# Математический анализ, Коллоквиум 4

Балюк Игорь
@lodthe, GitHub
Материалы предоставил Егор Косов.

Дата изменения: 2020.05.28 в 19:44

## Содержание

Исходный код предоставил Егор Косов. В данном файле я попытался исправить опечатки и облегчить некоторые моменты для понимания.

Оригинальный список вопросов

# 1 Метрические и нормированные пространства.

Оригинальный конспект.

**Определение.** Пусть $X$ — множество. Функция $d : X \times X \to [0; +\infty)$ называется метрикой, если

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x) \forall x, y \in X$;
3. $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z) \forall x, y, z \in X$.

Пара $(X, d)$ называется метрическим пространством.

**Определение.** Пусть $X$ — линейное пространство. Функция $\|\cdot\| : X \to [0; +\infty)$ называется нормой, если:

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0$;
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall x \in X$;
3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \forall x, y \in X$.

Пара $(X, \|\cdot\|)$ называется нормированным пространством.

Нормой является привычнам нам длина вектора. Аналогично матрике, мы будем часто работать с Евклидовой нормой: пусть $x \in \mathbb{R}^n$, тогда $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.

Всякое нормированное пространство является метрическим с метрикой $d(x, y) = \|x - y\|$.

**Определение.** Пусть $X$ — линейное пространство. Функция $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ называется скалярным произведением, если для всех $x, y, z \in X$ и всех $a, b \in \mathbb{R}$ выполнены следующие условия:

1. $\langle x, x \rangle \geqslant 0$ и $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$;
2. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;
3. $\langle ax + by, z \rangle = a\langle x, z \rangle + b\langle y, z \rangle$.

Линейное пространство $X$ со скалярным произведением называется Евклидовым.

Мы будем часто работать со следующим скалярным произведением: пусть $x, y \in \mathbb{R}^n$, тогда $\langle x, y \rangle = x_1 \cdot y_1 \ldots x_n \cdot y_n$.

**Лемма.** (Неравенство Коши-Буняковского) Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скалярное произведение на линейном пространстве $X$, тогда $\forall x, y \in X$

$$|\langle x, y \rangle| \leqslant \sqrt{\langle x, x \rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y \rangle}.$$

*Доказательство.* Заметим, что для $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнено

$$0 \leqslant \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \lambda^2 \langle y, y \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + \rangle x, x \rangle.$$

Не ограничивая общности, считаем, что $\langle y, y \rangle > 0$ (иначе $y$ — нулевой вектор, доказательство тривиально). Это означает, что ветви параболы смотрят вверх. Но парабола не касается оси $Ox$, поэтому дискриминант этого трехчлена неположителен, т.е. $4|\langle x, y \rangle| - 4\langle y, y \rangle \langle x, x \rangle \leqslant 0$. ∎

**Следствие.** На евклидовом пространстве функция $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ является нормой.

*Доказательство.* Первые два свойства следуют из определения скалярного произведения. Неравенство треугольника следует из неравенства Коши-Буняковского:

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle \leqslant \|x\|^2 + 2 \cdot |\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

∎

**Пример.** На линейном пространстве $\mathbb{R}^k$ всех упорядоченных наборов $(x_1, \ldots, x_k)$ задано скалярное произведение $\langle x, y\rangle := \sum_{j=1}^{k} x_j y_j$. Тем самым, на $\mathbb{R}^k$ задана естественная евклидова метрика $\|x-y\| := \sqrt{|x_1-y_1|^2 + \cdots + |x_k-y_k|^2}$.

**Определение.** Пусть $(X, d)$ метрическое пространство.

1. Множество
$$B_r(x_0) := \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$$
называется **открытым шаром** радиуса $r$.

2. Множество
$$\overline{B_r}(x_0) := \{x \in X \mid d(x, x_0) \leqslant r\}$$
называется **замкнутым шаром** радиуса $r$.

3. Последовательность точек $x_n \in X$ называется **сходящейся к точке** $x$, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N(\varepsilon)$, что $d(x, x_n) < \varepsilon$ для каждого $n \geqslant N(\varepsilon)$.

4. Последовательность точек $x_n \in X$ называется **фундаментальной**, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N(\varepsilon)$, что $d(x_k, x_n) < \varepsilon$ для всех $k, n \geqslant N(\varepsilon)$.

5. Точка $x$ называется **предельной** для множества $M \subset X$, если для всякого $\varepsilon > 0$ выполнено $B_\varepsilon(x) \cap (M \setminus \{x\}) \neq \varnothing$.

6. Множество $U \subset X$ называется **открытым**, если для всякого $x \in U$ найдется такое $\varepsilon > 0$, что $B_\varepsilon(x) \subset U$.

7. Множество $F \subset X$ называется **замкнутым**, если множество $X \setminus F$ открыто.

**Лемма.** Пусть $(X, d)$ метрическое пространство. Тогда

1. если $x_n \to x, y_n \to y$, то $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$;

2. предел сходящейся последовательности единственный;

3. любой открытый шар является открытым множеством;

4. множество $F$ замкнуто тогда и только тогда, когда множество $F$ содержит все свои предельные точки.

*Доказательство.*

1. Следует из оценки
$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leqslant |d(x_n, y_n) - d(x_n, y)| + |d(x_n, y) - d(x, y)| \leqslant d(y_n, y) + d(x_n, x).$$

2. Следует из пункта 1).

3. Если $x \in B_r(x_0)$, то по неравенству треугольника $B_\varepsilon(x) \subset B_r(x_0)$ при $\varepsilon + d(x, x_0) < r$.

4. Множество $F$ замкнуто тогда и только тогда, когда $\forall x \notin F\ \exists \varepsilon > 0 :\ B_\varepsilon \cap F = \varnothing \iff$ всякая точка $x \notin F$ — не предельная для $F$.

■

**Определение.** Метрическое пространство называется полным, если каждая фундаментальная последовательность в нем сходится.

**Замечание.** На $\mathbb{R}^k$ справедливы соотношения
$$\max_{1 \leqslant j \leqslant k} |x_j| \leqslant \|x_j\| \leqslant \sqrt{k} \cdot \max_{1 \leqslant j \leqslant k} |x_j|$$
для векторов $x = (x_1, \ldots, x_k)$. Тем самым, последовательность $x_n \to x$ в $\mathbb{R}^k$ тогда и только тогда, когда $(x_n)_j \to x_j$.

**Пример.** Пространство $\mathbb{R}^k$ со стандартной евклидовой метрикой полное. Действительно. если последовательность векторов $x_n \in \mathbb{R}^k$ фундаментальна, то фундаментальны и последовательности координат $\{(x_n)_j\}_{j=1}^{\infty}$ для всякого $j \in \{1, \dots, k\}$.

Тем самым, у $j$-ой координаты есть предел $x_j$ для каждого $j \in \{1, \dots, k\}$. То есть $|(x_n)_j - x_j| \to 0$. Значит, $x_n \to x := (x_1, \dots, x_k)$.

**Пример.** Пусть $X = [0; \pi/2)$. Пространство $X$ не является полным с метрикой $d_1(x, y) = |x - y|$, но является полным с метрикой $d_2(x, y) = |\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y|$.

**Определение.** Пусть $(X, d_X)$ и $(Y, d_Y)$ — два метрических пространства. Отображение $f : X \to Y$ называется непрерывным в точке $x_0 \in X$, если для всякой последовательности $x_n \to x_0$ выполнено $f(x_n) \to f(x_0)$.

**Лемма.** Пусть $(X, d_X)$ и $(Y, d_Y)$ — два метрических пространства.

1. Отображение $f : X \to Y$ является непрерывным в точке $x \in X$ тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$, если $d_X(x, x_0) < \delta$.

2. Отображение $f : X \to Y$ является непрерывным в каждой точке $x \in X$ тогда и только тогда, когда прообраз каждого открытого множества в $Y$ будет открытым множеством в $X$ (такие отображения будем называть просто непрерывными).

*Доказательство.*

1. Отображение $f$ разрывно в точке $x_0 \iff$ найдется последовательность $x_n \to x_0$, для которой $f(x_n)$ не сходится к $f(x_0) \iff$ найдется число $\varepsilon > 0$ и последовательность $x_n' \to x_0$, для которой $d_Y(f(x_n'), f(x_0)) \geqslant \varepsilon \iff$ найдется такое число $\varepsilon > 0$, что для произвольного $\delta > 0$ существует $x_\delta \in B_\delta(x_0)$, для которого $d_Y(f(x_\delta), f(x_0)) \geqslant \varepsilon$.

2. Если прообраз любого открытого множества открыт, то для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0))) \supset B_\delta(x_0)$, и значит отображение $f$ непрерывно в точке $x_0$. Наоборот: пусть $U$ — открыто в $Y$ и $x_0 \in f^{-1}(U)$. Тогда в силу открытости найдется $\varepsilon > 0$, для которого $B_\varepsilon(f(x_0)) \subset U$. Из-за непрерывности в точке $x_0$ найдется такое $\delta > 0$, что $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0))) \supset B_\delta(x_0)$, что дает открытость множества $f^{-1}(U)$.

■

**Предложение.** Пусть $f : X \to Y$ непрерывна в точке $a \in X$, $g : Y \to Z$ непрерывна в точке $f(a) \in Y$. Тогда композиция $g \circ f : X \to Z$ непрерывна в точке $a$.

*Доказательство.* Следует из определения непрерывности. TODO() ■

**Следствие.** Пусть $f, g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ — непрерывные в точке $a$ функции. Тогда $f + g$ и $f \cdot g$ — непрерывны в точке $a$.

*Доказательство.* Следует из того, что отображение $(x_1, x_2) \to x_1 + x_2$ и $(x_1, x_2) \to x_1 \cdot x_2$ непрерывны на $\mathbb{R}^2$. ■

**Определение.** Пусть $(X, d_X)$ и $(Y, d_Y)$ — метрические пространства и пусть $x_0$ — предельная точка в $X$. Скажем, что предел функции $f : X \to Y$ в точке $x_0$ равен $y_0$, если функция $g$, определенная соотношением $g(x) = f(x)$ при $x \neq x_0$ и $g(x_0) = y_0$ иначе, непрерывна в точке $x_0$.

# 2 Компакты в метрических пространствах.

**Определение.** Множество $K$ в метрическом пространстве называется компактным тогда и только тогда, когда из произвольной последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \to x \in K$.

**Лемма.** Пусть $K$ — компакт. Тогда

1. $K$ — ограниченное множество;

2. $K$ — замкнутое множество;

3. образ $K$ при непрерывном отображении компактен.

*Доказательство.*

1. Зафиксируем произвольную точку $x_0 \in K$. Если $K$ — неограниченное множество, то найдется последовательность $x_n \in K$, $d(x_n, x_0) \to \infty$. Переходя к подпоследовательности, имеем $x_{n_k} \to x$, $d(x_{n_k}, x_0) \to d(x, x_0)$. Противоречие.

2. Если $x_n \in K$, $x_n \to x_0$, то переходя к подпоследовательности $x_{n_k} \to x \in K$, в силу единственности предела $x_0 = x \in K$.

3. Рассмотрим последовательность $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in K$. Переходя к подпоследовательности имеем $x_{n_k} \to x \in K$. Так как $f$ — непрерывное отображение, то $f(x_{n_k}) \to f(x) \in f(K)$.

■

**Предложение.** Множество $K$ в $\mathbb{R}^k$ со стандартной евклидовой метрикой компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.

*Доказательство.* Необходимость этого условия следует из предыдущей леммы. Проверим достаточность. Пусть множество $K$ — замкнуто и ограничено, и пусть $x_n \in K$. В силу ограниченности $K$ ограниченными будут и все координаты $(x_n)_j$ последовательности $x_n$. Тогда найдется сходящаяся подпоследовательность первых координат $(x_{n_m})_1$. Далее, из последовательности $(x_{n_m})_2$ можно также извлечь сходящуюся подпоследовательность. Повторяя процедуру, получим подпоследовательность $x'_n$, у которой каждая координата сходится, то есть $(x'_n)_j \to x_j$ для некоторого $x_j$. Тем самым, $x'_n \to x = (x_1, \ldots, x_k)$. В силу замкнутости $K$, вектор $x \in K$. ■

**Следствие.** Пусть $K$ — компакт, $f : K \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Тогда образ $f(K)$ — ограниченное множество и найдутся точки $x_m, x_M \in K$, для которых $f(x_m) = \inf\limits_{x \in K} f(x), f(x_M) = \sup\limits_{x \in K} f(x)$.

# 3 Дифференцируемость отображений.

**Определение.** Отображение $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ называется дифференцируемым в точке $x$, если для каждого $h \in \mathbb{R}^k$

$$f(x+h) = f(x) + Lh + \alpha(h)\,\|h\|\,,$$

где $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ — линейное отображение, $\lim\limits_{\|h\| \to 0} \|\alpha(h)\| = 0$. Линейное отображение $L$ называют дифференциалом $f$ в точке $x$ и обозначают $df$.

**Замечание.** Напомним, что отображение $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ называется линейным, если

$$L(a_1 h_1 + a_2 h_2) = a_1 L h_1 + a_2 L h_2$$

для произвольных векторов $h_1, h_2, \in \mathbb{R}^k$ и произвольных чисел $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

Если в $\mathbb{R}^k$ фиксирован базис $e := \{e_1, \ldots, e_k\}$, а в $\mathbb{R}^m$ фиксирован $e' := \{e'_1, \ldots, e'_m\}$, то линейное отображение $L$ представимо в виде $L(h) = L(e_1)h_1 + \cdots + L(e_k)h_k$, где $h = (h_1, \ldots, h_k)$ в базисе $e$, а векторы $L(e_j) = (e_{1,j}, \ldots, a_{m,j})$ в базисе $e'$.

В частности, каждое линейное отображение при фиксированных базисах $e$ и $e'$ в $\mathbb{R}^k$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно записывается с помощью матрицы $A = (a_{ij})$. Кроме того,

$$\|Lh\| \leqslant (\|L(e_1)\| + \cdots + \|L(e_k)\|) \cdot \max_{1 \leqslant j \leqslant k} |h_j| \leqslant C\,\|h\|$$

и каждое линейное отображение непрерывно на $\mathbb{R}^k$.

**Следствие.** Если отображение $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке $x$, то оно непрерывно в точке $x$.

*Доказательство.* Действительно, $\|f(x+h) - f(x)\| = \|df(h) + \alpha(h)\,\|h\|\| \leqslant C\,\|h\|$ при $h$ из некоторой окрестности нуля. ■

**Замечание.** Так как дифференцируемость $f$ в точке $x$ равносильна тому, что

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Lh\|}{\|h\|} = 0,$$

и так как сходимость по норме равносильна покоординатной сходимости, то при фиксирвоанном базисе $e' := \{e'_1, \ldots, e'_m\}$ в $\mathbb{R}^m$ дифференцируемость отображения $f$ равносильна дифференцируемости каждой координаты $f_j$ в точке $x$. В этом случае $Lh = (L_1 h, \ldots, L_m h)$ в базисе $e'$, где $L_j = df_j$ — дифференциал $j$-ой координаты.

**Лемма.** Если отображение $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке $x$, то для каждого вектора $h\in\mathbb{R}^k$ функция $t\to f(x+th)$ дифференцируема в точке 0 и $\dfrac{d}{dt}f(x+th)\Big|_{t=0}=df(h)$.

*Доказательство.* По определению

$$f(x+th)-f(x)=t\,df(h)+t\alpha(th)\,\|h\|\,.$$

Разделив на $t$ и перейдя к пределу при $t\to 0$, получаем требуемое соотношение. ■

**Определение.** Производная $\dfrac{\partial f}{\partial h}(x):=\dfrac{d}{dt}f(x+th)\Big|_{t=0}$ называется производной вдоль вектора $h$ и может существовать и в случае, когда сама функция $f$ не дифференцируема в точке $x$.

Как мы уже поняли, для дифференцируемости отображения достаточно исследовать дифференцируемость его координат, то есть дифференцируемость функции $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$. Зафиксировав базис $e:=\{e_1,\dots,e_k\}$ в $\mathbb{R}^n$, условие дифференцируемости в точке $x=(x_1,\dots,x_k)$ переписывается в виде

$$f(x_1+h_1,\dots,x_k+h_k)f(x_1,\dots,x_k)+c_1h_1+\dots+c_kh_k+\bar{\bar{o}}(\|h\|),$$

то есть $df(h)=c_1h_1+\dots+c_kh_k$. Из уже доказанного ясно, что $\dfrac{\partial f}{\partial e_j}(x)=df(e_j)=c_j$.

**Определение.** Частной производной $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ функции $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ в точке $x=(x_1,\dots,x_k)$ называется производная вдоль вектора $e_j$, то есть

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)=\frac{d}{dt}f(x_1,\dots,x_{j-1},t,x_{j+1},\dots,x_k)\Big|_{t=x_j}.$$

**Замечание.** При фиксированно базисе $e=\{e_1,\dots,e_k\}$ в $\mathbb{R}^k$ линейные функционалы $dx_1,\dots,dx_k$ оказываются сопряженным базисом к $e$. То есть $dx_i(e_j)=\delta_{i,j}$. Таким образом, $df=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\,dx_1+\dots+\dfrac{\partial f}{\partial x_k}\,dx_k$.

**Замечание.** В случае отображения $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^m$ при фиксированных базисах $e$ и $e'$ в $\mathbb{R}^k$ и в $\mathbb{R}^m$ соответственно, компоненты матрицы дифференциала $df$ имеют вид $a_{i,j}=\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$, то есть по строкам написаны градиенты $\nabla f_i(x)$.

**Определение.** При фиксированных базисах $e$ в $\mathbb{R}^k$ и $e'$ в $\mathbb{R}^m$ матрицу, соответствующую линейному отображению $df$, называют матрицей Якоби отображения $f$ в точке $x$ и обозначают $J_f(x)$.

## 4 Градиент и достаточное условие дифференцируемости.

**Определение.** *Градиентом* функции $f$ называется вектор $\nabla f:=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right)$.

**Лемма.** Если $f$ дифференцируема в точке $x$ и $df\neq 0$, то наибольшее значение производной вдоль единичного вектора $v$ (т.е. $\|v\|=1$) достигается на векторе $\|\nabla f(x)\|^{-1}\nabla f(x)$.

*Доказательство.* Так как $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x)=df(v)=\langle\nabla f(x),v\rangle$, то по неравенства Коши–Буняковского $\left|\dfrac{\partial f}{\partial v}(x)\right|\leqslant \|\nabla f(x)\|\|v\|=\|\nabla f(x)\|$. Если $v=\|\nabla f(x)\|^{-1}\nabla f(x)$, то в неравенстве достигается равенство. ■

Заметим, что наличия частных производных в точке недостаточно для дифференцируемости функции в этой точке.

**Пример.** Пусть

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2},\ (x,y)\neq(0,0),\\ \qquad 0,\ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Функция $f$ разрывна в нуле, а значит не дифференцируема, но в точке $(0,0)$ существуют обе частных производных. Действительно, если $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$, то функция $f(x,y)=\sin 2\varphi$. Таким образом, $f(x,y)$ в любой окрестности точки $(0,0)$ принимет значения $\pm1$, но $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\dfrac{d}{dx}f(x,0)=0$. Аналогично $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

В следующей теореме сформулировано достаточное условие дифференцируемости.

**Теорема.** Если все частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ существуют в окрестности точки $x_0$ и непрерывны в этой точке, то $f$ — дифференцируема в точке $x_0$.

*Доказательство.* Для сокращения выкладок докажем теорему в случае $k = 2$. Заметим, что

$$\begin{aligned} f(x_1+h_1, x_2+h_2) - f(x_1, x_2) &= f(x_1+h_1, x_2+h_2) - f(x_1, x_2+h_2) + f(x_1, x_2+h_2) - f(x_1, x_2) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2+h_2)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \xi_2)h_2, \end{aligned}$$

где $\xi_1$ принадлежит интервалу с концами $x_1$, $x_1+h_1$, а $\xi_2$ — с концами $x_2$, $x_2+h_2$. Запишем теперь последнюю сумму в виде

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)h_2 + \alpha(h)\|h\|,$$

где

$$\alpha(h) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2+h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)\Big)\frac{h_1}{\|h\|} + \Big(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \xi_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)\Big)\frac{h_2}{\|h\|}.$$

При малой $\|h\|$ выражения в скобках будут малы в силу непрерывности частных производных. Тем самым, $\lim\limits_{h\to 0}\|\alpha(h)\| = 0$. ■

# 5 Частные производные высокого порядка.

**Определение.** Пусть $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ и предположим, что в некоторой окрестности $B_r(x_0)$ точки $x_0$ существует частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$. Если функция $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ в точке $x_0$ имеет частную производную по переменной $x_i$, то эта частная производная $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\Big)(x_0)$ называется *частной производной второго порядка* по переменным $x_j$ и $x_i$ и обозначается $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)$.

**Замечание.** Заметим, что частные производные $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ и $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ являются разными объектами и, вообще говоря, не совпадают (пример будет в рамках семинарских задач).

О совпадении смешанных частных производных позволяют судить следующие две теоремы, которые мы для простоты сформулируем в двумерном случае (общий случай, по сути, ничем не отличается).

**Теорема 1** (Шварц). *Пусть смешанные частные производные* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *и* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ *существуют в окрестности точки* $(x_0, y_0)$ *и непрерывны в этой точке. Тогда их значения в точке* $(x_0, y_0)$ *совпадают.*

**Теорема 2** (Юнг). *Пусть $f$ — дифференцируема в окрестности точки $(x_0, y_0)$, а ее частные производные* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *и* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *дифференцируемы в точке $(x_0, y_0)$. Тогда смешанные частные производные* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *и* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ *в точке $(x_0, y_0)$ совпадают.*

Приведем доказательство второй из этих теорем.

*Доказательство.* Не ограничивая общности, будм считать, что $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Рассмотрим функцию

$$F(t, t) = f(t, t) - f(0, t) - f(t, 0) + f(0, 0).$$

Применяя теорему Лагранжа к функции $g(u) = f(t, u) - f(0, u)$, получаем

$$F(t, t) = g(t) - g(0) = g'(\xi)t = \Big(\frac{\partial f}{\partial y}(t, \xi) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, \xi)\Big)t.$$

Дифференцируемость $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ в точке $(0, 0)$ означает, что

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)x + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0)y + \bar{\bar{o}}(\sqrt{x^2+y^2}).$$

Таким образом,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t,\xi) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)t + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)\xi + \bar{\bar{o}}(\sqrt{t^2+\xi^2}).$$

и

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,\xi) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)\xi + \bar{\bar{o}}(\xi).$$

Т.к. $\xi \leqslant t$, то $\bar{\bar{o}}(\sqrt{t^2+\xi^2}) = \bar{\bar{o}}(t)$ и $\bar{\bar{o}}(\xi) = \bar{\bar{o}}(t)$. Таким образом,

$$F(t,t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)t^2 + \bar{\bar{o}}(t^2).$$

Аналогично,

$$F(t,t) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)t^2 + \bar{\bar{o}}(t^2).$$

Приравняв полученные выражения, поделив на $t^2$ и устремив $t$ к нулю, получаем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

∎

# 6 Правила дифференцирования.

**Теорема.** Пусть функции $f, g\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ дифференцируемы в некоторой точке $x$. Тогда, для произвольных чисел $a, b \in \mathbb{R}$, функции $af + bg$ и $fg$ дифференцируемы в точке $x$ и $d(af+bg) = a\,df + b\,dg$ и $d(fg) = f\,dg + g\,df$.

*Доказательство.* Заметим, что

$$\begin{aligned}(af+bg)(x+h) - (af+bg)(x) &= a(f(x+h) - f(x)) + b(g(x+h) - g(x)) \\ &= a(df(h) + \bar{\bar{o}}(\|h\|)) + b(dg(h) + \bar{\bar{o}}(\|h\|)) = a\,df(h) + b\,dg(h) + \bar{\bar{o}}(\|h\|).\end{aligned}$$

Таким образом, $d(af+bg) = a\,df + b\,dg$.

Для доказательства второго равенства заметим, что

$$\begin{aligned}(fg)(x+h) - (fg)(x) &= (f(x+h) - f(x))g(x+h) + f(x)(g(x+h) - g(x)) \\ &= (df(h) + \bar{\bar{o}}(\|h\|))(g(x) + \bar{\bar{o}}(1)) + f(x)(dg(h) + \bar{\bar{o}}(\|h\|)) \\ &= g(x)\,df(h) + f(x)\,dg(h) + (df(h))\bar{\bar{o}}(1) + g(x)\bar{\bar{o}}(\|h\|) + f(x)\bar{\bar{o}}(\|h\|) + \bar{\bar{o}}(\|h\|).\end{aligned}$$

Мы использовали непрерывность функции $g$, т.е. $g(x+h) - g(x) = \bar{\bar{o}}(1)$ при $\|h\| \to 0$, в силу ее дифференцируемости в точке $x$.

Так как $df$ — линейное отображение, то для некоторого числа $C > 0$ выполнено $|df(h)| \leqslant C\|h\|$, а значит $(df(h))\bar{\bar{o}}(1) = \bar{\bar{o}}(\|h\|)$. Т.к. $f(x)$ и $g(x)$ просто числа, то $g(x)\bar{\bar{o}}(\|h\|) + f(x)\bar{\bar{o}}(\|h\|) = \bar{\bar{o}}(\|h\|)$. Таким образом, теорема доказана. ∎

# 7 Дифференциалы высоких порядков.

Предположим, что $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ — дифференцируема в окрестности точки $a$ и предположим, что ее частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ дифференцируемы в точке $a$. Тогда при каждом $h \in \mathbb{R}^k$ возникает функция $x \mapsto df\big|_x(h) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x)h_1 + \ldots + \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x)h_k$, дифференцируемая в точке $a$.

Ее дифференциал $d(df(h))\big|_a(q) = \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_1}(a)q_j\right) h_1 + \ldots + \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a)q_j\right) h_k$.

То есть получена билинейная форма $d(df(h))\big|_a(q) = \sum\limits_{i,j=1}^{k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) q_j h_i$. Эта билинейная форма оказывается симметричной по теореме Юнга, а т.к. симметричная билинейная форма однозначно задается своей квадратичной формой $d(df(h))\big|_a(h) = \sum\limits_{i,j=1}^{k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) h_j h_i = \sum\limits_{i,j=1}^{k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) dx_j(h) dx_i(h)$, то эту квадратичную форму $d^2 f := \sum\limits_{i,j=1}^{k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) dx_j dx_i$ и называют **вторым дифференциалом** функции $f$.

Аналогично определяется дифференциал $n$-го порядка:

**Определение.** Если $f$ — $n$ раз дифференцируема в точке $a$, то

$$d^n f\big|_a := \sum_{1 \leqslant j_1, \ldots, j_n \leqslant k} \frac{\partial^n f}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_n}}(a)\, dx_{j_1} \ldots dx_{j_n}.$$

Последняя запись означает лишь то, что при вычислении $n$-го дифференциала на векторе $h \in \mathbb{R}^k$ надо воспользоваться линейностью, а $[dx_{j_1} \ldots dx_{j_n}](h) := dx_{j_1}(h) \ldots dx_{j_n}(h) = h_{j_1} \ldots h_{j_n}$.

# 8 Дифференцирование сложной функции.

**Теорема.** Пусть $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$, $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, причем отображение $f$ дифференцируемо в точке $a$, отображение $g$ дифференцируемо в точке $f(a)$. Тогда отображение $g \circ f$ дифференцируемо в точке $a$ и $d(g \circ f)\big|_a = dg\big|_{f(a)} \circ df\big|_a$.

**Замечание.** Поясним запись $d(g \circ f)\big|_a = dg\big|_{f(a)} \circ df\big|_a$. Здесь $df\big|_a\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ есть линейное отображение и $dg\big|_{f(a)}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ есть линейное отображение. Тогда их композиция $dg\big|_{f(a)} \circ df\big|_a\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ есть линейное отображение, действующее по правилу

$$dg\big|_{f(a)} \circ df\big|_a(h) = dg\big|_{f(a)}(df\big|_a(h)).$$

*Доказательство.* По условию $f(a+h) - f(a) = df(h) + \alpha(h)\|h\|$, где $\lim\limits_{\|h\| \to 0} \|\alpha(h)\| = 0$ и $g(f(a)+q) - g(f(a)) = dg(q) + \beta(q)\|q\|$, где $\lim\limits_{\|q\| \to 0} \|\beta(q)\| = 0$. Мы также доопределим $\alpha$ и $\beta$ в точке нуль нулем (т.е. считаем $\alpha(0) = 0$ и $\beta(0) = 0$). Тогда

$$\begin{aligned} g\big(f(a+h)\big) - g\big(f(a)\big) &= g\big(f(a) + [f(a+h) - f(a)]\big) - g\big(f(a)\big) \\ &= dg[f(a+h) - f(a)] + \beta\big(f(a+h) - f(a)\big)\|f(a+h) - f(a)\| \\ &= dg[df(h) + \alpha(h)\|h\|] + \beta\big(f(a+h) - f(a)\big)\|\,df(h) + \alpha(h)\|h\|\|. \end{aligned}$$

Тем самым,

$$g\big(f(a+h)\big) - g\big(f(a)\big) = dg[df(h)] + \gamma(h)\|h\|,$$

где

$$\begin{aligned} \|\gamma(h)\| &= \Big\| dg[\alpha(h)] + \beta\big(f(a+h) - f(a)\big)\|\,df(h/\|h\|) + \alpha(h)\| \Big\| \\ &\leqslant \|dg[\alpha(h)]\| + \big\|\beta\big(f(a+h) - f(a)\big)\big\|(\|\,df(h/\|h\|)\| + \|\alpha(h)\|). \end{aligned}$$

Напомним, что для линейных отображений $dg$ и $df$ существуют такие постоянные $A$ и $B$, что $\|\,df(h)\| \leqslant A\|h\|$ и $\|\,dg(q)\| \leqslant B\|q\|$, поэтому $\|\,df(h/\|h\|)\| + \|\alpha(h)\| \leqslant A + \|\alpha(h)\|$ и $\|\,dg[\alpha(h)]\| \leqslant B\|\alpha(h)\|$.

Так как $\big\|\beta\big(f(a+h) - f(a)\big)\big\| \to 0$ при $\|h\| \to 0$, получаем, что $\lim\limits_{\|h\| \to 0} \|\gamma(h)\| = 0$. ■

**Замечание.** При фиксированных базисах $e = \{e_1, \ldots, e_k\}$, $e' = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$, $e'' = \{e''_1, \ldots, e''_n\}$ в $\mathbb{R}^k$, $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ соответственно, матрица композиции линейных отображений есть произведение матриц этих линейных отображений.

Таким образом, в нашем случае для композиции функций $g \circ f$, где $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ и $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, по предыдущей теореме выполнено

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial (g\circ f)_1}{\partial y_1}(a) & \ldots & \frac{\partial (g\circ f)_1}{\partial y_k}(a) \\ & \ldots & \\ \frac{\partial (g\circ f)_n}{\partial y_1}(a) & \ldots & \frac{\partial (g\circ f)_n}{\partial y_k}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(f(a)) & \ldots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m}(f(a)) \\ & \ldots & \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1}(f(a)) & \ldots & \frac{\partial g_n}{\partial x_m}(f(a)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial y_k}(a) \\ & \ldots & \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial y_k}(a) \end{pmatrix}$$

В частности, в случае, когда $n=1$, для функции $g(x_1,\dots,x_m)$ и отображения

$$f(y_1,\dots,y_k)=(f_1(y_1,\dots,y_k),\dots,f_m(y_1,\dots,y_k)),$$

выполнено:

$$\left(\frac{\partial(g\circ f)}{\partial y_1}(a)\quad\dots\quad\frac{\partial(g\circ f)}{\partial y_k}(a)\right)=\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(f(a))\quad\dots\quad\frac{\partial g}{\partial x_m}(f(a))\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial y_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_k}(a)\\ & \dots & \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_k}(a)\end{pmatrix}$$

Отсюда, во-первых получаем правило вычисления частной производной сложной функции: $\frac{\partial(g\circ f)}{\partial y_j}(a)=\frac{\partial g}{\partial x_1}(f(a))\frac{\partial f_1}{\partial y_j}(a)+\ldots+\frac{\partial g}{\partial x_m}(f(a))\frac{\partial f_m}{\partial y_j}(a)$. Во-вторых, получаем следующее свойство инвариантности первого дифференциала: для дифференциала выполнено равенство $dg=\frac{\partial g}{\partial x_1}\,dx_1+\ldots+\frac{\partial g}{\partial x_m}\,dx_m$, где нам не важно, являются ли $ddx_1,\dots,dx_m$ — дифференциалами независимых переменных или же являются дифференциалами некоторых функций $x_j=f_j(y_1,\dots,y_k)$.

**Пример.** Пусть $f(x,y)=\varphi(u,v,w)$, где $u=xy, v=x+y, w=x-y$. Тогда

$$\begin{aligned}df&=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,du+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\,dv+\frac{\partial\varphi}{\partial w}\,dw=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,d(xy)+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\,d(x+y)+\frac{\partial\varphi}{\partial w}\,d(x-y)\\&=\frac{\partial\varphi}{\partial u}(x\,dy+y\,dx)+\frac{\partial\varphi}{\partial v}(dx+dy)+\frac{\partial\varphi}{\partial w}(dx-dy).\end{aligned}$$

В частности, $\frac{\partial f}{\partial x}=y\frac{\partial\varphi}{\partial u}(xy,x+y,x-y)+\frac{\partial\varphi}{\partial v}(xy,x+y,x-y)+\frac{\partial\varphi}{\partial w}(xy,x+y,x-y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}=x\frac{\partial\varphi}{\partial u}(xy,x+y,x-y)+\frac{\partial\varphi}{\partial v}(xy,x+y,x-y)-\frac{\partial\varphi}{\partial w}(xy,x+y,x-y)$.

# 9 Дифференциал обратного отображения.

**Теорема.** Пусть $f\colon\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$ — есть непрерывная биекция между окрестностями $U(a)$ и $V(f(a))$, причем обратное отображение $f^{-1}\colon V(f(a))\to U(a)$ также непрерывно (т.е. $f$ — гомеоморфизм между $U(a)$ и $V(f(a))$).

Предположим, что $f$ — дифференцируемо в точке $a$ и $df$ — обратимое линейное отображение. Тогда $f^{-1}$ — дифференцируемо в точке $f(a)$ и $df^{-1}\big|_{f(a)}=\big(df\big|_a\big)^{-1}$.

*Доказательство.* Нам нужно проверить, что

$$\lim_{\|q\|\to0}\frac{\|f^{-1}(f(a)+q)-f^{-1}(f(a))-(df)^{-1}(q)\|}{\|q\|}=0.$$

Пусть $h=f^{-1}(f(a)+q)-f^{-1}(f(a))=f^{-1}(f(a)+q)-a$, тогда $q=f(a+h)-f(a)$ и $\|q\|\to0$ тогда и только тогда, когда $\|h\|\to0$.

Так как $f$ — дифференцируемо в точке $a$, то

$$f(a+h)-f(a)=df(h)+\alpha(h)\|h\|,$$

где $\lim\limits_{\|h\|\to0}\|\alpha(h)\|=0$.

Таким образом,

$$\lim_{\|q\|\to0}\frac{\|f^{-1}(f(a)+q)-f^{-1}(f(a))-(df)^{-1}(q)\|}{\|q\|}=\lim_{\|h\|\to0}\frac{\big\|h-(df)^{-1}(df(h)+\alpha(h)\|h\|)\big\|}{\big\|df(h)+\alpha(h)\|h\|\big\|}.$$

Числитель в последнем выражении равен $\|h\|\big\|(df)^{-1}(\alpha(h))\big\|$. Для линейного отображения $(df)^{-1}$ найдется число $C>0$, для которого $\|(df)^{-1}(p)\|\leqslant C\|p\|, \forall p\in\mathbb{R}^k$.

Отсюда, подставив $p=df(h)$, получаем $C^{-1}\|h\|\leqslant\|\,df(h)\|$. Тем самым

$$\big\|df(h)+\alpha(h)\|h\|\big\|\geqslant\|\,df(h)\|-\|h\|\|\alpha(h)\|\geqslant\|h\|\big(C^{-1}-\|\alpha(h)\|\big).$$

Таким образом,

$$\frac{\big\|h-(df)^{-1}(df(h)+\alpha(h)\|h\|)\big\|}{\big\|df(h)+\alpha(h)\|h\|\big\|}\leqslant\frac{C\|h\|\|\alpha(h)\|}{\|h\|\big(C^{-1}-\|\alpha(h)\|\big)}=\frac{C\|\alpha(h)\|}{\big(C^{-1}-\|\alpha(h)\|\big)}\to 0$$

при $\|h\|\to 0$. ■

**Замечание.** Отметим, что матрица обратного линейного отображения есть обратная матрица к матрице исходного линейного отображения. Тем самым, матрица Якоби обратного отображения $J_{f^{-1}}(y)$ является обратной к матрице Якоби исходного отображения, т.е. равна $\big(J_f(f^{-1}(y))\big)^{-1}$.

# 10 Теорема о неявной функции.

Пусть в $\mathbb{R}^2$ у нас имеется соотношение $F(x,y)=0$. Нам бы хотелось понять при каких условиях данное уравнение возможно разрешить относительно $y$ в виде явной зависимости $y=f(x)$.

Рассмотрим например $F(x,y)=x^2+y^2-1$. Тогда уравнение $F(x,y)=0$ задает обычную окружность и все решения данного уравнения относительно $y$ имеют вид $y=\pm\sqrt{1-x^2}$. Ясно, что произвольный выбор знаков в разных точках $x$ будет давать бесконечно много решений данного уравнения.

В тоже время в малой окрестности произвольной точки $(x_0,y_0)$ на окружности (кроме $x_0=\pm1$) кривая $F(x,y)=0$ единственным образом представима в виде графика непрерывной функции $y=f(x)$. В окрестности же точек $(\pm1,0)$ никакая дуга окружности не может быть представлена в виде графика функции $y=f(x)$. Зато эти дуги в окрестности точек $(\pm1,0)$ хорошо расположены относительно оси $y$ и могут быть представлены в виде графика $x=g(y)$.

Чем же обусловлена такая особенность точек $(\pm1,0)$ в случае окружности? Заметим, что локально функция $F(x,y)$ представима в виде $F(x,y)=\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)+\bar{\bar{o}}(\sqrt{|x-x_0|^2+|y-y_0|^2})$.

Таким образом, пренебрегая малыми более высокого порядка, наше уравнение $F(x,y)=0$ в окрестности точки $(x_0,y_0)$ похоже на линейное уравнение $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)=0$, которое в свою очередь разрешимо относительно $y$ только в случае $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$.

В частности, в случае окружности как раз $\dfrac{\partial F}{\partial y}(\pm1,0)=0$. Из данного эвристического рассуждения возникает гипотеза, что уравнение $F(x,y)=0$ разрешимо относительно переменной $y$ в некоторой окрестности данной точки $(x_0,y_0)$, если производная $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)$ отлична от нуля. Именно это мы и докажем в следующей теореме уже в строго сформулированном виде.

Для сокращения всех записей будем использовать обозначение $F'_y(x,y):=\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)$.

**Теорема.** Пусть $F\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ — определена и непрерывно дифференцируема (т.е. частные производные непрерывно зависят от точки) в некоторой окрестности $U$ точки $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Пусть 1) $F(a,b)=0$ и 2) $F'_y(a,b)\neq 0$.

Тогда найдутся промежутки $I_x=(a-\alpha,a+\alpha)$ и $I_y=(b-\beta,b+\beta)$ и непрерывно дифференцируемая функция $f\colon I_x\to I_y$, для которых $I_x\times I_y\subset U$ и для каждой точки $(x,y)\in I_x\times I_y$ выполнено $F(x,y)=0\Leftrightarrow y=f(x)$.

Кроме того, $f'(x)=-\dfrac{F'_x(x,f(x))}{F'_y(x,f(x))}$.

*Доказательство.* 1. Для определенности считаем, что $F'_y(a,b)>0$. Так как производные функции $F$ непрерывны в $U$, то в малой окрестности $\{(x,y)\colon\sqrt{|x-a|^2+|y-b|^2}<2\beta\}$ точки $(a,b)$ также выполнено $F'_y(x,y)>0$.

Так как $F'_y(a,y)>0$ на отрезке $[b-\beta,b+\beta]$, то функция $y\mapsto F(a,y)$ монотонно возрастает на этом отрезке, откуда

$$F(a,b-\beta)<F(a,b)=0<F(a,b+\beta).$$

Так как $F$ непрерывна в $U$, то найдется такое число $\alpha<\beta$, что $F(x,b-\beta)<0<F(x,b+\beta)$ при $x\in(a-\alpha,a+\alpha)$.

При каждом $x\in(a-\alpha,a+\alpha)$ рассмотрим функцию $y\mapsto F(x,y)$, заданную на отрезке $[b-\beta,b+\beta]$. Рассматриваемая функция есть непрерывная строго возрастающая функция на отрезке, причем на концах отрезка данная функция принимает значения разных знаков. Поэтому при каждом $x \in (a-\alpha, a+\alpha)$ существует единственная точка $y = f(x)$, для которой $F(x, f(x)) = 0$. Тем самым построена окрестность точки $(a, b)$ вида $I_x \times I_y$ в которой построено единственное решение уравнения $F(x, y) = 0$ относительно переменной $y$.

2. Проверим непрерывность построенного решения в точке $a$. Ясно, что $f(a) = b$ в силу единственности нуля у функции $y \mapsto F(a, y)$ на $I_y$. Пусть теперь фиксировано некоторое $\varepsilon \in (0, \beta)$. Повторяя рассуждения первой части для интервала $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ найдем интервал $(a-\delta, a+\delta)$ с $\delta < \alpha$ и функцию $\tilde{f}\colon (a-\delta, a+\delta) \to (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ для которых $F(x, y) = 0$ при $(x, y) \in (a-\delta, a+\delta) \times (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ $\Leftrightarrow y = \tilde{f}(x), x \in (a-\delta, a+\delta)$.

   Так как $(a-\delta, a+\delta) \subset I_x$ и $(b-\varepsilon, b+\varepsilon) \subset I_y$, то в силу единственности решения $f$ в $I_x \times I_y$ получаем, что $f(x) = \tilde{f}(x)$ при $x \in (a-\delta, a+\delta)$. Это означает, что $|f(x) - b| < \varepsilon$ при $|x - a| < \delta$.

   Теперь проверим непрерывность $f$ в произвольной точке $x \in I_x$. Для этого просто примем за начальную точку построения произвольную точку $(x, y)$ с $x \in I_x, y \in I_y$ и повторим рассуждение выше.

3. Докажем непрерывную дифференцируемость $f$ на $I_x$ и докажем формулу для вычисления производной. Пусть $x \in I_x$ и рассмотрим достаточно малое $\Delta x$, для которого $x + \Delta x \in I_x$. Пусть $y = f(x) \in I_y$ и $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

   Применим теорему Лагранжа к функции $t \mapsto F(x + t\Delta x, y + t\Delta y)$:

$$0 = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = F'_x(x + \xi\Delta x, y + \xi\Delta y)\Delta x + F'_y(x + \xi\Delta x, y + \xi\Delta y)\Delta y,$$

   где $\xi \in (0, 1)$. Т.к. $F'_y \neq 0$ в $I_x \times I_y$, то

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x + \xi\Delta x, y + \xi\Delta y)}{F'_y(x + \xi\Delta x, y + \xi\Delta y)}.$$

   В силу непрерывности $f$ при $\Delta x \to 0$ выполнено, что и $\Delta y \to 0$, поэтому, в силу непрерывности производных функции $F$ в $I_x \times I_y$, получается, что $f'(x) = -\dfrac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$, где $y = f(x)$. Из формулы следует и непрерывность производной.

■

Аналогично доказывается следующий многомерный аналог предыдущей теоремы.

**Теорема.** Пусть $F\colon \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}$ — определена и непрерывно дифференцируема (то есть частные производные непрерывно зависят от точки) в некоторой окрестности $U$ точки $(a, b) = (a_1, \ldots, a_k, b) \in \mathbb{R}^{k+1}$.

Пусть 1) $F(a, b) = 0$ и 2) $F'_y(a, b) \neq 0$. Найдутся $I_x = (a_1 - \alpha_1, a_1 + \alpha_1) \times \ldots \times ((a_k - \alpha_k, (a_k + \alpha_k)$ и $I_y = (b - \beta, b + \beta)$ и непрерывно дифференцируемая функция $f\colon I_x \to I_y$, для которых $I_x \times I_y \subset U$ и для каждой точки $(x, y) \in I_x \times I_y$ выполнено $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$.

Кроме того, $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x) = -\dfrac{F'_{x_j}(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$.

*Доказательство.* Существование $I_x \times I_y$ и функции $f$, а также ее непрерывность, дословно повторяют рассуждение из предыдущей теоремы.

Если теперь фиксировать все переменные, кроме $x_j$ и $y$, мы попадем в ситуацию предыдущей теоремы, откуда следует формула для вычисления частной производной. Из формулы следует непрерывность этой частной производной, а значит и непрерывная дифференцируемость $f$. ■

**Замечание.** Отметим, что формула для подсчет производной берется из дифференцирования тождества $F(x, f(x)) = 0$. Действительно, $\dfrac{\partial F}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \dfrac{\partial F}{\partial x_k} + \dfrac{\partial F}{\partial y}df = 0$, откуда выражая $df$ и получаем нужную нам формулу.