Математический Анализ - 2 - Коллоквиум 1

Серёжа Рахманов | telegram, website
Денис Болонин | telegram

Версия от 12.10.2020 23:14

1. Дайте определения: числовой ряд, частичная сумма ряда, сумма ряда, сходящийся ряд, расходящийся ряд. Рассмотрим ряд с общим членом a_n. Докажите, что $a_n \to 0$.

   Определение. Пусть a_n – последовательность, т.е. $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Формальная бесконечная сумма: $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется рядом. $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n$ – частичная сумма, сумма ряда: $S = \lim\limits_{N\to\infty} S_N$

   Возможны 3 случая:

   (a) $\exists S \in \mathbb{R}$
   (b) $\exists S = \infty$
   (c) $\nexists S$

   В первом случае говорят, что ряд сходится, иначе – что ряд расходится.

   Замечание. Если ряд сходится, то $a_n \to 0$

   Доказательство. $a_n = S_n - S_{n-1} \to 0$, т.к. $S_n \to S$ и $S_{n-1} \to S$ ∎

2. Сформулируйте критерий Коши сходимости числовой последовательности. Сформулируйте и докажите критерий Коши сходимости числового ряда.

   Определение. a_n называется фундаментальной, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > m > N, |S_n - S_m| < \varepsilon$

   Теорема. S_n – сходится $\iff$ S_n – фундаментальная

   Доказательство. $S_n - S_m = \sum\limits_{k=m+1}^{n} a_k$ Тогда $\sum a_n$ – сходится $\iff$ $\forall\varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > m > N\ |a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n| < \varepsilon$ ∎

3. Сформулируйте и докажите признак сравнения положительных числовых рядов, основанный на неравенстве $a_n \leqslant b_n$.

   $a_n \leqslant b_n$ при всех $n \geqslant n_0$

   Ряд $\sum b_n$ сходится $\implies$ ряд $\sum a_n$ сходится

   Ряд $\sum a_n$ расходится $\implies$ ряд $\sum b_n$ расходится

   Доказательство. На основании того, что отбрасывание конечного числа элементов ряда не отражается на его поведении, мы можем считать, что $a_n \leqslant b_n$ при всех $n = 1, 2, 3, \ldots$ Обозначив частные суммы через A и B соответственно, имеем $A_n \leqslant B_n$. Пусть ряд $\sum b_n$ сходится, тогда B_n ограничена, $B_n \leqslant S(S = const, n = 1, 2, 3, \cdots)$. В таком случае A_n также меньше либо равна некоторому S, что даёт нам ограниченность $\sum a_n$. ∎

4. Сформулируйте и докажите признак сравнения положительных числовых рядов, основанный на неравенстве $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$.

   Ряд $\sum b_n$ сходится $\implies$ ряд $\sum a_n$ сходится

   Ряд $\sum a_n$ расходится $\implies$ ряд $\sum b_n$ расходится

Доказательство.

$a_{n_0+1} \leqslant \dfrac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+1}$

$a_{n_0+2} \leqslant \dfrac{a_{n_0+1}}{b_{n_0+1}} \cdot b_{n_0+2} \leqslant \dfrac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+2}$

$\vdots$

$a_{n_0+k} \leqslant \dfrac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+k} \implies \displaystyle\sum_{n=n_0}^{N} a_n \leqslant \dfrac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot \sum_{n=n_0}^{N} b_n$ ∎

5. Сформулируйте и докажите признак сравнения положительных числовых рядов, основанный на пределе $\lim \dfrac{a_n}{b_n}$.

   $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} \in (0;+\infty) \implies$ сходимость $\sum a_n \iff$ сходимость $\sum b_n$

   Доказательство.

   $c = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} > 0$

   $\forall \varepsilon\ \exists n_0 :\ c - \varepsilon \leqslant \dfrac{a_n}{b_n} \leqslant c + \varepsilon$, при $n \geqslant n_0$

   Возьмём $c - \varepsilon > 0 \implies (c-\varepsilon)\cdot b_n \leqslant a_n \leqslant (c+\varepsilon)\cdot b_n$

   Сходимость следует из правой части неравенства, а расходимость из левой. ∎

6. Пусть последовательности $\{a_n\}$, $\{A_n\}$ таковы, что $a_n - (A_n - A_{n-1}) = c_n$ и ряд $\sum c_n$ сходится. Докажите, что существует C такое, что $a_1 + a_2 + \dots + a_n = A_n + C + o(1)$.

7. Сформулируйте и докажите признак Лобачевского-Коши.

   Предложение. Пусть $a_n > 0$ и $a_n \downarrow$

   Тогда ряды $\sum a_n$ и $\sum 2^n \cdot a_{2^n}$ ведут себя одинаково

   Доказательство. $a_1 + (a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + \dots + a_8) + \dots$

   $a_2 \leqslant a_1$

   $a_2 \leqslant a_2$

   $a_3 + a_4 \leqslant 2a_2$

   $a_3 + a_4 \geqslant 2a_4$

   $a_5 + \dots + a_8 \leqslant 4a_4$

   $a_5 + \dots + a_8 \geqslant 4a_8$

   $\dots$

   $a_1 + \displaystyle\sum_{n=0}^{m-1} 2^n a_{2n} \leqslant \sum_{n=1}^{2^m} a_n \leqslant a_1 + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{m} 2^n a_{2n}$

   ∎

8. Сформулируйте теорему Штольца о пределе последовательности. Покажите на примере, как с помощью теоремы Штольца можно уточнить асимптотическую оценку для частичной суммы ряда. $\dfrac{p_n}{q_n}$, p_n, $q_n \to 0$.

   Теорема. (Штольца.) Если $p_n, q_n \to 0, q_n \downarrow$ и $\exists lim \dfrac{p_{n+1} - p_n}{q_{n+1} - q_n}$, то $\lim \dfrac{p_n}{q_n} = \lim \dfrac{p_{n+1} - p_n}{q_{n+1} - q_n}$

9. Пусть $\sum a_n$, $\sum a'_n$ - сходящиеся положительные ряды. Говорят, что ряд $\sum a'_n$ сходится быстрее ряда $\sum a_n$, если $a'_n = o(a_n)$. Докажите, что в этом случае также $r'_n = o(r_n)$, где r_n, r'_n - остатки соответствующих рядов.

   Рассмотрим остатки каждого из рядов. $r_n = S - S_N$, где S_N - частичная сумма ряда $\sum a_n$ и $S_N \to S$ при $N \to \infty$. Для $\sum a'_n$ аналогично $r'_n = S' - S'_N$, где S'_N - частичная сумма ряда $\sum a'_n$ и $S'_N \to S'$ при $N \to \infty$. Идёт речь о том, что ряд a'_n сходится быстрее ряда a_n, т.е. оба ряда сходятся и $S = S'$. Но, поскольку члены рядов находятся в отношении $a'_n = o(a_n)$, то мы можем сделать выводы о частичных суммах S_N и S'_N. $\forall N, S'_N = o(S_N)$, что указывает нам в результате на отношение между остатками $r'_n = o(r_n)$.

10. Пусть $\sum a_n$, $\sum a'_n$ - расходящиеся положительные ряды. Говорят, что ряд $\sum a'_n$ расходится медленнее ряда $\sum a_n$, если $a'_n = o(a_n)$. Докажите, что в этом случае также $S'_n = o(S_n)$, где S_n, S'_n - частичные суммы соответствующих рядов.

    Оба ряда расходятся, тогда $S_n \to \infty$ и $S'_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Мы понимаем, что $S_n = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n$, $S'_n = \sum\limits_{n=1}^{N} a'_n$. Это значит, что для некоторого n_1 мы имеем следующее: $S_{n_1} = \sum\limits_{n=1}^{n_1} a_n$, $S'_{n_1} = \sum\limits_{n=1}^{n_1} a'_n$, где для любого $n = 1, 2, 3, \dots, n_1$ выполняется отношение $a'_n = o(a_n)$. В таком случае для частичных сумм справедливо отношение $S'_{n_1} = o(S_{n_1})$. А так как и для всех последующих a_n и a'_n также справедливо отношение $a'_n = o(a_n)$, то мы можем сказать, что $S'_n = o(S_n)$.

11. Пусть положительный ряд $\sum a_n$ расходится и S_n его частичная сумма. Докажите, что ряд $\sum(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}})$ также расходится, причём медленнее, чем ряд $\sum a_{n+1}$.

    $r_n = S - S_n$, тогда $\dfrac{\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}}}{a_{n+1}} = \dfrac{\sqrt{S - S_n} - \sqrt{S - S_{n+1}}}{a_{n+1}} = \dfrac{S_{n+1} - Sn}{(S_{n+1} - S_n)(\sqrt{S - S_n} + \sqrt{S - S_{n+1}})}$, где $(S_{n+1} - S_n)(\sqrt{S - S_n} + \sqrt{S - S_{n+1}}) \to \infty$, $\dfrac{S_{n+1} - Sn}{(S_{n+1} - S_n)(\sqrt{S - S_n} + \sqrt{S - S_{n+1}})} \to 0$. Тогда ряд $\sum(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}})$ расходится, причём медленнее, чем ряд $\sum a_{n+1}$.

12. Пусть положительный ряд $\sum a_n$ расходится и S_n его частичная сумма. Докажите, что ряд $\sum(\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n})$ также расходится, причём медленнее, чем ряд $\sum a_{n+1}$.

    $\dfrac{\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n}}{a_{n+1}} = \dfrac{\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n}}{S_{n+1} - S_n} = \dfrac{1}{\sqrt{S_{n+1}} + \sqrt{S_n}}$, где $\sqrt{S_{n+1}} + \sqrt{S_n} \to \infty$, а значит $\dfrac{1}{\sqrt{S_{n+1}} + \sqrt{S_n}} \to 0$. Тогда ряд $\sum(\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n})$ расходится, причём медленнее, чем ряд $\sum a_{n+1}$.

13. Сформулируйте признак Даламбера для положительного ряда

    Теорема. Признак Даламбера. Пусть $a_n > 0$.
    $\overline{\lim}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies$ ряд $\sum a_n$ сходится.
    $\underline{\lim}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies$ ряд $\sum a_n$ расходится.

14. Сформулируйте радикальный признак Коши для положительного ряда.

    Теорема. Радикальный признак Коши. Пусть $a_n \geqslant 0$.
    $\overline{\lim}\sqrt[n]{a_n} < 1 \implies$ ряд $\sum a_n$ сходится.
    $\underline{\lim}\sqrt[n]{a_n} > 1 \implies$ ряд $\sum a_n$ расходится.

15. Докажите, что всякий раз, когда признак Даламбера даёт ответ на вопрос о сходимости ряда, то радикальный признак Коши даёт (тот же) ответ на этот вопрос.

    Пусть $a_n > 0$. Тогда:

    $$\underline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \underline{\lim}\sqrt[n]{a_n} \leqslant \overline{\lim}\sqrt[n]{a_n} \leqslant \overline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

    Если $\overline{\lim}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \overline{\lim}\sqrt[n]{a_n} < 1$
    Если $\underline{\lim}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies \underline{\lim}\sqrt[n]{a_n} > 1$
    Если $\exists \lim\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, то $\overline{\lim}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \underline{\lim}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \implies \exists \lim\sqrt[n]{a_n} = \lim\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

16. -

17. -

18. Приведите пример ряда, который сходится медленнее любого ряда геометрической прогрессии, но быстрее любого обобщённого гармонического яда (с обоснованием).

 Рассмотрим $e^{-\sqrt{n}}$

 $\sum q^n$ - ряд геометрической прогрессии, $0 < q < q$; $q^n = e^{n*\ln q}$, где $\ln q < 0$

 $\sum \frac{1}{n^p}$ - обобщённый гармонический ряд. $\frac{1}{n^p} = e^{-p\ln n}$, $p > 1$.

 $p \ln n < \sqrt{n} < n \ln \frac{1}{q}$, $\forall p, q$ при $n \geqslant n_0$.

 $\frac{e^{-\sqrt{n}}}{q^n} = e^{-\sqrt{n}+n\ln\frac{1}{q}} \to +\infty$, где $-\sqrt{n} + n\ln\frac{1}{q} \to +\infty \implies \sum e^{-\sqrt{n}}$ сходится медленнее ряда геометрической прогрессии.

 $\frac{e^{-\sqrt{n}}}{1/n^p} = e^{-\sqrt{n}+p\ln n} \to 0$, где $-\sqrt{n} + p\ln n \to -\infty \implies \sum e^{-\sqrt{n}}$ сходится быстрее гармонического ряда.

19. Сформулируйте признак Гаусса для положительного ряда. Приведите пример применения признака Гаусса.

 Если $\exists \delta > 0$, p: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right)$ то:

 $p > 1 \implies$ ряд $\sum a_n$ сходится.

 $p \leqslant 1 \implies$ ряд $\sum a_n$ расходится.

20. -

21. -

22. Что такое улучшение сходимости положительного ряда? Покажите на примере как можно улучшить сходимость ряда.

 Пусть у нас есть некоторый ряд $\sum a_n$ и он сходится медленно. В таких случаях для расчёта суммы ряда с необходимой точностью потребуется взять больше членов, что неудобно. Мы можем преобразовать наш ряд для улучшения сходимости, т.е. получить некоторый ряд $\sum a'_n$, который будет сходиться быстрее, чем исходный $\sum a_n$.

 Пример. Пусть у нас есть ряд $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2} \approx \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Воспользуемся методом Куммера. Для улучшения сходимости будем брать ряды вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1, \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}, \ldots$.

 В данном случае нам подойдёт первый ряд в этом списке, поскольку $\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n(n+1)}$.

 $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2+2} - \frac{1}{n(n+1)}\right) = S - 1 \implies S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2+2} - \frac{1}{n(n+1)}\right)$$

 $$\frac{1}{n^2+2} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2}\cdot\left(\frac{1}{1+\frac{2}{n^2}} - \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n^2}\cdot\left(1 - \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) = \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

 Получили ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, который сходится быстрее, $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \approx \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2}$.

23. Дайте определения: знакопеременный ряд, знакочередующийся ряд, абсолютно сходящийся ряд, условно сходящийся ряд, положительная часть ряда, отрицательная часть ряда.

 Определение. Пусть существует ряд $\sum a_n$. такой, что $\forall i$, a_i может быть, как больше 0, так и меньше 0. В таком случае ряд $\sum a_n$ называется знакопеременным.

 Определение. Пусть существует ряд $\sum a_n$. такой, что $\forall i$, $a_i \cdot a_{i+1} < 0$. В таком случае ряд $\sum a_n$ называется знакочередующимся.

 Определение. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется абсолютно сходящимся, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ также сходится.

 Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, то он является сходящимся (в обычном смысле). Обратное утверждение неверно.

Определение. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется условно сходящимся, если сам он сходится, а ряд, составленный из модулей его членов, расходится.

Определение. Введем два ряда: $a_n^+ = \begin{cases} a_n, a_n > 0 \\ 0 \end{cases}$ и $a_n^- = \begin{cases} |a_n|, a_n < 0 \\ 0 \end{cases}$. Тогда ряды $\sum a_n^+$ и a_n^- соответственно называются положительной и отрицательной частью ряда $\sum a_n$.

24. Докажите, что ряд сходится абсолютно ровно в том случае, когда сходятся его положительная и отрицательная части.

Доказательство. Рассмотрим ряд $\sum a_n$, дополнительный ряд $\sum |a_n|$, а также положительную и отрицательную части $\sum a_n^+$ и $\sum a_n^-$.

1) Пусть ряд $\sum a_n$ сходится абсолютно. В таком случае ряд $\sum |a_n|$ сходится, а так как члены рядов $\sum a_n^+$ и $\sum a_n^-$ все содержатся в ряде $\sum |a_n|$, то для всех их частичных сумм справедливо следующее: $P_k \leqslant A'_n$ и $Q_m \leqslant A'_n$, где P_k и Q_m - частичные суммы положительной и отрицательной части соответственно, а A'_n - частичная сумма дополнительного ряда и $A'_n = P_k + Q_m, n = m + k$. Это значит, что оба ряда $\sum a_n^+$ и $\sum a_n^-$ сходятся.

2) Исходя из того, что $S_n = P_k - Q_m, n = m+k$ и положительных и отрицательных элементов в $\sum a_n$ бесконечное множество, мы получаем, что при $n \to \infty$ одновременно $m \to \infty$ и $k \to \infty$. Переходя к пределу получаем, что исходный ряд сходится абсолютно и его сумма будет равна $P - Q$.

■

25. Докажите, что если ряд сходится условно, то его положительная и отрицательная части расходятся (имеют бесконечные суммы).

Доказательство. Рассмотрим ряд $\sum a_n$, дополнительный ряд $\sum |a_n|$, а также положительную и отрицательную части $\sum a_n^+$ и $\sum a_n^-$. Поскольку ряд $\sum a_n$ сходится условно, то $\sum |a_n|$ расходится. Рассмотри частичные суммы $\sum |a_n|$, $\sum a_n^+$ и $\sum a_n^-$ - A'_n, P_k, Q_m соответственно. Для любого $n = m + k$, $A'_n = P_k + Q_m$. При $n \to \infty$, $m \to \infty$ и $k \to \infty$. Так как ряд $\sum |a_n|$ расходится, то сумма $A'_n \to \infty$. Поскольку число положительных и отрицательных элементов бесконечно, то получаем $P_k \to \infty$ и $Q_m \to \infty$, а значит ряды $\sum a_n^+$ и $\sum a_n^-$ расходятся. ■

26. Сформулируйте мажорантный признак Вейерштрасса. Приведите пример применения признака

Теорема. Если $|a_n| \leqslant b_n$ при $n > n_0$ и положительный ряд $\sum b_n$ сходится, то $\sum a_n$ сходится, причём абсолютно.

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(nx)}{n^p}$, $p > 0$

$|sin(nx)| \leqslant 1 \implies \left|\dfrac{sin(nx)}{n^P}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^p}$

$\sum \dfrac{1}{n^p}$ сходится $(p > 1) \implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(nx)}{n^p}$ сходится абсолютно.

27. Что такое группировка членов ряда? Докажите, что любой ряд, полученный из сходящегося ряда группировкой его членов, сходится и имеет ту же сумму

Говорят, что ряд $\sum b_k$ получен из $\sum a_n$ группировкой членов, если $\exists n_1 < n_2 < \dots$:

$b_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1}$

$b_2 = a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \dots + a_{n_2}$

$\dots$

Замечание. Если $\sum a_n$ сходится, то ряд $\sum b_k$ сходится к той же сумме.

Доказательство. $\sum\limits_{k=1}^{m} b_k = \sum\limits_{n=1}^{n_m} a_n$ ■

Обратное утверждение неверно: $(1-1)+(1-1)+\dots$

28. Как с помощью группировки преобразовать знакопеременный ряд в знакочередующийся? Что можно утверждать о сходимости полученного знакочередующегося ряда?

    Знакопеременный ряд при помощи группировки сводится к знакочередующемуся:

    $a_1 \leqslant 0, \dots, a_{n_1} \leqslant 0;\ b_1 = \sum\limits_{i=1}^{n_1} a_i \leqslant 0$

    $a_{n_1+1} \geqslant 0, \dots, a_{n_2} \geqslant 0;\ b_1 = \sum\limits_{i=n_1+1}^{n_2} a_i \leqslant 0$

    При такой группировке сходимость исходного ряда $\iff$ сходимость $\sum b_n$

29. Приведите пример преобразования знакопеременного (но не знакочередующегося) ряда к знакочередующемуся.

    Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$

    $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$, где $b_k = (-1)^k$

    $|b_k| = \sum\limits_{n=[e^k]+1}^{[e^{k+1}]} \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{[e^k]+1} \cdot ([e^{k+1}] - [e^k]) \approx \dfrac{e^{k+1}-e^k}{e^k} \to e-1 > 0$

30. -

31. Сформулируйте признак Лейбница для знакочередующегося ряда. Приведите пример применения признака Лейбница.

    Теорема. Признак Лейбница. Если $u_n \downarrow 0$, то ряд сходится, причём $|r_n| \leqslant u_{n+1}$

    Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^p}$, $p > 0$

    $\dfrac{1}{n^p} \downarrow 0 \implies$ ряд сходится (при $\forall p > 0$)

32. -

33. Покажите, что для любых числовых последовательностей $\{a_n\}$, $\{B_n\}$ справедлива формула суммирования по частям: $\sum\limits_{n=m+1}^{N} a_n(B_n - B_{n-1}) = (a_N B_N - a_m B_m) - \sum\limits_{n=m+1}^{N} (a_n - a_{n-1})B_{n-1}$

    Суммируем равенство по индексу n: $\sum\limits_{n=m+1}^{N}$. $\sum\limits_{n=m+1}^{N} a_n(B_n - B_{n-1}) = \sum\limits_{n=m+1}^{N} (a_n B_n - a_{n-1}B_{n-1}) - \sum\limits_{n=m+1}^{N} (a_n - a_{n-1})B_{n-1}$. Получаем из первой скобки путём сокращения элементов $a_N B_N - a_m B_m$. В итоге получаем $\sum\limits_{n=m+1}^{N} a_n(B_n - B_{n-1}) = (a_N B_N - a_m B_m) - \sum\limits_{n=m+1}^{N} (a_n - a_{n-1})B_{n-1}$.

34. Сформулируйте признак Дирихле. Приведите пример его применения.

    $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$

    Теорема. Признак Дирихле. Если $a_n \downarrow 0$, а частичные суммы $\left|\sum\limits_{n=1}^{N} b_n\right| \leqslant C$ ограничены, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ сходится.

    Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(nx)}{n^p}$, $p > 0$

    $a_n = \dfrac{1}{n^p} \downarrow 0$, $b_n = \sin nx$

    $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_N = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin Nx = \dfrac{\cos\dfrac{x}{2} - \cos((N+1/2)x)}{2\sin\dfrac{x}{2}}$; $\left|\sum\limits_{n=1}^{N} b_n\right| \leqslant \dfrac{2}{2\sin\dfrac{x}{2}} = \dfrac{1}{\sin\dfrac{x}{2}}$

    Ряд сходится по признаку Дирихле

35. Сформулируйте признак Абеля. Выведите утверждение признака Абеля из признака Дирихле.

Теорема. Признак Абеля. Если a_n монотонна и ограничена, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ сходится.

36. Что такое перестановка членов ряда? Приведите пример.

Пусть $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ – биекция

Говорят, что ряд $\sum b_n$ получен из $\sum a_n$ перестановкой членов, если $b_n = a_{f(n)}$

37. -

38. Сформулируйте свойство абсолютно сходящегося ряда, связанное с перестановкой членов. (теорема Римана)

Теорема. (Римана) Если ряд $\sum a_n$ сходится условно, то для $\forall S \in [-\infty; +\infty]$ то $\exists$ перестановка f такая, что $\sum a_{f(n)} = S$

39. -

40. Как определяется произведение рядов? Что можно утверждать о произведении абсолютно сходящихся рядов?

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m$

$$\left(\sum_{k=1}^{K} a_k\right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{M} b_m\right) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant K, 1 \leqslant m \leqslant M} a_k \cdot b_m$$

Если эта сумма имеет предел при $K, M \to \infty$, не зависящий от порядка суммирования, то говорят, что определено произведение рядов.

Теорема. (Коши) Если $\sum a_k$, $\sum b_m$ сходятся абсолютно, то определено их произведение.

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} \cdot b_{m_n}$$

41. Что такое произведение рядов в форме Коши? Приведите пример вычисления такого произведения.

Произведение рядов по Коши:

$c_2 = a_1 \cdot b_1$

$c_3 = a_2 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_2$

$c_4 = a_3 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_3$

...

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m\right) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n$$

42. Дайте определения: бесконечное произведение, частичное произведение, сходящееся бесконечное произведение, расходящееся бесконечное произведение

$\prod\limits_{n=1}^{N} a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_N$ – частичное произведение.

Бесконечным произведением называют формальную запись $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

Значением бесконечного произведения является предел частичного произведения:

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \to \infty} \prod_{n=1}^{N} a_n$$

Если предел существует и он конечен – то бесконечное произведение сходится, иначе расходится.

43. Сформулируйте и докажите необходимое условие сходимости бесконечного произведения.

Если $P_N = \prod\limits_{n=1}^{N} a_n$ сходится, то $a_n = \dfrac{P_n}{P_{n-1}} \to 1$

44. -

45. Как определяется соответствующий бесконечному произведению ряд? Сформулируйте и докажите утверждение об их взаимосвязи.

$$\prod_{n=1}^{N} a_n = e^{\ln \prod_{n=1}^{N} a_n} = e^{\sum_{n=1}^{N} \ln a_n}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = P \iff \sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n = \ln P \ (P \neq 0, a_n \to 1)$$

46. В каком случае бесконечное произведение называется сходящимся абсолютно? Сформулируйте и докажите критерий абсолютной сходимости бесконечного произведения

$\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ называется абсолютно сходящимся, если абсолютно сходится соответствующий ему ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n$

Замечание. $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно $\iff$ $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 1)$ сходится абсолютно.

47. Напишите произведение Валлиса и его значение. Вычисление каких интегралов приводит к этой формуле?

Пример. (Произведение Валлиса) $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1} = \frac{\pi}{2}$ – получается из анализа интегралов $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$

Прим. ред.: есть отличное видео с интуитивно понятным доказательством.

48. Дайте определение дзета-функции (ζ-функция) Римана. Сформулируйте тождество Эйлера для ζ-функции.

Пример. (Дзета-функция Римана) $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, s > 1$

Тождество Эйлера:

$\zeta(s) = \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{1}{p_n^s})}$, где $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \ldots$