Теория вероятностей и математическая статистика, Коллоквиум III

Версия от 01.04.2021 00:09

Содержание

1. Неравенство Чебышева и закон больших чисел в слабой форме для общих случайных величин. Усиленный закон больших чисел Колмогорова (б/д). Сходимости случайных величин: почти наверное и по вероятности. Взаимосвязь сходимостей по вероятности и почти наверное.

1.1. Неравенство Чебышева и закон больших чисел в слабой форме для общих случайных величин.

Теорема (Неравенство Маркова)**.** Пусть X это случайная величина и $X \geqslant 0$ почти наверное. Тогда для любого $t > 0$ выполняется

$$\mathrm{P}[X \geqslant t] \leqslant \frac{\mathrm{E}[X]}{t}$$

почти наверное.

Доказательство. Заметим, что для любого $t > 0$ выполняется $t \cdot \mathrm{I}[x \geqslant t] \leqslant X$ почти наверное (здесь I это индикатор), так как в левой части будут учтены $t \leqslant X$, с суммарным коэффициентом не больше 1.
Возьмем математическое ожидание от обеих сторон и получим то, что нас просили:

$$t \cdot \mathrm{I}[x \geqslant t] \leqslant X \iff t \cdot \mathrm{P}[x \geqslant t] \leqslant \mathrm{E}[X] \iff \mathrm{P}[x \geqslant t] \leqslant \frac{\mathrm{E}[X]}{t}.$$

∎

Теорема (Неравенство Чебышева)**.** Пусть у случайной величины X конечный второй момент, то есть $\mathrm{E}[X^2] \leqslant \infty$. Тогда

$$\mathrm{P}[|X - \mathrm{E}[X]| \geqslant \varepsilon] \leqslant \frac{\mathrm{D}[X]}{\varepsilon^2}.$$

Доказательство. Для доказательства рассмотрим случайную величину $Y = |X - \mathrm{E}[X]|^2$ и применим неравенство Маркова.
Для любого ε выполняется

$$\mathrm{P}[Y \geqslant \varepsilon^2] \leqslant \frac{\mathrm{E}[Y]}{\varepsilon^2} \iff \mathrm{P}[|X - \mathrm{E}[X]|^2 \geqslant \varepsilon^2] \leqslant \frac{\mathrm{D}[X]}{\varepsilon^2} \iff \mathrm{P}[|X - \mathrm{E}[X]| \geqslant \varepsilon] \leqslant \frac{\mathrm{D}[X]}{\varepsilon^2}.$$

∎

Теорема (Закон Больших Чисел в слабой форме)**.** Рассмотрим последовательность $\{X_n\}_n$ случайных независимых величин, что $\mathrm{E}[X_n^2] < \infty$ для любого n.
Обозначим $\mathrm{E}[X_n] = a_n$ и $\mathrm{D}[X_n] = \sigma_n^2$. Если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2}{n^2} = 0,$$

то для всякого $\varepsilon > 0$ выполняется

$$\mathrm{P}\left[\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right] \leqslant \frac{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2}{n^2\varepsilon^2}.$$

Доказательство. Рассмотрим случайную величину $X = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$.
По линейности математического ожидания получаем

$$\mathrm{E}[X] = \frac{\mathrm{E}[X_1] + \cdots + \mathrm{E}[X_n]}{n} = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

Теперь необходимо найди дисперсию случайной величины X:

- Константа из дисперсии выносится с возведением в квадрат, поэтому

$$\mathrm{D}[X] = \mathrm{D}\left[\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right] = \frac{\mathrm{D}[X_1 + \cdots + X_n]}{n^2}.$$

- Так как $\{X_n\}_n$ это последовательность **независимых** случайных величин, дисперсия суммы может быть раскрыта как сумма дисперсий:

$$\mathrm{D}[X] = \frac{\mathrm{D}[X_1 + \cdots + X_n]}{n^2} = \frac{\mathrm{D}[X_1] + \cdots + \mathrm{D}[X_n]}{n^2} = \frac{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2}{n^2}.$$

Воспользуемся неравенством Чебышева для случайной величины X и подставим найденное математическое ожидания и дисперсию:

$$\mathrm{P}[|X-\mathrm{E}[X]| \geqslant \varepsilon] \leqslant \frac{\mathrm{D}[X]}{\varepsilon^2} \iff \mathrm{P}\left[\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right] \leqslant \frac{\sigma_1^2+\cdots+\sigma_n^2}{n^2\varepsilon^2}$$

■

Закон больших чисел удобно применять, когда X_n это независимые одинаково распределенные случайные величины (с конечным вторым моментом). В частности это означает, что у всех величин одно и то же математическое ожидание и одна и та же математическая дисперсия: $\mathrm{E}[X_n] = a$ и $\mathrm{D}[X_n] = \sigma^2$.
Тогда дисперсия среднего арифметического $\dfrac{\mathrm{D}[X_1]+\cdots+\mathrm{D}[X_n]}{n^2} = \dfrac{\sigma^2}{n}$ стремится к нулю и получаем

$$\mathrm{P}\left[\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - a\right| \geqslant \varepsilon\right] \to 0.$$

То есть в каком-то смысле среднее арифметическое приближается к математическому ожиданию.

1.2. Усиленный закон больших чисел Колмогорова (б/д).

Теорема (Усиленный закон больших чисел Колмогорова)**.** Пусть $\{X_n\}_n$ — это последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, у которых есть математическое ожидание и пусть $\mathrm{E}[X_n] = a$.
Тогда

$$\mathrm{P}\left[\lim_{n\to\infty} \frac{X_1+\cdots+X_n}{n} = a\right] = 1.$$

Заметьте, что мы не требуем наличия второго момента, в отличие ЗБЧ в слабой форме. Также, эта сходимость более сильная, так как предел находится внутри условия вероятности, это будет объяснено позже.

1.3. Сходимости случайных величин: почти наверное и по вероятности.

Определение. Последовательность случайных величин X_n сходится к случайной величине X **по вероятности**, если для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}[|X_n - X| \geqslant \varepsilon] = 0.$$

Записывают в следующем виде: $X_n \xrightarrow{P} X$.

Определение. Последовательность случайных величин X_n сходится к случайной величине X **почти наверное**, если

$$\mathrm{P}[\lim_{n\to\infty} X_n = X] = 1.$$

Записывают в следующем виде: $X_n \xrightarrow{\text{п. н.}} X$.

То есть в законе больших чисел в слабой форме речь идет о сходимости по вероятности, а в усиленном законе больших чисел Колмогорова — о сходимости почти наверное.
Из сходимости почти наверное следует сходимость по вероятности, поэтому усиленный закон больших чисел называется усиленным.

1.4. Взаимосвязь сходимостей по вероятности и почти наверное.

Теорема. Если последовательность случайных величин X_n сходится к X почти наверное, то X_n сходится к X и по вероятности.

Доказательство. Хотим доказать. что $\mathrm{P}[|X_n - X| > \varepsilon] \to 0$, что равносильно $\mathrm{P}[|X_n - X| < \varepsilon] \to 1$, что мы и будем заказывать.
Переформулируем выражение «множество исходов, что для любого $\varepsilon > 0$ существует N, что для любого $n > N$ выполняется $|X_n - X| < \varepsilon$» с помощью множеств:

$$\bigcup_N \bigcap_{n=N+1}^{\infty} \{w : |X_n - X| < \varepsilon\}.$$

Но это множество включает в себя множество исходов, для которых $\lim X_n = X$:

$$\bigcup_N \bigcap_{n=N+1}^{\infty} \{w : |X_n - X| < \varepsilon\} \supseteq \{w : \lim X_n = X\}.$$

Но по условию $\mathrm{P}[\lim X_n = X] = 1$, поэтому

$$\mathrm{P}\left[\bigcup_N \bigcap_{n=N+1}^{\infty} \{w : |X_n - X| < \varepsilon\}\right] = 1.$$

Обозначим $B_N = \bigcap\limits_{n=N+1}^{\infty} \{w : |X_n - X| < \varepsilon\}$. Тогда

$$B_{N+2} \supseteq B_{N+1} \supseteq B_N \supseteq \cdots \supseteq B_1,$$

так как чем больше номер множества, тем из меньшего числа пересечения оно состоит.
Из второго модуля про вероятность вложенных событий мы знаем (теорема о непрерывности вероятностных мер), что

$$\mathrm{P}\left[\bigcup_{N=1}^{\infty} B_N\right] = \lim_{N\to\infty} \mathrm{P}[B_N].$$

Но мы уже доказали, что $\mathrm{P}\left[\bigcup\limits_{N=1}^{\infty} B_N\right] = 1$, тогда

$$\mathrm{P}\left[\bigcap_{n=N+1}^{\infty} \{w : |X_n - X| < \varepsilon\}\right] \xrightarrow[N\to\infty]{} 1,$$

Заметим, что вероятность одного множества событий не меньше вероятности пересечения, поэтому о лемме о двух миллиционерах:

$$\mathrm{P}[\{w : |X_n - X| < \varepsilon\}] \to 1.$$

■

2. Сходимость случайных величин по распределению. Лемма о достаточном условии сходимости ожиданий функций из заданного семейства от последовательности случайных величин (лемма 2 из лекции 2). Эквивалентное описание сходимости по распределению.

3. Абсолютная непрерывность математического ожидания. Теорема Лебега о мажорируемой сходимости. Подстановка сходящейся по вероятности последовательности случайных величин в непрерывную функцию. Взаимосвязь сходимостей по вероятности и по распределению.

4. Характеристические функции: определение и свойства. Вычисление характеристической функции нормальной случайной величины. Производные характеристических функций.

5. Переформулировка сходимости по распределению в терминах характеристических функций. Однозначность задания распределения случайной величины ее характеристической функцией. Центральная предельная теорема.

6. Подстановка сходящейся по распределению последовательности случайных величин в непрерывную функцию. Сходимость суммы и произведения сходящихся по распределению последовательностей случайных величин в случае, когда одна из предельных случайных величин постоянная. Примеры применения: выборочная дисперсия и взаимосвязь с ЦПТ. Теорема о сходимости последовательности вида $\dfrac{f(a+h_nX_n)-f(a)}{h_n}$ для сходящейся по распределению последовательности X_n. Взаимосвязь с ЦПТ.

7. Неравенство типа Хефдинга-Чернова. Пример применения.

8. Многомерная характеристическая функция. Сходимость по распределению последовательности случайных векторов. Эквивалентное описание сходимости по распределению через сходимость характеристических функций (без доказательства). Независимость случайных величин в терминах характеристической функции совместного распределения. Матрица ковариаций, смысл задаваемой ей билинейной формы, ее изменение при линейных преобразованиях. Многомерная ЦПТ.

9. Многомерное нормальное распределение. Свойства нормального вектора: линейный образ нормального распределения нормален, характеризация через одномерные распределения, значение параметров нормального вектора, равносильность независимости и некоррелированности компонент. Представление нормального вектора, как линейный образ стандартного нормального вектора, ортогонализация. Плотность нормального вектора.

10. Условное математическое ожидание в дискретном случае относительно разбиения и относительно случайной величины. Основные свойства: линейность, монотонность, формула полной вероятности, условное ожидание величины, независимой с разбиением, вынесение случайной величины из под знака условного ожидания. Эквивалентное определение условного математического ожидания и геометрическая интерпретация.

11. Условное математическое ожидание в общем случае: определение и свойства. Формула для вычисления условного математического ожидания при известной плотности совместного распределения, условная плотность. Аналог формулы Байеса.