Линейная алгебра

Бобень Вячеслав
@darkkeks, GitHub
Большую часть исходного кода предоставила Левина Александра.
Благодарность выражается Левину Александру за видеозаписи лекций.

2019 — 2020

"К коллоку можете даже не готовиться".

— Роман Сергеевич Авдеев

Содержание

1 Лекция 9.09.2019

1.1 Матрицы

Определение 1. *Матрица размера* $n \times m$ — это прямоугольная таблица высоты m и ширины n.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ij} – элемент на пересечении i-й строки и j-го столбца

Краткая запись – $A = (a_{ij})$

Множество всех матриц размера $m \times n$ с коэффициентами из $\mathbb{R}$ (множество всех действительных чисел) — $\mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$ или $\mathrm{Mat}_{n\times m}$

Определение 2. Две матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{n\times m}$ и $B \in \mathrm{Mat}_{p\times q}$ называются *равными*, если $m = p$, $n = q$, и соответствующие элементы равны

Пример. $\begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix}$

1.2 Операции над матрицами

Для любых $A, B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$

- *Сложение* $A + B := (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$
- *Умножение на скаляр* $\lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda A := (\lambda a_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$

Свойства суммы и произведения на скаляр

$\forall A, B, C \in \mathrm{Mat}_{m\times n} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

1) $A + B = B + A$ (коммутативность)
2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (ассоциативность)
3) $A + 0 = 0 + A = A$, где
$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ — нулевая матрица.}$$
4) $A + (-A) = 0$
   $-A = (-a_{ij})$ – противоположная матрица
5) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
6) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
7) $\lambda(\mu A) = \lambda(\mu A)$
8) $1A = A$

Упражнение на дом. *Доказать эти свойства.*

Замечание. Из свойств 1) – 8) следует, что $\mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$ является векторным пространством над $\mathbb{R}$

1.3 Пространство $\mathbb{R}^n$, его отождествление с матрицами-столбцами высоты n

$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\ \forall i = 1, \dots, n\}$

$\mathbb{R}$ – числовая прямая

$\mathbb{R}^2$ – плоскость

$\mathbb{R}^3$ – трехмерное пространство

Договоримся отождествлять $\mathbb{R}^n$ со столбцами высоты n

$(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – *вектор столбец*

$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\ \forall i = 1, \dots, n \right\} = \mathrm{Mat}_{n\times 1}(\mathbb{R})$

$\left[x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \right] \implies [x = y \iff x_i = y_i\ \forall i]$

$x + y := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$

$\lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda x_i := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$

1.4 Транспонирование матриц, его простейшие свойства

$$A \in \mathrm{Mat}_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A^T \in \mathrm{Mat}_{n\times m} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ — \textit{транспонированная матрица}.}$$

Свойства:
1) $(A^T)^T = A$
2) $(A + B)^T = A^T + B^T$
3) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

Пример. $\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Пример. $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}$

Пример. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

1.5 Умножение матриц

Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$

$A_{(i)} = \begin{pmatrix} a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in} \end{pmatrix}$ — i-я строка матрицы A

$A^{(j)} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ — j-й столбец матрицы A

1) Частный случай: умножение строки на столбец той же длинны

$$\underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_{1\times n}\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{n\times 1} = x_1 \cdot y_1 + \dots + x_n \cdot y_n$$

2) Общий случай:

   A – матрица размера $m \times \underline{n}$

   B – матрица размера $\underline{n} \times p$

   $AB := C \in \mathrm{Mat}_{m\times p}$, где

$$C_{ij} = A_{(i)}B^{(j)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Количество столбцов матрицы A равно количеству строк матрицы B — условие согласованности матриц.

Пример. $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_2y_1 & \dots & x_ny_1 \\ x_1y_2 & x_2y_2 & \dots & x_ny_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1y_n & x_2y_m & \dots & x_ny_m \end{pmatrix}$

Пример. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 0\cdot 0 + 2\cdot 1 & 1\cdot(-1) + 0\cdot 5 + 2\cdot 1 \\ 0\cdot 2 + (-1)\cdot 0 + 3\cdot 1 & 0\cdot(-1) + (-1)\cdot 5 + 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

2 Лекция 12.09.2019

2.1 Отступление о суммах

Пусть $S_p, S_{p+1}, \ldots, S_q$ – набор чисел.

Тогда, $\sum_{i=p}^{q} S_i := S_p + S_{p+1} + \cdots + S_q$ – сумма по i от p до q

Например, $\sum_{i=1}^{100} i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + 100^2$

Свойства сумм:

1. $\lambda \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda S_i$
2. $\sum_{i=1}^{n}(S_i + T_i) = \sum_{i=1}^{n} S_i + \sum_{i=1}^{n} T_i$
3. $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} S_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} S_{ij}$ — сумма всех элементов матрицы $S = (S_{ij})$

2.2 Основные свойства умножения матриц

Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n},\ B \in \mathrm{Mat}_{n\times p}$

1. $\underbrace{A(B+C)}_{x} = \underbrace{AB + AC}_{y}$ — левая дистрибутивность.

   Доказательство.

$$\begin{aligned} x_{ij} = A_{(i)}(B+C)^{(j)} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} \\ &= A_{(i)}B^{(j)} + A_{(i)}C^{(j)} = y_{ij}. \end{aligned}$$

■

2. $(A+B)C = AC + BC$ — правая дистрибутивность, доказывается аналогично.
3. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
4. $(AB)C = A(BC)$ — ассоциативность.

   Доказательство. $\underbrace{(AB)}_{u}C = x,\ A\underbrace{(BC)}_{v} = y.$

$$\begin{aligned} x_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} u_{ik} \cdot c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{p} a_{il}b_{lk} \right) c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} (a_{il}b_{lk}c_{kj}) \\ &= \sum_{l=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} (a_{il}b_{lk}c_{kj}) = \sum_{l=1}^{p} a_{il} \sum_{k=1}^{n} (b_{lk}c_{kj}) = \sum_{l=1}^{p} a_{il}v_{lj} = y_{ij}. \end{aligned}$$

■

5. $\underbrace{(AB)^T}_{x} = \underbrace{B^T A^T}_{y}.$

   Доказательство.

$$\begin{aligned} x_{ij} = [AB]_{ji} = A_{(j)}B^{(i)} &= \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \cdot b_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^{n} b_{ki} \cdot a_{jk} = B^T_{(i)}(A^T)^{(j)} = y_{ij}. \end{aligned}$$

■

Умножение матриц не коммутативно.
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Определение 3. $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}$ называется *квадратной матрицей* порядка n

Обозначение $M_n := \mathrm{Mat}_{n\times n}$
$A \in M_n$

2.3 Диагональные матрицы

Определение 4. Матрица $A \in M_n$ называется *диагональной* если все ее элементы вне главной диагонали равны нулю ($a_{ij} = 0$ при $i \neq j$)

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} \implies A = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Лемма 2.1. $A = diag(a_1, \dots, a_n) \in M_n \implies$

1. $\forall B \in \mathrm{Mat}_{n\times p} \implies AB = \begin{pmatrix} a_1 B_{(1)} \\ a_2 B_{(2)} \\ \vdots \\ a_n B_{(n)} \end{pmatrix}$
2. $\forall B \in \mathrm{Mat}_{m\times n} \implies BA = \begin{pmatrix} a_1 B^{(1)} & a_2 B^{(2)} & \dots & a_n B^{(n)} \end{pmatrix}$

Доказательство.

1. $[AB]_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_i & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_i b_{ij}$
2. $[BA]_{ij} = \begin{pmatrix} b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{im} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ a_j \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = b_{ij} a_j$

■

2.4 Единичная матрица и её свойства

Определение 5. Матрица $E = E_n = diag(1, 1, \dots, 1)$ называется *единичной матрицей* порядка n.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Свойства:

1. $EA = A \quad \forall A \in \mathrm{Mat}_{n\times p}$.
2. $AE = A \quad \forall A \in \mathrm{Mat}_{p\times n}$.
3. $AE = EA = A \quad \forall A \in M_n$.

2.5 След квадратной матрицы и его свойства

Определение 6. *Следом* матрицы $A \in M_n$ называется число $trA = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Свойства:

1. $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$.
2. $\operatorname{tr} \lambda A = \lambda \operatorname{tr} A$.
3. $\operatorname{tr} A^T = \operatorname{tr} A$.
4. $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.
   $\forall A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}, B \in \mathrm{Mat}_{n\times m}$.

   Доказательство. $AB = x \in M_m$, $BA = y \in M_n$.

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} x = \sum_{i=1}^{m} x_{ii} &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (a_{ij}b_{ji}) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} (b_{ji}a_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} y_{jj} = \operatorname{tr} y.\end{aligned}$$ ■

Пример. $A = (1,2,3), B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

$tr(AB) = tr(1\cdot 4 + 2\cdot 5 + 3\cdot 6) = 32$

$tr(BA) = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \\ 6 & 12 & 18 \end{pmatrix} = 4 + 10 + 18 = 32$

2.6 Системы линейных уравнений.

Линейное уравнение: $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$.
$a_1, a_2, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$ – коэффициенты.
$x_1, x_2, \dots, x_n$ – неизвестные.

Система линейных уравнений (СЛУ):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

m уравнений, n неизвестных

Определение 7.

1. *Решение одного уравнения* – это такой набор значений неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$, при подстановке которого в уравнение получаем тождество.
2. *Решение СЛУ* – такой набор значений неизвестных, который является решением каждого уравнения СЛУ.

Основная задача: решить СЛУ, т.е. найти все решения.

Пример. $n = m = 1$
$ax = b$, $a, b \in \mathbb{R}$, x – неизвестная

1. $a \neq 0 \implies x = \frac{b}{a}$ – единственное
2. $a = 0 \implies 0x = b$
   $b \neq 0 \implies$ решений нет.
   $b = 0 \implies x$ – любое $\implies$ бесконечно много решений.

2.6.1 Совместные и несовместные системы

Определение 8. СЛУ называется
– *совместной*, если у нее есть хотя бы одно решение,
– *несовместной*, если решений нет.

2.6.2 Матричная форма записи СЛУ

$AX = B$.

$$A \in Mat_{m\times n}(R) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ — матрица коэффициентов}$$

$$B \in \mathrm{Mat}_{m\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ — столбец правых частей}$$

$$X \in \mathrm{Mat}_{m\times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ — столбец неизвестных}$$

3 Лекция 14.09.2019

3.1 Расширенная матрицы системы линейных уравнений

$Ax = b$, $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$
Полная информация о СЛУ содержится в её *расширенной матрице*.

$$\left(A \mid b\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

3.2 Эквивалентные системы

Определение 9. Две системы уравнений от одних и тех же неизвестных называются *эквивалентными*, если они имеют одинаковые множества решений.

Пример. Рассмотрим несколько СЛУ

A) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \iff \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$

B) $\begin{cases} 2x_1 = 1 \\ 2x_2 = 1 \end{cases} \iff \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$

C) $x_1 + x_2 = 1 \iff \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

A и B эквиваленты, так как обе имеют единственное решение $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
A и C не эквивалентны, так как C имеет бесконечно много решений.

3.3 Как решить СЛУ?

Идея: выполнить преобразование СЛУ, сохраняющее множество её решений, и привести её к такому виду, в котором СЛУ легко решается.

Пример. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = b_1 \\ x_2 = b_2 \\ \vdots \\ x_n = b_n \end{cases}$

3.3.1 Элементарные преобразования СЛУ и соответствующие преобразования строк её расширенной матрицы

тип	СЛУ	расширенная матрица
1.	К i-му уравнению прибавить j-ое, умноженное на $\lambda \in \mathbb{R}$ $(i \neq j)$	$Э_1(i, j, \lambda)$
2.	Переставить i-е и j-е уравнения $(i \neq j)$	$Э_2(i, j)$
3.	Умножить i-ое уравнение на $\lambda \neq 0$	$Э_3(i, \lambda)$

1. $Э_1(i, j, \lambda)$: к i-ой строке прибавить j-ую, умноженную на λ (покомпонентно),
   $a_{ik} \mapsto a_{ik} + \lambda a_{jk}$ $\forall k = 1, \dots, n$,
   $b_i \mapsto b_i + \lambda b_j$.
2. $Э_2(i, j)$: переставить i-ую и j-ую строки.
3. $Э_3(i, \lambda)$: умножить i-ю строку на λ (покомпонентно).

$Э_1, Э_2, Э_3$ называются *элементарными преобразованиями строк расширенной матрицы*.

3.3.2 Сохранение множества решений системы линейных уравнений при элементарных преобразованиях

Лемма 3.1. Элементарные преобразования СЛУ не меняют множество решений

Доказательство. Пусть мы получили СЛУ($\star\star$) из СЛУ($\star$) путем применения элементарных преобразований.

1. Всякое решение системы ($\star$) является решением ($\star\star$).
2. ($\star$) получается из ($\star\star$) путем элементарных преобразований.

$(\star) \to (\star\star)$	$(\star\star) \to (\star)$
$Э_1(i, j, \lambda)$	$Э_1(i, j, -\lambda)$
$Э_2(i, j)$	$Э_2(i, j)$
$Э_3(i, \lambda)$	$Э_3(i, \frac{1}{\lambda})$

Следовательно, всякое решение ($\star\star$) является решением ($\star$) $\implies$ множества решений совпадают. ■

3.4 Ступенчатые матрицы

Определение 10. Строка $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ называется *нулевой*, если $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ и *ненулевой* иначе $(\exists i : a_i \neq 0)$.

Определение 11. *Ведущим элементом* ненулевой строки называется первый её ненулевой элемент.

Определение 12. Матрица $M \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$ называется *ступенчатой*, или имеет ступенчатый вид, если:

1. Номера ведущих элементов её ненулевых строк строго возрастают.

2. Все нулевые строки стоят в конце.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & \diamond & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \diamond & * & * & * & * \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \diamond & * & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \diamond & * \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \diamond \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\diamond \neq 0$, $*$ – что угодно.

3.4.1 Улучшенный ступенчатый вид матрицы

Определение 13. M имеет *улучшенный ступенчатый вид*, если:

1. M имеет обычный ступенчатый вид.
2. Все ведущие элементы равны 1.
3. В одном столбце с любым ведущим элементом стоят только нули.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 & * & 0 & * & 0 & 0 & * \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 & * & 0 & 0 & * \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 3.2. *1) Всякую матрицу элементарными преобразованиями можно привести к ступенчатому виду.*
2) Всякую ступенчатую матрицу элементарными преобразованиями строк можно привести к улучшенному ступенчатому виду.

Следствие. Всякую матрицу элементарными преобразованиями строк можно привести к **улучшенному** ступенчатому виду.

Доказательство.

1. Алгоритм. Если M - нулевая, то конец. Иначе:

Шаг 1: Ищем первый ненулевой столбец, пусть j — его номер.

Шаг 2: Переставляем строки, если нужно, добиваемся того, что $a_{1j} \neq 0$

Шаг 3: Зануляем элементы в этом столбце используя первую строку – $Э_1(2, 1, -\frac{a_{2j}}{a_{1j}}), \ldots, Э_1(m, 1, -\frac{a_{mj}}{a_{1j}})$.
В результате $a_{ij} = 0$ при $i = 2, 3, \ldots m$.

Дальше повторяем все шаги для подматрицы M' (без первой строки и столбцов $1, \dots, j$).

2. Алгоритм. Пусть $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{rj_r}$ – ведущие элементы ступенчатой матрицы.

Шаг 1: Выполняем $\text{Э}_3(1, \frac{1}{a_{1j_1}}), \dots, \text{Э}_3(r, \frac{1}{a_{rj_r}})$, в результате все ведущие элементы равны 1.

Шаг 2: Выполняем $\text{Э}_1(r-1, r, -a_{r-1,\, j_r}), \text{Э}_1(r-2, r, -a_{r-2,\, j_r}), \dots, \text{Э}_1(1, r, -a_{1,\, j_r})$. В результате все элементы над a_{rj_r} равны 0.

Аналогично обнуляем элементы над всеми остальными ведущими.

Итог: матрица имеет улучшенный ступенчатый вид. ■

3.5 Реализация элементарных преобразований строк матрицы при помощи умножения слева на подходящую матрицу

Всякое элементарное преобразование строк матрицы реализуется умножением как умножение слева на подходящую “элементарную матрицу”.

- $\text{Э}_1(i, j, \lambda)$: $A \mapsto U_1(i, j, \lambda)A$, где

$$U_1(i,j,\lambda) = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} & & & & & j & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ i \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(на диагонали стоят единицы, на i-м j-м месте стоит λ, остальные элементы нули)

- $\text{Э}_2(i, j)$: $A \mapsto U_2(i, j)A$, где

$$U_2(i,j) = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} & i & & & & j & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(на диагонали стоят единицы, кроме i-го и j-го столбца (на i-м j-м и j-м i-м местах стоит 1, остальные нули)

- $\text{Э}_3(i, \lambda)$: $A \mapsto U_3(i, \lambda)A$, где

$$U_3(i,\lambda) = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} & i & & & & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ i \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(на диагонали стоят единицы, кроме i-го столбца, там λ, остальные элементы нули)

Элементарные преобразования столбцов — умножение на соответствующую матрицу справа.

Упражнение на дом. Доказательство.

4 Лекция 19.09.2019

Дана СЛУ с расширенной матрицей $(A \mid b)$.
Было: элементарные преобразования строк в $(A \mid b)$ сохраняют множество решений.

4.1 Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Прямой ход метода Гаусса.
Выполняя элементарные преобразования строк в $(A|b)$, приведем A к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 0 & \dots & 0 & a_{ij_1} & * & \dots & \dots & b_1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_{2j_2} & * & \dots & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{rj_r} & b_r \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{r+1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Случай 1 $\exists i \geqslant r+1 : b_i \neq 0$ (в A есть нулевая строка с $b_i \neq 0$)

Тогда в новой СЛУ i-е уравнение $0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_n = b_i$, т.е. $0 = b_i \implies$ СЛУ несовместна.

Случай 2 либо $r = m$, либо $b_i = 0 \quad \forall i \geqslant r+1$

Выполняя элементарные преобразования строк приводим матрицу к улучшенному ступенчатому виду – обратный ход метода Гаусса

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|c} 0 & \dots & 0 & 1 & * & 0 & * & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & * & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & b_3 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & b_r \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Неизвестные $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_r}$ называются *главными*, а остальные *свободными*, где j_i – индексы столбцов с ведущими элементами.

Подслучай 2.1 $r = n$, т.е. все неизвестные – главные

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = b_1 \\ x_2 = b_2 \\ \quad\vdots \\ x_r = b_r \end{cases} \quad \text{— единственное решение.}$$

Подслучай 2.2 $r < n$, т.е. есть хотя бы одна свободная неизвестная.

Перенесем в каждом уравнении все члены со свободными неизвестными в правую часть, получаем выражения всех главных неизвестных через свободные, эти выражения называется *общим решением исходной СЛУ.*

Пример. Улучшенный ступенчатый вид:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

Главные неизвестные: x_1, x_3.
Свободные неизвестные: x_2, x_4.
$x_2 = t_1, x_4 = t_2$ – параметры.

$$\begin{cases} x_1 = -1 - 3t_1 - t_2 \\ x_2 = t1 \\ x_3 = 4 + 2t_2 \\ x_4 = t_2 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - 3t_1 - t_2 \\ t_1 \\ 4 + 2t_2 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = -1 - 3x_2 - x_4 \\ x_3 = 4 + 2x_4 \end{cases}$$

Следствие. Всякая СЛУ с коэффициентами из $\mathbb{R}$ имеет либо 0 решений, либо одно решение, либо бесконечно много решений.

4.2 Однородные системы линейных уравнений

Определение 14. СЛУ называется однородной (ОСЛУ), если все её правые части равны 0. Расширенная матрица: $(A \mid 0)$.

Очевидный факт. Всякая ОСЛУ имеет нулевое решение ($x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$).

Следствие. Всякая ОСЛУ либо имеет ровно 1 решение (нулевое), либо бесконечно много решений.

Следствие. Всякая ОСЛУ, у которой число неизвестных больше числа уравнений, имеет ненулевое решение (бесконечно много ненулевых решений).

Доказательство. В ступенчатом виде будет хотя бы одна свободная неизвестная. Придавая ей ненулевое значение, получим ненулевое решение. ■

4.3 Связь между множеством решений системы линейных уравнений и множеством решений соответствующей однородной системы.

Частное решение СЛУ — это какое-то одно её решение.

Утверждение 4.1. *Пусть $Ax = b$ – совместная СЛУ,*
x_0 – частное решение $Ax = b$,
$S \subset \mathbb{R}^n$ – множество решений ОСЛУ $Ax = 0$,
$L \subset \mathbb{R}^n$ – множество решений $Ax = b$.
Тогда, $L = x_0 + S$, где $x_0 + S = \{x_0 + v \mid v \in S\}$.

Доказательство.

1. Пусть $u \in L$ (u – решение $Ax = b$), положим $v = u - x_0$.
   Тогда, $Av = A(u - x_0) = Au - Ax_0 = b - b = 0 \implies v \in S \implies L \subseteq x_0 + S$.
2. Пусть $v \in S$ (v – решение $Ax = 0$), положим $u = x_0 + v$.
   Тогда, $Au = A(x_0 + v) = Ax_0 + Av = b + 0 = b \implies u \in L \implies x_0 + S \subseteq L$.

Значит, $x_0 + S = L$. ■

4.4 Матричные уравнения вида $AX = B$ и $XA = B$, общий метод их решения

Два типа матричных уравнений:

1. $AX = B$
   A и B известны, X – неизвестная матрица.
2. $XA = C$
   A и C известны, X – неизвестная матрица.

Из второго типа получается первый транспонированием матриц: $XA = C \iff A^T X^T = B^T$, то есть достаточно уметь решать только уравнения первого типа.

$\underset{n\times m}{A}\underset{m\times p}{X} = \underset{n\times p}{B}$ – это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} AX^{(1)} = B^{(1)} \\ AX^{(2)} = B^{(2)} \\ \qquad\vdots \\ AX^{(p)} = B^{(p)} \end{cases}$$

Этот набор СЛУ надо решать одновременно методом Гаусса.

Записываем матрицу $(A \mid B)$ и элементарными преобразованиями строк с ней приводим A к улучшенному ступенчатому виду.

Получаем $(A' \mid B')$, где A' имеет улучшенный ступенчатый вид.

Остается выписать общее решение для каждой СЛУ

$$\begin{cases} A'x^{(1)} = B'^{(1)} \\ A'x^{(2)} = B'^{(2)} \\ \qquad\vdots \\ A'x^{(p)} = B'^{(p)} \end{cases}$$

4.5 Обратные матрицы

Определение 15. Матрица $B \in M_n$ называется *обратной*, к A, если $AB = BA = E$.
Обозначение: $B = A^{-1}$.

Факты:

1. Если $\exists A^{-1}$, то она определена однозначно

   Доказательство. Пусть B, B' – две матрицы, обратные к A. Тогда $B = B(AB') = (BA)B' = B'$. ■

2. Если $AB = E$ для некоторой $B \in M_n$, то $BA = E$ автоматически и тогда $B = A^{-1}$

   Замечание. Доказывается на Лекции 8.

Следствие. A^{-1} является решение матричного уравнения $AX = E$ (если решение существует).

4.6 Перестановки на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$

Определение 16. *Перестановкой (подстановкой)* на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$ называется всякое биективное (взаимно однозначное) отображение множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ в себя.

$$\sigma \colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}.$$

S_n – множество всех перестановок на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Запись:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix} \text{ либо } \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \ldots & i_n \\ \sigma(i_1) & \sigma(i_2) & \sigma(i_3) & \ldots & \sigma(i_n) \end{pmatrix}.$$

Здесь, $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Замечание. Количество всех перестановок длины n: $|S_n| = n!$

5 Лекция 23.09.2019

5.1 Инверсии в перестановке

Обозначение: S_n – множество всех перестановок из n элементов.

Пусть $\sigma \in S_n$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i \neq j$

Определение 17. Пара $\{i, j\}$ (неупорядоченная) образует *инверсию* в σ, если числа $i - j$ и $\sigma(i) - \sigma(j)$ имеют разный знак (то есть либо $i < j$ и $\sigma(i) > \sigma(j)$, либо $i > j$ и $\sigma(i) < \sigma(j)$).

5.2 Знак и чётность перестановки

Определение 18. *Знак* перестановки σ – это число $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{<\text{число инверсий в } \sigma>}$.

Определение 19. Перестановка σ называется *четной*, если $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$ (четное количество инверсий), и *нечетной* если $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$ (нечетное количество инверсий).

Примеры.

σ	$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$
число инверсий	0	1
sgn(σ)	1	-1
четность	четная	нечетная

σ	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$
число инверсий	0	1	2	3	2	1
sgn(σ)	1	-1	1	-1	1	-1
четность	четная	нечетная	четная	нечетная	четная	нечетная

Замечание. число инверсий в $\sigma \in S_n \leqslant \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, равенство достигается при $\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ n & n-1 & \dots & 1\end{pmatrix}$

5.3 Произведение перестановок

Определение 20. *Произведением* (или *композицией*) двух перестановок $\sigma, \rho \in S_n$ называется такая перестановка $\sigma\rho \in S_n$, что $(\sigma\rho)(x) := \sigma(\rho(x)) \quad \forall x \in \{1, \dots, n\}$.

Пример.
$\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $\rho = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$
$\sigma\rho = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$
$\rho\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$
Видно, что $\sigma\rho \neq \rho\sigma \implies$ произведение перестановок не обладает свойством коммутативности.

5.4 Ассоциативность произведения перестановок

Утверждение 5.1. *Умножение перестановок ассоциативно, то есть* $\sigma(\tau\pi) = (\sigma\tau)\pi \ \forall \sigma, \tau, \pi \in S_n$.

Доказательство. $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ имеем:
$[\sigma(\tau\pi)](i) = \sigma((\tau\pi)(i)) = \sigma(\tau(\pi(i)))$.
$[(\sigma\tau)\pi](i) = (\sigma\tau)(\pi(i)) = \sigma(\tau(\pi(i)))$. ∎

5.5 Тождественная перестановка

Определение 21. Перестановка $id = \begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ 1 & 2 & \dots & n\end{pmatrix} \in S_n$ называется *тождественной* перестановкой.

Свойства:
$\forall \sigma \in S_n \quad id \cdot \sigma = \sigma \cdot id = \sigma$.
$\operatorname{sgn}(id) = 1$.

5.6 Обратная перестановка и её знак

Определение 22. $\sigma \in S_n$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \implies$ подстановка $\sigma^{-1} := \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ называется *обратной* к σ перестановкой.

Свойства: $\sigma \cdot \sigma^{-1} = id = \sigma^{-1} \cdot \sigma$

5.7 Теорема о знаке произведения перестановок

Теорема 5.2. *$\sigma, \rho \in S_n \implies \operatorname{sgn}(\sigma\rho) = \operatorname{sgn}\sigma \cdot \operatorname{sgn}\rho$.*

Доказательство. Для каждой пары $i < j$ введем следующие числа:

$$\alpha(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{если } \{i,j\} \text{ образует инверсию в } \rho \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\beta(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{если } \{\rho(i),\rho(j)\} \text{ образует инверсию в } \sigma \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\gamma(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{если } \{i,j\} \text{ образует инверсию в } \sigma\rho \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

"число инверсий в ρ" $= \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \alpha(i,j)$

"число инверсий в $\sigma\rho$" $= \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \gamma(i,j)$

"число инверсий в σ" $= \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \beta(i,j)$ – Почему?

Когда $\{i,j\}$ пробегает все неупорядоченные пары в $\{1,2,\dots,n\}$, пара $\{\rho(i),\rho(j)\}$ тоже пробегает все неупорядоченные пары в $\{1,2,\dots,n\}$.

Зависимость $\gamma(i,j)$ от $\alpha(i,j)$ и $\beta(i,j)$:

$\alpha(i,j)$	0	0	1	1
$\beta(i,j)$	0	1	0	1
$\gamma(i,j)$	0	1	1	0

Вывод: $\alpha(i,j) + \beta(i,j) \equiv \gamma(i,j) \pmod 2$.

Тогда $\operatorname{sgn}(\sigma\rho) = (-1)^{\sum\gamma(i,j)} = (-1)^{\sum\beta(i,j)+\sum\alpha(i,j)} = (-1)^{\sum\alpha(i,j)} \cdot (-1)^{\sum\beta(i,j)} = \operatorname{sgn}\sigma \cdot \operatorname{sgn}\rho$. ∎

Следствие. $\sigma \in S_n \implies \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma)$.

Доказательство. $\sigma\sigma^{-1} = id \implies \operatorname{sgn}(\sigma\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(id) \implies \operatorname{sgn}\sigma\operatorname{sgn}\sigma^{-1} = 1 \implies \operatorname{sgn}\sigma = \operatorname{sgn}\sigma^{-1}$. ∎

Упражнение на дом: *Показать, что число инверсий в σ^{-1} такое же, как в σ.*

5.8 Транспозиции, знак транспозиции

Пусть $i, j \in \{1,2,\dots,n\}$, $i \neq j$.
Рассмотрим перестановку $\tau_{ij} \in S_n$, такую что
$\tau_{ij}(i) = j$.
$\tau_{ij}(j) = i$.
$\tau_{ij}(k) = k\ \forall k \neq i,j$.

Определение 23. Перестановки вида τ_{ij} называются *транспозициями.*

Замечание. τ – траспозиция $\implies \tau^2 = id, \tau^{-1} = \tau$.

Определение 24. Перестановки вида $\tau_{i,i+1}$ называются *элементарными траспозициями.*

Лемма 5.3. *$\tau \in S_n$ – транспозиция $\implies \operatorname{sgn}(\tau) = -1$.*

Доказательство. Пусть $\tau = \tau_{ij}$, можем считать, что $i < j$.

$$\tau := \begin{pmatrix} 1 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n \\ 1 & \dots & i-1 & j & i+1 & \dots & j-1 & i & j+1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Посчитаем инверсии:
$\{i, j\}$
$\{i, k\}$ при $i+1 \leqslant k \leqslant j-1$, всего $= j-i-1$
$\{k, j\}$ при $i+1 \leqslant k \leqslant j-1$, всего $= j-i-1$
Значит, всего инверсий $2(j-i-1)+1 \equiv 1 \pmod 2 \implies \operatorname{sgn}(\tau) = -1$. ■

Следствие. При $n \geqslant 2$ отображение $\sigma \to \sigma\tau_{12}$ является биекцией между множеством четных перестановок в S_n и множеством нечетных перестановок в S_n.

Следствие. При $n \geqslant 2$ количество нечетных перестановок в S_n равно количеству четных перестановок в S_n и равно $\frac{n!}{2}$.

Теорема 5.4. *Всякая перестановка $\sigma \in S_n$ может быть разложена в произведение конечного числа элементарных транспозиций.*

Доказательство.

$$\sigma \in S_n := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\sigma\tau_{i,i+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & i+1 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(i+1) & \sigma(i) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

При умножении справа на $\tau_{i,i+1}$ в нижней строке меняются местами i-ый и $(i+1)$-ый элементы.

Тогда, домножив σ на подходящее произведение $\tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \dots \cdot \tau_k$ элементарных траспозиций, можем добиться, что нижняя строка есть $(1, 2, \dots, n) \implies \sigma\tau_1\tau_2 \dots \tau_k = id$.

Теперь, домножая справа на $\tau_k\tau_{k-1} \dots \tau_1$, получим $\sigma = \tau_k\tau_{k-1} \dots \tau_1$. ■

5.9 Определитель квадратной матрицы

Определение 25. Определителем матрицы $A \in M_n$ называется число

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}.$$

($\sum_{\sigma \in S_n}$ – сумма по всем перестановкам)

Другие обозначения: $|A|$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

5.10 Определители порядков 2 и 3

- $n = 2$
  $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$
  $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
- $n = 3$
  $S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}$
  $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$

6 Лекция 26.09.2019

Напомним что такое определитель:

$$\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}. \tag{$\star$}$$

Замечание. Каждое слагаемое содержит ровно 1 элемент из каждой строки и ровно 1 элемент из каждого столбца.

6.1 Свойства определителей

Свойство T $\det A = \det A^T$.

Доказательство. Пусть $B = A^T$, тогда $b_{ij} = a_{ji}$.

$$\begin{aligned}\det A^T = \det B = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} \dots b_{n\sigma(n)} &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)^{-1}} a_{2\sigma(2)^{-1}} \dots a_{n\sigma(n)^{-1}} \quad // \text{ замена } \sigma^{-1} = \rho \text{ } // \\ &= \sum_{\rho\in S_n} \operatorname{sgn}(\rho) a_{1\rho(1)} a_{2\rho(2)} \dots a_{n\rho(n)} = \det A.\end{aligned}$$ ■

Свойство 0 Если в A есть нулевая строка или нулевой столбец, то $\det A = 0$.

Доказательство. В связи со свойством T можно доказать только для строк.

Так как в каждом слагаемом $(\star)$ присутствует элемент из каждой строки, то все слагаемые в $(\star)$ равны 0 $\implies$ $detA = 0$. ■

Свойство 1 Если в A все элементы одной строки или одного столбца домножить на одно и то же число λ, то $\det A$ тоже умножается на λ.

$$\begin{vmatrix} * & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda * & \lambda * & \lambda * & \lambda * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & \dots & * \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} * & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & * & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & \dots & * \end{vmatrix}$$

Доказательство. В связи со свойством T можно доказать только для строк.

$A_{(i)} \to \lambda A_{(i)} \implies a_{ij} \to \lambda a_{ij}\ \forall j \implies$ в $(\star)$ каждое слагаемое умножается на $\lambda \implies \det A$ умножается на λ. ■

Свойство 2 Если $A_{(i)} = A^1_{(i)} + A^2_{(i)}$, то $\det A = \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A^1_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A^2_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$.

Пример:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

Аналогично, если $A^{(j)} = A^{(j)}_1 + A^{(j)}_2$, то $\det A = \det(A^{(1)} \cdots A^{(j)}_1 \cdots A^{(n)}) + \det(A^{(1)} \cdots A^{(j)}_2 \cdots A^{(n)})$.

Доказательство. В связи со свойством T можно доказать только для строк.

Пусть $A^1_{(i)} = (a'_{i1} a'_{i2} \cdots a'_{in})$, $A^2_{(i)} = (a''_{i1} a''_{i2} \dots a''_{in}) \implies a_{ij} = a'_{ij} + a''_{ij}$.

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots (a'_{i\sigma(i)} + a''_{i\sigma(i)}) \dots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a'_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a''_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} \\ &= \det A_1 + \det A_2.\end{aligned}$$ ■

Свойство 3 Если в A поменять местами две строки или два столбца, то $\det A$ поменяет знак.

Доказательство. В связи со свойством Т можно доказать только для строк.

Пусть $A = (a_{ij}) \in M_n$, $B = (b_{ij}) \in M_n$ – матрица, полученная из А перестановкой p-ой и q-ой строк.

Так же, $\tau = \tau_{pq}$.

$$b_{ij} = a_{\tau(i)j} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{если } i \neq p, q \\ a_{qj}, & \text{если } i = p \\ a_{pj}, & \text{если } i = q \end{cases}$$

$$b_{ij} = a_{\tau(i)j} \implies b_{i\sigma(i)} = a_{\tau(i)\sigma(i)} = a_{\tau(i),(\sigma\tau\tau)(i)}$$

$$\begin{aligned}
\det B &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot b_{1\sigma(1)} \cdot b_{2\sigma(2)} \dots b_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{\tau(1),\sigma(1)} \cdot a_{\tau(2),\sigma(2)} \dots a_{\tau(n),\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{\tau(1),(\sigma\tau\tau)(1)} \cdot a_{\tau(2),(\sigma\tau\tau)(2)} \dots a_{\tau(n),(\sigma\tau\tau)(n)} \\
&\quad // \text{ уберем } \tau(i)\text{, переупорядочив элементы в произведении } // \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1,(\sigma\tau)(1)} \cdot a_{2,(\sigma\tau)(2)} \dots a_{n,(\sigma\tau)(n)} \\
&= -\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma\tau) \cdot a_{1,(\sigma\tau)(1)} \cdot a_{2,(\sigma\tau)(2)} \dots a_{n,(\sigma\tau)(n)} \\
&\quad // \text{ замена } \rho = \sigma\tau \ // \\
&= -\sum_{\rho \in S_n} \operatorname{sgn}(\rho) \cdot a_{1,\rho(1)} \cdot a_{2,\rho(2)} \dots a_{n,\rho(n)} \\
&= -\det A.
\end{aligned}$$

■

Свойство 4 Если к строке (столбцу) прибавить другую строку (столбец), умноженный на скаляр, то $\det A$ не изменится.

Доказательство. В связи со свойством Т можно доказать только для строк.

$$A \to A' = \begin{pmatrix} \dots \\ A_{(i)} + \lambda A_{(j)} \\ \dots \\ A_{(j)} \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$|A'| = \begin{vmatrix} \dots \\ A_{(i)} \\ \dots \\ A_{(j)} \\ \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dots \\ \lambda A_{(j)} \\ \dots \\ A_{(j)} \\ \dots \end{vmatrix} = |A| + \lambda \begin{vmatrix} \dots \\ A_{(j)} \\ \dots \\ A_{(j)} \\ \dots \end{vmatrix} = |A| + \lambda 0 = |A|.$$

■

Свойство 5 Если в А есть две одинаковые строки (столбца), то $\det A = 0$.

Доказательство. В связи со свойством Т можно доказать только для строк.

При перестановке двух одинаковых строк (столбцов):

– А не изменится $\implies$ $\det A$ не изменится

– по свойству 3: $\det A$ меняет знак

Значит, $\det A = -\det A \implies \det A = 0$. ■

Определение 26. Матрица называется *верхнетреугольной*, если $a_{ij} = 0$ при $i > j$, *нижнетреугольной*, если $a_{ij} = 0$ $i < j$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ – верхнетреугольная}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ – нижнетреугольная}$$

Замечание. Всякая ступенчатая квадратная матрица верхнетреугольна.

Свойство 6 Если A верхнетреугольная или нижнетреугольная, то $\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.

Доказательство. В связи со свойством T можно доказать только для строк.

Выделим в ($\star$) слагаемые, которые могут быть отличны от нуля.

$$a_{1,\sigma(1)}\dots a_{n-1,\sigma(n-1)}a_{n,\sigma(n)} \neq 0$$

$$\implies a_{n\sigma(n)} \neq 0 \implies \sigma(n) = n.$$

$$\implies a_{n-1,\sigma(n-1)} \neq 0 \implies \sigma(n-1) \in \{n-1, n\},$$

но n уже занято, значит $\sigma(n-1) = n-1$, и так далее.

Рассуждая аналогично, получаем $\sigma(k) = k\ \forall k \implies \sigma = id$ – это единственное слагаемое в ($\star$), которое может быть не равно 0.

$$\operatorname{sgn}(id) = +1 \implies \det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

■

Следствие. $\det \operatorname{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1a_2\dots a_4$.

Следствие. $\det E = 1$.

6.2 Поведение определителя при элементарных преобразованиях строк (столбцов)

$Э_1(i, j, \lambda)$: $\det A$ не меняется.
$Э_2(i, j)$: $\det A$ меняет знак.
$Э_3(i, \lambda)$: $\det A$ умножается на λ.

Алгоритм. Элементарными преобразованиями строк A приводится к ступенчатому ($\to$ верхнетреугольному) виду, в котором $\det A$ легко считается.

7 Лекция 30.09.2019

7.1 Определитель с углом нулей

Предложение.

$$A = \left(\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline 0 & R \end{array}\right) \text{ или } A = \left(\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline Q & R \end{array}\right),\ P \in M_k,\ R \in M_{n-k} \implies \det A = \det P \det R.$$

Матрица с углом нулей:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} * & * & * & * \\ \hline 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{array}\right)$$

НЕ матрица с углом нулей:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ \hline 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{array}\right)$$

Доказательство. В силу свойства T достаточно доказать для строк.

1. Элементарными преобразованиями строк в A, приведем $(P \mid Q)$ к виду $(P' \mid Q')$, в котором P' имеет ступенчатый вид. При этом $\det A$ и $\det P$ умножаются на один и тот же скаляр $\alpha \neq 0$.

2. Элементарными преобразованиями строк в A, приведем $(0 \mid R)$ к виду $(0 \mid R')$, в котором R' имеет ступенчатый вид. При этом $\det A$ и $\det R$ умножаются на один и тот же скаляр $\beta \neq 0$.

$\begin{pmatrix} P' & Q' \\ 0 & R' \end{pmatrix}$ – верхнетреугольная $\implies \det \begin{pmatrix} P' & Q' \\ 0 & R' \end{pmatrix} = \det P' \det R'$.

$$\alpha\beta \det A = \det \begin{pmatrix} P' & Q' \\ 0 & R' \end{pmatrix} = \det P' \det R' = (\alpha \det P)(\beta \det R) = \alpha\beta \det P \det R.$$ ■

7.2 Определитель произведения матриц

Теорема 7.1. $A, B \in M_n \implies \det(AB) = \det A \det B$.

Доказательство. Выполним с матрицей A одно элементарное преобразование строк, получим матрицу A'.

$$A \rightsquigarrow A' = UA.$$

Такое же преобразование строк с AB.

$$AB \rightsquigarrow U(AB) = (UA)B = A'B.$$

Таким образом, сначала выполнив элементарное преобразование и домножив на матрицу B, либо домножив на B и затем применив элементарное преобразование, получим тот же результат.

Тогда, цепочка элементарных преобразований строк:

$$A \rightsquigarrow C \text{ – улучшенный ступенчатый вид.}$$

Так же цепочка для AB:

$$AB \rightsquigarrow CB.$$

При этом, $\det A$ и $\det AB$ умножились на один и тот же скаляр $\alpha \neq 0$

$$\det C = \alpha \det A.$$

$$\det CB = \alpha \det AB.$$

Случай 1 Последняя строка состоит из нулей:

$$\begin{aligned} &C_{(n)} = (0 \dots 0) \\ &\implies [CB]_{(n)} = C_{(n)} B = (0 \dots 0) \\ &\implies \det CB = 0 = 0 \cdot \det B = \det C \det B. \end{aligned}$$

Случай 2 Последняя строка ненулевая:
$$C_{(n)} \implies C = E,$$

так как матрица C имеет улучшенный ступенчатый вид.

Значит,
$$\det CB = \det B = 1 \cdot \det B = \det C \cdot \det B.$$

Из этих двух случаем следует, что $\det CB = \det C \det B$.
Сокращая α получаем,
$$\det CB = \det C \det B \implies \det AB = \det A \det B.$$
■

Замечание. Пусть $A \in M_n$, $A_{\text{ул}}$ – её улучшенный ступенчатый вид.
$$\det A \neq 0 \iff A_{\text{ул}} = E.$$

7.3 Дополнительные миноры и алгебраические дополнения к элементам квадратной матрицы

Определение 27. *Дополнительным минором* к элементу a_{ij} называется определитель $(n-1)\times(n-1)$ матрицы, получающейся из A вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.
Обозначение: $\overline{M}_{ij}$.

Определение 28. *Алгебраическим дополнением* к элементу a_{ij} называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j}\overline{M}_{ij}$.

7.4 Лемма об определителе матрицы, содержащей ровно один ненулевой элемент в некоторой строке

Лемма 7.2. Пусть $a_{ik} = 0$ при всех $k \neq j$. Тогда $\det A = a_{ij} \cdot A_{ij}$.

Доказательство.
$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} P & U & Q \\ \hline 0\dots0 & a_{ij} & 0\dots0 \\ \hline R & V & S \end{array}\right).$$

Переставляя соседние строки $i-1$ раз, вытолкнем i-ю строку наверх.
$$A' = \left(\begin{array}{c|c|c} 0\dots0 & a_{ij} & 0\dots0 \\ \hline P & U & Q \\ \hline R & V & S \end{array}\right)$$

Переставляя соседние столбцы $j-1$ раз, переместим j-й столбец на первое место.
$$A'' = \left(\begin{array}{c|c|c} a_{ij} & 0\dots0 & 0\dots0 \\ \hline U & P & Q \\ \hline V & R & S \end{array}\right)$$

$\det A'' = a_{ij} \det \left(\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline R & S \end{array}\right) = a_{ij}\overline{M}_{ij}.$

$\implies detA = (-1)^{i-1+j-1}\det A'' = (-1)^{i+j}a_{ij}\overline{M}_{ij} = a_{ij}A_{ij}.$ ■

7.5 Разложение определителя по строке (столбцу)

Теорема 7.3. *При любом фиксированном* $i \in \{1, 2, \dots, n\}$,
$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \text{ – разложение по } i\text{-й строке.}$$

Аналогично, для любого фиксированного $j \in \{1, 2, \dots, n\}$,
$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \text{ – разложение по } j\text{-у столбцу.}$$

Доказательство. В силу свойства T достаточно доказать для строк.
$$A_{(i)} = (a_{i1}, 0, \dots, 0) + (0, a_{i2}, 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, 0, a_{in}).$$

Требуемое следует из свойства 2 определителей и леммы. ■

7.6 Лемма о фальшивом разложении определителя

Лемма 7.4.

1. При любых $i, k \in \{1, 2, \ldots, n\} : i \neq k \implies \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = 0$,
2. При любых $j, k \in \{1, 2, \ldots, n\} : j \neq k \implies \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ik} = 0$.

Доказательство. В силу свойства T достаточно доказать для строк.

Пусть $B \in M_n$ – матрица, полученная из A заменой k-й строки на i-ю.

$$B = \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \ldots \\ A_{(i)} \\ \ldots \\ A_{(i)} \\ \ldots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$$

В B есть две одинаковые строки $\implies \det B = 0$.

Разлагая $\det B$ по k-й строке, получаем

$$\det B = \sum_{j=1}^{n} b_{kj} B_{kj} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj}.$$ ■

7.7 Обратная матрица, её единственность

Пусть дана $A \in M_n$.

Определение 29. Матрица $B \in M_n$ называется *обратной* к A, если $AB = BA = E$.

Обозначение: A^{-1}.

Лемма 7.5. Если $\exists A^{-1}$, то она единственна.

Доказательство. Пусть $B, C \in M_n$ такие, что $AB = BA = E$ и $AC = CA = E$. Тогда,

$$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C \implies B = C.$$ ■

7.8 Невырожденные матрицы

Определение 30. Матрица $A \in M_n$ называется *невырожденной*, если $\det A \neq 0$, и *вырожденной* иначе (то есть $\det A = 0$).

7.9 Определитель обратной матрицы

Лемма 7.6. Если $\exists A^{-1}$, то $\det A \neq 0$.

Доказательство. $AA^{-1} = E \implies \det(AA^{-1}) = \det E \implies \det A \det(A^{-1}) = 1$. ■

7.10 Присоединённая матрица

Определение 31. *Присоединенной* к A матрицей называется матрица $\widehat{A} = (A_{ij})^T$.

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

7.11 Критерий обратимости квадратной матрицы, явная формула для обратной матрицы

Теорема 7.7. *A обратима (то есть $\exists A^{-1}$) $\iff$ A невырождена ($\det A \neq 0$), при этом $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \widehat{A}$.*

Доказательство. Утверждение в одну сторону следует из леммы 2.

Пусть $\det A \neq 0$. Покажем, что $\frac{1}{detA}\widehat{A} = A^{-1}$. Для этого достаточно доказать, что $A\widehat{A} = \widehat{A}A = \det A \cdot E$.
Для $X = A\widehat{A}$ имеем

$$x_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}[\widehat{A}]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} detA, & \text{при } i = j \\ 0, & \text{при } i \neq j \end{cases}.$$

Для $Y = \widehat{A}A$ имеем

$$y_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [\widehat{A}]_{ik}a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ki}a_{kj} = \begin{cases} detA, & \text{при } i = j \\ 0, & \text{при } i \neq j \end{cases}.$$

■

8 Лекция 2.11.2019

8.1 Следствия из критерия обратимости квадратной матрицы

Следствие. Если $AB = E$, то $BA = E$ (и тогда $A = B^{-1}$, $B = A^{-1}$).

Доказательство.

$$AB = E \implies \det A \det B = 1 \implies \det A \neq 0 \implies \exists A^{-1}.$$

$$BA = EBA = (A^{-1}A)BA = A^{-1}(AB)A = A^{-1}A = E.$$

■

Следствие. $A, B \in M_n \implies AB$ обратима $\iff$ обе A, B обратимы. При этом $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Доказательство. Эквивалентность ($\iff$) следует из условия $\det AB = \det A \det B$.

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = E.$$ ■

8.2 Формулы Крамера

Пусть есть СЛУ $Ax = b(\star)$, $A \in M_n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Также, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $A_i = (A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, b, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)})$.

Теорема 8.1. *Если* $\det A \neq 0$*, то СЛУ* $(\star)$ *имеет единственное решение и его можно найти по формулам:*

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}.$$

Доказательство. $\det A \neq 0 \implies \exists A^{-1} \implies (\star) \iff x = A^{-1}b$ – единственное решение.

$$b = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 A^{(1)} + x_2 A^{(2)} + \dots + x_n A^{(n)}.$$

$$\begin{aligned}
\det A_i &= \det \left(A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, x_1 A^{(1)} + \dots + x_n A^{(n)}, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)} \right) \\
&= x_1 \det \left(A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, A^{(1)}, A^{(i+1)}), \dots A^{(n)} \right) \\
&\quad + x_2 \det \left(A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, A^{(2)}, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)} \right) \\
&\quad + \dots + \\
&\quad + x_n \det \left(A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, A^{(n)}, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)} \right) \\
&= x_i \det A \qquad \text{// Все слагаемые кроме i-го равны 0.}
\end{aligned}$$ ■

8.3 Понятие поля.

Определение 32. *Полем* называется множество F, на котором заданы две операции "сложение" $((a, b) \to a + b)$ и "умножение" $((a, b) \to a \cdot b)$, причем $\forall a, b, c \in F$ выполнены следующие условия:

1. $a + b = b + a$ (коммутативность сложения)
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность сложения)
3. $\exists 0 \in F : 0 + a = a + 0 = a$ (нулевой элемент)
4. $\exists(-a) \in F : a + (-a) = (-a) + a = 0$ (противоположный элемент)
   ↑ абелева группа ↑
5. $a(b + c) = ab + ac$ (дистрибутивность)
6. $ab = ba$ (коммутативность умножения)
7. $(ab)c = a(bc)$ (ассоциативность умножения)
8. $\exists 1 \in F \setminus \{0\} : 1a = a1 = a$ (единица)
9. Если $a \neq 0$, $\exists a^{-1} \in F : aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ (обратный элемент)

8.4 Простейшие примеры.

$\mathbb{Q}$ – Рациональные числа.
$\mathbb{R}$ – Действительные числа.
$F_2 = \{0, 1\}$, сложение и умножение по модулю 2.

8.5 Построение поля комплексных чисел.

Ближайшая цель — построить поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел.
Неформально, $\mathbb{C}$ – это наименьшее поле со следующими свойставми:

1. $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$.
2. Многочлен x^2+1 имеет корень, то есть $\exists i : i^2 = -1$.

8.5.1 Формальная конструкция поля $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

- $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$
- $(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1)$

Неформально, каждой такой паре (a, b) соответствует комплексное число $a + bi$:

- $(a, b) \iff a + bi$
- $(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$
- $(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = a_1a_2 + a_1b_2i + a_2b_1i + b_1b_2 \underbrace{i^2}_{=-1} = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$

8.5.2 Проверка аксиом

1, 2. Очевидны.

3. $0 = (0, 0)$.
4. $-(a, b) = (-a, -b)$.
5. Дистрибутивность
$$\begin{aligned}(a_1 + b_1i)((a_2 + b_2i) + (a_3 + b_3i)) &= (a_1 + b_1i)((a_2 + a_3) + (b_2 + b_3)i)\\ &= (a_1(a_2 + a_3) - b_1(b_2 + b_3)) + (a_1(b_2 + b_3) + b_1(a_2 + a_3))i\\ &= a_1a_2 + a_1a_3 - b_1b_2 - b_1b_3 + (a_1b_2 + a_1b_3 + b_1a_2 + b_1a_3)i\\ &= ((a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i) + ((a_1a_3 + b_1b_3) + (b_1a_3 + a_1b_3)i)\\ &= (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) + (a_1 + b_1i)(a_3 + b_3i)\end{aligned}$$
6. Коммутативность умножения – из явного вида формулы.
$$(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$$
7. Ассоциативность умножения
$$\begin{aligned}(a_1, b_1)(a_2, b_2)(a_3, b_3) &= (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1)(a_3, b_3)\\ &= (a_1a_2a_3 - b_1b_2a_3 - a_1b_2b_3 - b_1a_2b_3, a_1a_2b_3 - b_1b_2b_3 + a_1b_2a_3 + b_1a_2a_3)\\ &= (a_1, b_1)(a_2a_3 - b_2b_3, a_2b_3 + b_2a_3)\\ &= (a_1, b_1)(a_2, b_2)(a_3, b_3).\end{aligned}$$
8. $1 = (1, 0)$.
9. $(a, b) \neq 0 \implies a^2 + b^2 \neq 0$. Тогда, $(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$.
   $(a, b)\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) = \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}, \frac{-ab}{a^2+b^2} + \frac{ba}{a^2+b^2}\right) = (1, 0)$.

Итак, $\mathbb{C}$ – поле.

Проверка свойств

1. $a \in \mathbb{R} \leftrightarrow (a, 0) \in \mathbb{C}$.
   $a + b \leftrightarrow (a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$.
   $ab \leftrightarrow (a, 0)(b, 0) = (ab, 0)$
   Значит, $\mathbb{R}$ отождествляется в $\mathbb{C}$.
2. $i = (0, 1) \implies i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$.

8.6 Алгебраическая форма комплексного числа, его действительная и мнимая части.

Определение 33. Представление числа $z \in \mathbb{C}$ в виде $a+bi$, где $a, b \in \mathbb{R}$ называется его *алгебраической формой.* Число i называется *мнимой единицей.*

$a =: Re(z)$ – *действительная* часть числа z.
$b =: Im(z)$ – *мнимая* часть числа z.

Числа вида bi, где $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, называются *чисто мнимыми.*

8.7 Комплексное сопряжение.

Определение 34. Число $\overline{z} := a - bi$ называется *комплексно сопряженным* к числу $z = a + bi$.
Операция $z \to \overline{z}$ называется *комплексным сопряжением.*

8.7.1 Свойства комплексного сопряжения

- $\overline{\overline{z}} = z$.
- $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$.
- $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

Доказательство.

- $\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{a+bi}} = \overline{a-bi} = a + bi = z$.
- $\overline{z+w} = \overline{(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)} = \overline{(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i} = (a_1+a_2)-(b_1+b_2)i = (a_1-b_1i)+(a_2-b_2i) = \overline{z}+\overline{w}$.
- $\overline{z} \cdot \overline{w} = (a_1-b_1i)(a_2-b_2i) = (a_1a_2-b_1b_2)-(a_1b_2+a_2b_1)i = \overline{zw}$. ■

8.8 Геометрическая модель комплексных чисел, интерпретация сложения и сопряжения в этой модели.

Числу $z = a+bi$ соответствует точка (или вектор) на плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами (a, b). Сумме $z+w$ соответствует сумма соответствующих векторов. Сопряжение $z \to \overline{z}$ – это отражение z относительно действительной оси.

9 Лекция 7.11.2019

9.1 Модуль комплексного числа, его свойства

Определение 35. Число $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ называется *модулем числа* $z = a + bi \in \mathbb{C}$ (то есть длина соответствующего вектора).

Свойства

1. $|z| \geqslant 0$, причем $|z| = 0 \iff z = 0$.
2. $|z + w| \leqslant |z| + |w|$ (неравенство треугольника).
   Пусть $z = a + bi$, $w = c + di$.
$$\begin{aligned}
|z+w| &\leqslant |z| + |w| \\
\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} &\leqslant \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \\
(a+c)^2 + (b+d)^2 &\leqslant a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \\
ac + bd &\leqslant \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \\
ac + bd &\leqslant \sqrt{(ac)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 + (bd)^2} \\
(ac)^2 + (bd)^2 + 2acbd &\leqslant (ac)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 + (bd)^2 \\
2acbd &\leqslant (ad)^2 + (bc)^2 \\
0 &\leqslant (ad)^2 + (bc)^2 - 2abcd \\
0 &\leqslant (ad - bc)^2
\end{aligned}$$
3. $z\overline{z} = |z|^2$.
   $z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$
4. $|zw| = |z||w|$.
   $|zw|^2 = (zw) \cdot (\overline{zw}) = z \cdot w \cdot \overline{z} \cdot \overline{w} = |z|^2|w|^2$.

Замечание. Из 3) следует, что для $\forall z \neq 0$, $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, то есть $(a + bi)^{-1} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$

9.2 Аргумент комплексного числа

Пусть $z = a + bi \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$.
Тогда, $z = |z|\left(\frac{a}{|z|} + \frac{b}{|z|}i\right)$, при этом $\left(\frac{a}{|z|}\right)^2 + \left(\frac{b}{|z|}i\right)^2 = 1$
Значит, $\frac{a}{|z|}$ и $\frac{b}{|z|}$ являются синусом и косинусом некоторого угла.

Определение 36. *Аргументом числа* $z = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ называется число $\varphi \in \mathbb{R}$, такое что
$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$
$$\sin\varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

В геометрических терминах, φ есть угол между осью Ox и соответствующим вектором.

Замечание. При $z \neq 0$, аргумент определен с точностью до $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Замечание. При $z = 0$, удобно считать что любое φ является аргументом.

9.3 Тригонометрическая форма комплексного числа

$Arg(z) :=$ множество всех аргументов числа z.
$arg(z) :=$ единственное значение из $Arg(z)$, лежащее в $[0; 2\pi)$.
$Arg(z) = arg(z) + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$
$Arg(z) = \{\varphi \in \mathbb{R} \mid \cos\varphi = \frac{a}{|z|}, \sin\varphi = \frac{b}{|z|}\}$
Тогда, $\forall z \in \mathbb{C}$, $z = |z|\left(\frac{a}{|z|} + \frac{b}{|z|}i\right) = |z|\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$, где $\varphi \in Arg(z)$.

Определение 37. Представление числа $z \in \mathbb{C}$ в виде $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется его *тригонометрической формой.*

9.4 Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме

Предложение. Пусть $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, тогда

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1||z_2|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \\ &= |z_1||z_2|((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)) \\ &= |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)). \end{aligned}$$

■

Следствие. В условиях предложения, предположим, что $z_2 \neq 0$.

Тогда $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$.

В частности, $\frac{1}{|z_2|}(\cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2)) = \frac{1}{|z_2|}(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2) = \frac{\overline{z}_2}{|z_2|^2}$.

9.5 Возведение в степень комплексных чисел в тригонометрической форме, формула Муавра

Следствие. Пусть $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) \text{ -- формула Муавра.}$$

Замечание. В комплексном анализе функция $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to e^x$, доопределяется до функции $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \to e^z$ с сохранением всех привычных свойств.

Доказывается $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $\forall\varphi \in \mathbb{C}$ – формула Эйлера.

Тогда $\forall z \in \mathbb{C}$ представляется в виде $z = |z|e^{i\varphi}$, где $\varphi \in Arg(z)$ – *показательная форма.*

9.6 Извлечение корней из комплексных чисел

Пусть $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

Определение 38. *Корнем степени n* (или *корнем n-й степени)* из числа z называется всякое число $w \in \mathbb{C}$, что $w^n = z$.

Положим $\sqrt[n]{z} := \{w \in \mathbb{C} \mid w^n = z\}$.

Опишем множество $\sqrt[n]{z}$.
$w = \sqrt[n]{z} \implies w^n = z \implies |w|^n = |z|$.
Если $z = 0$, то $|z| = 0 \implies |w| = 0 \implies w = 0 \implies \sqrt[n]{0} = \{0\}$.

Далее считаем, что $z \neq 0$.
$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
$w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$
$z = w^n = |w|^n(\cos(n\psi) + i\sin(n\psi))$
Отсюда,

$$z = w^n \iff \begin{cases} |z| = |w|^n \\ n\psi = \varphi + 2\pi k, \text{ для некоторого } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ \psi = \frac{\varphi+2\pi k}{n}, \text{ для некоторого } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

С точностью до $2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$, получается ровно n различных значений для ψ, при $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

В результате $\sqrt[n]{z} = \{w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}\}$, где $w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$

Замечание. Числа $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ лежат в вершинах правильного n-угольника с центром в начале координат.

Примеры.
$\sqrt{1} = \{\pm 1\}$
$\sqrt{-1} = \{\pm i\}$
$\sqrt[3]{1} = \{1, -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\}$
$\sqrt[4]{1} = \{\pm 1, \pm i\}$

9.7 Основная теорема алгебры комплексных чисел (без доказательства)

$\sqrt[n]{z} = \{$ корни многочлена $x^n - z\}$.

Теорема 9.1. *Всякий многочлен степени $\geqslant 1$ с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень.*

Пусть $f = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z_1 + a_0$, $n \geqslant 1$, $a_n \neq 0$, $a_i \in \mathbb{C}$, тогда $\exists c \in \mathbb{C} : f(c) = 0$.

Замечание. Свойство поля $\mathbb{C}$, сформулированное в теореме, называется *алгебраической замкнутостью.*

9.8 Деление многочленов с остатком

Пусть $\mathbb{F}$ – поле.
$\mathbb{F}[x]$:= все многочлены от переменной x с коэффициентами из $\mathbb{F}$.
$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0 \implies \deg f = n$.
$\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g$.

Определение 39. Многочлен $f(x) \in F[x]$ *делится* на $g(x) \in F[x]$, если $\exists h(x) \in F[x]$, такой что $f(x) = g(x)h(x)$.

Если $f(x)$ не делится на $g(x)$, то можно поделить с остатком.

Предложение (деление с остатком)**.** Если $f(x), g(x) \in F[x]$, $g(x) \neq 0$, то $\exists! q(x), r(x) \in F[x]$, такие что

$$\begin{cases} f(x) = q(x)g(x) + r(x) \\ \text{либо } r(x) = 0, \text{ либо } \deg r(x) < \deg g(x) \end{cases}$$

Пример. $f(x) = x^3 - 2x$, $g(x) = x + 1$.
$f(x) = (x^2 - x - 1)(x + 1) + 1$, $q(x) = (x^2 - x - 1)$, $r(x) = 1$.

9.9 Теорема Безу

Частный случай деления многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$ с остатком: $g(x) = x - c$, $\deg g(x) = 1$:
$f(x) = q(x)(x - c) + r(x)$, где либо $r(x) = 0$, либо $\deg r(x) < g(x) = 1$
Значит, $r(x) \equiv r = const \in F$.

Теорема 9.2. $r = f(c)$.

Доказательство. Подставить $x = c$ в $f(x) = (x - c)g(x) + r(x)$. ∎

Следствие. Элемент $c \in F$ является корнем многочлена $f(x) \in F[x]$ тогда и только тогда, когда $f(x)$ делится на $(x - c)$.

9.10 Кратность корня многочлена

Определение 40. *Кратностью* корня $c \in F$ многочлена $f(x)$ называется наибольшее целое k такое что, $f(x)$ делится на $(x - c)^k$.

9.11 Утверждение о том, что всякий многочлен степени n с комплексными коэффициентами имеет ровно n корней с учётом кратностей

Следствие. Пусть $f(z) \in F[z]$, $\deg f = n \geqslant 1$.
$f(x) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$.
$c_1, \dots c_s$ – корни f, $k_1, \dots, k_s$ – их кратности.

Любой многочлен с комплексными коэффициентами разлагается в произведение линейных множителей:

$$f(x) = a_n (x - c_1)^{k_1} (x - c_2)^{k_2} \dots (x - c_s)^{k_s}.$$

Иными словами, $f(z)$ имеет ровно n корней с учетом кратностей.

10 Лекция 14.11.2019

10.1 Векторные пространства, простейшие следствия из аксиом

10.1.1 Определение векторного пространства

Фиксируем поле F (можно считать, что $F = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$)

Определение 41. Множество V называется *векторным (линейным) пространством* над полем F, если на V заданы две операции

- "сложение": $V \times V \to V$, $(x, y) \mapsto x + y$.
- "умножение на скаляр": $F \times V \to V$, $(\alpha \in F, x \in V) \mapsto \alpha x$.

а также, $\forall x, y, z \in V$ и $\alpha, \beta \in F$ выполнены следующие условия (называются *аксиомами векторного пространства*):

1. $x + y = y + x$.
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$.
3. $\exists \overrightarrow{0} \in V : x + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + x = x$ (нулевой элемент).
4. $\exists -x : -x + x = x + (-x) = \overrightarrow{0}$ (противоположный элемент).
5. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.
6. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.
7. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.
8. $1 \cdot x = x$.

Определение 42. Элементы векторного пространства называются (абстрактными) *векторами*.

Пример.

1. $\mathbb{R}$ над $\mathbb{R}$ (или F над F).
2. Пространство $\mathbb{R}^n$ над $\mathbb{R}$ (или F^n над F) реализованное как пространство столбцов или строк длины n.
3. $\mathrm{Mat}_{m\times n}(F)$.
4. $F[x]$ – многочлены то переменной x с коэффициентами в $\mathbb{R}$.
5. Пространство функций на множестве M с значениями в F:

   $f : M \to \mathbb{R}$

   - сложение $(f_1 + f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x)$.
   - умножение на скаляр $(\alpha f)(x) := \alpha f(x)$.

   – это векторное пространство над F.

   Например, множество всех функций $[0, 1] \to R$.

10.1.2 Простейшие следствия из аксиом

$\forall \alpha \in F, x \in V$.

1. Элемент $\overrightarrow{0}$ единственный.

   Если $\overrightarrow{0}'$ – другой такой ноль, то $\overrightarrow{0}' = \overrightarrow{0}' + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.

2. Элемент $-x$ единственный.

   Если $(-x)'$ – другой такой противоположный элемент, то

$$(-x)' = (-x)' + \overrightarrow{0} = (-x)' + (x + (-x)) = ((-x)' + x) + (-x) = \overrightarrow{0} + (-x) = -x.$$

3. $\alpha\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.

   Рассмотрим равенство $\overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$. Домножив на α получаем $\alpha(\overrightarrow{0} + \overrightarrow{0}) = \alpha\overrightarrow{0}$.

   Раскроем скобки, $\alpha\overrightarrow{0} + \alpha\overrightarrow{0} = \alpha\overrightarrow{0}$.

   Прибавим к обоим частям обратный элемент к $\alpha\overrightarrow{0}$, получим $\alpha\overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} \implies \alpha\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.

4. $\alpha(-x) = -(\alpha x)$.

   Рассмотрим равенство $x + (-x) = \overrightarrow{0}$.

$$x + (-x) = \overrightarrow{0} \implies ax + a(-x) = 0 \implies a(-x) = -(ax).$$

5. $0 \cdot x = \overrightarrow{0}$.

   Доказывается так же, как пункт 3, но с 0 вместо $\overrightarrow{0}$.

6. $(-1) \cdot x = -x$.

   Рассмотрим равенство $1 + (-1) = 0$. Домножив на x получаем $(1 + (-1))x = 0x$.

   Раскроем скобки и воспользуемся пунктом 5 — $1x + (-1)x = 0$ или $x + (-1)x = 0$.

   Прибавим к обоим частям $-x$, получим $0 + (-1)x = -x$ или $(-1)x = -x$.

10.2 Подпространства векторных пространств

Пусть V – векторное пространство над F.

Определение 43. Подмножество $U \subseteq V$ называется *подпространством* (в V), если
1. $\overrightarrow{0} \in U$.
2. $x, y \in U \implies x + y \in U$.
3. $x \in U, \alpha \in F \implies \alpha x \in U$.

Замечание. Всякое подпространство само является векторным пространством относительно тех же операций.

Пример.

1. $\{\overrightarrow{0}\}$ и V – всегда подпространства в V.

   они называются *несобственными* подпространствами, остальные называются *собственными.*

2. Множество всех верхнетреугольных, нижнетреугольных, диагональных матриц в $M_n(F)$.

3. $F[x]_{\leqslant n}$ все многочлены в $F[x]$ степени $\leqslant n$ – подпространство в $F[x]$.

10.3 Утверждение о том, что множество решений однородной системы линейных уравнений с n неизвестными является подпространством в F^n

Предложение. Множество решений любой ОСЛУ $Ax = 0$ ($A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(F)$, $x \in F^n$) является подпространством в F^n.

Доказательство. Пусть S – множество решений ОСЛУ Ax = 0.

1. $\overrightarrow{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in S$.

2. $x, y \in S \implies Ax = \overrightarrow{0}$ и $Ay = \overrightarrow{0} \implies A(x + y) = Ax + Ay = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} \implies x + y \in S$.

3. $x \in S, \alpha \in F \implies Ax = \overrightarrow{0} \implies A(\alpha x) = \alpha(Ax) = \alpha\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} \implies \alpha x \in S$. ■

10.4 Линейная комбинация конечного набора векторов

Пусть V – векторное пространство над F и $v_1, \dots, v_k \in V$ – набор векторов.

Определение 44. *Линейной комбинацией* векторов $v_1, \dots, v_k$ называется всякое выражение вида $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$, где $\alpha_i \in F$.

10.5 Линейная оболочка подмножества векторного пространства, примеры

Пусть $S \subseteq V$ – подмножество векторного пространства.

Определение 45. *Линейной оболочкой* множества S называются множество всех векторов из V, представимых в виде линейной комбинации какого-то конечного набора векторов из S.

Обозначение: $\langle S \rangle$.

Если $S = \{v_1, \dots, v_k\}$ конечно и состоит из векторов $v_1, \dots, v_k$, то еще пишут $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ и говорят “линейная оболочка векторов $v_1, \dots, v_k$”.

Соглашение: $\langle \varnothing \rangle = \{\overrightarrow{0}\}$.

Пример.

1. $\langle \overrightarrow{0} \rangle = \{\overrightarrow{0}\}$.

2. $V = \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$, $\langle v \rangle = \{\alpha v \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ – прямая.

3. $V = \mathbb{R}^3$, v_1, v_2 – пара неколлинеарных векторов.

   Тогда, $\langle v_1, v_2 \rangle = \{a_1 v_1 + a_2 v_2 \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ – плоскость натянутая на v_1, v_2.

11 Лекция 21.11.2019

Напомним, если V – векторное пространство над полем F, то при $S \subseteq V$, линейная оболочка
$\langle S \rangle = \{$все линейные комбинации конечных наборов векторов из $S\}$

Пример.

4. $V = F^n$, $S = \{e_1, \ldots, e_n\}$, где

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix},\ \ldots\ ,\ e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\langle S \rangle = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle = F^n$.

Так как для любого $x \in F^n \implies x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix} = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n.$

11.1 Утверждение о том, что линейная оболочка системы векторов является подпространством объемлющего векторного пространства

Пусть V – векторное пространство, $S \subseteq V$.

Предложение. $\langle S \rangle$ является подпространством в V.

Доказательство.

1. Два случая:
   $S = \varnothing \implies \langle \varnothing \rangle = \{\overrightarrow{0}\} \implies \overrightarrow{0} \in \langle S \rangle$.
   $S \neq \varnothing \implies \exists V \in S \implies \underbrace{0V}_{\in \langle S \rangle} = \overrightarrow{0} \implies \overrightarrow{0} \in \langle S \rangle$.

2. Пусть $v, w \in \langle S \rangle$:
   $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m$,
   $w = \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_n w_n$, где $v_i, w_i \in S$, $\alpha_i, \beta_i \in F$.
   Тогда, $v + w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_n w_n \in \langle S \rangle$.
   (если $v_i = w_j$, то $\alpha_i v_i + \beta_j w_j = (\alpha_i + \beta_j) w_j$)

3. $v \in \langle S \rangle$, $\alpha \in F \implies v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m$
   $\implies \alpha v = (\alpha\alpha_1) v_1 + \cdots + (\alpha\alpha_m) v_m \in \langle S \rangle$. ∎

11.2 Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов

Определение 46. Линейная комбинация $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ называется *тривиальной*, если $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ и *нетривиальной* иначе (то есть $\exists i : a_i \neq 0$ или $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq (0, \ldots, 0)$).

Пример. $v + (-v)$ – нетривиальная линейная комбинация векторов v и $-v$.

Определение 47.

1. Векторы $v_1, \ldots, v_n \in V$ называются *линейно зависимыми* если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная $\overrightarrow{0}$ (то есть $\exists(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq (0, \ldots, 0)$, такие что $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \overrightarrow{0}$) и *линейно независимыми* иначе (то есть из условия $\alpha_1 v_1 + \ldots \alpha_n v_n = \overrightarrow{0}$ следует $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$).

2. Множество $S \subseteq V$ (возможно бесконечное, возможно с повторяющимися элементами) называется *линейно зависимым* если существует конечное линейно зависимое подмножество, и *линейно независимым* если любое конечное подмножество линейно независимо.

Соглашение. *Система векторов* – множество векторов, в котором возможны повторения.

Пример.

1. $S = \{\overrightarrow{0}\}$ $\quad 1 \cdot \overrightarrow{0}$ – нетривиальная линейная комбинация $\implies$ $\overrightarrow{0}$ линейно зависимо.

2. $S = \{v\}$, $v \neq \overrightarrow{0}$ – линейно независимо.

   Пусть $\lambda v = \overrightarrow{0} \implies \overrightarrow{0} = \lambda^{-1}\overrightarrow{0} = \lambda^{-1}(\lambda v) = (\lambda^{-1}\lambda)v = 1v = v$ – противоречие.

3. $S = \{v_1, v_2\} \implies S$ линейно зависимо тогда и только тогда, когда v_1 и v_2 пропорциональны (то есть либо $v_2 = \lambda_1 v_1$, $\lambda_1 \in F$, либо $v_1 = \lambda_2 v_2$, $\lambda_2 \in F$).

   Доказательство.

   ($\implies$) $\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 = \overrightarrow{0}$, $(\mu_1, \mu_2) \neq (0, 0)$.
   Если $\mu_1 \neq 0$, то $v_1 = -\frac{\mu_2}{\mu_1} v_2$.
   Аналогично для $\mu_2 \neq 0$.

   ($\impliedby$) $v_2 = \lambda_1 v_1 \implies \lambda_1 v_1 + (-1)v_2 = \overrightarrow{0} \implies v_1, v_2$ линейно зависимы.
   Аналогично для $v_1 = \lambda_2 v_2$. ■

4. $V = F^n$, $S = \{e_1, \ldots, e_n\} \implies S$ линейно независимо.

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n = \overrightarrow{0} \iff \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} \iff \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

11.3 Критерий линейной зависимости конечного набора векторов

Предложение. Пусть $v_1, \ldots, v_n \in V$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, тогда следующие условия эквивалентны:

1. $\exists (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in F^n$, такой что $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \overrightarrow{0}\,(\star)$ и $\alpha_i \neq 0$.
2. $v_i \in \langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n \rangle$.

Доказательство.

(1) $\implies$ (2) $\alpha_i \neq 0$ в $(\star) \implies v_i = -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_i} v_1 - \cdots - \dfrac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} v_{i-1} - \dfrac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} v_{i+1} - \cdots - \dfrac{\alpha_n}{\alpha_i} v_n \in \langle v_1, \ldots v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n \rangle$.

(2) $\implies$ (1) $v_i = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_{i-1} v_{i-1} + \beta_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \beta_n v_n \implies$

$$\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_{i-1} v_{i-1} + \underbrace{(-1)}_{\neq 0} v_i + \beta_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \beta_n v_n = \overrightarrow{0}.$$

(нетривиальная линейная комбинация с i-м скаляром $\neq 0$). ■

Следствие. Векторы $v_1, \ldots, v_n$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда $\exists i \in \{1, \ldots, n\}$, такое что $v_i \in \langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n \rangle$.

11.4 Основная лемма о линейной зависимости

Лемма 11.1. Пусть есть две системы векторов $v_1, \ldots, v_m$ и $w_1, \ldots, w_n$, причем $m < n$ и $w_i \in \langle v_1, \ldots, v_m \rangle \quad \forall i = 1, \ldots, n$. Тогда векторы $w_1, \ldots, w_n$ линейно зависимы.

Доказательство.

$$w_1 = a_{11} v_1 + a_{21} v_2 + \cdots + a_{m1} v_m = (v_1, \ldots, v_m) \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

$$\ldots$$

$$w_n = a_{1n} v_1 + a_{2n} v_2 + \cdots + a_{mn} v_m = (v_1, \ldots, v_m) \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

$$\implies (w_1, \ldots, w_n) = (v_1, \ldots, v_m) A, \qquad (\star)$$

где $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(F)$.

Так как $m < n$, то ОСЛУ $Ax = \overrightarrow{0}$ имеет ненулевое решение $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \ldots \\ z_n \end{pmatrix} \in F^n$.

Тогда умножим ($\star$) справа на z:

$$(w_1, \ldots, w_n) \cdot z = (v_1, \ldots, v_m) \cdot \underbrace{A \cdot z}_{=\overrightarrow{0}} = (v_1, \ldots, v_m) \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{0}.$$

$$\implies (w_1, \ldots, w_n) \begin{pmatrix} z_1 \\ \ldots \\ z_n \end{pmatrix} = \overrightarrow{0} \implies z_1 w_1 + \ldots z_n w_n = \overrightarrow{0}.$$

Это нетривиальная линейная комбинация, так как $z \neq 0$.
Следовательно, $w_1, \ldots, w_n$ линейно зависимы. ∎

Пример. Любые $n+1$ векторов в F^n линейно зависимы, так как $F^n = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$.

11.5 Базис векторного пространства

Определение 48. Подмножество $S \subseteq V$ называется *базисом* пространства V, если
1. S линейно независимо,
2. $\langle S \rangle = V$.

Пример. $e_1, \ldots, e_n$ – это базис в F^n. Он называется *стандартным базисом* в F^n.

Замечание. Всякая линейно независимая система векторов является базисом своей линейной оболочки.

11.6 Конечномерные и бесконечномерные векторные пространства

Определение 49. Векторное пространство V называется *конечномерным*, если в нем есть конечный базис, и *бесконечномерным* иначе.

11.7 Независимость числа элементов в базисе векторного пространства от выбора базиса

Предложение. V – конечномерное векторное пространство. Тогда, все базисы в V содержат одно и то же количество элементов.

Доказательство. V конечномерно, тогда существует конечный базис $e_1, \ldots, e_n$.

Пусть $S \subseteq V$ – другой базис. Так как $\langle e_1, \ldots, e_n \rangle = V$, то $\forall v \in S \implies v \in \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$. Тогда любые $n+1$ векторов в S линейно зависимы по основной лемме о линейной зависимости. Но S линейно независимо, значит $|S| \leqslant n$.

Пусть $S = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$, где $m \leqslant n$. Тогда $\forall i = 1, \ldots, n \quad e_i \in \langle e'_1, \ldots, e'_m \rangle$, по основной лемме о линейной зависимости получаем $n \leqslant m$.

То есть $m = n$. ∎

11.8 Размерность конечномерного векторного пространства

Определение 50. *Размерностью* конечномерного векторного пространства называется число элементов в (любом) его базисе.

Обозначение: $\dim V$.

Пример.

1. $\dim F^n = n$,
2. $V = \{\overrightarrow{0}\} \implies \dim V = 0$ так как базисом V будет $\varnothing$.

12 Лекция 28.11.2019

Пусть V – векторное пространство над полем F.
Обозначение $\dim V < \infty$ – V конечномерно.

12.1 Характеризация базисов в терминах единственности линейного выражения векторов

Утверждение 12.1. *Пусть* $\dim V < \infty$, $e_1, \dots, e_n \in \langle V \rangle$.
$e_1, \dots, e_n$ *— базис* V *тогда и только тогда, когда,* $\forall v \in V$ *единственным образом представим в виде*

$$v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \quad x_i \in F.$$

Доказательство.

$\Longrightarrow$ Пусть есть два представления $v = x_1 e_1 + \dots x_n e_n = x'_1 e_1 + \dots + x'_n e_n$.
Тогда, $(x_1 - x'_1) e_1 + \dots + (x_n - x'_n) e_n = \overrightarrow{0}$.
Так как $e_1, \dots, e_n$ линейно независимы, то $(x_1 - x'_1) = \dots = (x_n - x'_n) = 0$.
Значит, $x_i = x'_i \quad \forall i$.

$\Longleftarrow$ $\forall v \in V$ имеем $v \in \langle e_1, \dots, e_n \rangle$.
Значит, $\langle e_1, \dots, e_n \rangle = V$.
Для $v = \overrightarrow{0}$ существует единственное представление $\overrightarrow{0} = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$.
Но мы знаем, что $\overrightarrow{0} = 0 e_1 + \dots + 0 e_n$.
Следовательно $\alpha_1 = \dots \alpha_n = 0$, то есть $e_1, \dots, e_n$ линейно независимо.

Итог: $e_1, \dots, e_n$ – базис V. ∎

12.2 Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений

$$Ax = 0 \text{ – ОСЛУ.} \qquad (\star)$$

$A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(F), x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in F^n$.
$S \subseteq F^n$ – множество решений.
Знаем, что S – подпространство в F^n.

Определение 51. *Фундаментальной системой решений* (ФСР) для ОСЛУ ($\star$) называется всякий базис пространства её решений.

Замечание. У одной ОСЛУ может быть много разных ФСР.

12.3 Метод построения фундаментальной системы решений

Приведем матрицу к улучшенному ступенчатому виду элементарными преобразовиями строк.

$$(A | \overrightarrow{0}) \rightsquigarrow (B | \overrightarrow{0}) \quad \leftarrow \text{ улучшенный ступенчатый вид.}$$

Пусть r – число ненулевых строк в B.
Тогда будет r главных неизвестных и $n - r$ свободных.
Выполнив перенумерацию будем считать что,

$$x_1, \dots, x_r \text{ – главные неизвестные,}$$
$$x_{r+1}, \dots, x_n \text{ – свободные.}$$

Тогда, общее решение для ($\star$) имеет вид

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11} x_{r+1} + c_{12} x_{r+2} + \dots + c_{1,n-r} x_n \\ x_2 &= c_{21} x_{r+1} + c_{22} x_{r+2} + \dots + c_{2,n-r} x_n \\ &\dots \\ x_r &= c_{r1} x_{r+1} + c_{r2} x_{r+2} + \dots + c_{r,n-r} x_n. \end{aligned}$$

Предъявим некоторую систему решений

$$u_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \dots \\ c_{r1} \\ \underline{1} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \dots \\ c_{r2} \\ 0 \\ \underline{1} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \dots, \ u_{n-r} = \begin{pmatrix} c_{1,n-r} \\ c_{2,n-r} \\ \dots \\ c_{r,n-r} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \underline{1} \end{pmatrix}.$$

$u_1, \dots, u_{n-r} \in S$

Предложение. $u_1, \dots, u_{n-r}$ – это ФСР для ОСЛУ ($\star$).

Доказательство.

1. Линейная независимость.
   Пусть $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{n-r} u_{n-r} = \overrightarrow{0}$.
   При любом $k \in \{1, \dots, n-r\}$, $(r+k)$-я координата левой части равна α_k, значит $\alpha_k = 0$.
   Следовательно $\alpha_1 = \dots = \alpha_{n-r} = 0$.

2. $\langle u_1, \dots, u_{n-r} \rangle = S$.

   "$\subseteq$" Верно, так как $u_1, \dots, u_{n-r} \in S$.

   "$\supseteq$" Пусть $u \in S$, тогда

$$u = \begin{pmatrix} * \\ \dots \\ * \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_{n-r} \end{pmatrix} \text{ для некоторых } \alpha_1, \dots, \alpha_{n-r} \in F.$$

   Положим $v := u - \alpha_1 u_1 - \dots - \alpha_{n-r} u_{n-r}$.
   Тогда, $v \in S$, но

$$v = \begin{pmatrix} * \\ \dots \\ * \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Тогда формулы для общего решения дают $v = \overrightarrow{0}$.
   Поэтому $u = \alpha_i u_1 + \dots + \alpha_{n-r} u_{n-r}$.

   Значит $\langle u_1, \dots, u_{n-r} \rangle = S$. ■

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = 3x_2 - x_4 \\ x_3 = 2x_4 \end{cases}$$

Тогда ФСР:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

12.4 Утверждение о возможности выбора из конечной системы векторов базиса её линейной оболочки

Пусть V – векторное пространство над F.

Наблюдение: если $v, v_1, \ldots, v_m \in V$ и $v \in \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$, тогда $\langle v, v_1, \ldots, v_m \rangle = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$

Предложение. Из всякой конечной системы векторов $S \subseteq V$ можно выбрать подсистему, которая является базисом в линейной оболочке $\langle S \rangle$.

Доказательство. Пусть $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$.

Индукция по m.

База $m = 1$: $S = \{v_1\}$.

Если $v_1 = \overrightarrow{0}$, то $\langle S \rangle = \{\overrightarrow{0}\}$, значит в качестве базиса берем $\varnothing$.

Если $v_1 \neq 0$, то S линейно независимо.

Следовательно S – базис в $\langle S \rangle$.

Шаг Пусть доказано для $< m$, докажем для m.

Если $v_1, \ldots, v_m$ линейно независимо, то $v_1, \ldots, v_m$ – это уже базис в $\langle S \rangle$.

Иначе, $\exists i : v_i \in \langle S \setminus \{v_i\} \rangle$.

Положим $S' := S \setminus \{v_i\}$.

Тогда, $\langle S' \rangle = \langle S \rangle$.

Так как $|S'| = m - 1 < m$, то по предположению индукции в S' можно выбрать базис для $\langle S' \rangle = \langle S \rangle$. ∎

12.5 Дополнение конечной линейно независимой системы векторов до базиса конечномерного векторного пространства

Предложение. Пусть $\dim V < \infty$, тогда всякую линейно независимую систему векторов в V можно дополнить до базиса всего пространства V.

Доказательство. Пусть $v_1, \ldots, v_m$ – данная линейно независимая система.

Так как $\dim V < \infty$, в V есть конечный базис $e_1, \ldots, e_n$.

Рассмотрим систему векторов $v_1, \ldots, v_m, e_1, \ldots, e_n$.

Пройдемся по этим векторам слева направо и выбросим те, которые линейно выражаются через предыдущие (не выброшенные).

При этом:

1) линейная оболочка системы сохраняется и равна $\langle v_1, \ldots, v_m, e_1, \ldots, e_n \rangle = V$;
2) $v_1, \ldots, v_m$ останутся в системе, так как они линейно независимы;
3) в новой системе никакой вектор линейно не выражается через предыдущие.

Пусть новая система - это $S' = \{v_1, \ldots, v_m, e_{i_1}, \ldots, e_{i_t}\}$.

Докажем, что S' – базис в V.

По свойству 1) имеем, что $\langle S' \rangle = V$.

Осталось доказать, что S' линейно независимо.

Пусть $\alpha_1 v_1 + \ldots \alpha_n v_n + \beta_1 e_{i_1} + \cdots + \beta_t e_{i_t} = \overrightarrow{0}$.

Предположим, что эта линейная комбинация нетривиальна.

Так как $v_1, \ldots, v_m$ линейно независимы, то $\exists k : \beta_{i_k} \neq 0$.

Выберем k максимальным с этим свойством.

Тогда, e_{i_k} линейно выражается через предыдущие — противоречие. ∎

Следствие. Если $\dim V = n$ и $v_1, \ldots, v_n$ – линейно независимая система, тогда $v_1, \ldots, v_m$ – базис V.

12.6 Лемма о добавлении вектора к конечной линейной независимой системе

Лемма 12.2. Пусть $v, v_1, \ldots, v_m \in V$ и $v_1, \ldots, v_m$ линейно независимы, тогда либо $v, v_1, \ldots, v_m$ линейно независимы, либо $v \in \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$.

Доказательство. Пусть $v, v_1, \ldots, v_m$ линейно зависимы, тогда $\exists(\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_m) \neq (0, \ldots, 0)$, такой что

$$\alpha v + \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m = \overrightarrow{0}.$$

Но, так как $v_1, \ldots, v_m$ линейно независимы, то $\alpha \neq 0$. Значит, $v \in \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ по предложению. ∎

13 Лекция 5.12.2019

13.1 Размерность подпространства конечномерного векторного пространства

Пусть V – конечномерное векторное пространство.

Предложение. Если $U \subseteq V$ – подпространство V, тогда U тоже конечномерно, причем $\dim U \leqslant \dim V$.
Кроме того, $\dim U = \dim V \iff U = V$.

Доказательство. Пусть $n = \dim V$.
Построим в U конечный базис.
Если $U = \{\overrightarrow{0}\}$, то в качестве базиса берем $\varnothing$.
Далее считаем, что $U \neq \{\overrightarrow{0}\}$.
Выберем $v_1 \in U \setminus \{\overrightarrow{0}\}$. Если $\langle v_1 \rangle = U$, то конец. Иначе, выберем $v_2 \in U \setminus \langle v_1 \rangle$.
Если $\langle v_1, v_2 \rangle = U$, то конец.
Иначе, выберем $v_3 \in U \setminus \langle v_1, v_2 \rangle$, и так далее.
Получаем систему векторов $v_1, v_2, \ldots$. Она линейно независима по лемме.

По основной лемме о линейной зависимости процесс закончится не позднее шага n, значит U конечномерно и $\dim U \leqslant \dim V$.
Если $\dim U = n$, то $v_1, \ldots, v_n$ – базис U. По следствию, если $v_1, \ldots, v_n$ – базис U, то $U = V$. ∎

13.2 Ранг системы векторов

Пусть $\dim V < \infty$ и $S \subseteq V$ – система векторов.

Определение 52. *Рангом* системы векторов S называется число $\operatorname{rk} S$, равное наибольшему числу векторов в линейно независимой подсистеме из S.

$$\operatorname{rk} S = \max\{|S'| \mid S' \subseteq S \text{ – линейно независимая подсистема}\}.$$

13.3 Связь ранга системы векторов с размерностью её линейной оболочки

Предложение. $\operatorname{rk} S = \dim\langle S \rangle$.

Доказательство. Пусть $\operatorname{rk} S = r$.
Тогда существует линейно независимая подсистема $S' = \{v_1, \ldots, v_r\}$.
По определению ранга и лемме получаем $S \subseteq \langle v_1, \ldots, v_r \rangle$.
Значит, $\langle S \rangle = \langle v_1, \ldots, v_r \rangle$ (так как $v_1, \ldots, v_r \in S$).
Следовательно $\dim S = r$. ∎

13.4 Ранг матрицы: столбцовый и строковый

Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(F)$.

Определение 53. *Столбцовым рангом* (или просто *рангом*) матрицы A называется ранг системы её столбцов

$$A^{(1)}, \ldots, A^{(n)} \subseteq F^n.$$

Обозначение: $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}\{A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}\}$.

Определение 54. *Строковым рангом* матрицы A называется число $\operatorname{rk} A^T$, то есть ранг системы строк

$$A_{(1)}, \ldots, A_{(n)} \in F^n.$$

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Любые два столбца линейно независимы (не пропорциональны), то есть $\operatorname{rk} A \geqslant 2$.
Но, $A^{(2)} = \frac{1}{2}\left(A^{(1)} + A^{(3)}\right)$, значит $A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}$ линейно зависимы $\implies \operatorname{rk} A = 2$.

13.5 Сохранение линейных зависимостей между столбцами матрицы при элементарных преобразованиях строк

Предложение. Элементарные преобразования строк сохраняют линейные зависимости между столбцами матрицы.
Если $A \rightsquigarrow B$ элементарным преобразованиями строк, то

$$\alpha_1 A^{(1)} + \dots + \alpha_n A^{(n)} = \overrightarrow{0} \iff \alpha_1 B^{(1)} + \dots + \alpha_n B^{(n)} = \overrightarrow{0}.$$

В частности, при $1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n$

$$A^{(i_1)}, \dots, A^{(i_k)} \text{ линейно независимы} \iff B^{(i_1)}, \dots, B^{(i_k)} \text{ линейно независимы.}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\alpha_1 A^{(1)} + \dots + \alpha_n A^{(n)} = \overrightarrow{0} &\iff A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \overrightarrow{0} \\
&\iff \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \text{ — решение ОСЛУ } Ax = \overrightarrow{0} \\
&\iff \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \text{ — решение ОСЛУ } Bx = \overrightarrow{0} \\
&\iff B \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \overrightarrow{0} \iff \alpha_1 B^{(1)} + \dots + \alpha_n B^{(n)} = \overrightarrow{0}.
\end{aligned}$$

■

13.6 Инвариантность столбцового и строкового рангов матрицы при элементарных преобразованиях строк и столбцов

Следствие. При элементарных преобразованиях строк (столбцовый) ранг матрицы сохраняется.

Предложение. При элементарных преобразованиях столбцов линейная оболочка $\langle A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \rangle$ сохраняется.

Доказательство. Пусть $A \rightsquigarrow B$ элементарными преобразованиями столбцов.
Тогда,

$$B^{(1)}, \dots, B^{(n)} \in \langle A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \rangle.$$

Значит,

$$\langle B^{(1)}, \dots, B^{(n)} \rangle \subseteq \langle A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \rangle.$$

Так как элементарные преобразования обратимы, то включение верно и в другую сторону. ■

Следствие. При элементарных преобразованиях столбцов (столбцовый) ранг матрицы сохраняется.

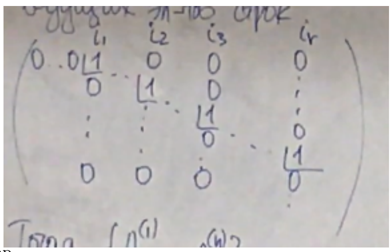
Следствие. Строковый ранг матрицы сохраняется при элементарных преобразованиях строк и столбцов.

13.7 Столбцовый и строковый ранги матрицы, имеющей улучшенный ступенчатый вид

Предложение. Если A имеет улучшенный ступенчатый вид, то оба числа $\operatorname{rk} A$ и $\operatorname{rk} A^T$ равны числу ненулевых строк в A.

Доказательство. Пусть r – число ненулевых строк в A и пусть $i_1 < \dots < i_r$ – номера ведущих элементов строк.

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} & & & i_1 & & i_2 & & i_3 & & i_r \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & \dots & 0 & 1 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & & 0 & \dots & 1 & & 0 & & \vdots \\
 & & & \vdots & & 0 & \dots & 1 & & 0 \\
 & & & \vdots & & \vdots & & 0 & \dots & 1 \\
 & & & 0 & & 0 & & 0 & & 0
\end{pmatrix}
\end{array}$$



жалкая попытка повторить шедевр

Тогда, $\{A^{(1)},\dots,A^{(n)}\} \ni e_1,\dots,e_r$, где

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i.$$

Значит, $\langle A^{(1)},\dots,A^{(n)}\rangle \supseteq \langle e_1,\dots,e_r\rangle$.
Заметим, что $A^{(1)},\dots,A^{(n)} \in \langle e_1,\dots,e_r\rangle$, то есть $\langle A^{(1)},\dots,A^{(n)}\rangle \subseteq \langle e_1,\dots,e_r\rangle$.

Теперь покажем, что строки $A_{(1)},\dots,A_{(r)}$ линейно независимы.
Пусть $\alpha_1 A_{(1)} + \dots + \alpha_r A_{(r)} = \overrightarrow{0}\,(\star)$.
$\forall k = 1,\dots,r$ на месте i_k в левой части $(\star)$ стоит α_k, значит $\alpha_k = 0$.
То есть $\alpha_i = 0\ \forall i$, следовательно $A_{(1)},\dots,A_{(r)}$ линейно независимы.
$\implies \operatorname{rk} A^T = r$. ■

13.8 Равенство столбцового и строкового рангов матрицы

Теорема 13.1. *Пусть $A \in Mat_{m\times n}(F)$, тогда $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A^T$, причем оба числа равны количеству строк в ступенчатом виде матрицы A.*

Доказательство. $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A^T$ следует из следствий, предыдущего предложения и теоремы о приведении матрицы к улучшенному ступенчатому виду.

Остальное вытекает из предложения и того, что при переходе от ступенчатого виду к улучшенному ступенчатому виду число ненулевых строк сохраняется. ■

13.9 Связь ранга квадратной матрицы с её определителем

Следствие. Пусть $A \in M_n(F)$ – квадратная матрица. Тогда,

$$\begin{aligned} \operatorname{rk} A = n &\iff \det A \neq 0, \\ \operatorname{rk} A < n &\iff \det A = 0. \end{aligned}$$

Доказательство. При элементарных преобразованиях строк $\operatorname{rk} A$ сохраняется, условия $\det A \neq 0$ и $\det A = 0$ тоже.

Следовательно, достаточно доказать для ступенчатых матриц. В этом случае

$$\begin{aligned} \operatorname{rk} A = n &\iff n \text{ ненулевых строк} \iff \det A \neq 0, \\ \operatorname{rk} A < n &\iff \text{ есть нулевые строки} \iff \det A = 0. \end{aligned}$$ ■

13.10 Подматрицы

Определение 55. *Подматрицей* матрицы A называется всякая матрица, получающаяся из A вычёркиванием каких-то строк и каких-то столбцов.

13.11 Связь рангов матрицы и её подматрицы

Предложение. S подматрица $\implies \operatorname{rk} S \leqslant \operatorname{rk} A$.

Доказательство. Пусть $\operatorname{rk} S = r$, значит в S есть линейно независимая система из r столбцов. Но тогда соответствующие r столбцов в матрице A будут и подавно линейно независимы. ■

14 Лекция 12.12.2019

14.1 Миноры

Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(F)$.

Определение 56. *Минором* матрицы A называется определитель всякой квадратной подматрицы в A.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

- 6 миноров порядка 1,
- 3 минора порядка 2
$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}.$

14.2 Теорема о ранге матрицы

Теорема 14.1. *Для любой $A \in Mat_{m\times n}(F)$ следующие 3 числа равны:*
(1) $\operatorname{rk} A$ (столбцовый ранг),
(2) $\operatorname{rk} A$ (строковый ранг),
(3) наибольший порядок ненулевого минора в A.

Доказательство. (1) = (2) – уже знаем.
Пусть S – квадратная подматрица в A порядка r и $\det S \neq 0$. Тогда $r = \operatorname{rk} S \leqslant \operatorname{rk} A$. Отсюда, (3) $\leqslant$ (1).

Пусть теперь $\operatorname{rk} A = r$. Найдем в A ненулевой минор порядка r.
Так как $\operatorname{rk} A = r$, в A есть r линейно независимых столбцов $A^{(i_1)}, \ldots, A^{(i_r)}$.
Составим из них матрицу B. Тогда $\operatorname{rk} B = r$.
Так как (1) = (2) для B, то в B можно найти r линейно независимых строк.
Пусть S – подматрица в B, составленная из этих строк.
S – квадратная подматрица порядка r и $\operatorname{rk} S = r \implies \det S \neq 0 \implies$ нашли. Значит, (3) $\geqslant$ (1).

Итог: (3) = (1). ■

14.3 Приложения ранга матрицы к исследованию СЛУ

Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(F)$, $b \in F^m$, $x \in F^n$ – столбец неизвестных.

$$Ax = b. \tag{$\star$}$$

$(A \mid b)$ – расширенная матрица.

14.3.1 Теорема Кронекера-Капелли

Теорема 14.2 (Кронекера-Капелли)**.** *СЛУ* ($\star$) *совместна* $\iff \operatorname{rk}(A \mid b) = \operatorname{rk} A$.

Доказательство. При элементарных преобразованиях строк
– сохраняется множество решений,
– сохраняются числа $\operatorname{rk}(A \mid b)$ и $\operatorname{rk} A$.

Следовательно, вопрос сводится к ситуации когда A имеет ступенчатый вид.
В ступенчатом виде СЛУ совместна тогда и только тогда, когда нет строк вида $(0, \ldots, 0 \mid \underbrace{\star}_{\neq 0})$.

То есть матрицы $(A \mid b)$ и A имеют одно и то же число ненулевых строк.
Значит, $\operatorname{rk}(A \mid b) = \operatorname{rk} A$. ■

14.3.2 Критерий существования единственного решения у совместной системы линейных уравнений в терминах ранга её матрицы коэффициентов

Теорема 14.3. *Пусть СЛУ* ($\star$) *совместна. Тогда, она имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $\operatorname{rk} A = n$, где n – число неизвестных.*

Доказательство. Снова все сводится к ситуации, когда $(A \mid b)$ имеет ступенчатый вид.
Тогда, единственное решение $\iff$ нет свободных неизвестных $\iff$ ступенек ровно n $\iff \operatorname{rk} A = n$. ■

14.3.3 Критерий существования единственного решения у системы линейных уравнений с квадратной матрицей коэффициентов в терминах её определителя

Следствие. Пусть A квадратна (то есть $m = n$). Тогда СЛУ ($\star$) имеет единственное решение $\iff$ $\det A \neq 0$.

Доказательство. Единственное решение $\iff$ $\operatorname{rk} A = n$ $\iff$ $\det A \neq 0$. ■

Замечание. Это единственное решение равно $x = A^{-1}b$.

14.3.4 Размерность пространства решений однородной системы линейных уравнений в терминах ранга её матрицы коэффициентов

Пусть теперь СЛУ однородна, то есть $b = 0$.

$$Ax = 0. \tag{$\star$}$$

Пусть $S \subseteq F^n$ – множество её решений. Знаем, что S – подпространство в F^n.

Предложение. $\dim S = n - \operatorname{rk} A$.

Доказательство. Пусть r – число ненулевых строк в ступенчатом виде матрицы A. Тогда $r = \operatorname{rk} A$.
Мы уже строили ФСР для ($\star$) из $n - r$ векторов.
Значит, $\dim S = n - r = n - \operatorname{rk} A$. ■

14.3.5 Реализация подпространства в F^n в качестве множества решений однородной системы линейных уравнений

Пусть $b_1, \dots, b_p \in F^n$,

$$B := (b_1, \dots, b_p) \in \mathrm{Mat}_{n \times p}(F).$$

Пусть $a_1, \dots, a_q \in F^n$ — ФСР для ОСЛУ $B^T x = 0$.

$$A := (a_1, \dots, a_q) \in \mathrm{Mat}_{n \times q}(F).$$

Предложение. $\langle b_1, \dots, b_p \rangle$ есть множество решений ОСЛУ $A^T x = 0$.

Доказательство. Пусть $S = \{x \in F^n \mid A^T x = 0\}$.

$$\begin{aligned} \forall i = 1, \dots, q \quad B^T a_i = 0 &\implies B^T A = 0 \\ &\implies A^T B = 0 \implies A^T b_j = 0 \quad \forall j = 1, \dots, p. \end{aligned}$$

Значит, $b_j \in S \quad \forall j = 1, \dots, p$.
Но тогда, $\langle b_1, \dots, b_p \rangle \subseteq S$.
Пусть $r = \operatorname{rk}\{b_1, \dots, b_p\} = \dim\langle b_1, \dots, b_p \rangle = \operatorname{rk} B$.
При этом, $\operatorname{rk} A = q = n - r$.
Тогда, $\dim S = n - \operatorname{rk} A = n - (n - r) = r$.
Следовательно, $\langle b_1, \dots, b_p \rangle = S$. ■

Следствие. Всякое подпространство в F^n является решением некоторой ОСЛУ.

14.4 Координаты вектора по отношению к фиксированному базису векторного пространства

Пусть V — векторное пространство, $\dim V = n$, $e_1, \dots, e_n$ — базис.
Знаем, что $\forall v \in V \ \exists! \alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$, такие что, $v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$.

Определение 57. Скаляры $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ называются координатами вектора v в базисе $e_1, \dots, e_n$.

Пример. $V = F^n$.
$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$.
Тогда, $x_1, \dots, x_n$ – координаты вектора v в стандартном базисе пространства F^n.

14.5 Описание всех базисов конечномерного векторного пространства в терминах одного базиса и матриц координат

Пусть теперь $e'_1, \dots, e'_n$ – какой то другой набор векторов в V. Тогда,

$$\begin{aligned} e'_1 &= c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + \dots + c_{n1}e_n \\ e'_2 &= c_{21}e_1 + c_{22}e_2 + \dots + c_{n2}e_n \\ &\dots \\ e'_n &= c_{n1}e_1 + c_{2n}e_2 + \dots + c_{nn}e_n. \end{aligned}$$

$$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C, \text{ где } C = (c_{ij}).$$

в j-м столбце матрицы C стоят координаты вектора e'_j в базисе $e_1, \dots, e_n$.

Предложение. $(e'_1, \dots, e'_n)$ – базис в $V \iff \det C \neq 0$.

Доказательство.

$\Longrightarrow$ $e'_1, \dots, e'_n$ – базис, значит $(e_1, \dots, e_n) = (e'_1, \dots, e'_n) \cdot C' = (e_1, \dots, e_n) \cdot C \cdot C'$.
Так как $e_1, \dots, e_n$ линейно независимы, то $C \cdot C' = E \implies \det C \neq 0$.

$\Longleftarrow$ $\det C \neq 0 \implies \exists C^{-1}$.
Достаточно доказать, что $e'_1, \dots, e'_n$ линейно независимы.
Пусть

$$\alpha_1 e'_1 + \dots + \alpha_n e'_n = 0.$$

Тогда,

$$(e'_1, \dots, e'_n)\begin{pmatrix}\alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n\end{pmatrix} = 0 \implies (e_1, \dots, e_n) \cdot C \cdot \begin{pmatrix}\alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n\end{pmatrix} = 0.$$

Так как $e_1, \dots, e_n$ линейно независимы, то

$$C\begin{pmatrix}\alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n\end{pmatrix} = 0.$$

Домножаем слева на C^{-1}, получаем

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 \\ \dots \\ 0\end{pmatrix}.$$

■

14.6 Матрица перехода от одного базиса конечномерного векторного пространства к другому

Пусть $(e_1, \dots, e_n)$ и $(e'_1, \dots, e'_n)$ — два базиса в V,

$$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C,$$

при этом $\det C \neq 0$.

Определение 58. Матрица C называется *матрицей перехода* от базиса $(e_1, \dots, e_n)$ к базису $(e'_1, \dots, e'_n)$.

Замечание. Матрица перехода от $(e'_1, \dots, e'_n)$ к $(e_1, \dots, e_n)$ — это C^{-1}.

14.7 Формула преобразования координат вектора при замене базиса

Пусть $v \in V$, тогда

$$\begin{aligned} v &= x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \\ v &= x'_1 e'_1 + \dots + x'_n e'_n. \end{aligned}$$

Предложение.

$$\begin{pmatrix}x_1 \\ \dots \\ x_n\end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix}x'_1 \\ \dots \\ x'_n\end{pmatrix}.$$

Доказательство. Имеем

$$v = (e_1, \ldots, e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

С другой стороны,

$$v = (e'_1, \ldots, e'_n) \begin{pmatrix} x'_1 \\ \ldots \\ x'_n \end{pmatrix} = (e_1, \ldots, e_n) \cdot C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \ldots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Так как $e_1, \ldots, e_n$ линейно независимы, то

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \ldots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

■

15 Лекция 9.01.2020

15.1 Сумма двух подпространств векторного пространства

Пусть V – векторное пространство над F.
$U, W \subseteq V$ – подпространства.
Тогда, $U \cap W$ – тоже подпространство. (можно проверить по определению)

Определение 59. *Суммой* подпространств U, W называется множество

$$U + W := \{u + w \mid v \in U, w \in W\}.$$

Упражнение. $U + W$ – подпространство.

Замечание. Имеем $U \cap W \subseteq U = U + 0 \subseteq U + W$.
Значит, $\dim(U \cap W) \leqslant \dim U \leqslant \dim(U + W)$.

15.2 Связь размерностей двух подпространств с размерностями их суммы и пересечения

Теорема 15.1. $\dim(U \cap W) + \dim(U + W) = \dim U + \dim W$.

Пример. Всякие две плоскости в $\mathbb{R}^3$ (содержащие 0) имеют общую прямую.
Здесь $V = \mathbb{R}^3$, $\dim U = 2$, $\dim W = 2$.
При этом $\dim(U + W) \leqslant 3$.
Тогда, $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) \geqslant 2 + 2 - 3 = 1$.

Доказательство. Пусть $\dim(U \cap W) = p$, $\dim U = q$, $\dim W = r$.
Пусть $a = \{a_1, \dots, a_p\}$ – базис в $U \cap W$.
Тогда, a можно дополнить до базиса в U и в W:
$b = \{b_1, \dots, b_{q-p}\}$ – такая система, что $a \cup b$ – базис в U.
$c = \{c_1, \dots, c_{r-p}\}$ – такая система, что $a \cup c$ – базис в W.

Докажем, что $a \cup b \cup c$ – базис в $U + W$.

1. $\langle a \cup b \cup c \rangle = U + W$:

   $v \in U + W \implies \exists u \in U, w \in W$, такие что $v = u + w$.

   $u \in U = \langle a \cup b \rangle \subseteq \langle a \cup b \cup c \rangle$.

   $w \in W = \langle a \cup c \rangle \subseteq \langle a \cup b \cup c \rangle$.

   Значит, $v \in \langle a \cup b \cup c \rangle$.

2. $a \cup b \cup c$ линейно независимо.

   Пусть $\underbrace{\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_p a_p}_{x} + \underbrace{\beta_1 b_1 + \dots + \beta_{q-p} b_{q-p}}_{y} + \underbrace{\gamma_1 c_1 + \dots + \gamma_{r-p} c_{r-p}}_{z} = 0$, где $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k \in F$.

   Тогда, $z = -\underset{\in U}{x} - \underset{\in U}{y} \in U$.

   Но, $z \in W$, значит $z \in U \cap W$.

   То есть $z = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p$, $\lambda_i \in F$.

   Тогда, $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p - \gamma_1 c_1 - \dots - \gamma_{r-p} c_{r-p} = 0$

   Так как $a \cup c$ линейно независимо, то $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = \gamma_1 = \dots = \gamma_{r-p} = 0$ и $z = 0$.

   Следовательно, $x + y = 0$, то есть $\alpha_1 a_1 + \dots \alpha_p a_p + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_{q-p} b_{q-p} = 0$.

   Так как $a \cup b$ линейно независимо, то $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = \beta_1 = \dots = \beta_{q-p} = 0$.

   Получаем, что $a \cup b \cup c$ линейно независимо.

Итог: $a \cup b \cup c$ – базис в $U + W$.

$$\begin{aligned} \dim(U + W) &= |a| + |b| + |c| \\ &= p + q - p + r - p \\ &= q + r - p \\ &= \dim U + \dim W - \dim(U \cap W). \end{aligned}$$ ■

.

15.3 Сумма нескольких подпространств векторного пространства

Пусть $U_1, \dots U_k \subseteq V$ – подпространства.

Определение 60. *Суммой* подпространств $U_1, \dots U_k$ называется множество

$$U_1 + \dots + U_k = \{u_1 + \dots + u_k \mid u_i \in U_i\}.$$

Упражнение. Доказать, что $U_1 + \dots + U_k$ – подпространство.

Замечание. $\dim(U_1 + \dots + U_k) \leqslant \dim U_1 + \dots + \dim U_k$.

15.4 Линейно независимые подпространства, пять эквивалентных условий

Определение 61. Подпространства $U_1, \dots, U_k$ называются *линейно независимыми*, если $\forall u_1 \in U_1, \dots, u_k \in U_k$ из условия $u_1 + \dots + u_k = 0$ следует $u_1 = \dots = u_k = 0$.

Пример. Если $\dim U_i = 1$ и $U_i = \langle u_i \rangle\ \forall i$, то $U_1, \dots, U_k$ линейно независимы $\iff$ $u_1, \dots, u_k$ линейно независимы.

Теорема 15.2. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) $U_1, \dots, U_k$ *линейно независимы.*

(2) всякий $u \in U_1 + \dots + U_k$ *единственным образом представим в виде* $u = u_1 + \dots + u_k$*, где* $u_i \in U_i$.

(3) Если $\mathbb{e}_i$ *— базис в* $U_i\ \forall i$*, то* $\underbrace{\mathbb{e}_1 \sqcup \mathbb{e}_2 \sqcup \dots \sqcup \mathbb{e}_k}_{\text{объединение мультимножеств}}$ *— базис в* $U_1 + \dots + U_k$.

(4) $\dim(U_1 + \dots + U_k) = \dim U_1 + \dots + \dim U_k$.

(5) $\forall i = 1, \dots, k \quad U_i \cap (U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_k) = 0$.

Пример. Если $\mathbb{e}_1 = \{e_1, e_2\}, \mathbb{e}_2 = \{e_2, e_3\}$, то
- $\mathbb{e}_1 \cup \mathbb{e}_2 = \{e_1, e_2, e_3\}$ – 2 элемента,
- $\mathbb{e}_1 \sqcup \mathbb{e}_2 = \{e_1, e_2, e_2, e_3\}$ – 4 элемента.

Доказательство. Пусть $\widehat{U}_i = U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_k$.

(1) $\Longrightarrow$ **(2)** Пусть $u_1 + \dots + u_k = u'_1 + \dots + u'_k$, где $u_i, u'_i \in U_i$.

Тогда, $\underset{\in U_1}{(u_1 - u'_1)} + \underset{\in U_2}{(u_2 - u'_2)} + \dots + \underset{\in U_k}{(u_k - u'_k)} = 0 \implies u_i - u'_i = \dots = u_k - u'_k = 0$.

То есть, $u_1 = u'_1, \dots, u_k = u'_k$.

(2) $\Longrightarrow$ **(3)** Пусть $u \in U_1 + \dots + U_k$ – произвольный.

u единственным образом представим в виде $u = u_1 + \dots + u_k$, где $u_i \in U_i$,

u_i единственным образом представим в виде линейной комбинации векторов из $\mathbb{e}_i$.

Следовательно, u единственным образом представим в виде линейной комбинации векторов из $\mathbb{e}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathbb{e}_k$.

То есть, $\mathbb{e}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathbb{e}_k$ — базис в $U_1 + \dots + U_k$.

(3) $\Longrightarrow$ **(4)** Очевидно.

(4) $\Longrightarrow$ **(5)**

$$\begin{aligned}
\dim(U_i \cap \widehat{U}_i) &= \dim U_i + \dim \widehat{U}_i - \dim(U_1 + \dots + U_k) \\
&\leqslant \dim U_i + (\dim U_1 + \dots + \dim U_{i-1} + \dim U_{i+1} + \dots + \dim U_k) - (\dim U_1 + \dots + \dim U_k) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(5) $\Longrightarrow$ **(1)** $u_1 + \dots + u_k = 0$, где $u_i \in U_i$.

Тогда, $\underset{\in U_i}{u_i} = \underbrace{-u_1 - \dots - u_{i-1} - u_{i+1} - \dots - u_k}_{\in \widehat{U}_i}$

Следовательно, $u_i \in U_i \cap \widehat{U}_i = 0 \implies u_i = 0$. ■

Следствие. Пусть $k = 2$, тогда
U_1, U_2 линейно независимы $\iff$ $U_1 \cap U_2 = 0$.

15.5 Разложение векторного пространства в прямую сумму нескольких подпространств

Определение 62. Говорят, что векторное пространство V разлагается в *прямую сумму* $U_1, \dots, U_k$, если

1. $V = U_1 + \dots + U_k$,
2. $U_1, \dots, U_k$ линейно независимы.

Обозначение: $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k$.

Пример. Если $e_1, \dots, e_n$ – базис V, то $V = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle e_n \rangle$

15.6 Проекция вектора на подпространство вдоль дополнительного подпространства

Замечание. При $k = 2$:

1. $V = U_1 \oplus U_2 \iff \begin{cases} V = U_1 + U_2, \\ U_1 \cap U_2 = 0, \end{cases}$
2. $V = U_1 \oplus U_2 \implies \forall v \in V \ \exists! u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$, такие что $v = u_1 + u_2$.
   Тогда, u_1 называется проекцией вектора v на U_1 вдоль U_2.
   Так же, u_2 называется проекцией вектора v на U_2 вдоль U_1.

16 Лекция 16.01.2020

16.1 Линейные отображения векторных пространств

Пусть V, W — векторные пространства над F.

Определение 63. Отображение $\varphi\colon V \to W$ называется *линейным*, если

1. $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$,
2. $\varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v)$.

$\forall v_1, v_2, v \in V$, $\forall \lambda \in F$.

Упражнение. 1 и 2 эквивалентны тому, что
$\varphi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1\varphi(v_1) + \lambda_2\varphi(v_2)$.
$\forall v_1, v_2 \in V$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in F$.

16.2 Примеры линейных отображений

Презентация (продублирована ниже)

16.2.1 Пример 0

$\varphi\colon V \to W$ — нулевое отображение,
$\varphi(v) := \overrightarrow{0} \quad \forall v \in V$

1) $\varphi(v_1 + v_2) = \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$,
2) $\varphi(\lambda \cdot v) = \overrightarrow{0} = \lambda\overrightarrow{0} = \lambda \cdot \varphi(v)$.

16.2.2 Пример 1

$\varphi\colon V \to W$ — тождественное отображение,
$\varphi(v) := v \quad \forall v \in V$.
Обозначение: $\varphi =: \mathrm{Id}$.

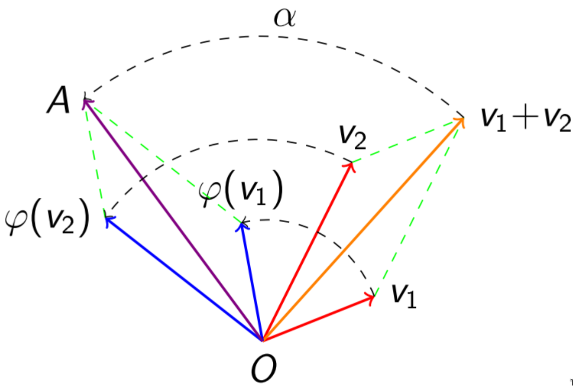
1) $\varphi(v_1 + v_2) = v_1 + v_2 = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$,
2) $\varphi(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot v = \lambda \cdot \varphi(v)$.

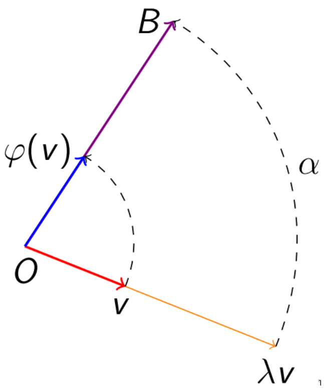
16.2.3 Пример 2

$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — поворот на угол α вокруг начала координат.

Два красных вектора v_1, v_2 и их сумму $v_1 + v_2$ повернули на угол α, получив $\varphi(v_1)$, $\varphi(v_2)$ а так же точку A.
Свойство 1 говорит нам, что точка A это не просто сумма образов, она так же является образом суммы $v_1 + v_2$.
То есть точку A можно получить двумя разными способами: сложить $\varphi(v_1)$ и $\varphi(v_2)$ или повернуть $v_1 + v_2$.

Вторая картинка показывает свойство 2: точка B это с одной стороны $\varphi(v) \cdot \lambda$, а с другой — образ $\lambda \cdot v$.





1) $\varphi(v_1) + \varphi(v_2) = A = \varphi(v_1 + v_2)$,
2) $\varphi(\lambda \cdot v) = B = \lambda \cdot \varphi(v)$.

16.2.4 Пример 3

$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ — ортогональная проекция на плоскость Oxy.

⟨ Конкурс на лучшую картинку ⟩

16.2.5 Пример 4

$\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — пространство многочленов от x степени $\leqslant n$ с коэффициентами из $\mathbb{R}$.
$\Delta\colon f(x) \mapsto f'(x)$ — отображение дифференцирования.

1) $(f+g)' = f' + g'$,
2) $(\lambda \cdot f)' = \lambda \cdot f' \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

1) и 2) $\implies$ Δ — линейное отображение $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n} \to \mathbb{R}[x]_{\leqslant n-1}$.

16.2.6 Пример 5

V — векторное пространство над F, $\dim V = n$.
$(e_1, \dots, e_n)$ — базис V.
$\varphi\colon V \to F^n$

$v = x_1e_1 + \dots + x_ne_n \implies \varphi(v) := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Покажем, что оно линейно:
Пусть

$$v = x_1e_1 + \dots + x_ne_n \implies \varphi(v) := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

$$w = y_1e_1 + \dots + y_ne_n \implies \varphi(w) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Тогда,

1) $v + w = (x_1+y_1)e_1 + \dots + (x_n+y_n)e_n \implies \varphi(v+w) = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \varphi(v) + \varphi(w)$,

2) $\lambda \cdot v = (\lambda x_1)e_1 + \dots + (\lambda x_n)e_n \implies \varphi(\lambda \cdot v) = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda\varphi(v)$.

16.3 Простейшие свойства линейных отображений

Здесь $\overrightarrow{0_V}$ — нулевой вектор в векторном пространстве V.

1. $\varphi(\overrightarrow{0_V}) = \overrightarrow{0_W}$.

   Доказательство: $\varphi(\overrightarrow{0_V}) = \varphi(0 \cdot \overrightarrow{0_V}) = 0 \cdot \varphi(\overrightarrow{0_V}) = \varphi(\overrightarrow{0_W})$.

2. $\varphi(-v) = -\varphi(v)$.

   Доказательство: $\varphi(-v) + \varphi(v) = \varphi(-v+v) = \varphi(0) = \varphi(\overrightarrow{0_V}) = \overrightarrow{0_W} \implies \varphi(-v) = -\varphi(v)$.

16.4 Изоморфизм векторных пространств

Определение 64. Отображение $\varphi\colon V \to W$ называется *изоморфизмом* если оно линейно и биективно.
Обозначение: $\varphi\colon V \xrightarrow{\sim} W$.

В примерах выше:

0. φ — изоморфизм $\iff \begin{cases} V = \{\vec{0}\}, \\ W = \{\vec{0}\} \end{cases}$
1. да
2. да
3. нет
4. φ — изоморфизм $\iff n = 0$
5. да!

16.5 Отображение, обратное к изоморфизму

Предложение. Если $\varphi\colon V \to W$ — изоморфизм, то φ^{-1} — тоже изоморфизм.

Доказательство. Биективность есть, так как φ^{-1} — обратное отображение.

Проверим линейность

1) $w_1, w_2 \in W \implies w_1 = \varphi(\varphi^{-1}(w_1))$, $w_2 = \varphi(\varphi^{-1}(w_2))$

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(w_1+w_2) &= \varphi^{-1}\Big(\underbrace{\varphi\left(\varphi^{-1}(w_1)\right)}_{w_1} + \underbrace{\varphi\left(\varphi^{-1}(w_2)\right)}_{w_2}\Big)\\ &= \underbrace{\varphi^{-1}(\varphi}_{Id}\left(\varphi^{-1}(w_1)+\varphi^{-1}(w_2)\right))\\ &= \varphi^{-1}(w_1)+\varphi^{-1}(w_2).\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(\lambda \cdot w_1) &= \varphi^{-1}\left(\lambda\cdot\varphi\left(\varphi^{-1}\left(w_1\right)\right)\right)\\ &= \underbrace{\varphi^{-1}(\varphi}_{Id}\left(\lambda\cdot\varphi^{-1}(w_1)\right))\\ &= \lambda\varphi^{-1}(w_1).\end{aligned}$$

■

16.6 Композиция двух линейных отображений, композиция двух изоморфизмов

Пусть $U \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{\varphi} W$, тогда $\varphi\circ\psi : U \to W$ — композиция.

Предложение.
1. Если φ, ψ линейны, то $\varphi\circ\psi$ тоже линейна.
2. Если φ, ψ — изоморфизмы, то $\varphi\circ\psi$ — тоже изоморфизм.

Доказательство.

1. (1) $(\varphi\circ\psi)(u_1+u_2) = \varphi(\psi(u_1+u_2)) = \varphi(\psi(u_1)+\psi(u_2)) = \varphi(\psi(u_1))+\varphi(\psi(u_2)) = (\varphi\circ\psi)(u_1)+(\varphi\circ\psi)(u_2)$.
   (2) $(\varphi\circ\psi)(\varphi u) = \varphi(\psi(\lambda u)) = \varphi(\lambda\psi(u)) = \lambda\varphi(\psi(u)) = \lambda(\varphi\circ\psi)(u)$.
2. из 1 следует, что $(\varphi\circ\psi)$ линейно, но при этом биективно как композиция двух биекций. ■

16.7 Изоморфные векторные пространства

Определение 65. Два векторных пространства V, W называются *изоморфными*, если существует изоморфизм $\varphi\colon V \xrightarrow{\sim} W$.

Обозначается: $V \simeq W$ (либо $V \cong W$).

16.8 Отношение изоморфности на множестве всех векторных пространств

Теорема 16.1. *Отношение изоморфности является отношением эквивалентности на множестве всех векторных пространств над фиксированным полем F.*

Доказательство.

1. Рефлексивность: $Id : V \xrightarrow{\sim} V$.
2. Симметричность: $V \simeq W \implies W \simeq V$ следует из Предложения 1.
3. Транзитивность: $U \simeq V$, $V \simeq W \implies U \simeq W$ следует из Предложения 2. ■

16.9 Классы изоморфизма векторных пространств

Определение 66. Классы эквивалентности называются *классами изоморфизма*.

Пример. $F[x]_{\leqslant n} \simeq F^{n+1}$:

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}.$$

16.10 Критерий изоморфности двух конечномерных векторных пространств

Теорема 16.2. *Пусть V, W — два конечномерных векторных пространства над F.*
Тогда, $V \simeq W \iff \dim V = \dim W$.

Лемма 16.3. $\dim V = n \implies V \simeq F^n$.

Доказательство. Фиксируем базис $(e_1, \dots, e_n)$ в V.
Тогда, отображение $\varphi \colon V \to F^n$ из Примера 5 — изоморфизм. ∎

Лемма 16.4. Пусть $\varphi \colon V \xrightarrow{\sim} W$ и $e_1, \dots, e_n$ — базис V, тогда $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ — базис W.

Доказательство. Пусть $w \in W$. Тогда $\exists x_1, \dots, x_n \in F$, такие что $\varphi^{-1}(w) = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$.
Тогда, $w = \varphi\left(\varphi^{-1}(w)\right) = \varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n) \implies W = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \rangle$.
Теперь докажем линейную независимость:
Пусть $\alpha_1 \varphi(e_1) + \dots + \alpha_n \varphi(e_n) = \overrightarrow{0}$.
Тогда, $\varphi(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) = \overrightarrow{0}$.
Применяя φ^{-1} получаем, $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = \varphi^{-1}(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$. Значит, $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.
Итог: $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ — базис в V. ∎

Доказательство теоремы.

$\Longleftarrow$ Пусть $\dim V = \dim W = n$. Тогда по лемме 1 $V \simeq F^n, W \simeq F^n$, значит $V \simeq W$.

$\Longrightarrow$ Пусть $V \simeq W$. Фиксируем изоморфизм $\varphi \colon V \xrightarrow{\sim} W$.
Тогда по лемме 2 получаем, что $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ — базис W, а значит $\dim V = n = \dim W$. ∎

Упражнение. Если $\dim V = n$, то все изоморфизмы $V \xrightarrow{\sim} F^n$ находятся в биекции с базисами пространства V.

16.11 Задание линейного отображения путём задания образов векторов фиксированного базиса

Пусть V, W — векторные пространства над F и $(e_1, \dots, e_n)$ — фиксированный базис в V.

Предложение.

1. Если $\varphi \colon V \to W$ — линейное отображение, то φ однозначно определяется векторами $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$,
2. $\forall w_1, \dots, w_n \in W$ $\exists!$ линейное отображение φ, такое что, $\varphi(e_1) = w_1, \dots, \varphi(e_n) = w_n$.

Доказательство.

1. $v \in V \implies v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \implies \varphi(v) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n)$.
2. Зададим $\varphi \colon V \to W$ формулой $\varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 w_1 + \dots + x_n w_n$.
   Тогда φ — линейное отображение из V в W (упражнение).
   Единственность следует из 1 ∎

17 Лекция 23.01.2020

17.1 Матрица линейного отображения

Пусть V, W — векторные пространства над F.
$\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V,
$\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ — базис W.

Пусть $\varphi\colon V \to W$ — линейное отображение.
$\forall j = 1, \ldots, n$

$$\varphi(e_j) = a_{1j}f_1 + a_{2j}f_2 + \cdots + a_{mj}f_m = (f_1, \ldots, f_m)\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \ldots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

Тогда, $(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) = (f_1, \ldots, f_m) \cdot A$, где $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(F)$.

Определение 67. A называется матрицей линейного отображения φ в базисах $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$.
Обозначение: $A = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$.

В j-м столбце матрицы A стоят координаты вектора $\varphi(e_j)$ в базисе $\mathbb{f}$.

Обозначение 1. $\mathrm{Hom}(V, W) :=$ множество всех линейных отображений из V в W.

Следствие (из предложения 16.11)**.** При фиксированных базисах $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$ отображение $\varphi \mapsto A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$ является биекцией между $\mathrm{Hom}(V, W)$ и $\mathrm{Mat}_{m\times n}(F)$.

17.2 Примеры

0. $\varphi(v) = 0\ \forall v \implies \forall \mathbb{e}, \mathbb{f}\ A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$.

3. $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ — проекция на Oxy.

   $\left.\begin{array}{l} \mathbb{e} \text{ — стандартный базис в } \mathbb{R}^3 \\ \mathbb{f} \text{ — стандартный базис в } \mathbb{R}^2 \end{array}\right\} \implies A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. $\Delta\colon \mathbb{R}[x]_{\leqslant n} \to \mathbb{R}[x]_{\leqslant n-1}$, $f \to f'$.

   $\mathbb{e} = (1, x, \ldots, x^n)$, $\mathbb{f} = (1, x, \ldots, x^{n-1})$.

   $$A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & n \end{pmatrix}$$

5. $x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$.

   $\left.\begin{array}{l} \mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n) \\ \mathbb{f} = \text{стандартный базис} \end{array}\right\} \implies A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) = E.$

6. $\varphi\colon F^n \to F^m$.

   $\varphi(x) = A \cdot x$, $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(F)$.

   $\mathbb{e} =$ стандартный базис,

   $\mathbb{f} =$ стандартный базис.

   $A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) = A$.

17.3 Связь координат вектора и его образа при линейном отображении

Предложение. Пусть $\varphi\colon V \to W$ — линейное отображение,
$\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V,
$\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ — базис W,
$A = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$.
$v \in V \implies v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$,
$\varphi(v) = y_1 f_1 + \cdots + y_m f_m$.
Тогда,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Доказательство. $v = (e_1, \ldots, e_m) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Значит,

$$\varphi(v) = (\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (f_1, \ldots, f_m) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

При этом,

$$\varphi(v) = (f_1, \ldots, f_m) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Так как $f_1, \ldots, f_m$ линейно независимы, то

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

■

17.4 Формула изменения матрицы линейного отображения между векторными пространствами V и W при замене их базисов

Пусть теперь $\mathbb{e}'$ — другой базис в V, $\mathbb{f}'$ — другой базис в W.
$\mathbb{e}' = \mathbb{e} \cdot C_{\in M_n}$,
$\mathbb{f}' = \mathbb{f} \cdot D_{\in M_m}$.
$A = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$,
$A' = A(\varphi, \mathbb{e}', \mathbb{f}')$.

Предложение. $A' = D^{-1} A C$.

Доказательство.

$$(e'_1, \ldots e'_n) = (e_1, \ldots, e_n) \cdot C.$$

Применим φ,

$$(\varphi(e'_1), \ldots, \varphi(e'_n)) = (\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) \cdot C = (f_1, \ldots, f_m) \cdot A \cdot C$$

При этом,

$$(\varphi(e'_1), \ldots, \varphi(e'_n)) = (f'_1, \ldots, f'_m) \cdot A' = (f_1, \ldots, f_m) \cdot D \cdot A'.$$

Отсюда,

$$A \cdot C = D \cdot A' \implies A' = D^{-1} \cdot A \cdot C.$$

■

17.5 Операции сложения и умножения на скаляр на множестве всех линейных отображений между двумя векторными пространствами

Пусть $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(V, W)$, $\lambda \in F$.

Определение 68.

1. *Суммой* линейных отображений φ и ψ называется линейное отображение $\varphi + \psi \in \mathrm{Hom}(V, W)$, такое что $(\varphi + \psi)(v) := \varphi(v) + \psi(v)$.
2. Произведение φ на λ — это линейное отображение $\lambda\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$, такое что $(\lambda\varphi)(v) := \lambda\varphi(v)$.

Упражнение. $\varphi + \psi$ и $\lambda\varphi$ — действительно линейные отображения.

Упражнение. $\mathrm{Hom}(V, W)$ с этими операциями является векторным пространством над F.

17.6 Матрица суммы двух линейных отображений и произведения линейного отображения на скаляр

Зафиксируем базисы $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ в V и $\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ в W.

Предложение.

1. $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(V, W)$, $A_\varphi = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$
$$A_\psi = A(\psi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$$
$$A_{\varphi+\psi} = A(\varphi + \varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) \quad \Longrightarrow \quad A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$$
2. $\lambda \in F, \varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$, $A_\varphi = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$
$$A_{\lambda\varphi} = A(\lambda\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) \quad \Longrightarrow \quad A_{\lambda\varphi} = \lambda A_\varphi$$

Доказательство.

1.
$$\begin{aligned}(f_1, \ldots, f_m) \cdot A_{\varphi+\psi} &= ((\varphi + \psi)(e_1), \ldots, (\varphi + \psi)(e_n)) \\ &= (\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) + (\psi(e_1), \ldots, \psi(e_n)) \\ &= (f_1, \ldots, f_m)A_\varphi + (f_1, \ldots, f_m)A_\psi \\ &= (f_1, \ldots, f_m)(A_\varphi + A_\psi).\end{aligned}$$
Следовательно, $A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$.
2. Аналогично. ■

17.7 Изоморфизм между пространством $\mathrm{Hom}(V,W)$ и пространством $(m \times n)$-матриц, где $n = \dim V$, $m = \dim W$

Следствие. При фиксированном $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$ отображение $\varphi \mapsto A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$ является изоморфизмом между $\mathrm{Hom}(V, W)$ и $\mathrm{Mat}_{m\times n}(F)$.

Доказательство. Биективность была выше. Линейность — из предыдущего предложения. ■

Следствие. $\dim \mathrm{Hom}(V, W) = m \cdot n$.

17.8 Матрица композиции двух линейных отображений

Пусть $U \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{\varphi} W$ — цепочка линейных отображений, а $\varphi \circ \psi : U \to W$ — их композиция,
$\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V,
$\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ — базис W,
$\mathbb{g} = (g_1, \ldots, g_k)$ — базис U.
$A_\varphi = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$,
$A_\psi = A(\psi, \mathbb{g}, \mathbb{e})$,
$A_{\varphi\circ\psi} = A(\varphi \circ \psi, \mathbb{g}, \mathbb{f})$.
Тогда, $A_{\varphi\circ\psi} = A_\varphi \cdot A_\psi$.

Доказательство. $(\psi(g_1), \ldots, \psi(g_k)) = (e_1, \ldots, e_n)A_\psi$. Тогда применяя φ,
$$(\varphi(\psi(g_1)), \ldots, \varphi(\psi(g_k))) = (\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))\, A_\psi = (f_1, \ldots, f_m)A_\varphi A_\psi.$$
С другой стороны,
$$(\varphi(\psi(g_1)), \ldots, \varphi(\psi(g_k))) = (f_1, \ldots, f_m)A_{\varphi\circ\psi}.$$
Значит, $A_\varphi \cdot A_\psi = A_{\varphi\circ\psi}$. ■

17.9 Ядро и образ линейного отображения; утверждение о том, что они являются подпространствами в соответствующих векторных пространствах

Пусть $\varphi\colon V \to W$.

Определение 69. *Ядро* линейной оболочки φ — это $\ker\varphi := \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\} \subseteq V$.
Образ линейного отображения φ — это $\operatorname{Im}\varphi := \varphi(V) \subseteq W$.

Пример. $\Delta\colon \mathbb{R}[x]_{\leqslant n} \to \mathbb{R}[x]_{\leqslant n},\ f \mapsto f'$,
$\ker\Delta = \{f \mid f = \mathrm{const}\}$,
$\operatorname{Im}\Delta = \mathbb{R}[x]_{\leqslant n-1}$.

Предложение.

1. Ядро — подпространство в V.

2. Образ — подпространство в W.

Доказательство.

1. (a) $\varphi(0_V) = 0_W$,
   (b) $v_1, v_2 \in \ker\varphi \implies \varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = 0 + 0 = 0 \implies v_1 + v_2 \in \ker\varphi$,
   (c) $\lambda \in F, v \in V \implies \varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v) = \lambda 0 = 0 \implies \lambda v \in \ker\varphi$.

2. (a) $0_W = \varphi(W) \in \operatorname{Im}\varphi$,
   (b) $w_1, w_2 \in \operatorname{Im}\varphi \implies \exists v_1, v_2 : w_1 = \varphi(v_1), w_2 = \varphi(v_2) \implies w_1 + w_2 = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \varphi(v_1 + v_2) \in \operatorname{Im}\varphi$,
   (c) $\varphi \in F, w \in \operatorname{Im}\varphi \implies \exists v \in V : w = \varphi(v) \implies \varphi(w) = \lambda\varphi(v) = \varphi(\lambda v) \in \operatorname{Im}\varphi$. ■

18 Лекция 25.01.2020

18.1 Критерий инъективности линейного отображения в терминах его ядра

Пусть V, W — векторные пространства над F,
$\varphi\colon V \to W$ — линейное отображение.
Ядро: $\ker\varphi := \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\} \subseteq V$.
Образ: $\operatorname{Im}\varphi := \varphi(V) \subseteq W$.

Предложение.

(a) φ инъективно $\iff \ker\varphi = \{0\}$,

(b) φ сюръективно $\iff \operatorname{Im}\varphi = W$.

Доказательство.

(a) $\implies$ очевидно

$\impliedby$ Пусть $v_1, v_2 \in V$ таковы, что $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$. Тогда $\varphi(v_1 - v_2) = 0$, а значит $v_1 - v_2 \in \ker\varphi$.
Но тогда, $v_1 - v_2 = 0$, то есть $v_1 = v_2$.

(b) очевидно. ■

Следствие. φ изоморфизм $\iff \begin{cases} \ker\varphi = \{0\}, \\ \operatorname{Im}\varphi = W. \end{cases}$

18.2 Характеризация изоморфизмов в терминах их ядер и образов

Пусть $U \subseteq V$ — подпространство, $u_1, \ldots, u_k$ — базис в U.

Лемма 18.1. Тогда, $\varphi(U) = \langle \varphi(u_1), \ldots, \varphi(u_k) \rangle$. В частности, $\dim\varphi(U) \leqslant \dim U$ и $\dim\operatorname{Im}\varphi \leqslant \dim V$.

Доказательство. $u \in U \implies u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k$, $\alpha_i \in F$, тогда

$$\varphi(u) = \alpha_1\varphi(u_1) + \cdots + \alpha_k\varphi(u_k) \in \langle \varphi(u_1), \ldots, \varphi(u_k) \rangle\,.$$ ■

18.3 Связь размерности образа линейного отображения с рангом его матрицы

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V,
$\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ — базис W,
$A = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$.

Теорема 18.2. $\operatorname{rk} A = \dim\operatorname{Im}\varphi$.

Доказательство. По лемме, $\operatorname{Im}\varphi = \langle \varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n) \rangle$. Поэтому, $\dim\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{rk}\{\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)\}$.
Так как j-й столбец матрицы A составлен из координат вектора $\varphi(e_j)$ в базисе $\mathbb{f}$, то

$$\alpha_1\varphi(e_1) + \cdots + \alpha_n\varphi(e_n) = 0 \iff \alpha_1 A^{(1)} + \cdots + \alpha_n A^{(n)} = 0.$$

Значит, $\dim\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{rk}\{\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)\} = \operatorname{rk}\{A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}\} = \operatorname{rk} A$. ■

Замечание. Число $\dim\operatorname{Im}\varphi$ называется *рангом* линейного отображения φ, обозначается $\operatorname{rk}\varphi$.

Следствие. $\operatorname{rk} A$ не зависит от выбора пары базисов $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$.

18.4 Инвариантность ранга матрицы относительно умножения на квадратную невырожденную матрицу слева или справа

Обозначение 2. $M_n^0(F) := \{C \in M_n(F) \mid \det C \neq 0\}$.

Следствие. Ранг матрицы не меняется при умножении слева и/или справа на невырожденную матрицу.

Доказательство. Если $A \in \operatorname{Mat}_{m\times n}$, $C \in M_n^0$, $D \in M_m^0$, то A и $D^{-1}AC$ — это матрицы одного и того же линейного отображения в разных парах базисов. По теореме, $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}\left(D^{-1}AC\right)$. ■

18.5 Свойство образов векторов, дополняющих базис ядра до базиса всего пространства

Предложение. Пусть $e_1, \dots, e_k$ — базис $\ker\varphi$ и векторы $e_{k+1}, \dots, e_n$ дополняют его до базиса всего V.
Тогда, $\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)$ образуют базис в $\operatorname{Im}\varphi$.

Доказательство. $\operatorname{Im}\varphi = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_k), \varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)\rangle = \langle \varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)\rangle$. (так как $\varphi(e_1) = \dots = \varphi(e_k) = 0$).
Осталось показать, что $\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)$ линейно независимы.
Пусть $\alpha_{k+1}\varphi(e_{k+1}) + \dots + \alpha_n\varphi(e_n) = 0$, где $\alpha_i \in F$.
Тогда $\varphi(\alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots \alpha_n e_n) = 0 \implies \alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n \in \ker\varphi$.
Но тогда $\alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots \alpha_n e_n = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_k e_k$, где $\beta_j \in F$.
Так как $(e_1, \dots, e_n)$ — базис V, то $\alpha_i = \beta_j = 0\ \forall i, j$. ■

18.6 Теорема о связи размерностей ядра и образа линейного отображения

Теорема 18.3. $\dim\operatorname{Im}\varphi + \dim\ker\varphi = \dim V$.

Доказательство. Вытекает из предыдущего предложения так как в его доказательстве:
$\dim V = n$,
$\dim\ker\varphi = k$,
$\dim\operatorname{Im}\varphi = n - k$. ■

18.7 Приведение матрицы линейного отображения к диагональному виду с единицами и нулями на диагонали

Предложение. Пусть $\operatorname{rk}\varphi = r$. Тогда существует базис $\mathbb{e}$ в V и базис $\mathbb{f}$ в W, такие что

$$A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) = \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \begin{array}{rc} & \begin{matrix} & r & & & & n-r & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ r \\ \\ \\ \\ m-r \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Доказательство. Пусть $e_{r+1}, \dots, e_n$ — базис $\ker\varphi$. Дополним его векторами $e_1, \dots, e_r$ до базиса всего V.
Положим $f_1 = \varphi(e_1)$, $\dots$, $f_r = \varphi(e_r)$, тогда $(f_1, \dots, f_r)$ — базис $\operatorname{Im}\varphi$.
Дополним $f_1, \dots, f_r$ до базиса $f_1, \dots, f_m$ всего W.
Тогда, $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ и $\mathbb{f} = (f_1, \dots, f_m)$ — искомые базисы. ■

Следствие. Если $A \in \operatorname{Mat}_{m\times n}(F)$, $\operatorname{rk} A = r$, то $\exists C \in M_n^0(F)$ и $D \in M_m^0(F)$, такие что

$$D^{-1}AC = \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = B.$$

($\iff A = DBC^{-1}$).

Доказательство. Реализуем A как матрицу линейного отображения $\varphi\colon F^n \to F^n$ в некоторой паре базисов, тогда утверждение вытекает из предложения и формулы изменения матрицы линейного отображения при замене базисов. ■

18.8 Линейные функции на векторном пространстве

Определение 70. *Линейной функцией* (или *линейной формой*, или *линейным функционалом*) на V называется всякое линейное отображение $\alpha\colon V \to F$.

Обозначение 3. $V^* := \operatorname{Hom}(V, F)$ — множество всех линейных функций на V.

18.9 Примеры

1. $\alpha\colon F^n \to F$.
   $\alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = (a_1, \dots, a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$, где $a_i \in F$ — фиксированные скаляры.

2. $F(X, \mathbb{R})$ — все функции из линейного пространства X в $\mathbb{R}$, $x_0 \in X$,

   $\alpha\colon F(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

   $\alpha(f) := f(x_0)$.

3. $\alpha\colon C[0,1] \to \mathbb{R}$

   $\alpha(f) := \int_0^1 f(x)\,dx$

4. $\alpha\colon M_n(F) \to F$

   $\alpha(X) := \operatorname{tr} X$

18.10 Двойственное (сопряжённое) векторное пространство, его размерность в конечномерном случае

Из общей теории линейных отображений:

1. V^* — векторное пространство (оно называется *сопряженным* или *двойственным*).

2. Если $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — фиксированный базис в V, то есть изоморфизм $V^* \simeq \mathrm{Mat}_{1\times n}(F)$ (а это ни что иное, как строки длины n).

   $\alpha \to (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$

   $v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$

   $\alpha(v) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n.$

   $\alpha_i = \alpha(e_i)$ — коэффициенты линейной функции α в базисе $\mathbb{e}$.

Следствие. $\dim V^* = \dim V$ ($\implies V^* \simeq V$).

18.11 Двойственный базис

При $i = 1, \ldots, n$ рассмотрим линейную функцию $\varepsilon_i \in V^*$, соответствующую строке $(0 \ldots 1 \ldots 0)$. Тогда $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ — базис V^*, он однозначно определяется условием $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$. ($\delta_{ij}$ — символ Кронекера)

Определение 71. Базис $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ пространства V^*, определенный условием выше, называется базисом, *двойственным* (сопряженным) к базису $\mathbb{e}$.

Удобная запись условия:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \ldots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} (e_1, \ldots, e_n) = E.$$

19 Лекция 6.02.2020

19.1 Утверждение о том, что всякий базис сопряжённого пространства двойствен некоторому базису исходного пространства

$\varepsilon_i(x_1e_1 + \dots + x_ne_n) = x_i$, поэтому ε_i называется i-й координатной функцией в базисе $\mathbb{e}$.

Предложение. Всякий базис пространства V^* двойствен некоторому базису пространства V.

Доказательство. Пусть $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$ — базис пространства V^*. Фиксируем какой-то базис $\mathbb{e}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ пространства V, и пусть $\varepsilon' = \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \dots \\ \varepsilon'_n \end{pmatrix}$ — соответствующий ему двойственный базис V^*.

Тогда, $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \dots \\ \varepsilon'_n \end{pmatrix}$ для некоторой матрицы $C \in M_n^0(F)$.

Положим $(e_1, \dots, e_n) = (e'_1, \dots, e'_n) \cdot C^{-1}$.
Тогда,

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} (e_1, \dots, e_n) = C \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \dots \\ \varepsilon'_n \end{pmatrix} (e'_1, \dots, e'_n) C^{-1} = CEC^{-1} = E.$$

Значит, ε двойствен к $\mathbb{e}$. ■

Упражнение. $\mathbb{e}$ определён однозначно.

19.2 Билинейные формы на векторном пространстве

Пусть V — векторное пространство над F.

Определение 72. *Биленейная форма* на V — это отображение $\beta\colon V \times V \to F$, линейное по каждому аргументу.

Линейность по 1-му аргументу

- $\beta(x_1 + x_2, y) = \beta(x_1, y) + \beta(x_2, y) \quad \forall x_1, x_2, y \in V$,
- $\beta(\lambda x, y) = \lambda\beta(x, y) \quad \forall x, y \in V,\ \lambda \in F$.

Линейность по 2-му аргументу

- $\beta(x, y_1 + y_2) = \beta(x, y_1) + \beta(x, y_2) \quad \forall x, y_1, y_2 \in V$,
- $\beta(x, \lambda y) = \lambda\beta(x, y) \quad \forall x, y \in V,\ \lambda \in F$.

19.3 Примеры

19.3.1

$V = F^n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$;

$\beta(x, y) := x_1y_1 + \dots + x_ny_n = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = x^T y$.

19.3.2

$V = F^2$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$;

$\beta(x, y) := \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$.

19.3.3

$V = C[a, b]$;

$\beta(f, g) := \int_a^b f(x)g(x)\,dx$.

19.4 Матрица билинейной формы по отношению к фиксированному базису

Далее считаем, что $\dim V = n < \infty$.
Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V.

Определение 73. Матрицей билинейной формы β в базисе $\mathbb{e}$ называется такая матрица $B \in M_n$, что $b_{ij} = \beta(e_i, e_j)$.
Обозначение: $B(\beta, \mathbb{e})$.

Примеры Матрицы билинейных форм из примеров выше:

1. Пусть $\mathbb{e}$ — стандартный базис, тогда $B(\beta, \mathbb{e}) = E$.
2. Пусть $\mathbb{e}$ — стандартный базис, тогда $B(\beta, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Формула вычисления значений билинейной формы в координатах

Пусть $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$,
$y = y_1e_1 + \cdots + y_ne_n$.
Тогда,

$$\begin{aligned}\beta(x,y) &= \beta\left(\sum_{i=1}^{n} x_ie_i,\ \sum_{j=1}^{n} y_je_j\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \beta\left(e_i,\ \sum_{j=1}^{n} y_je_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_iy_j \underbrace{\beta(e_i,e_j)}_{\beta_{ij}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i\beta_{ij}y_j \\ &= (x_1,\ldots,x_n)B\begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

19.5 Существование и единственность билинейной формы с заданной матрицей

Предложение. Пусть $\mathbb{e}$ — фиксированный базис V.

1. Всякая билинейная форма β на V однозначно определяется матрицей $B(\beta, \mathbb{e})$.
2. $\forall B \in M_n(F)\ \exists!$ билинейная форма β на V, такая что $B(\beta, \mathbb{e}) = B$.

Доказательство.

1. Следует из формулы выше.
2. Единственность следует из формулы выше. Докажем существование:
   Определим β по формуле выше.
   Тогда β — билинейная форма на V (упражнение).

$$\beta(e_i, e_j) = \begin{array}{c} \qquad\qquad\quad i \qquad\qquad\quad \\ \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \cdot B \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} j = \beta_{ij}.$$

   Действительно, $B(\beta, \mathbb{e}) = B$. ■

19.6 Формула изменения матрицы билинейной формы при переходе к другому базису

$B = B(\beta, \mathbb{e})$.
Пусть $\mathbb{e}' = (e'_1, \ldots e'_n)$ — другой базис V.
$\mathbb{e}' = \mathbb{e} \cdot C$.
$B' := B(\beta, \mathbb{e}')$.

Предложение. $B' = C^TBC$.

Доказательство.

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = x_1' e_1' + \dots + x_n' e_n',$$

$$y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n = y_1' e_1' + \dots + y_n' e_n'.,$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ \dots \\ x_n' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} y_1' \\ \dots \\ y_n' \end{pmatrix}.$$

Тогда,

$$\beta(x, y) = (x_1 \dots x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1' \dots x_n') C^T B C \begin{pmatrix} y_1' \\ \dots \\ y_n' \end{pmatrix}$$

$$\beta(x, y) = (x_1' \dots x_n') B' \begin{pmatrix} y_1' \\ \dots \\ y_n' \end{pmatrix}.$$

Получаем, что $B' = C^T B C$. ■

Следствие. Величина $\operatorname{rk} B$ не зависит от выбора базисов.

19.7 Ранг билинейной формы

Определение 74. Число $\operatorname{rk} B := \operatorname{rk} B(\beta, \mathbb{e})$ называется *рангом* билинейной формы β.

19.8 Симметричные билинейные формы

Определение 75. Билинейная форма β называется *симметричной*, если $\beta(x, y) = \beta(y, x)\ \forall x, y \in V$.

19.9 Критерий симметричности билинейной формы в терминах её матрицы в каком-либо базисе

Пусть $\mathbb{e}$ — произвольный базис V.

Предложение. β симметрична $\iff B = B^T$.

Доказательство.

$\Longrightarrow$ $b_{ji} = \beta(e_j, e_i) = \beta(e_i, e_j) = b_{ij}$,

$\Longleftarrow$ $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$,

$y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$,

Тогда,

$$\beta(y, x) = (y_1 \dots y_n) B \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1 \dots x_n) B^T \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1 \dots x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \beta(x, y).$$

■

19.10 Квадратичные формы на векторном пространстве

Пусть $\beta \colon V \times V \to F$ — билинейная форма на V.

Определение 76. Отображение $Q_\beta \colon V \to F$, $Q_\beta(x) = \beta(x, x)$, называется *квадратичной формой*, ассоциированной с билинейной формой β.

Пусть $\mathbb{e}$ — базис V, $x = x_1 e_1 + \dots x_n e_n$, $B = B(\beta, \mathbb{e})$.
Тогда,

$$Q_\beta(x) = (x_1 \dots x_n) B \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (b_{ij} + b_{ji}) x_i x_j.$$

19.11 Примеры

19.11.1

$V = F^n$, $\beta(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \implies Q_\beta(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2$.

19.11.2

$V = F^2$, $\beta(x, y) = 2x_1y_2 \implies Q_\beta(x) = 2x_1x_2$.

Если $\mathbb{e}$ — стандартный базис, то $B(\beta, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

19.11.3

$V = F^2$, $\beta(x, y) = x_1y_2 + x_2y_1 \implies Q_\beta(x) = 2x_1x_2$.

Если $\mathbb{e}$ — стандартный базис, то $B(\beta, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

19.12 Соответствие между симметричными билинейными формами и квадратичными формами

Предложение. Пусть в поле F выполнено условие $1 + 1 \neq 0$ (то есть $2 \neq 0$). Тогда отображение $\beta \mapsto Q_\beta$ является биекцией между симметричными билинейными формами на V и квадратичным формами на V.

Доказательство.

Сюръективность Q — квадратичная форма $\implies Q = Q_\beta$ для некоторой билинейной формы на V.

То есть $Q(x) = \beta(x, x)\ \forall x \in V$.

Положим $\sigma(x, y) = \frac{1}{2}\left[\beta(x, y) + \beta(y, x)\right]$, тогда σ — симметричная билинейная форма.

$$\sigma(x, x) = \frac{1}{2}\left[\beta(x, x) + \beta(x, x)\right] = \beta(x, x).$$

Инъективность β — симметричная билинейная форма на V.

$$Q_\beta(x + y) = \beta(x + y, x + y) = \underbrace{\beta(x, x)}_{Q_\beta(x)} + \underbrace{\beta(x, y) + \beta(y, x)}_{\text{равны между собой}} + \underbrace{\beta(y, y)}_{Q_\beta(y)} \implies \beta(x, y) = \tfrac{1}{2}\left[Q_\beta(x + y) - Q_\beta(x) - Q_\beta(y)\right].$$

■

20 Лекция 13.02.2020

20.1 Симметризация билинейной формы и поляризация квадратичной формы

Замечание.

1. Билинейная форма $\sigma(x, y) = \frac{1}{2}(\beta(x, y) + \beta(y, x))$ называется *симметризацией* билинейной формы β.

   Если B и S — матрицы билинейных форм β и σ в некотором базисе, то $S = \frac{1}{2}(B + B^T)$.

2. Симметричная билинейная форма $\beta(x, y) = \frac{1}{2}[Q(x + y) - Q(x) - Q(y)]$ называется *поляризацией* квадратичной формы Q.

Определение 77. Матрицей квадратной формы Q в базисе $\mathbb{e}$ называется матрица соответствующей симметричной билинейной формы (поляризации) в базисе $\mathbb{e}$.

Обозначение: $B(Q, \mathbb{e})$.

Пример. Пусть $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$.

Если $\mathbb{e}$ — стандартный базис, то $B(Q, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

20.2 Канонический вид квадратичной формы

Определение 78. Квадратичная форма Q имеет в базисе $\mathbb{e}$ *канонический вид*, если $B(Q, \mathbb{e})$ диагональна.

Если $B(Q, \mathbb{e}) = \operatorname{diag}(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, то $Q(x_1, \ldots, x_n) = b_1x_1^2 + b_2x_2^2 + \cdots + b_nx_n^2$.

20.3 Теорема о приведении квадратичной формы к каноническому виду. Метод Лагранжа

Теорема 20.1. *Всякую квадратичную форму путём замены базиса можно привести к каноническому виду.*

Доказательство (метод Лагранжа). Индукция по n:

База $n = 1 \implies Q(x) = bx_1^2$ — канонический вид.

Шаг Пусть утверждение доказано для $< n$, докажем для n.

Пусть $B = B(Q, \mathbb{e})$ — матрица квадратичной формы в исходном базисе $\mathbb{e}$.

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} 2b_{ij}x_ix_j.$$

Случай 0. $b_{ij} = 0\ \forall i, j$ — доказывать нечего.

Случай 1. $\exists i : b_{ii} \neq 0$. Сделав перенумерацию, считаем $b_{11} \neq 0$.

Тогда,

$$\begin{aligned}
Q(x_1, \ldots, x_n) &= b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + \cdots + 2b_{1n}x_1x_n + Q_1(x_2, \ldots, x_n) \\
&= b_{11}\left(x_1^2 + 2\frac{b_{12}}{b_{11}}x_1x_2 + \cdots + 2\frac{b_{1n}}{b_{11}}x_1x_n\right) + Q_1(x_2, \ldots, x_n) \\
&= b_{11}\Bigg(\underbrace{x_1 + \frac{b_{12}}{b_{11}}x_2 + \cdots + \frac{b_{1n}}{b_{11}}x_n}_{x_1'}\Bigg)^2 \underbrace{-b_{11}\left(\frac{b_{12}}{b_{11}}x_2 + \cdots + \frac{b_{1n}}{b_{11}}x_n\right)^2 + Q_1(x_2, \ldots, x_n)}_{Q_2(x_2, \ldots, x_n)} \\
&= b_{11}(x_1')^2 + Q_2(x_2', \ldots, x_n'),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{cases} x_1' &= x_1 + \frac{b_{12}}{b_{11}}x_2 + \cdots + \frac{b_{1n}}{b_{11}}x_n, \\ x_2' &= x_2, \\ & \vdots \\ x_n' &= x_n. \end{cases}$$

Здесь важно проследить, что замена действительно соответствует замене базисов (то есть является невырожденной).

Вспомним как происходит замена базиса:

$$\boxed{\begin{gathered} \mathbb{e}' = \mathbb{e}\cdot C \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = C\cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ \dots \\ x_n' \end{pmatrix} \end{gathered}}$$

Выразим x через x' и запишем матрицу перехода:

$$\begin{cases} x_1 &= x_1' - \frac{b_{12}}{b_{11}}x_2' - \dots - \frac{b_{1n}}{b_{11}}x_n', \\ x_2 &= x_2', \\ &\vdots \\ x_n &= x_n'. \end{cases} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{b_{12}}{b_{11}} & \dots & -\frac{b_{1n}}{b_{11}} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

По предположению индукции, Q_2 можно привести к каноническому виду.

Случай 2. $b_{ii} = 0\ \forall i$, но $\exists i, j, i \neq j$, такие что $b_{ij} \neq 0$.

Выполнив перенумерацию считаем, что $b_{12} \neq 0$.

Сделаем замену и выпишем матрицу перехода:

$$\begin{cases} x_1 &= x_1' + x_2', \\ x_2 &= x_1' - x_2', \\ x_3 &= x_3', \\ &\vdots \\ x_n &= x_n'. \end{cases} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Получаем $Q(x) = b_{12}x_1^2 - b_{12}x_2^2 + \underbrace{\dots\dots\dots\dots}_{\text{нет квадратов}}$, мы попали в случай 1. ■

Замечание. Базис, в котором Q имеет канонический вид, а так же сам этот вид, определены, вообще говоря, неоднозначно.

Пример. $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

Замена $\mathbb{e}' = (2e_1, 2e_2)$ $[x_1 = 2'x_1, x_2 = x_2']$,

Тогда, $Q(x_1', x_2') = 4x_1'^2 + 4x_2'^2$.

20.4 Угловые миноры матрицы квадратичной формы

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис пространства V.

Рассмотрим систему векторов $e_1', \dots, e_n'$ следующего вида:

$e_1' = e_1$,

$e_2' \in e_2 + \langle e_1\rangle$,

$e_3' \in e_3 + \langle e_1, e_2\rangle$,

$\dots$

$e_n' \in e_n + \langle e_1, \dots, e_{n-1}\rangle$.

Для любого $k = 1\dots n$ имеем $(e_1', \dots, e_k') = (e_1, \dots, e_k)\cdot C_k$, где

$$C_k = \begin{pmatrix} 1 & \star & \dots & \star & \star \\ 0 & 1 & \ddots & \star & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \star \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_k(F).$$

Так как $\det C = 1 \neq 0$, то $e_1', \dots, e_k'$ линейно независимы и $\langle e_1, \dots, e_k\rangle = \langle e_1', \dots, e_k'\rangle$.

В частности, $e_1', \dots, e_n'$ — базис V.

Заметим, что C_k — левый верхний $k\times k$ блок в C_n.

Пусть $Q\colon V \to F$ — квадратичная форма, β — соответствующая симметричная билинейная форма.

$B := B(Q, \mathbb{e})$.

B_k — левый верхний $k \times k$ блок в B.

$\delta_k := \delta_k(Q, \mathbb{e}) := \det B_k(Q, \mathbb{e})$ — k-й угловой минор матрицы B.

Для удобства, $\delta_0 := 1$.

Лемма 20.2. Пусть $(e_1', \dots, e_n') = \mathbb{e}'$ — базис V описанного выше вида и $\delta_k' = \delta_k(Q, \mathbb{e}')$. Тогда, $\delta_k' = \delta_k\ \forall k$.

Доказательство. Пусть $B' = B(Q, \mathbb{e})$ и $B_k' = B_k(Q, \mathbb{e}')$.

Так как $\langle e_1', \dots, e_k'\rangle = \langle e_1, \dots, e_k\rangle$, то $B_k' = C_k^T B_k C_k$. Отсюда, $\delta_k' = \det B_k' = \underbrace{\det C_k^T}_{1} \det B_k \underbrace{\det C_k}_{1} = \det B_k = \delta_k$. ■

20.5 Метод Якоби приведения квадратичной формы к каноническому виду

Теорема 20.3. *Пусть* $\delta_k \neq 0\ \forall k = 1, \ldots, n$.
Тогда, $\exists!$ *базис* $\mathbb{e}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ *в* V, *такой что*

1. $\mathbb{e}'$ *имеет описанный выше вид;*
2. *В базисе* $\mathbb{e}'$ Q *принимает канонический вид*
   $Q(x'_1, \ldots, x'_n) = \delta_1 x_1'^2 + \frac{\delta_2}{\delta_1} x_2'^2 + \cdots + \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} x_n'^2$.
   То есть $B(Q, \mathbb{e}') = \operatorname{diag}\left(\delta_1, \frac{\delta_2}{\delta_1}, \ldots, \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}}\right)$

Доказательство. Индукция по n.

База $n = 1 \implies$ верно.

Шаг Пусть доказано для $< n$, докажем для n.

Применяя предположение индукции к ограничению квадратичной формы на подпространство $\langle e_1, .., e_{n-1}\rangle$ получаем, что $\exists$ требуемый базис $e'_1, \ldots, e'_{n-1}$ в $\langle e_1, \ldots, e_{n-1}\rangle$ нужного вида.

Тогда, $B(Q, (e'_1, \ldots, e'_{n-1}, e_n))$ имеет вид

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \delta_1 & 0 & \ldots & 0 & \star \\ 0 & \frac{\delta_2}{\delta_1} & \ldots & 0 & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{\delta_{n-1}}{\delta_{n-2}} & \star \\ \hline \star & \star & \ldots & \star & \star \end{array}\right).$$

Ищем e'_n в виде

$$e'_n = e_n + \lambda_1 e'_1 + \cdots + \lambda_{n-1} e'_{n-1}.$$

Для любого $k = 1, \ldots, n-1$

$$\begin{aligned} \beta(e'_n, e'_k) &= \beta(e_n + \lambda_1 e'_1 + \cdots + \lambda_{n-1} e'_{n-1}, e'_k) \\ &= \beta(e_n, e'_k) + \lambda_1 \beta(e'_1, e'_k) + \cdots + \lambda_{n-1} \beta(e'_{n-1}, e'_k) \\ &= \beta(e_n, e'_k) + \lambda_k \beta(e'_k, e'_k) \\ &= \beta(e_n, e'_k) + \lambda_k \frac{\delta_k}{\delta_{k-1}}. \end{aligned}$$

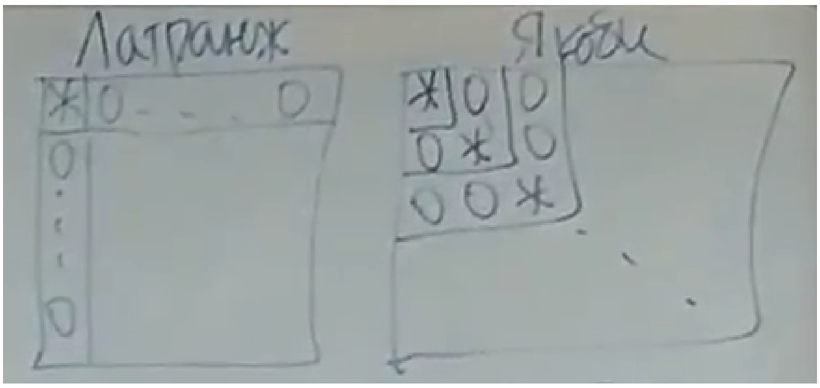
Хотим, $\beta(e'_n, e'_k) = 0\ \forall k = 1, \ldots, n-1 \iff \lambda_k = -\beta(e_n, e'_k)\frac{\delta_{k-1}}{\delta_k}$.

Тогда в базисе $\mathbb{e}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ матрица Q равна

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\delta_2}{\delta_1} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{\delta_{n-1}}{\delta_{n-2}} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & ? \end{pmatrix}.$$

По лемме, $\delta_n = \delta'_n = \delta_1 \cdot \frac{\delta_2}{\delta_1} \cdot \cdots \cdot \frac{\delta_{n-1}}{\delta_{n-2}} \cdot ? = \delta_{n-1} \cdot ? \implies ? = \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}}$.

Единственность следует из явной формулы для λ_k. ■



20.6 Нормальный вид квадратичной формы над полем $\mathbb{R}$

Определение 79. Квадратичная форма над $\mathbb{R}$ имеет *нормальный вид* в базисе $\mathbb{e}$, если в этом базисе

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \varepsilon x_1^2 + \cdots + \varepsilon_n x_n^2,$$

где $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$.

20.7 Приведение квадратичной формы над R к нормальному виду

Следствие (из метода Лагранжа)**.** Для всякой квадратичной формы Q над $\mathbb{R}$ существует базис, в котором Q имеет нормальный вид.

Доказательство. Из теоремы знаем, что существует базис $\mathbb{e}$, в котором Q имеет канонический вид

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = b_1 x_1^2 + \cdots + b_n x_n^2.$$

Делаем замену

$$x_i = \begin{cases} \frac{x_i'}{\sqrt{|b_i|}}, & b_i \neq 0 \\ x_i, & b_i = 0 \end{cases}.$$

Тогда в новых координатах $Q(x_1', \ldots, x_n') = \varepsilon_1 x_1'^2 + \cdots + \varepsilon_n x_n'^2$,

$$\varepsilon_i = \operatorname{sgn} b_i = \begin{cases} 1, & b_i > 0 \\ 0, & b_i = 0 \\ -1, & b_i < 0 \end{cases}.$$

∎

21 Лекция 20.02.2020

Замечание. Для $F = \mathbb{C}$ всякую квадратичную форму можно привести к виду (2), где $k = \operatorname{rk} Q$.

$$Q = x_1^2 + \dots + x_k^2. \tag{2}$$

21.1 Положительный и отрицательный индексы инерции квадратичной формы над $\mathbb{R}$

Пусть $F = \mathbb{R}$.
Пусть $Q\colon V \to \mathbb{R}$ — квадратичная форма.
Можно привести к нормальному виду

$$Q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_{s+t}^2.$$

Здесь $i_+ := s$ — положительный индекс инерции квадратичной формы Q,
$i_- := t$ — отрицательный индекс инерции квадратичной формы Q.

21.2 Закон инерции

Теорема 21.1. *Числа i_+ и i_- не зависят от базиса в котором Q принимает нормальный вид.*

Доказательство. $s + t = \operatorname{rk} Q$, то есть не зависит от выбора базиса. Следовательно, достаточно показать, что число s определено однозначно.

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис, в котором Q принимает нормальный вид

$$Q = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_{s+t}^2.$$

Пусть $\mathbb{e}' = (e_1', \dots, e_n')$ — другой базис, в котором Q принимает нормальный вид

$$Q = x_1'^2 + \dots + x_s'^2 - x_{s+1}'^2 - \dots - x_{s+t}'^2.$$

Предположим, что $s \neq s'$, можно считать что $s > s'$.
Положим $L := \langle e_1, \dots, e_s \rangle$, $\dim L = s$,
$L' := \langle e_{s+1}', \dots, e_{s+t}' \rangle$, $\dim L' = n - s'$.

Так как $L + K' \subseteq V$, то $\dim (L + L') \leqslant n$.
Тогда, $\dim (L \cap L') \geqslant s + (n - s') - n = s - s' > 0$.

Значит, $\exists$ вектор $v \in L \cap L'$, такой что $v \neq 0$.
Теперь:
1. Так как $v \in L$, то $Q(v) > 0$,
2. Так как $v \in L'$, то $Q(v) \leqslant 0$.

Противоречие. ■

21.3 Следствие метода Якоби о вычислении индексов инерции квадратичной формы над $\mathbb{R}$

Пусть $Q\colon V \to \mathbb{R}$ — квадратичная форма,
$\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис,
$B = B(Q, \mathbb{e})$,
δ_k — k-й угловой минор матрицы B.

Следствие (из метода Якоби)**.** Пусть $\delta_k \neq 0\ \forall k$. Тогда:
Число i_+ равно количеству <u>сохранений знака</u> в последовательности $1, \delta_1, \dots, \delta_n$.
Число i_- равно количеству <u>перемен знака</u> в последовательности $1, \delta_1, \dots, \delta_n$.

Доказательство. Метод Якоби $\implies \exists$ базис, в котором Q принимает канонический вид

$$Q = \delta_1 x_1^2 + \frac{\delta_2}{\delta_1} x_2^2 + \dots + \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} x_n^2.$$

Здесь, знак отношения $\frac{\delta_i}{\delta_{i-1}}$ соответствует смене либо сохранению знака в рассматриваемой последовательности.
По закону инерции, количества знаков $+$ и $-$ не изменяются от выбора базиса. ■

21.4 Положительно определённые, отрицательно определённые, неотрицательно определённые, неположительно определённые, неопределённые квадратичные формы над $\mathbb{R}$

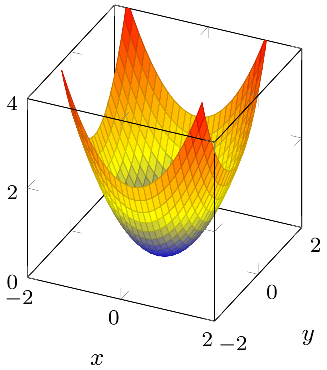
Определение 80. Квадратичная форма Q над $\mathbb{R}$ называется

Термин	Обозначение	Условие	Нормальный вид	Индексы инерции
Положительно определённой	$Q > 0$	$Q(x) > 0\ \forall x \neq 0$	$x_1^2 + \dots + x_n^2$	$i_+ = n, i_- = 0$
Отрицательно определённой	$Q < 0$	$Q(x) < 0\ \forall x \neq 0$	$-x_1^2 - \dots - x_n^2$	$i_+ = 0, i_- = n$
Неотрицательно определённой	$Q \geqslant 0$	$Q(x) \geqslant 0\ \forall x$	$x_1^2 + \dots + x_k^2,\ k \leqslant n$	$i_+ = k, i_- = 0$
Неположительно определённой	$Q \leqslant 0$	$Q(x) \leqslant 0\ \forall x$	$-x_1^2 - \dots - x_k^2,\ k \leqslant n$	$i_+ = 0, i_- = k$
Неопределённой	—	$\exists x : Q(x) > 0$ $\exists y : Q(y) < 0$	$x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - x_{s+t}^2$ $s, t \geqslant 1$	$i_+ = s, i_- = t$

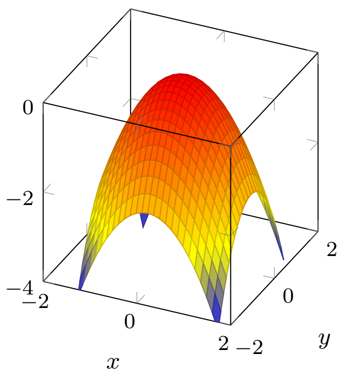
21.5 Примеры

$V = \mathbb{R}^2$.

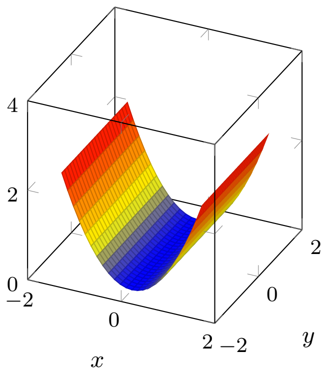
1. $Q(x, y) = x^2 + y^2$, $Q > 0$.



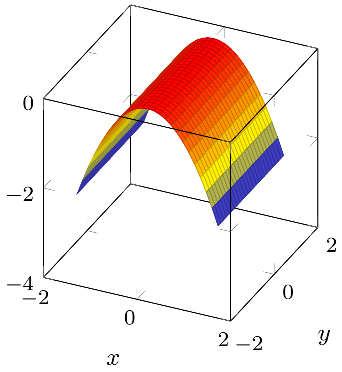
2. $Q(x, y) = -x^2 - y^2$, $Q < 0$.



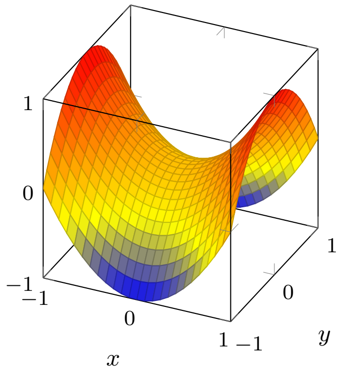
3. $Q(x, y) = x^2$, $Q \geqslant 0$.



4. $Q(x,y) = -x^2$, $Q \leqslant 0$.



5. $Q(x,y) = x^2 - y^2$.



21.6 Одно применение квадратичных форм над $\mathbb{R}$

Презентация (продублирована ниже)

21.6.1 Знаем из курса математического анализа

Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — некоторая функция, $x_0 \in \mathbb{R}$ — некоторая точка.
Если f дважды дифференцируема в точке x_0, то для малого приращения y имеем

$$f(x_0 + y) = f(x_0) + ay + by^2 + o(y^2),$$

где $a = f'(x_0)$,, $b = f''(x_0)/2$.

Предложение (необходмое условие локального экстремума)**.** Если f в точке x_0 имеет локальные экстремум, то $f'(x_0) = 0$.

Предложение (достаточные условия локального экстремума)**.** Пусть $f'(x_0) = 0$. Тогда

- если $f''(x_0) > 0$, то f в точке x_0 имеет локальный минимум;
- если $f''(x_0) < 0$, то f в точке x_0 имеет локальный максимум.

21.6.2 Применение квадратичных форм

Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — некоторая функция, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — некоторая точка.

Если f «дважды дифференциируема» в точке x_0, то для малого приращения $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$f(x_0 + y) = f(x_0) + \underbrace{a_1 y_1 + \dots + a_n y_n}_{l(y)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} b_{ii} y_i^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} 2b_{ij} y_i y_j}_{Q(y)} + o(|y|^2).$$

$l(y)$ — линейная форма, (называется «дифференциал»)
$Q(y)$ — квадратичная форма.

Предложение (необходимое условие локального экстремума)**.** Если f в точке x_0 имеет локальный экстремум, то $l(y) \equiv 0$ (то есть $a_1 = \dots = a_n = 0$).

Предложение (достаточные условие локального экстремума или его отсутствия)**.** Пусть $l(y) \equiv 0$. Тогда:

- если $Q > 0$, то f в точке x_0 имеет локальный минимум;
- если $Q < 0$, то f в точке x_0 имеет локальный максимум;
- если Q неопределённа, то f в точке x_0 не имеет локального экстремума.

21.7 Критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы

Пусть V — векторное пространство над $\mathbb{R}$, $\dim V = n$,

$\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V,

$B = B(Q, \mathbb{e})$,

B_k — левый верхний $k \times k$ блок,

$\delta_k = \det B_k$.

Теорема 21.2 (Критерий Сильвестра положительной определенности)**.**

$$Q > 0 \iff \delta_k > 0 \ \forall k = 1 \dots n.$$

Доказательство.

$\Longleftarrow$ По следствию из метода Якоби, $i_+ = n$, то есть $Q > 0$.

$\Longrightarrow$ $Q > 0 \implies \exists C \in M_n^0(\mathbb{R})$, такая что $C^T BC = E$.

Тогда, $\det C^T \cdot \underbrace{\det B}_{=\delta_n} \cdot \det C = 1$. Отсюда, $\delta_n = \frac{1}{(\det C)^2} > 0$.

Теперь, для любого k ограничение Q на $\langle e_1, \dots, e_k \rangle$ тоже положительно определённо, а его матрица в базисе $e_1, \dots, e_k$ равна B_k. Следовательно, $\det B_k > 0$. ■

21.8 Критерий отрицательной определённости квадратичной формы

Следствие.

$$Q < 0 \iff \delta_k \begin{cases} > 0 & \text{при } k \not\vdots\, 2, \\ < 0 & \text{при } k \vdots 2. \end{cases}$$

Доказательство. $Q < 0 \iff -Q > 0$ ■

$$\begin{aligned} &\iff \det(-B_k) > 0 \ \forall k \\ &\iff (-1)^k \delta_k > 0 \ \forall k \end{aligned}$$

21.9 Евклидово пространство и скалярное произведение

Определение 81. *Евклидово пространство* — это векторное пространство $\mathbb{E}$ над $\mathbb{R}$, на котором задано *скалярное произведение*, то есть такое отображение $(\bullet, \bullet) \colon \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R}$, что

1. $(\bullet, \bullet)$ — симметричная билинейная форма,
2. Квадратичная форма (x, x) положительно определённая.

21.10 Примеры

1. $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$.

   $(x, y) := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \leftarrow$ стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

   $(x, x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 > 0$.

2. $\mathbb{E} = \mathrm{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$,

   $(A, B) := \mathrm{tr}(A^T B)$,

   $(A, A) = \mathrm{tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij}^2$.

3. $\mathbb{E} = C[a, b]$,

   $(f, g) := \int_a^b f(x) g(x)\, dx$,

   $(f, f) = \int_a^b f^2(x)\, dx > 0$.

22 Лекция 20.02.2020

Замечание. Всякое подпространство $U \subseteq E$ тоже является евклидовым пространством со скалярным произведением $(\bullet, \bullet)\big|_U \leftarrow$ ограничение на U.

22.1 Длина вектора евклидова пространства

Определение 82. *Длина* вектора $x \in \mathbb{E}$ — это $|x| := \sqrt{(x, x)}$.
Свойство: $|x| \geqslant 0$, причем $|x| = 0 \iff x = 0$.

Пример. Если $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением, то $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.

Замечание. Если $\mathbb{E} = \mathrm{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$, $(A, B) = \mathrm{tr}(A^T B)$

Тогда, $|A| = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2} \leftarrow$ это обозначается как $\|A\|_F$ и называется *нормой Фробениуса*, *фробениусовой нормой.*

22.2 Неравенство Коши–Буняковского

Предложение (неравенство Коши-Буняковского)**.** $\forall x, y \in \mathbb{E}$ верно $|(x, y)| \leqslant |x| \cdot |y|$, причём равенство $\iff$ x, y пропорциональны.

Доказательство. Случаи:

1. x, y пропорциональны. Тогда, можно считать, что $y = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
   $|(x, y)| = |(x, \lambda x)| = |\lambda||(x, x)| = |\lambda||x|^2 = |x| \cdot |\lambda x| = |x| \cdot |y|$.
2. x, y не пропорциональны. Тогда x, y линейно независимы.
   Значит они образуют базис в $\langle x, y \rangle$.
   Получаем
   $$\begin{vmatrix} (x, x) & (x, y) \\ (y, x) & (y, y) \end{vmatrix} > 0 \quad \text{(критерий Сильвестра).}$$
   Отсюда, $(x, x) \cdot (y, y) - (x, y)^2 > 0 \implies (x, y)^2 < |x|^2 \cdot |y|^2$.

■

Пример. Пусть $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением, тогда

$$|x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n| \leqslant \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}.$$

22.3 Угол между ненулевыми векторами евклидова пространства

Пусть $x, y \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$, тогда $-1 \leqslant \frac{(x,y)}{|x| \cdot |y|} \leqslant 1$.

Определение 83. Угол между ненулевыми векторами $x, y \in \mathbb{E}$, это такой $\alpha \in [0, \pi]$, что $\cos \alpha = \frac{(x,y)}{|x| \cdot |y|}$.
Тогда $(x, y) = |x||y| \cos \alpha$.

22.4 Матрица Грама системы векторов евклидова пространства

Пусть $v_1, \ldots, v_k$ — произвольная система векторов.

Определение 84. *Матрица Грама* этой системы — это

$$G(v_1, \ldots, v_k) = \begin{pmatrix} (v_1, v_1) & (v_1, v_2) & \ldots & (v_1, v_k) \\ (v_2, v_1) & (v_2, v_2) & \ldots & (v_2, v_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (v_k, v_1) & (v_k, v_2) & \ldots & (v_k, v_k) \end{pmatrix}.$$

Пример. $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением.
$a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n \rightsquigarrow A := (a_1, \ldots, a_k) \in \mathrm{Mat}_{n \times k}(\mathbb{R})$.
Тогда, $G(a_1, \ldots, a_k) = A^T \cdot A$.

22.5 Определитель матрицы Грама: неотрицательность, критерий положительности

Предложение. $\forall v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{E} \implies \det G(v_1, \ldots, v_k) \geqslant 0$.

Более того, $\det G(v_1, \ldots, v_k) > 0 \iff v_1, \ldots, v_k$ линейно независимы.

Доказательство. Пусть $G := G(v_1, \ldots, v_k)$. Случаи:

1. $v_1, \ldots, v_k$ линейно независимы. Тогда, G — матрица билинейной формы $(\bullet, \bullet)\Big|_{\langle v_1, \ldots, v_k \rangle}$ в базисе $v_1, \ldots, v_k$ подпространства $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$, а значит $\det G > 0$ по критерию Сильвестра.
2. $v_1, \ldots, v_k$ линейно зависимы. Тогда, $\exists (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$, такие что $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0$.
   А значит, $\forall i = 1, \ldots, k \implies \alpha_1 (v_1, v_i) + \cdots + \alpha_k (v_k, v_i) = 0$.
   Отсюда, $a_1 G_{(1)} + \cdots + \alpha_k G_{(k)} = 0 \implies$ строки в G линейно зависимы $\implies \det G = 0$. ■

22.6 Ортогональные векторы

Определение 85. Векторы $x, y \in \mathbb{E}$ называются *ортогональными*, если $(x, y) = 0$.

22.7 Ортогональное дополнение подмножества евклидова пространства

Определение 86. *Ортогональное дополнение* множества $S \subseteq \mathbb{E}$ — это множество $S^\perp := \{x \in \mathbb{E} \mid (x, y) = 0 \forall y \in S\}$.

Упражнение.

1. $S^\perp$ — подпространство в $\mathbb{E}$.
2. $S^\perp = \langle S \rangle^\perp$.

22.8 Размерность ортогонального дополнения подпространства, ортогональное дополнение к ортогональному дополнению подпространства

22.9 Разложение евклидова пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения

Далее считаем, что $\dim \mathbb{E} = n < \infty$.

Предложение. Пусть $S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство. Тогда:

1. $\dim S^\perp = n - \dim S$.
2. $\mathbb{E} = S \oplus S^\perp$.
3. $(S^\perp)^\perp = S$.

Доказательство.

1. Пусть $\dim S = k$ и $e_1, \ldots, e_k$ — базис S.
   Дополним $e_1, \ldots, e_k$ до базиса $e_1, \ldots, e_n$ всего $\mathbb{E}$.
   Тогда, $\forall x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \in \mathbb{E}$.
   $$\begin{aligned} x \in S^\perp &\iff (x, e_i) = 0 \ \forall i = 1, \ldots, k \\ &\iff \begin{cases} (e_1, e_1) x_1 + \cdots + (e_n, e_1) x_n = 0 \\ (e_1, e_2) x_1 + \cdots + (e_n, e_2) x_n = 0 \\ \ldots \\ (e_1, e_k) x_1 + \cdots + (e_n, e_k) x_n = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$
   Это ОСЛУ с матрицей $G \in \mathrm{Mat}_{k \times n}(\mathbb{R})$, причём любой $k \times k$ блок в G — это $\underbrace{G(e_1, \ldots, e_k)}_{\det \neq 0}$.
   Это означает, что $\operatorname{rk} G = k$.
   Следовательно, пространство решений этой ОСЛУ имеет размерность $n - k$.
   Отсюда, $\dim S^\perp = n - k = n - \dim S$.
2. (a) $\dim S + \dim S^\perp = k + (n - k) = n = \dim E$.

(b) $v \in S \cap S^{\perp} \implies (v, v) = 0 \implies v = 0 \implies S \cap S^{\perp} = \{0\}$.

А значит, $E = S \oplus S^{\perp}$.

3. Заметим, что $S \subseteq (S^{\perp})^{\perp}$ (по определению).

   $\dim(S^{\perp})^{\perp} = n - \dim S^{\perp} = n - (n - \dim S) = \dim S$.

   Следовательно, $S = (S^{\perp})^{\perp}$. ■

22.10 Ортогональная проекция вектора на подпространство, ортогональная составляющая вектора относительно подпространства

S — подпространство $\implies \mathbb{E} = S \oplus S^{\perp}$
$\forall v \in \mathbb{E} \exists! x \in S, y \in S^{\perp}$, такие что $x + y = v$.

Определение 87.

1. x называется *ортогональной проекцией* вектора v на подпространство S.

   Обозначение: $x = \operatorname{pr}_S v$.

2. y называется *ортогональной составляющей* вектора v относительно подпространства S.

   Обозначение: $y = \operatorname{ort}_S v$.

22.11 Явная формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в $\mathbb{R}^n$, заданное своим базисом

Пусть $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением.
$S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство, $a_1, \dots, a_k$ — базис S.
Пусть $A := (a_1, \dots, a_k) \in \operatorname{Mat}_{n \times k}(\mathbb{R})$, $A^{(i)} = a_i$.

Предложение. $\forall v \in \mathbb{R}^n \quad \operatorname{pr}_S v = A(A^T A)^{-1} A^T v$.

Доказательство. Корректность: $A^T A = G(a_1, \dots, a_k) \in M_k^0(\mathbb{R})$.
Положим $x := \operatorname{pr}_S v$, $y := \operatorname{ort}_S v$.
Так как $x \in S$, $x = A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_k \end{pmatrix}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$.
$y \in S^{\perp} \implies A^T y = 0$.

$$\begin{aligned}
A(A^T A)^{-1} A^T v &= A(A^T A)^{-1} A^T (x + y) \\
&= \underbrace{A(A^T A)^{-1} A^T}_{E} \overbrace{A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_k \end{pmatrix}}^{x} + A(A^T A)^{-1} \underbrace{A^T y}_{0} \\
&= A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = x = \operatorname{pr}_S v.
\end{aligned}$$

■

22.12 Ортогональные и ортонормированные системы векторов

Определение 88. Система ненулевых векторов $v_1, \dots, v_k$ называется
1. *ортогональной*, если $(v_i, v_j) = 0 \; \forall i \neq j$ (то есть $G(v_1, \dots, v_k)$ диагональна),
2. *ортонормированной*, если $(v_i, v_j) = 0 \; \forall i \neq j$ и $(v_i, v_i) = 1$ ($\iff |v_i| = 1$). То есть $G(v_1, \dots, v_k) = E$.

Замечание. Всякая ортогональная (и в частности ортонормированная) система векторов автоматически линейно независима.

$$\det G(v_1, \dots, v_k) = |v_1|^2 \dots |v_k|^2 \neq 0.$$

22.13 Ортогональный и ортонормированный базис

Определение 89. Базис пространства называется *ортогональным* (соответственно *ортонормированным*), если он является ортогональной (ортонормированной) системой векторов.