

Значит, $\exists \lim A_n = \lim B_n = \gamma \approx 0.5772\dots$ – число Эйлера-Маскерони

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N} = \ln N + \gamma + o(1)$$

Теорема 2.1. *(Штольца.) Если* $p_n, q_n \to 0, q_n \downarrow$ *и* $\exists lim \dfrac{p_{n+1} - p_n}{q_{n+1} - q_n}$, *то* $\lim \dfrac{p_n}{q_n} = \lim \dfrac{p_{n+1} - p_n}{q_{n+1} - q_n}$

Теперь с помощью теоремы Штольца уточним остаточный член у гармонического ряда:

$\lim \dfrac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n - \gamma}{\frac{1}{n}} = \lim \dfrac{\frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}} = \lim \dfrac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} - 1\right)} \overset{\heartsuit}{=}$

$\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}} = 1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

$\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

Получаем, что $\overset{\heartsuit}{=} \lim \dfrac{-\dfrac{1}{2n^2}}{-\dfrac{1}{n^2}} = \dfrac{1}{2}$

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + \underbrace{\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}_{o(1)}$$

Так как

$$\frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n - \gamma - \frac{1}{2n}}{\frac{1}{n}} \to 0$$

2.3 Признак Даламбера и радикальный признак Коши

Теорема 2.2. *Признак Дарамбера. Пусть $a_n > 0$.*
$\overline{\lim} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies$ *ряд* $\sum a_n$ *сходится.*
$\underline{\lim} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies$ *ряд* $\sum a_n$ *расходится.*

Теорема 2.3. *Радикальный признак Коши. Пусть $a_n \geqslant 0$.*
$\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} < 1 \implies$ *ряд* $\sum a_n$ *сходится.*
$\underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} > 1 \implies$ *ряд* $\sum a_n$ *расходится.*

Пример. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{n!}, \quad p > 0$

$a_n = \dfrac{p^n}{n!}, \quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{p^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \dfrac{n!}{p^n} = \dfrac{p}{n+1} \to 0 < 1 \implies$ ряд сходится по признаку Даламбера.

$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\dfrac{p^n}{n!}} = \dfrac{p}{\sqrt[n]{n!}} \to 0 < 1 \implies$ ряд сходится по радикальному признаку Коши. ($\sqrt[n]{n!} \to \infty$)

2.4 Радикальный признак сильнее признака Даламбера

Пусть $a_n > 0$. Тогда:

$$\underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Если $\overline{\lim} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} < 1$

Если $\underline{\lim} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies \underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} > 1$

Если $\exists \lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, то $\overline{\lim} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \underline{\lim} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow \exists \lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

2.5 Признак Гаусса

(Сравнение с $\sum \dfrac{1}{n^p}$)

Если $\exists \delta > 0, p$: $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \dfrac{p}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^{1+\delta}}\right)$ то:

$p > 1 \implies$ ряд $\sum a_n$ сходится.

$p \leqslant 1 \implies$ ряд $\sum a_n$ расходится.

2.6 Сравнение с интегралом

Рассмотрим $f(x) \downarrow$ при $x \geqslant n_0 - 1$ и ряд $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$, где $a_n = f(n)$

$$f(n+t) \leqslant a_n \leqslant f(n-1+t), t \in [0;1]$$

$$\int_0^1 dt: \quad \int_n^{n+1} f(x)dx \leqslant a_n \leqslant \int_{n-1}^{n} f(x)dx$$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}: \quad \int_{n_0}^{N+1} f(x)dx \leqslant \sum_{n=n_0}^{N} a_n \leqslant \int_{n_0-1}^{N} f(x)dx$$

$\implies \sum a_n$ ведёт себя так же как несобственный интеграл $\int^{\infty} f(x)dx$

2.7 Улучшение сходимости ряда

Пример. $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+2} \approx \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$

Для улучшения сходимости будем пользоваться рядами такого типа:
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = 1, \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{4}, \quad \dots$

Такие ряды достаточно легко считаются, в нашем примере воспользуемся первым т.к. $\dfrac{1}{n(n+1)} \sim \dfrac{1}{n^2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2+2} - \frac{1}{n(n+1)} \right) = S - 1 \implies S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2+2} - \frac{1}{n(n+1)} \right)$$

$$\frac{1}{n^2+2} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{2}{n^2}} - \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \right) = \frac{1}{n^2} \cdot \left(1 - \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \right) = \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Слагаемые убывают быстрее, чтобы получить число с определённой точностью потребуется значительно меньше сложений.

Получили, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+2} \approx 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$

3 Лекция 3 - 15.09.2020 - Знакопеременные ряды

3.1 Абсолютная и условная сходимость

Определение 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \in \mathbb{R}$

Если $a_n \cdot a_{n+1} < 0$, то ряд называется знакочередующимся.

Пусть $\sum a_n$ сходится

Определение 5. Рассмотрим дополнительный ряд $\sum |a_n|$ (*)

Если (*) сходится, то $\sum a_n$ называется сходящимся абсолютно

Если (*) расходится, то $\sum a_n$ называется сходящимся условно

Определение 6. Введём $a_n^+ = \begin{cases} a_n, a_n > 0 \\ 0 \end{cases} \quad a_n^+ = \begin{cases} |a_n|, a_n < 0 \\ 0 \end{cases}$

Ряды $\sum a_n^+$, $\sum a_n^-$ называются положительной и отрицательной частью исходного ряда $\sum a_n$

$S_N^+ = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n^+$, $S_N^- = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n^-$

$a_n = a_n^+ - a_n^-$, $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S_N^+ - S_N^-$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S_N^+ + S_N^-$

Замечание. Ряд $\sum a_n$ сходится абсолютно $\iff$ оба ряда $\sum a_n^+$, $\sum a_n^-$ сходятся Ряд $\sum a_n$ сходится условно $\implies$ оба ряда $\sum a_n^+$, $\sum a_n^-$ расходятся

3.2 Мажорантный признак Вейерштрасса

Теорема 3.1. *Если $|a_n| \leqslant b_n$ при $n > n_0$ и положительный ряд $\sum b_n$ сходится, то $\sum a_n$ сходится, причём абсолютно.*

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(nx)}{n^p}$, $p > 0$

$|sin(nx)| \leqslant 1 \implies \left|\dfrac{sin(nx)}{n^P}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^p}$

$\sum \dfrac{1}{n^p}$ сходится $(p > 1) \implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(nx)}{n^p}$ сходится абсолютно.

3.3 Группировка членов ряда

Говорят, что ряд $\sum b_k$ получен из $\sum a_n$ группировкой членов, если $\exists n_1 < n_2 < \dots$:

$b_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1}$

$b_2 = a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \dots + a_{n_2}$

$\dots$

Замечание. Если $\sum a_n$ сходится, то ряд $\sum b_k$ сходится к той же сумме.

Доказательство. $\sum\limits_{k=1}^{m} b_k = \sum\limits_{n=1}^{n_m} a_n$ ■

Обратное утверждение неверно: $(1-1) + (1-1) + \dots$

Знакопеременный ряд при помощи группировки сводится к знакочередующемуся:

$a_1 \leqslant 0, \dots, a_{n_1} \leqslant 0$; $b_1 = \sum\limits_{i=1}^{n_1} a_i \leqslant 0$

$a_{n_1+1} \geqslant 0, \dots, a_{n_2} \geqslant 0$; $b_1 = \sum\limits_{i=n_1+1}^{n_2} a_i \leqslant 0$

При такой группировке сходимость исходного ряда $\iff$ сходимость $\sum b_n$

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$, где $b_k = (-1)^k$

$$|b_k| = \sum_{n=[e^k]+1}^{[e^{k+1}]} \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{[e^k]+1} \cdot ([e^{k+1}] - [e^k]) \approx \frac{e^{k+1} - e^k}{e^k} \to e - 1 > 0$$

3.4 Знакочередующиеся ряды, пр-к Лейбница

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = (-1)^n \cdot u_n$, $u_n > 0$

Теорема 3.2. *Признак Лейбница. Если $u_n \downarrow 0$, то ряд сходится, причём $|r_n| \leqslant u_{n+1}$*

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^p}$, $p > 0$

$\dfrac{1}{n^p} \downarrow 0 \implies$ ряд сходится (при $\forall p > 0$)

При этом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left| \dfrac{(-1)^n}{n^p} \right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ – сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^p}$: $p \in (0; 1]$ – сходится условно, $p \in (1; +\infty)$ – абсолютно

3.5 О неприменимости эквивалентности

Рассмотрим 2 ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} \approx \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

При этом правый ряд сходится по признаку Лейбница, а левый – расходится:

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n} - (-1)^n)} \approx \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n} - (-1)^n)} \to \infty$$

3.6 Признаки Дирихле и Абеля

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$

Теорема 3.3. *Признак Дирихле. Если $a_n \downarrow 0$, а частичные суммы $\left| \sum\limits_{n=1}^{N} b_n \right| \leqslant C$ ограничены, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ сходится.*

Теорема 3.4. *Признак Абеля. Если a_n монотонна и ограничена, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ сходится.*

$a_n \to a$, $a_n = a + -\alpha_n$, $\alpha_n \downarrow 0$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n = a \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n + - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot b_n$

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(nx)}{n^p}$, $p > 0$

$a_n = \dfrac{1}{n^p} \downarrow 0$, $b_n = \sin nx$

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_N = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin Nx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos\left((N + 1/2)x\right)}{2 \sin \frac{x}{2}}; \left| \sum_{n=1}^{N} b_n \right| \leqslant \frac{2}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin \frac{x}{2}}$$

Ряд сходится по признаку Дирихле

3.7 Влияние перестановки членов ряда на его сумму

Пусть $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ – биекция

Говорят, что ряд $\sum b_n$ получен из $\sum a_n$ перестановкой членов, если $b_n = a_{f(n)}$

Если ряд $\sum a_n$ сходится абсолютно, то $\forall$ ряд, полученный из него перестановкой членов, сходится абсолютно к той же сумме.

Теорема 3.5. *(Римана) Если ряд $\sum a_n$ сходится условно, то для $\forall S \in [-\infty; +\infty]$ то $\exists$ перестановка f такая, что $\sum a_{f(n)} = S$*

4 Лекция 4 - 22.09.2020

4.1 Умножение рядов

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m$

$\left(\sum\limits_{k=1}^{K} a_k\right) \cdot \left(\sum\limits_{m=1}^{M} b_m\right) = \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant K, 1 \leqslant m \leqslant M} a_k \cdot b_m$

Если эта сумма имеет предел при $K, M \to \infty$, не зависящий от порядка суммирования, то говорят, что определено произведение рядов.

Теорема 4.1. *(Коши) Если $\sum a_k$, $\sum b_m$ сходятся абсолютно, то определено их произведение.*

$\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{k_n} \cdot b_{m_n}$

Произведение рядов по Коши:

$c_2 = a_1 \cdot b_1$

$c_3 = a_2 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_2$

$c_4 = a_3 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_3$

$\ldots$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m\right) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n$$

4.2 Бесконечное произведение

4.2.1 Основные понятия

$\prod\limits_{n=1}^{N} a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_N$ – частичное произведение.

Бесконечным произведением называют формальную запись $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

Значением бесконечного произведения является предел частичного произведения:

$\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{N\to\infty} \prod\limits_{n=1}^{N} a_n$

4.2.2 Сходимость бесконечного произведения

Необходимое условие сходимости:

Если $P_N = \prod\limits_{n=1}^{N} a_n$ сходится, то $a_n = \dfrac{P_n}{P_{n-1}} \to 1$

$\prod\limits_{n=1}^{N} a_n = e^{\ln \prod_{n=1}^{N} a_n} = e^{\sum_{n=1}^{N} \ln a_n}$

$\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n = P \iff \sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln a_n = \ln P \ (P \neq 0, a_n \to 1)$

Пусть $a_n \geqslant 1$. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln a_n$ – положительный ряд

$\ln a_n = (a_n - 1) + o(1)$, т. к. $a_n \to 1$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln a_n$ сходится $\iff \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - 1)$ сходится.

4.2.3 Абсолютная сходимость бесконечного произведения

$\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется абсолютно сходящимся, если абсолютно сходится соответствующий ему ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln a_n$

Замечание. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно $\iff \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - 1)$ сходится абсолютно.

Пример. (Произведение Валлиса) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4n^2}{4n^2-1} = \dfrac{\pi}{2}$ – получается из анализа интегралов $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$

Прим. ред.: есть отличное видео с интуитивно понятным доказательством.

Пример. (Дзета-функция Римана) $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^s}, s > 1$

Тождество Эйлера:

$\zeta(s) = \dfrac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{1}{p_n^s})}$, где $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots$

4.3 Функциональные последовательности

4.3.1 Поточечная и равномерная сходимость

Пусть при всех $n \in \mathbb{N}$ функции $f_n : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$
Говорят, что $a \in D$ – точка сходимости $\{f_n(x)\}$, если последовательность $\{f_n(a)\}$ сходится.
Множество всех точек сходимости называется множеством сходимости.
Говорят, что последовательность сходится на D поточечно, если D – множество сходимости.
Говорят, что $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно на D, если $\sup |f_n(x) - f(x)| \to 0$
Свойства

1. $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f \implies f_n \overset{D}{\to} f$
2. Если $D = D_1 \cup D_2$, то:
   $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f \iff (f_n \overset{D_1}{\rightrightarrows} f$ и $f_n \overset{D_2}{\rightrightarrows} f)$

4.3.2 Равномерная норма. Критерий Коши

Рассмотрим множество всех функций $D \to \mathbb{R}$
$||f|| = \sup\limits_{x \in D} |f(x)|$
Таким образом, $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f \iff ||f_n - f|| \to 0$

4.3.3 Теорема Дини

Пусть $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}, f_n(x)$ монотонна по n при каждом $x \in [a, b]$, $f_n \to f$ на $[a, b]$
Тогда $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f$

5 Лекция 5 - 29.09.2020 - Исследование сходимости функциональных рядов

5.1 Свойства равномерно сходящейся последовательности

1. $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, рассмотрим $D = (a; b)$, $D = [a; b]$

   Пусть $f_n \to f$, $x \in D$, $y_n = \lim\limits_{x \to x_0} f_n(x)$, $\{y_n\}$ – сход., $y_n \to y$

   Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y$, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} (\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)) = \lim\limits_{n \to \infty} (\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x))$

   Доказательство. $|y - f(x)| \leqslant |y - y_n| + |y_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|$

   Пусть n такое, что $|y - y_n| < \dfrac{\varepsilon}{3}, ||f_n - f|| < \dfrac{\varepsilon}{3}, |x - x_0| < \delta, |f(x) - y| < \dfrac{\varepsilon}{3}$

   Тогда $|y - f(x)| \leqslant |y - y_n| + |y_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ ■

2. $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, рассмотрим $D = (a; b)$, $D = [a; b]$

   Пусть f_n дифференцируемы на D, $f'_n \overset{D}{\rightrightarrows} g, \exists c \in D : \{f_n(c)\}$ сход

   Тогда $\exists f : f_n \to f$ (причем, если D огр., то сходимость равномерная)

   f – дифференцируема, $f' = g$.

   $(\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x))' = \lim\limits_{n \to \infty} f'_n(x)$

3. $-\infty < a < b < +\infty$, $D = [a; b]$

   Пусть f_n непрерывны на D, $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f$ ($\implies$ fнепрерывна наD)

   Тогда $\displaystyle\int_a^x f_n(t)dt \to^D \int_a^x f(t)dt$

5.2 Равномерная сходимость функционального ряда

$D \subseteq \mathbb{R}$, $a_n : D \to R$

Функциональный ряд: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$

Частичные суммы: $S_N(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} a_n(x)$

Множество абсолютной сходимости – множество всех тех значений x, при которых ряд сходится абсолютно.

5.3 Необходимое условие равномерной сходимости

Если $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномерно сходится к сумме $S(x)$, то $a_n \overset{D}{\rightrightarrows} 0$

Доказательство. $S_n(x) = a_1(x) + \cdots + a_n(x)$, $a_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x)$

$S_n \overset{D}{\rightrightarrows} S \implies a_n \overset{D}{\rightrightarrows} (S - S) = 0$ ■

Пример. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, D = \mathbb{R}$ – не является сходящейся равномерно, т.к. $\dfrac{x^n}{n!}! \to^{\mathbb{R}} 0$

5.4 Критерий Коши равномерной сходимости

Теорема 5.1. Функциональный ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *сходится равномерно на* $D \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon), \forall n \geqslant N, \forall m$*:*

$$||a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+m}|| < \varepsilon$$

Т.е. $|a_n(x) + a_{n+1}(x) + \cdots + a_{n+m}(x)| < \varepsilon\ \forall x \in D$.

Отрицание: если $\exists \{x_n\} \subset D$, $\exists \{m_n\} \in \mathbb{N}$, $\exists \varepsilon_0$:

$$|a_n(x_n) + a_{n+1}(x_n) + \cdots + a_{m_n}(x_n)| > \varepsilon_0$$

То ряд не является сходящимся равномерно.

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{x^2+n^2}$, $D=\mathbb{R}$ – сходится, т.к. $\approx\sum\dfrac{1}{n^2}$ Докажем, что сходится неравномерно. Возьмём $x_n=n$, $m_n=2n$:

$$\frac{n}{n^2+n^2}+\frac{n}{n^2+(n+1)^2}+\dots+\frac{n}{n^2+(2n)^2}>\frac{n}{5n^2}\cdot n=\frac{1}{5}$$

5.5 Признаки Вейерштрасса и Даламбера

Теорема 5.2. *(Признак Вейерштрасса) Если $|a_n(x)|\leqslant b_n$ при $\forall n\geqslant n_0$, $\forall x\in D$, а ряд $\sum b_n$ сходится, то $\sum a_n(x)$ сходится на D абсолютно и равномерно.*

Доказательство. $|a_n(x)+a_{n+1}(x)+\dots+a_{n+m}(x)|\leqslant b_n+b_{n+1}+\dots+b_{n+m}<\varepsilon$ ■

Теорема 5.3. *(Признак Даламбера) Если $\exists q<1$: $|a_{n+1}(x)|\leqslant q\cdot|a_n(x)|$ при $\forall n\geqslant n_0$, $\forall x\in D$, причём $a_{n_0}(x)$ – ограничена на D, то $\sum a_n(x)$ сходится на D абсолютно и равномерно.*

Пример. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$, $D=[-r;r]$, $r>0$

$\left|\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|\leqslant q\cdot\left|\dfrac{x^n}{n!}\right|$

$\left|\dfrac{x}{n+1}\right|\leqslant q$. Пусть $n_0:\dfrac{r}{n_0+1}<1$, берём $q=\dfrac{r}{n_0+1}$. Значит, ряд абсолютно и равномерно сходится.

5.6 Признак Лейбница

Знакочередующийся функциональный ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot u_n(x)$, $u_n(x)\geqslant 0$ на D.

Теорема 5.4. *(Признак Лейбница) Если $u_n(x)\downarrow_{(n)}$ и $u_n\overset{D}{\rightrightarrows}0$, то ряд сходится равномерно.*

Пример. $\sum\dfrac{(-1)^n}{(n+x)^p}\downarrow_{(n)}$, $|u_n(x)|\leqslant\dfrac{1}{n^p}\to 0\implies u_n\to^0 0$

5.7 Признаки Дирихле и Абеля

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)\cdot b_nx$

Теорема 5.5. *(Признак Дирихле) Если $a_n(x)\downarrow_{(n)}$ и $a_n\overset{D}{\rightrightarrows}0$, а $||b_1+\dots+b_n||\leqslant C$ $\forall n$, то ряд равномерно сходится на D.*

Теорема 5.6. *(Признак Абеля) Если $a_n(x)$ монотонна по n (при $\forall x\in D$), и $||a_n||\leqslant C$ при всех n, а ряд $\sum b_n(x)$ сходится равномерно, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)\cdot b_n(x)$ сходится равномерно.*

5.8 Свойства равномерно сходящегося ряда

1. $-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$, $D=(a;b)$, $D=[a;b]$

   Пусть функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n(x)$ сходится равномерно на D, $x_0\in D$, $\exists\lim\limits_{x\to x_0}c_n(x)=y_n$ и $\exists\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n=y$.

   Тогда $\lim\limits_{x\to x_0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lim\limits_{x\to x_0}c_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n=y$

2. $-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$, $D=(a;b)$, $D=[a;b]$

   Пусть $c_n(x)$ дифференцируемы на D и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n'(x)$ сходится равномерно на D.

   Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n(x)$ сходится на D (а если D огр, то сходится равномерно), а его сумма будет дифференцируемой функцией на D и $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n(x)\right)'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n'(x)$

3. $-\infty < a < b < +\infty$, $D = (a;b)$, $D = [a;b]$

$\displaystyle\int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x c_n(t)dt$ – сходится равномерно на D.

6 Лекция 6 - 6.10.2020 - Степенные ряды

6.1 Основные понятия

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x - x_0)^n$
$\{c_n\}$ – числовая последовательность (коэффициенты), $x_0 \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$
$S_N(x) = \sum\limits_{n=0}^{N} c_n \cdot (x - x_0)^n$ – многочлен.

6.2 Теорема Абеля, радиус и интервал последовательности

Теорема 6.1. *(Абеля)*

1. *Если степенной ряд сходится в точке $x_1 \neq x_0$, то он сходится при всех $x : |x - x_0| < |x_1 - x_0|$*

2. *Если степенной ряд расходится в точке $x_2 \neq x_0$, то он расходится при всех $x : |x - x_0| > |x_2 - x_0|$*

Доказательство. 1. $\left|\sum\limits_{n=m}^{N} c_n(x - x_0)^n\right| = \left|\sum\limits_{n=m}^{N} c_n \cdot (x_1 - x_0)^n \cdot \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^n\right| \leqslant \sum\limits_{n=m}^{N} |c_n \cdot (x_1 - x_0)^n| \cdot \left|\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^n\right| \leqslant$
$\varepsilon(q^m + \dots + q^N) \leqslant \varepsilon \cdot q^m \cdot \frac{1}{1 - q} \to 0$

■

Пусть:
$R_{cv} = \sup\{|x - x_0| : \text{ряд сходится}\}$
$R_{dv} = \inf\{|x - x_0| : \text{ряд расходится}\}$ или $+\infty$, если ряд сходится всюду
$\exists R = R_{cv} = Rdv$ – радиус сходимости.
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x - x_0)^n$
Применим радикальный признак Коши:
$\sqrt[n]{|a_n(x)|} = \sqrt[n]{|c_n|} \cdot |x - x_0|$
$\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n(x)|} = |x - x_0| \cdot \overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|}$
Если $|x - x_0| \cdot \overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|} < 1$, то ряд сходится
Если $|x - x_0| \cdot \overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|} > 1$, то ряд расходится
$R = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|}}$ – формула Коши-Адамара
Pro tip: если $\exists \lim\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$, то $\lim\sqrt[n]{|c_n|} = \lim\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$

6.3 Равномерная сходимость степенного ряда

Если $R > 0$, то степенной ряд сходится равномерно при $|x - x_0| \leqslant r$, где $r < R$ (доказательство через признак Вейерштрасса).

6.4 Сходимость ряда в граничных точках интервала сходимости

Пусть $\sum c_n R^n$ сходится. Тогда степенной ряд $\sum c_n(x - x_0)^n$ сходится равномерно на $[x_0; x_0 + R]$.

Доказательство. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(c_n \cdot R^n) \cdot \left(\frac{x - x_0}{R}\right)^n$
$b_n = c_n \cdot R^n$, $a_n = \left(\frac{x - x_0}{R}\right)^n$
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ сходится $\implies$ сходится равномерно.
$a_n(x) \downarrow_{(n)}$
Значит, ряд сходится равномерно по признаку Абеля. ■

6.5 Дифференцирование и интегрирование степенного ряда

$\sum c_n(x-x_0)^n$, $R>0$ – его радиус сходимости.

1. Дифференцирование

   При почленном дифференцировании получаем $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \cdot n \cdot (x-x_0)^{n-1}$ Его радиус сходимости равен радиусу исходного ряда $\implies$ он сходится равномерно при $|x-x_0| \leqslant r < R$ Значит по теореме о почленном дифференцировании функционального ряда: $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x-x_0)^n\right)' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \cdot n \cdot (x-x_0)^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)(x-x_0)^n$

2. Интегрирование
   $\int_{x_0}^{x}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(t-x_0)^n\right)dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$

6.6 Бесконечное дифференцирование

Функция называется бесконечно дифференцируемой в точке a, если $\forall n$ она n раз дифференцируема в точке a. Сумма степенного ряда с $R>0$ является бесконечно дифференцируемой функцией.

6.7 Ряд Тейлора

Если функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в точке x_0, то функции $f(x)$ можно сопоставить её ряд Тейлора: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

При этом $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_N(x)$

$r_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(x_0+\theta)(x-x_0)}{(N+1)!}(x-x_0)^{N+1}$, $\theta \in (0;1)$ – формула Лагранжа

$r_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(x_0+\theta)(x-x_0)}{N!}(1-\theta)^N(x-x_0)^{N+1}$, $\theta \in (0;1)$ – формула Коши

Определение 7. Функция называется аналитической в т.x_0, если она представима в окрестности этой точки в виде степенного ряда.

Не всякая бесконечно дифференцируемая функция будет аналитической:

Пример. $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$

$f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = 0$, ряд Тейлора при $x_0 = 0$ равен 0

6.7.1 Ряды Тейлора основных элементарных функций

1. $e^x - \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, R = \infty$

2. $(1+x)^p - \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(p)_n}{n!}x^n$, где $(p)_n = p(p-1)\dots(p-n+1), R = 1$

3. $\ln(1+x) - \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)}x^n}{n!}$