

# Дискретная математика, Коллоквиум

Балюк Игорь  
@lodthe, [GitHub](#)

2019 — 2020

## Содержание

<b>1</b>	<b>Определения</b>	<b>3</b>
1.1	Логические операции: конъюнкция, дизъюнкция и отрицание	3
1.2	Логические операции: импликация, XOR (исключающее или) и эквивалентность	3
1.3	Булевы функции. Задание таблицей истинности и вектором значений	3
1.4	Существенные и фиктивные переменные булевой функции	3
1.5	Множество, подмножество, равенство множеств	3
1.6	Операции с множествами: объединение, пересечение, разность, симметрическая разность. Диаграммы Эйлера-Венна	4
1.7	Законы Моргана (с обобщением на произвольное семейство множеств)	4
1.8	Закон контрапозиции	4
1.9	Метод математической индукции	4
1.10	Графы. Основные определения: ребра, вершины, степени вершин.	4
1.11	Базовые графы: граф-путь, граф-цикл, полный граф, граф-звезда	4
1.12	Подграфы. Путь, цикл, клика и независимое множество.	5
1.13	Компонента связности. Индуцированный подграф.	5
1.14	Деревья. Полные бинарные деревья (см. ДЗ 7).	5
1.15	Правильные раскраски графов. Формулировка критерия 2-раскрашиваемости.	5
1.16	Двудольные графы. Двудольные и двураскрашиваемые графы.	5
1.17	Эйлеровы циклы.	6
1.18	Функции. Область определения и множество значений.	6
1.19	Образ множества и полный прообраз.	6
1.20	Отображения (всюду определённые функции). Инъекции, сюръекции и биекции.	6
1.21	Правило суммы	6
1.22	Правило произведения	7
1.23	Комбинаторные числа. Число перестановок, число подмножеств размера $k$ у $n$ -элементного множества	7
1.24	Характеристическая функция и её использование при подсчёте числа элементов множества.	7
1.25	Формула включений и исключений	7
1.26	Биномиальные коэффициенты, основные свойства. Бином Ньютона.	7
1.27	Треугольник Паскаля. Рекуррентное соотношение.	8
1.28	Бинарные отношения. Транзитивность, симметричность, рефлексивность.	8
1.29	Теоретико-множественные операции с отношениями. Операция обращения.	8
1.30	Композиция бинарных отношений	8
1.31	Отношения эквивалентности.	9
1.32	Ориентированные графы, основные определения.	9
1.33	Компоненты сильной связности ориентированного графа.	9
1.34	Отношения (частичного) порядка (строгие и нестрогие), линейные порядки.	9
1.35	Отношение непосредственного следования (см. листок недели 11).	10
1.36	Изоморфизм графов и (частичных) порядков (см. листок недели 11).	10
<b>2</b>	<b>Примерные задачи на понимание материала курса</b>	<b>10</b>
2.1	TODO()	10

<b>3</b>	<b>Вопросы на знание доказательств</b>	<b>10</b>
3.1	Обобщённый закон Моргана	10
3.2	Иррациональность числа $\sqrt{2}$ . Существуют такие иррациональные числа $a$ и $b$ , что число $a^b$ рационально.	10
3.3	Нижняя оценка числа связных компонент в неориентированном графе.	10
3.4	Если $G$ — минимально связный граф (удаление любого ребра приводит к несвязности), то $G$ не содержит циклов.	11
3.5	Если $G$ — связный ациклический граф, то между любыми двумя вершинами $G$ существует единственный путь.	12
3.6	Если между любыми двумя вершинами $G$ существует единственный путь, то $G$ — связный граф с $ V  - 1$ ребром.	12
3.7	Критерия 2-раскрашиваемости неориентированного графа.	13
3.8	Критерий существования эйлера цикла в неориентированном графе.	13
3.9	Явная формула для числа сочетаний $C(n, k)$ : числа $k$ -элементных подмножеств $n$ -элементного множества.	14
3.10	Бином Ньютона. Формула для биномиальных коэффициентов.	15
3.11	Основные свойства треугольника Паскаля: симметричность строк, возрастание чисел в первой половине строки.	15
3.12	Основные свойства треугольника Паскаля: формула для суммы чисел в строке, нижняя оценка на центральный коэффициент	15
3.13	Число решений уравнения $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ в неотрицательных целых числах. (Задача Муавра.)	16
3.14	Формула включений и исключений	16
3.15	Число отображений, функций, инъекций, биекций из $m$ -элементного множества в $n$ -элементное множество	17
3.16	Формула для числа сюръекций	18
3.17	Основная теорема об отношениях эквивалентности (классы эквивалентности на множестве $A$ — в точности разбиения множества $A$ на подмножества)	18
3.18	Равносильность свойств ориентированных графов: (1) каждая компонента сильной связности состоит из одной вершины; (2) вершины графа возможно занумеровать так, чтобы каждое ребро вело из вершины с меньшим номером в вершину с большим номером; (3) в графе нет циклов длины больше 1 (граф ациклический).	19

# 1 Определения

## 1. Логические операции: конъюнкция, дизъюнкция и отрицание

Обозначение	Смысл	Название
$A \wedge B$	$A$ и $B$	Конъюнкция
$A \vee B$	$A$ или $B$	Дизъюнкция
$\neg A$	не $A$	Отрицание

$A$	$B$	$A \wedge B$	$A \vee B$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

$A$	$\neg A$
0	1
1	0

## 2. Логические операции: импликация, XOR (исключающее или) и эквивалентность

Обозначение	Смысл	Название
$A \oplus B$	либо $A$ , либо $B$	XOR
$A \rightarrow B$	из $A$ следует $B$	Импликация
$A \leftrightarrow B$	$A$ равносильно $B$	Эквивалентность

$A$	$B$	$A \oplus B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	0	1	1
0	1	1	1	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1

## 3. Булевы функции. Задание таблицей истинности и вектором значений

Логические связки — это функции, которые зависят от набора переменных, принимающих значения 0 или 1 (от набора высказываний). Такие переменные называют булевыми переменными, а функции — булевыми функциями.

Запись таблицей

$A$	$B$	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Первым идёт набор из одних нулей, а дальше  $i$ -ый набор является двоичной записью числа  $i - 1$ . Таким образом, всего в таблице истинности  $2^k$  строк (именно столько чисел имеют двоичную запись длины  $k$ ). Благодаря стандартному порядку можно просто задать булеву функцию столбцом её значений:

$$f(x_1) = 10 = \neg x_1, \quad g(x_1, x_2) = 0001 = x_1 \wedge x_2$$

Говорят, что функция задана **вектором значений**

## 4. Существенные и фиктивные переменные булевой функции

Если для булевой функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  справедливо равенство

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

переменная  $x_i$  называется **фиктивной**; в случае, если равенство не выполняется для переменной  $x_i$ , то она называется **существенной**.

## 5. Множество, подмножество, равенство множеств

Когда говорят, что задано множество  $A$ , под этим понимают, что  $A$  представляет собой совокупность объектов, игнорируя при этом какие либо отношения между этими объектами, в частности порядок; кроме того, один объект не может входить в множество более одного раза.

Два множества равны друг другу, если их элементы совпадают.

$\forall x \in B \implies x \in A \implies B \subseteq A$  (каждый элемент из множества  $B$  принадлежит множеству  $A$  означает, что  $B$  — подмножество множества  $A$ )

## 6. Операции с множествами: объединение, пересечение, разность, симметрическая разность. Диаграммы Эйлера-Венна

- Объединение

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

- Пересечение

$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

- Разность

$$A \setminus B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$$

- Симметрическая разность

$$A \Delta B = \{x \mid ((x \in A) \wedge (x \notin B)) \vee ((x \notin A) \wedge (x \in B))\}$$

- Диаграмма Эйлера-Венна — наглядное средство для работы со множествами. На этих диаграммах изображаются все возможные варианты пересечения множеств.

## 7. Законы Моргана (с обобщением на произвольное семейство множеств)

С помощью диаграмм легко проверить, что  $A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$ ,  $A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$ . Из связи с таблицами истинности получаем, что  $a \wedge b = \neg(\overline{a} \vee \overline{b})$  и  $a \vee b = \neg(\overline{a} \wedge \overline{b})$

Эти формулы можно обобщить:

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots = \overline{\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n} \cap \dots}$$

## 8. Закон контрапозиции

Логический закон контрапозиции  $A \rightarrow B = \neg B \rightarrow \neg A$  при переводе на язык множеств гласит  $A \subseteq B \iff \overline{B} \subseteq \overline{A}$

## 9. Метод математической индукции

Доказательство по индукции возможно только тогда, когда доказываемое утверждение зависит от натурального параметра. То есть доказывается утверждение

$$\forall n \in N : A(n)$$

С помощью правил вывода схему доказательства по индукции можно описать так:

$$\frac{A(0), \quad \forall n : A(n) \rightarrow A(n+1)}{\forall n : A(n)}$$

Первая посылка называется базой, а вторая — шагом индукции или переходом.

## 10. Графы. Основные определения: ребра, вершины, степени вершин.

Зафиксируем граф  $G(V, E)$ . Вершины  $u$  и  $v$  называются **смежными** или **соседями**, если они образуют ребро:  $\{u, v\} \in E$ . Рёбра  $e$  и  $f$  называются **смежными**, если они имеют общую вершину:  $e \cap f \neq \emptyset$ . Вершина  $v$  **инцидента** ребру  $e$ , если  $v \in e$ . Вершины  $u$  и  $v$ , инцидентные ребру  $e$ , называются его концами; говорят, что  $e$  соединяет  $u$  и  $v$ . Рёбра часто записывают сокращённо:  $uv$  вместо  $\{u, v\}$ . **Степенью** вершины  $v$  называется число смежных с  $v$  рёбер и обозначается  $d(v)$ .

$$\sum_{u \in V} d(u) = 2|E|$$

## 11. Базовые графы: граф-путь, граф-цикл, полный граф, граф-звезда

- Граф-путь  $P_n, n \geq 0$  состоит из вершин  $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$  и рёбер  $\{v_i, v_{i+1}\}, i < n$ .
- Граф-цикл  $C_n, n \geq 3$  состоит из вершин  $\{v_1, \dots, v_n\}$  и рёбер  $\{v_i, v_{i+1}\}, i < n$ , а также  $\{v_n, v_1\}$ . Как и в случае пути, длина цикла — количество рёбер в цикле.

- Полный граф  $K_n(V, E)$ ,  $n \geq 1$  состоит из  $n$  вершин и имеет всевозможные рёбра:  $E = \binom{V}{2}$
- Граф-звезда состоит из выделенной вершины, соединённой рёбрами со всеми остальными вершинами (больше рёбер в этом графе нет).

## 12. Подграфы. Путь, цикл, клика и независимое множество.

Граф  $H(W, I)$  называется подграфом графа  $G(V, E)$ , если  $W \subseteq V$  и  $I \subseteq E$ . Другими словами, граф  $H$  получается из графа  $G$  удалением рёбер и вершин (вместе со смежными рёбрами). Это обозначают  $H \subseteq G$ .

Подграф  $H$  графа  $G$  называется

- **путём** из вершины  $u$  в вершину  $v$ , если  $H$  — это граф-путь  $P_n$  с началом в  $u$  и концом в  $v$
- **циклом**, если  $H$  — это граф-цикл  $C_n$
- **кликой**, если  $H$  — это полный граф  $K_n$

Пусть  $U \subseteq V$ ; подграф  $H$  графа  $G(V, E)$ , состоящий из вершин  $U$  и содержащий все рёбра, которые есть в  $G$  называется **индуцированным** (множеством  $U$ ); формально  $H = (U, E \cap \binom{U}{2})$ . Множество  $U \subseteq V(G)$  называется **независимым**, если в индуцированном  $U$  подграфе нет рёбер, т.е. никакие две вершины из множества  $U$  в графе  $G$  не соединены рёбрами.

## 13. Компонента связности. Индуцированный подграф.

Пусть  $U \subseteq V$ ; подграф  $H$  графа  $G(V, E)$ , состоящий из вершин  $U$  и содержащий все рёбра, которые есть в  $G$  называется **индуцированным** (множеством  $U$ ); формально  $H = (U, E \cap \binom{U}{2})$ .

Вершина  $u$  называется **достижимой** из  $v$ , если есть путь из  $v$  в  $u$ . Граф  $G$  называется **связным**, если любая его вершина достижима из любой другой.

$H$  — компонента связности графа  $G$ , если  $H \in G$ ,  $H$  — связный граф и не существует связного подграфа  $H' \in G$ , такого что  $H \subsetneq H'$ .

## 14. Деревья. Полные бинарные деревья (см. ДЗ 7).

Будем называть граф деревом, если он удовлетворяет любому из следующих свойств:

- (1) Минимально связный граф (т. е. при удалении любого ребра граф становится несвязным).
- (2) Связный граф, в котором  $|E| = |V| - 1$ .
- (3) Ациклический связный граф (связный граф без циклов).
- (4) Граф, любая пара вершин которого связана единственным путём.

Вершинами полного бинарного дерева ранга  $n$  являются двоичные слова длины не больше  $n$  (включая пустое слово длины 0). Два слова соединены ребром в полном бинарном дереве, если одно получается из другого приписыванием одной цифры справа (нуля или единицы).

## 15. Правильные раскраски графов. Формулировка критерия 2-раскрашиваемости.

**Раскраска графа** — это функция  $f$ , которая ставит в соответствие каждой вершине графа некоторый цвет, т. е.  $f(u) \in 1, \dots, k$ . Раскраска  $f$  называется **правильной**, если концы всех рёбер покрашены в разные цвета, т. е. для каждого ребра  $\{u, v\}$  справедливо  $f(u) \neq f(v)$

Минимальное число цветов, в который можно правильно раскрасить граф  $G$  называется **хроматическим числом** и обозначается через  $\chi(G)$ .

Граф  $G$  является **двураскрашиваемым** тогда и только тогда, когда в нём нет циклов нечётной длины.

## 16. Двудольные графы. Двудольные и двураскрашиваемые графы.

Граф  $G(V, E)$  называется **двудольным**, если существует разбиение множества  $V$  на подмножества  $L$  и  $R$  ( $V = L \cup R, L \cap R = \emptyset$ ), такие что у каждого ребра один конец лежит в  $L$ , а другой в  $R$ , т. е. между вершинами из  $L$  нет рёбер, как и между вершинами из  $R$ . Множества  $L$  и  $R$  называют **долями** графа.

Граф двудольный тогда и только тогда, когда он двураскрашиваемый.

### 17. Эйлеровы циклы.

**Маршрутом** в графе  $G$  называется последовательность вершин  $v_0, v_1, \dots, v_n$ , такая что  $n \geq 0$  и  $\{v_i, v_{i+1}\} \in E(G), 0 \leq i \leq n-1$ .

Маршрут, который содержит все рёбра графа ровно один раз назовём **эйлеровым маршрутом**.

Связный граф  $G$  содержит замкнутый эйлеров маршрут (**эйлеров цикл**) тогда и только тогда, когда степень каждой вершины чётна.

### 18. Функции. Область определения и множество значений.

Неформально, **функция** — это закон, который ставит в соответствие элементам множества  $X$  элементы множества  $Y$ ; каждому элементу  $x \in X$  поставлен в соответствие не более, чем один элемент из множества  $Y$ .

Введём понятия степени вершин и (множества) соседей для ориентированного графа. Поскольку рёбра имеют направление, то мы разделяем исходящую степень  $d_+(v)$  (число вершин достижимых из  $v$  по одному ребру) и входящую степень  $d_-(v)$  (числу вершин, из которых за один шаг по ребру можно добраться до  $v$ ).

Обозначим через  $f$  множество рёбер графа, задающего функцию  $f$  из  $X$  в  $Y$ ; тогда  $(x, y) \in f$  означает, что  $f(x) = y$ . Пусть  $G(X \cup Y, f)$  — граф, для функции  $f$ .

- **Областью определения**  $Dom(f) \in X$  называют подмножество вершин с исходящей степенью 1 (подмножество  $X$ , на котором определена функция  $f$ ).
- **Множеством значений**  $Range(f) \in Y$  называется подмножество вершин с входящей степенью больше 0 (подмножество  $Y$  всевозможных значений  $f$ ).

### 19. Образ множества и полный прообраз.

- **Образом**  $f(A)$  множества  $A \in X$  называют множество значений, которые принимает  $f$  на подмножестве  $A$ ; на языке графов — это множество правых соседей  $N_+(A)$

$$f(A) = \{y \mid \exists x \in A : f(x) = y\} = N_+(A)$$

- **Полным прообразом**  $f^{-1}(B)$  множества  $B \in Y$  называют множество элементов  $X$ , значение функции на которых лежит в  $B$ ; на языке графов — это множество левых соседей  $N_-(B)$ :

$$f^{-1}(B) = \{x \mid \exists y \in B : f(x) = y\} = N_-(B)$$

Рассмотрим на примере:

$$f : 1 \mapsto a, \quad 2 \mapsto b, \quad 4 \mapsto b, \quad 5 \mapsto d, \quad 6 \mapsto d, \quad 7 \mapsto d$$

Тогда

$$Dom(f) = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}, Range(f) = \{a, b, d\}$$

$$f(\{1, 3, 5, 7\}) = \{a, d\}, f^{-1}(\{a, b, c\}) = \{1, 2, 4\}$$

### 20. Отображения (всюду определённые функции). Инъекции, сюръекции и биекции.

В случае  $Dom(f) = X$ , функция  $f$  называется **всюду определённой** или **отображением**. Запись  $f : X \mapsto Y$  означает, что  $f$  всюду определена.

- Отображение  $f : X \mapsto Y$  называется **инъекцией**, если  $f(x) \neq f(x')$  при  $x \neq x'$ . В терминах графа, это означает, что входящая степень каждого  $y \in Y$  не превосходит единицу.
- Отображение  $f : X \mapsto Y$  называется **сюръекцией**, если у каждого элемента  $y$  существует прообраз, т. е.  $Range(f) = Y$  или что то же самое  $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$ . В терминах графа, это означает, что входящая степень каждого  $y \in Y$  больше нуля.
- Отображение  $f : X \mapsto Y$  называется **биекцией**, если оно является инъекцией и сюръекцией.

### 21. Правило суммы

**Правило суммы** гласит, что если конечные множества  $A$  и  $B$  не пересекаются, то мощность их объединения совпадает с суммой мощностей:

$$|A \cup B| = |A| + |B|, \text{ если } A \cap B = \emptyset$$

В общем случае

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

## 22. Правило произведения

**Правило произведения** формулируется на естественном языке следующим образом. Если есть  $n$  объектов первого типа и после выбора любого объекта первого типа можно выбрать  $m$  объектов второго типа, то всего есть  $n \times m$  способов последовательно выбрать первый и второй объект.

Правило произведения легко обобщается по индукции на  $k$  последовательных выборов. Если объект первого типа можно выбрать  $n_1$  способами, после чего второй объект можно выбрать  $n_2$  способами и т. д. ( $k$ -ый объект можно выбрать  $n_k$  способами), то выбрать последовательно  $k$  объектов можно  $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$  способами.

## 23. Комбинаторные числа. Число перестановок, число подмножеств размера $k$ у $n$ -элементного множества

**Слово** — это конечная последовательность символов, которые в свою очередь определяются как элементы конечного множества — **алфавита**. Под алфавитом из  $k$  символов часто удобно понимать множество  $[k]_0 = \{0, 1, \dots, k-1\}$  или  $[k]_1 = \{1, 2, \dots, k\}$ .

Слова над алфавитом  $[n]_1$  длины  $n$ , в которых все символы разные называются **перестановками**. Число перестановок есть  $n!$ .

Если  $\binom{n}{k}$  число  $k$ -элементных подмножеств  $n$ -элементного множества, то  $\binom{n}{k} \times k! = \frac{n!}{(n-k)!}$ , отсюда получаем, что

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Число  $\binom{n}{k}$  называют **числом сочетаний**

## 24. Характеристическая функция и её использование при подсчёте числа элементов множества.

Зафиксируем универсум  $U$ . Функция  $\chi_A(x)$  называется характеристической функцией множества  $A \subseteq U$ , если

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A; \\ 0, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

С помощью характеристической функции легко выразить мощность множества:

$$|A| = \sum_{x \in U} \chi_A(x)$$

## 25. Формула включений и исключений

Формула включений исключений устроена так (здесь  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ )

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^{m+1} \sum_{S \subseteq [n], |S|=m} \left| \bigcap_{A \in S} A \right|$$

или более компактно

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{S \subseteq [n], S \neq \emptyset} (-1)^{|S|+1} \left| \bigcap_{A \in S} A \right|$$

## 26. Биномиальные коэффициенты, основные свойства. Бином Ньютона.

Число  $\binom{n}{k}$  называют **числом сочетаний**

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Собственно говоря, сразу ясно, что после раскрытия скобок в  $(a+b)(a+b)(a+b) \dots$  ( $n$  раз) получатся произведения  $n$  букв (сколько-то  $a$ , остальные  $b$ ), и вопрос только в том, какие будут коэффициенты при этих произведениях (сколько подобных членов). Так вот, формула бинома Ньютона и говорит, какие это будут коэффициенты: это числа сочетаний, и они написаны в  $n$ -й строке треугольника Паскаля. Поэтому числа сочетаний также называют биномиальными коэффициентами. Также число сочетаний из  $n$  по  $k$  соответствует количеству  $k$ -элементных подмножеств  $n$ -элементного множества.

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

$n = 0$														1												
$n = 1$														1		1										
$n = 2$														1		2		1								
$n = 3$														1		3		3		1						
$n = 4$														1		4		6		4		1				
$n = 5$														1		5		10		10		5		1		
$n = 6$														1		6		15		20		15		6		1

$$\binom{2n}{n} > \frac{2^{2n}}{2n+1}$$

- **рефлексивно**, если  $\forall a \in A : aRa$
- **симметрично**, если  $\forall a, b \in A : aRb \implies bRa$
- **транзитивно**, если  $\forall a, b, c \in A : (aRb) \wedge (bRc) \implies aRc$



### 31. Отношения эквивалентности.

Рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение называют **отношением эквивалентности**.

Определим **класс эквивалентности**  $[a]$  как множество всех таких элементов множества  $A$ , которые эквивалентны элементу  $a$ :

$$[a] = \{x \mid x \in A, x \sim a\}$$

Классы эквивалентности  $[a]$  и  $[b]$  (по отношению эквивалентности  $\sim$ ) либо не пересекаются, либо совпадают. Множество  $A$  разбивается в объединение классов эквивалентности.

Пример отношения эквивалентности из геометрии: отношение подобия треугольников.

### 32. Ориентированные графы, основные определения.

Формально, ориентированный граф задан парой  $(V, E)$ , где множество вершин  $V$  как и раньше произвольное, а множество  $E \subseteq V \times V$  — состоит из упорядоченных пар вершин. По-умолчанию, мы считаем, что в каждой паре вершины различны:

$$E \subseteq \{(u, v) \mid u, v \in V, u \neq v\}$$

рёбра вида  $(u, u)$  называются петлями и они возникают естественным образом при описании бинарных отношений с помощью ориентированных графов.

Определения, введённые нами для неориентированных графов, с поправками переносятся на ориентированные.

**Исходящей степенью** вершины  $d_+(v)$  называется число рёбер, исходящих из вершины  $v$ , **входящей степенью**  $d_-(v)$  — число рёбер, входящих в  $v$ . Вершины входящей степени 0 называют **источниками**, к таким относится вершина  $s$  ( $d_-(s) = 0$ ), а вершины с нулевой исходящей степенью называют стоками:  $d_+(t) = 0$ . Источники и стоки часто обозначают соответственно через  $s$  и  $t$ , от слов *source* и *target*, хотя стоки на английском и называются *sink*.

**Маршрутом** в ориентированном графе называется последовательность вершин  $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ , такая что  $n > 0$  и  $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$  для  $0 \leq i \leq n-1$ . **Длина маршрута** — это число рёбер, соединяющих вершины маршрута; оно совпадает с  $n$ . Маршрут называется **замкнутым**, если  $v_0 = v_n$ .

### 33. Компоненты сильной связности ориентированного графа.

Вершина  $v$  достижима из  $u$ , если существует маршрут из  $u$  в  $v$ ; отношение достижимости между вершинами обозначим  $u \rightsquigarrow v$ . Определим отношение двусторонней достижимости  $u \rightsquigarrow\!\!\rightsquigarrow v = (u \rightsquigarrow v) \wedge (v \rightsquigarrow u)$ . Отношение двусторонней достижимости ( $u$  достижима из  $v$  и наоборот) — отношение эквивалентности.

**Компонента сильной связности** ориентированного графа — класс эквивалентности по отношению достижимости. То есть множество  $U \subseteq V$  — компонента сильной связности, если любые две вершины множества  $U$  достижимы друг из друга и в  $U$  нельзя добавить ещё вершины с сохранением этого свойства (множество  $U$  — максимальное по включению).

### 34. Отношения (частичного) порядка (строгие и нестрогие), линейные порядки.

Отношение называется **антисимметричным**, если из  $uRv$  и  $vRu$  следует, что  $u = v$ :

$$\forall u, v \in V : (uRv) \wedge (vRu) \implies u = v$$

Отношение называется **антирефлексивным**, если не содержит ни одной пары  $(v, v)$  (не содержит петель).

Рассмотрим отношения, которые транзитивны и антисимметричны и либо рефлексивны, либо антирефлексивны. Такие отношения называют **отношениями (частичного) порядка** или (частичными) порядками. Например, отношения  $\leq, <$  на множествах  $\mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ . Эти символы традиционно используют для отношений порядка.

Рефлексивные отношение порядка традиционно обозначают символом  $\leq$ , быть может с индексом, такие порядки называют **нестрогими**, антирефлексивные отношения порядка обозначают символом  $<$ , их называют **строгими**.

Отношение порядка, в котором любые два элемента сравнимы называется **линейным**.

### 35. Отношение непосредственного следования (см. листок недели 11).

Каждому отношению порядка  $< (\leq)$  ставят в соответствие отношение **непосредственного следования**  $<_P$ :

$$(<_P) = \{(x, y) \mid (x <_P y) \wedge (\nexists z \in V : (x <_P z) \wedge (z <_P y))\}$$

### 36. Изоморфизм графов и (частичных) порядков (см. листок недели 11).

Отношения частичного порядка  $\leq_P \subseteq A \times A$  и  $\leq_Q \subseteq B \times B$  называются **изоморфными**, если существует такая биекция  $f : A \rightarrow B$ , что  $x \leq_P y \iff f(x) \leq_Q f(y)$ .

## 2 Примерные задачи на понимание материала курса

### 1. TODO()

## 3 Вопросы на знание доказательств

### 1. Обобщённый закон Моргана

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap \dots = \overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots} \quad (1)$$

$$B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n \cup \dots = \overline{\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \dots \cap \overline{B_n} \cap \dots} \quad (2)$$

*Доказательство.* Докажем обобщённую формулу 1, обозначим левую часть за  $X$ , а правую за  $Y$ . Если  $x \in X$ , то  $x$  принадлежит каждому множеству  $A_i$ , но тогда он не принадлежит ни одному дополнению  $\overline{A_i}$ , а значит и их объединению. Значит  $x$  принадлежит дополнению от объединения дополнений, т. е.  $Y$ . Мы доказали, что  $X \subseteq Y$ .

Пусть теперь  $y \in Y$ , тогда  $y \notin \overline{Y}$  и потому для каждого  $i$  выполняется  $y \notin \overline{A_i}$ . Но раз  $y \notin \overline{A_i}$ , то  $y \in A_i$  (для каждого  $i$ ), а потому  $y \in X$ . Отсюда  $Y \subseteq X$ ; как и в первом случае включение справедливо в силу произвольности  $y$ .

Итак, мы доказали, что  $X = Y$ , что и требовалось. Обратим внимание, что при доказательстве равенства двух множеств требуется доказывать включения в обе стороны!

Двойственный закон Моргана 2 можно доказать аналогично, но можно и вывести из первого закона. Поскольку тождество 1 справедливо для произвольных множеств, заменим в нём  $A_i$  на  $\overline{B_i}$ , снимем двойное дополнение и возьмём дополнения от обеих частей равенств. ■

### 2. Иррациональность числа $\sqrt{2}$ . Существуют такие иррациональные числа $a$ и $b$ , что число $a^b$ рационально.

Число  $\sqrt{2}$  иррационально.

*Доказательство.* Доказательство от противного. Положим, что  $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ , где  $\frac{m}{n}$  — несократимая дробь,  $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_1$ . Тогда  $m^2 = 2n^2$ , откуда  $m^2$  делится на 2, и  $m$  делится на 2, а значит  $m^2$  делится на 4, и отсюда  $n^2$  делится на 2 и  $n$  делится на 2. Но тогда и  $m$  делится на 2, и  $n$  делится на 2, а значит дробь  $\frac{m}{n}$  сократима, пришли к противоречию. ■

Существуют такие иррациональные числа  $a$  и  $b$ , что число  $a^b$  рационально.

*Доказательство.* Положим, что  $a = b = \sqrt{2}$ . Если число  $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$  рационально, то утверждение доказано. Если нет, то возьмём  $a = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}, b = \sqrt{2}$ :

$$\left((\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$$

То есть, либо подходит одна пара чисел, либо другая, а какая из — мы не знаем. ■

### 3. Нижняя оценка числа связных компонент в неориентированном графе.

**Теорема.** Обозначим через  $C$  число компонент связности графа  $G(V, E)$ . Для него справедливо неравенство

$$C \geq |V| - |E| \quad (1)$$

*Доказательство.* Зафиксируем количество вершин в графе  $|V|$  и докажем утверждение индукцией для графов с числом рёбер  $|E|$  от 0 до  $|V|$ .

- *База:* При  $|E| = 0$  число компонент связности совпадает с числом вершин:  $C = |V|$ .
- *Шаг:* Пусть для  $|E| = n$  утверждение доказано. Граф с  $(n + 1)$ -м ребром получается из некоторого графа с  $n$  рёбрами добавлением ребра. Для графа на  $n$  рёбрах неравенство выполняется, а добавленное ребро либо соединит две вершины из одной компоненты связности, что не уменьшит  $C$ , но уменьшит  $|V| - |E|$ , либо соединит вершины из разных компонент, что уменьшит и левую и правую часть неравенства на 1. В каждом из случаев, верное неравенство перейдёт в верное.

■

**Следствие.** Если граф связный, то  $|E| \geq |V| - 1$ .

4. Если  $G$  — минимально связный граф (удаление любого ребра приводит к несвязности), то  $G$  не содержит циклов.

Пусть

$$G \text{ — минимально связный граф (удаление любого ребра приводит к несвязности)} \quad (1)$$

$$G \text{ — ациклический связный граф} \quad (2)$$

*Доказательство.* Установим импликацию  $1 \implies 2$ , воспользовавшись контрапозицией, т. е. докажем  $\neg 2 \implies \neg 1$ . Отрицание условия 2 означает, что граф несвязен или имеет цикл, а условия 1, что граф или несвязен или связан, но не минимально.

Если граф несвязен, то импликация  $\neg 2 \implies \neg 1$  выполняется, поэтому сосредоточимся на случае связного графа, который содержит цикл.

В следующей лемме мы установили, что при удалении ребра из цикла в связном графе, граф остаётся связным, т. е. граф до удаления ребра был не минимально связным.

**Лемма.** Пусть  $G(V, E)$  — связный граф и ребро  $e$  лежит на цикле; тогда граф  $G_0 = (V, E \setminus \{e\})$  связный. То есть, удаление ребра цикла не нарушает связность.

Перед доказательством введём вспомогательные обозначения. Пусть  $P$  и  $Q$  — пути в графе  $G$ ,  $x, y$  — вершины, лежащие на пути  $P$ , а  $y$  и  $z$  — вершины, лежащие на пути  $Q$ . Обозначим через  $xPy$  — подпуть пути  $P$ , начинающийся с вершины  $x$  и заканчивающийся в вершине  $y$ .

*Доказательство.* Пусть ребро  $e$  лежит в подграфе-цикле  $C$ . Обозначим через  $Q \subseteq C$  подграф-путь, получающийся из  $C$  удалением ребра  $e$  (с сохранением его концов).

Зафиксируем все пути между всеми парами вершин перед удалением  $e$  и рассмотрим путь  $P$  с началом в вершине  $w$  и концом в вершине  $z$ . Если ребро  $e$  не лежит на пути  $P$ , то после удаления в графе ребра  $e$  этот путь не пострадает. Если же  $e$  лежит на пути, то превратим этот путь в другой путь с помощью пути  $Q$ .

Упорядочим вершины  $P$ ; пусть вершина  $x$  — первая общая вершина путей  $P$  и  $Q$  (ближайшая к  $w$ , возможно сама  $w$ ), а  $y$  — последняя общая вершина путей  $P$  и  $Q$  (ближайшая к  $z$ , быть может сама  $z$ ). Вершины  $x$  и  $y$  определены, потому что пути  $P$  и  $Q$  имеют хотя бы две общие вершины — концы ребра  $e$ .

Докажем, что  $wPxQyPz$  — путь, соединяющий вершины  $w$  и  $z$ , и не проходящий через ребро  $e$ . Действительно, пути  $wPx$  и  $xQy$  не имеют общих вершин, кроме  $x$ , поскольку иначе в пути  $P$  нашлась бы вершина ближе к  $w$ , чем  $x$ , которая была бы общей с путём  $Q$ , что противоречит выбору  $x$ ; симметрично пути  $xQy$  и  $yPz$  не имеют общих вершин, кроме  $y$  (иначе нашлась бы общая вершина ближе к  $z$ , чем  $y$ ); пути  $wPx$  и  $yPz$  не имеют общих вершин, поскольку это непересекающиеся подпути пути  $P$ .

Итак, мы доказали, что после удаления ребра  $e$  в графе по-прежнему останутся пути между всеми парами вершин, т. е. граф останется связным.

■

5. Если  $G$  — связный ациклический граф, то между любыми двумя вершинами  $G$  существует единственный путь.

Пусть

$G$  — связный ациклический граф (1)

Между любыми двумя вершинами  $G$  существует единственный путь (2)

*Доказательство.* Докажем  $1 \implies 2$ , доказав контрапозицию  $\neg 2 \implies \neg 1$ . Если выполнено условие  $\neg 2$  и между какой-то парой вершин нет ни одного пути, то граф несвязный и справедливо условие  $\neg 1$ . Осталось доказать следующую лемму.

**Лемма.** Если между вершинами  $w$  и  $z$  графа есть два различных пути  $P$  и  $Q$ , то граф содержит цикл.

*Доказательство.* Заметим, что  $w \neq z$  (из вершины в себя ведёт единственный путь — длины 0). Если  $w$  и  $z$  единственные общие вершины путей  $P$  и  $Q$ , то склеив два пути получится цикл.

Если же нет, допустим, что у путей  $P$  и  $Q$  существуют общие вершины  $x$  и  $y$ , такие что у путей  $xPy$  и  $xQy$  нет общих вершин, кроме концов, и один из путей не короче двух. В этом случае, при объединении путей  $xPy$  и  $xQy$ , получится цикл.

Чтобы найти  $x$  будем двигаться вдоль путей  $P$  и  $Q$  от  $w$  к  $z$ , пока не встретится первая несовпадающая вершина. Такое обязательно случится, иначе пути совпадают. Будем считать, что несовпадающая вершина  $u$  лежит на пути  $P$  и  $u \neq z$  (иначе поменяем  $P$  и  $Q$  местами). Выберем вершину перед  $u$  в качестве  $x$ . В качестве  $y$  выберем первую после  $x$  общую вершину путей  $xPz$  и  $xQz$ . Таким образом получим, что пути  $xQy$  и  $xPy$  не имеют общих вершин кроме концов, и длина пути  $P$  хотя бы 2.

6. Если между любыми двумя вершинами  $G$  существует единственный путь, то  $G$  — связный граф с  $|V| - 1$  ребром.

Между любыми двумя вершинами  $G$  существует единственный путь (1)

$G$  — связный граф с  $|V| - 1$  ребром (2)

*Доказательство.* Осталось доказать импликацию  $1 \implies 2$ . Проведём доказательство индукцией по числу вершин в графе.

- *База:* при  $|V| = 1$  в графе нет рёбер и в вершину в себя есть единственный путь длины 0.
- *Шаг:* пусть утверждение верно для всех графов на  $n$  вершинах и пусть  $G$  — произвольный граф, удовлетворяющий условию 1, в котором  $V(G) = n + 1$ . Выберем в  $G$  самый длинный путь  $P$ , конец которого обозначим через  $z$ .

Докажем от противного, что вершина  $z$  имеет степень 1. Допустим, что у вершины  $z$  есть ещё сосед  $x$ , кроме предшествующей ей вершины  $y$  на пути  $P$ . Если вершина  $x$  не лежит на пути  $P$ , то к пути  $P$  можно добавить ребро  $zx$  и сделать его длиннее — противоречие с выбором  $P$ . Если же  $x$  лежит на пути  $P$  и  $x \neq y$ , то в графе есть два простых пути, соединяющие вершины  $x$  и  $z$ :  $xPz$  и ребро  $xz$ , что противоречит условию 1.

Удалив вершину  $z$  из графа  $G$  получим связный граф  $G_0$  на  $n$  вершинах, для которого справедливо предположение индукции:  $|E(G_0)| = n - 1$ , поскольку между любой парой вершин  $G_0$  существует единственный путь. Вернув  $z$  на место, получаем, что мы увеличили на единицу и число вершин и число рёбер графа  $G_0$ , а потому доказали, что  $|E(G)| = |V(G)| - 1$ ; шаг индукции доказан.

При доказательстве импликации мы доказали следующее свойство деревьев:

*Утверждение.* В любом дереве, более чем с одной вершиной, есть хотя бы две вершины степени 1.

## 7. Критерия 2-раскрашиваемости неориентированного графа.

**Теорема.** *Граф  $G$  является двураскрашиваемым тогда и только тогда, когда в нём нет циклов нечётной длины.*

*Доказательство.* Докажем сначала, что в двураскрашиваемом графе нет циклов нечётной длины. По контрапозиции, это условие равносильно тому, что если в графе есть цикл нечётной длины, то его нельзя раскрасить в два цвета. Это утверждение легко проверить. Если правильная раскраска есть, то в силу симметрии можно считать, что первая вершина цикла покрашена в цвет 1, тогда вторая вершина покрашена в цвет 2 и так далее, то есть каждая нечётная вершина будет покрашена в цвет 1, а каждая чётная — в цвет 2. Тогда последняя вершина цикла будет покрашена в тот же цвет, что и первая, что невозможно.

Докажем теперь, что если в графе нет циклов нечётной длины, то он двураскрашиваемый. Для этого построим раскраску. Выберем в каждой компоненте связности по вершине  $s$ , которую назовём центром, и покрасим её в цвет 2; все вершины на расстоянии 1 от неё покрасим в цвет 1, все вершины на расстоянии 2 — в цвет 2 и так далее: вершины на чётном расстоянии от центра покрасим в цвет 2, а на нечётном в цвет 1.

Предположим, что в результате этой процедуры получилась неправильная раскраска. Это означает, что у некоторого ребра  $\{u, v\}$  концы были покрашены в один цвет, а это произошло, если расстояния от центра  $s$  некоторой компоненты до вершин  $u$  и  $v$  имеют одинаковую чётность. Пусть  $P$  — кратчайший путь от центра до  $u$ , а  $Q$  — кратчайший путь от центра до  $v$  и  $w$  самая дальняя от центра их общая вершина (быть может сам центр, если других общих вершин нет).

Заметим, что  $w$  не совпадает ни с  $u$ , ни с  $v$ : иначе мы получили бы, что расстояния до  $u$  и  $v$  отличаются на единицу; по этой же причине ребро  $\{u, v\}$  не лежит ни на одном из этих путей. Пути  $sPu$  и  $sQv$  имеют одинаковую длину; в противном случае один из этих путей можно было бы заменить на более короткий другой и сократить длину пути до  $u$  или  $v$ . Отсюда мы получаем, что пути  $wPu$  и  $wQv$  пересекаются только по вершине  $w$  и их длины имеют одинаковые чётности (от длин одинаковой чётности отнимается расстояние от  $s$  до  $w$ ). Объединив эти пути и добавив к ним ребро  $\{u, v\}$  получим цикл нечётной длины, что приводит нас к противоречию. ■

## 8. Критерий существования эйлерова цикла в неориентированном графе.

**Теорема.** *Связный граф  $G$  содержит замкнутый эйлеров маршрут тогда и только тогда, когда степень каждой вершины чётна.*

*Доказательство.* Докажем сначала, что если в графе есть вершина нечётной степени, то в нём нет замкнутого Эйлерова маршрута. Пусть  $x$  — вершина нечётной степени. Если в графе есть замкнутый эйлеров маршрут, то циклически сдвинув его вершины легко добиться, чтобы маршрут начинался и заканчивался в  $x$ .

Заметим, что каждый раз, когда вершина  $x$  встречается в середине маршрута, в маршруте встречаются сразу два ребра  $x$ : в  $x$  нужно сначала зайти по одному ребру, а потом выйти по другому. Поскольку  $x$  является первой и последней вершиной маршрута, то на его концах также задействованы два ребра: первое на первом выходе из  $x$ , а второе — при последнем возврате. Значит, что во всём маршруте участвовало только какое-то чётное число рёбер, смежных с  $x$ , а всего их нечётное число — получается, что хотя бы одно ребро, смежное с  $x$ , в маршрут не попало.

Перейдём теперь к доказательству основной импликации: из чётности всех степеней связного графа следует существование замкнутого эйлерова маршрута. Пусть  $R = r_0, r_1, \dots, r_m$  — маршрут максимальной длины, в который каждое ребро графа  $G$  входит не более одного раза. В случае, если таких маршрутов несколько, то выберем любой из них. Установим два свойства такого маршрута, которые и приведут к доказательству существования искомого маршрута.

- **Свойство 1.**  $r_0 = r_m$ . Предположим противное. Повторяя те же аргументы, что и в первом абзаце, получим, что между  $r_0$  и  $r_{m-1}$  встречается чётное число рёбер (так как  $r_0 \neq r_m$  и по определению маршрута  $r_{m-1} \neq r_m$ , каждое вхождение  $r_m$  даёт 2 ребра), смежных с  $r_m$ , и ещё одно ребро,  $r_{m-1}r_m$  встречается в конце маршрута. Итого на маршруте  $R$  лежит нечётное число рёбер, смежных с  $r_m$ , а поскольку степень вершины  $r_m$  чётна, то есть ещё хотя бы одно ребро  $r_mx$ , которое не лежит на маршруте  $R$ . Добавив вершину  $x$  в конец маршрута получим маршрут большей длины, что противоречит выбору  $R$ .

- **Свойство 2.** Маршрут  $R$  содержит все рёбра графа  $G$ . Допустим противное. Пусть некоторое ребро  $xy$  графа  $G$  не лежит на  $R$ . Рассмотрим путь из  $r_0$  в  $x$ , который существует в силу связности  $G$  и найдём на нём первое ребро, которое не лежит на  $R$ , если оно есть. Обозначим его через  $r_i z$ . Если такого ребра нет, то вершина  $x$  лежит на  $R$ , а потому обозначим  $r_i = x$  и  $z = y$ .

По **свойству 1**, маршрут  $R$  замкнутый, а потому сдвинем его циклически так, чтобы он начинался и заканчивался в вершине  $r_i$ . Добавив в конец получившегося маршрута вершину  $z$  получим маршрут, длиннее  $R$ , который также содержит каждое ребро не более одного раза, что приводит нас к противоречию выбору  $R$ . ■

## 9. Явная формула для числа сочетаний $C(n, k)$ : числа $k$ -элементных подмножеств $n$ -элементного множества.

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

*Доказательство.* Представим себе, что в классе из  $n$  учеников нужно сформировать спортивную команду из  $k$  учеников (внутри команды все равны, никаких ролей нет). Сколькими способами это можно сделать?

Один способ подсчёта такой. Будем выбирать игроков команды по очереди. Первого можно выбрать  $n$  способами, второго  $n-1$  способами (годятся все, кроме первого), третьего  $n-2$  способами, всего  $(n)_k = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$  способами (см. выше).

Но так мы подсчитали не число возможных команд, а число возможных упорядоченных списков команд (известно, какой игрок первый, какой второй, и так далее). Если не обращать внимание на номера игроков, то много разных списков соответствуют одной команде — они получатся, если игроков переставлять в списке, а это можно сделать  $k!$  способами. Значит, число групп равно  $\frac{(n)_k}{k!}$ ; поскольку  $(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$ , то можно переписать ответ в более симметричной форме:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Это число (число способов выбрать  $k$  элементов из  $n$ , без учёта порядка, или число  $k$ -элементных подмножеств  $n$ -элементного множества, если говорить научно) традиционно называют числом сочетаний из  $n$  по  $k$ . ■

*Утверждение.*  $\binom{n}{k}$  равно  $k$ -ому элементу в  $n$ -ой строке треугольника Паскаля.

*Доказательство.* Элемент в треугольнике Паскаля равен сумме двух верхних соседей, тогда требуется доказать

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Пусть нас интересовало количество способов выбрать подмножество из  $k$  элементов множества  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ . Тогда рассмотрим, что происходит с последним элементом  $a_n$ .

Количество подмножеств разбивается на сумму подмножеств, где есть  $a_n$  элемент и где его нет.

- $a_n$  есть в подмножестве: то есть из оставшихся  $n-1$  элементов надо выбрать  $k-1$  элемент, чтобы собрать подмножество из  $k$  элементов, то есть всего  $\binom{n-1}{k-1}$  таких подмножеств.
- $a_n$  отсутствует в подмножестве: то есть из оставшихся  $n-1$  элементов надо выбрать  $k$  элементов, чтобы собрать подмножество из  $k$  элементов, то есть всего  $\binom{n-1}{k}$  интересующих нас подмножеств.

■

## 10. Бином Ньютона. Формула для биномиальных коэффициентов.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

После раскрытия скобок в  $(a+b)(a+b)\dots(a+b)$  ( $n$  раз) получатся произведения  $n$  букв (сколько-то  $a$ , остальные  $b$ ), и вопрос только в том, какие будут коэффициенты при этих произведениях (сколько подобных членов).

Формула бинома Ньютона и говорит, какие это будут коэффициенты: это числа сочетаний, и они написаны в  $n$ -й строке треугольника Паскаля. Поэтому числа сочетаний также называют биномиальными коэффициентами.

*Доказательство.* Если мы раскроем скобки в  $(a+b)^n$  и не будем приводить подобные члены, переставляя сомножители, то получится  $2^n$  слагаемых — всевозможные слова длины  $n$  из букв  $a$  и  $b$ . (В каждой скобке можно взять  $a$  или  $b$  — на каждом месте в слове может стоять  $a$  или  $b$ .)

Если сгруппировать члены по степеням, то соберутся все слова, в которых данное число букв  $a$  и данное число букв  $b$ . А сколько их, мы знаем — это как раз числа сочетаний. Слова, в которых  $k$  букв  $a$  и  $n-k$  букв  $b$  (из  $n$  скобок мы выбираем  $k$ , из которых возьмём  $a$ ), войдут в количестве  $\binom{n}{k}$  штук в слагаемое  $\binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ , как и предсказывает бином Ньютона. ■

Как было доказано в предыдущем пункте про треугольник Паскаля,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Заметим, что знакопеременная сумма биномиальных коэффициентов в одной строке треугольника Паскаля равна 0:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot (-1)^k \cdot 1^{n-k} = (1-1)^n = 0$$

## 11. Основные свойства треугольника Паскаля: симметричность строк, возрастание чисел в первой половине строки.

Так как  $\binom{n}{k}$  в точности равен  $k$ -ому элементу в  $n$ -ой строке треугольника Паскаля, заметим, что  $k$ -ый элемент равен  $(n-k)$ -ому:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{n-k}$$

**Теорема.**  $\binom{n}{k+1} > \binom{n}{k}$  при  $k < \frac{n-1}{2}$

*Доказательство.*

$$\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} = \frac{k!(n-k)!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n-k}{k+1} > 1$$

$$k+1 < n-k \implies 2k < n-1 \implies k < \frac{n-1}{2}$$

■

## 12. Основные свойства треугольника Паскаля: формула для суммы чисел в строке, нижняя оценка на центральный коэффициент

**Теорема 1.** Сумма элементов в  $n$ -ой строке треугольника Паскаля равна  $2^n$ .

*Доказательство.* Так как  $n$ -ая строка представляет собой ряд биномиальных коэффициентов, сумма равна

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

■

**Теорема.** *Справедлива оценка*

$$\binom{2n}{n} > \frac{2^{2n}}{2n+1}$$

*Доказательство.* Уже известно, что максимальное число в строке треугольника Паскаля находится в середине и для  $2n$ -ой строки равно  $\binom{2n}{n}$ , а значит

$$(2n+1) \cdot \binom{2n}{n} > \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = 2^{2n}$$

■

### 13. Число решений уравнения $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ в неотрицательных целых числах. (Задача Муавра.)

Число решений уравнения  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$  в неотрицательных целых числах равно  $\binom{n+k-1}{n}$ .

*Доказательство.* Для простоты решим эквивалентную задачу. Необходимо раздать  $n$  монет  $k$  людям.

Представим себе, что наши  $n$  монет разложены в ряд. Прежде чем раздавать эти монеты, давайте разделим их на  $k$  групп перегородками, и договоримся, кому идёт самая левая группа, кому вторая слева и т. д. Заметим, что мы допускаем случай, когда две перегородки оказываются рядом — это значит просто, что человеку, которому была назначена группа между ними, не повезло и в этом раскладе ему ни одной монеты не достанется.

Каждому варианту раздачи (каждому решению уравнения в неотрицательных числах) соответствует последовательность из  $n$  монет и  $k-1$  перегородки. (Число перегородок на единицу меньше числа группы: первая группа стоит слева от первой перегородки, а последняя — справа от последней.)

Наоборот, каждой последовательности из  $n$  монет и  $k-1$  перегородки соответствует некоторый способ раздачи монет. Поэтому надо подсчитать число способов расставить перегородки.

А это совсем просто — каждый такой способ можно рассматривать как словов алфавите монета, перегородка, содержащее  $n$  монет и  $k-1$  перегородку. Это количество, как мы знаем, равно  $\binom{n+k-1}{n}$  (из  $(n+k-1)$ -ой позиции выбираем  $k-1$ , куда поставим перегородку). ■

### 14. Формула включений и исключений

**Теорема.**

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{S \subseteq [n], S \neq \emptyset} (-1)^{|S|+1} \left| \bigcap_{A \in S} A \right| \quad (1)$$

*Доказательство.* Основным ингредиентом доказательства является обобщённый закон де Моргана:

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \overline{\bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}}$$

который мы переведем на язык характеристических функций (для удобства опустим аргументы)

$$\chi_{\bigcup_{i=1}^n A_i} = 1 - \chi_{\bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}} = 1 - (1 - \chi_{A_1}) \times (1 - \chi_{A_2}) \times \dots \times (1 - \chi_{A_n})$$



Раскроем скобки в выражении  $(1 - \chi_{A_1}) \times (1 - \chi_{A_2}) \times \cdots \times (1 - \chi_{A_n})$  и проанализируем получившееся выражение аналогично анализу для бинома Ньютона. Ясно, что среди слагаемых есть 1; чтобы её получить нужно взять в качестве сомножителей 1 из каждой скобки; также для каждого  $i$  в выражение войдёт слагаемое  $-\chi_{A_i}$ : чтобы получить его нужно взять  $-\chi_{A_i}$  из  $i$ -ой скобки, а из каждой оставшейся скобки взять единицу. Продолжая рассуждения получаем, что чтобы получить слагаемое  $\prod_{i \in S} \chi_{A_i} = \chi_{A_{i_1}} \times \chi_{A_{i_2}} \times \cdots \times \chi_{A_{i_{|S|}}}$  нужно взять из каждой скобки с номером из  $i \in S$  множества  $S$  слагаемое  $-\chi_{A_i}$ , а из остальных скобок взять 1; при этом коэффициент перед получившимся произведением будет  $(-1)^{|S|}$ . Итак, мы получили формулу

$$\chi_{\bigcup_{i=1}^n A_i} = 1 - \left( 1 + \sum_{S \subseteq [n]} (-1)^{|S|} \prod_{i \in S} \chi_{A_i} \right) = \sum_{S \subseteq [n]} (-1)^{|S|+1} \chi_{\bigcap_{i \in S} A_i}$$

(Здесь  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ ).

В последнем переходе мы перешли от произведения характеристических функций к характеристической функции пересечения множеств. Просуммировав обе части по всем  $x \in U$  получим требуемую формулу 1. Обратим внимание, что в результате суммирования левая часть формулы будет иметь вид

$$\sum_{x \in U} \chi_{\bigcup_{i=1}^n A_i}(x) = \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right|,$$

а в правой части в результате суммирования отдельного слагаемого получится следующее (для каждого  $x \in U$  сумма будет равна мощности пересечения)

$$\sum_{S \subseteq [n]} \sum_{x \in U} (-1)^{|S|+1} \chi_{\bigcap_{i \in S} A_i}(x) = \sum_{S \subseteq [n]} (-1)^{|S|+1} \times \left| \bigcap_{i \in S} A_i \right|$$

■

## 15. Число отображений, функций, инъекций, биекций из $m$ -элементного множества в $n$ -элементное множество

Как и раньше, обозначим через  $[m]$  —  $m$ -элементное множество; для определённости  $[m] = \{1, 2, \dots, m\}$ . Найдём число отображений  $f : [m] \mapsto [n]$  (из  $m$ -элементного множества в  $n$ -элементное множество).

Напомним, что отображения — это всюду определённые функции, этот факт обозначается с помощью стрелочки между множествами. Для значения  $f(1)$  годится любое из  $n$  чисел, равно как для  $f(2)$  и так вплоть до  $f(m)$ ; по правилу произведения получаем, что число отображений есть  $n^m$ . Каждое отображение можно закодировать как слово длины  $m$  над алфавитом из  $n$  символов. Эта кодировка пригодится нам дальше.

Найдём теперь число функций из  $[m]$  в  $[n]$ . В отличие от отображений функции не обязательно всюду определены, поэтому возможно, что у каких-то элементов множества  $[m]$  нет образов. Эту задачу легко свести к предыдущей, добавив к множеству  $[n]$  элемент  $n+1$  и построить для каждой функции  $f$  из  $[m]$  в  $[n]$  эквивалентное отображение  $g : [m] \mapsto [n+1]$ , которое принимает значение  $n+1$  во всех точках, в которых функция  $f$  не определена, а в остальных точках принимает то же значение, что и  $f$ . Итак, мы установили биекцию между множеством функций из  $[m]$  в  $[n]$  и множеством отображений из  $[m]$  в  $[n+1]$ , таким образом число функций есть  $(n+1)^m$ .

Перейдём теперь к подсчёту инъекций из  $[m]$  в  $[n]$ . Вспомним, что инъекция — отображение, которое ставит в соответствие разным элементам разные значения. Мы уже обсуждали тот факт, что если существует инъекция из конечного множества  $A$  в конечное множество  $B$ , то  $|A| \leq |B|$ , поэтому при  $m > n$  инъекций нет вовсе. В случае  $m \leq n$  инъекцию, как и любое отображение, можно закодировать в виде слова над  $n$ -ичным алфавитом длины  $m$ , а условие инъективности означает, что в слове все буквы разные. Таким образом, число инъекций совпадает с числом размещений и равно  $\frac{n!}{(n-m)!}$ .

В случае конечных множеств, биекция является частным случаем инъекции, когда  $[m] = [n]$ . Таким образом число биекций равно  $n!$  (при  $m = n$ ) и совпадает с числом перестановок. Совпадение

чисел размещений и перестановок с числом инъекций и сюръекций неслучайно. Инъекции кодируют размещения, а биекции перестановки.

## 16. Формула для числа сюръекций

Аналогично случаю с инъекциями необходимо, чтобы  $m > n$ . Чтобы подсчитать сюръекции подсчитаем сначала отображения, не являющиеся сюръекциями и вычтем их число из количества всех отображений. Напомним, что функция является сюръекцией, если прообраз каждого из элементов  $[n]$  не пуст. Таким образом, функция не является сюръекцией, если в  $[n]$  есть хотя бы один элемент  $y$  для которого нет подходящего  $x : f(x) = y$ . Обозначим через  $A_i$  — множество отображений, для которых прообраз элемента  $i$  не определён, формально

$$A_i = \{f \mid f : [m] \mapsto [n], f^{-1}(i) = \emptyset\}$$

Ясно, что все несюръекции лежат в множестве  $\bigcup_{i=1}^n A_i$ .

Подсчитаем мощность  $\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right|$  с помощью формулы включений-исключений. Для каждого  $A_i$  число  $|A_i|$  совпадает с числом отображений из  $m$ -элементного множества в  $(n-1)$ -элементное множество ( $i$ -ый) элемент действовать нельзя, а все остальные можно. Их число есть  $(n-1)^m$ . В пересечении множеств  $A_i \cap A_j (i \neq j)$  содержится столько же элементов, сколько отображений  $[m] \mapsto [n-2]$  (теперь нельзя действовать ровно два элемента), а число элементов в пересечении любых  $k$  множеств из семейства  $A_1, A_2, \dots, A_n$  совпадает с числом отображений  $[m] \mapsto [n-k]$ . Число способов выбрать  $k$  множеств из семейства с  $n$ -множествами есть число сочетаний  $\binom{n}{k}$ , отсюда получаем по формуле включений исключений

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| &= |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| - |A_1 \cap A_2| - \dots - |A_{n-1} \cap A_n| + \dots \\ &= n \times (n-1)^m - \binom{n}{2} \times (n-2)^m + \binom{n}{3} \times (n-3)^m - \dots \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \times \binom{n}{k} \times (n-k)^m \end{aligned}$$

Таким образом число сюръекций есть

$$n^m - \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \times \binom{n}{k} \times (n-k)^m = \sum_{k=0}^n (-1)^k \times \binom{n}{k} \times (n-k)^m$$

## 17. Основная теорема об отношениях эквивалентности (классы эквивалентности на множестве $A$ — в точности разбиения множества $A$ на подмножества)

**Теорема.** Для любого отношения эквивалентности на множестве  $A$  множество классов эквивалентности образует разбиение множества  $A$ . Обратно, любое разбиение множества  $A$  задает на нем отношение эквивалентности, для которого классы эквивалентности совпадают с элементами разбиения.

*Доказательство.* Покажем, что отношение эквивалентности  $R$  на множестве  $A$  определяет некоторое разбиение этого множества. Убедимся вначале, что любые два класса эквивалентности по отношению  $R$  либо не пересекаются, либо совпадают.

Пусть два класса эквивалентности  $[x]_R$  и  $[y]_R$  имеют общий элемент  $z \in [x]_R \cap [y]_R$ . Тогда  $zRx$  и  $zRy$ . В силу симметричности отношения  $R$  имеем  $xRz$ , и тогда  $xRz$  и  $zRy$ . В силу транзитивности отношения  $R$  получим  $xRy$ . Пусть  $h \in [x]_R$ , тогда  $hRx$ . Так как  $xRy$ , то  $hRy$  и, следовательно,  $h \in [y]_R$ .

Обратно, если  $h \in [y]_R$ , то в силу симметричности  $R$  получим  $hRy$ ,  $yRx$  и в силу транзитивности —  $hRx$ , то есть  $h \in [x]_R$ . Таким образом,  $[x]_R = [y]_R$ .

Итак, любые два не совпадающих класса эквивалентности не пересекаются. Так как для любого  $x \in A$  справедливо  $x \in [x]_R$  (поскольку  $xRx$ ), т.е. каждый элемент множества  $A$  принадлежит некоторому классу эквивалентности по отношению  $R$ , то множество всех классов эквивалентности по отношению  $R$  образует разбиение исходного множества  $A$ . Таким образом, любое отношение эквивалентности однозначно определяет некоторое разбиение.

Теперь пусть  $(B_i)_{i \in I}$  — некоторое разбиение множества  $A$ . Рассмотрим отношение  $R$ , такое, что  $xRy$  имеет место тогда и только тогда, когда  $x$  и  $y$  принадлежат одному и тому же элементу  $B_i$  данного разбиения:

$$xRy \iff \exists i \in I : (x \in B_i) \wedge (y \in B_i).$$

Очевидно, что введенное отношение рефлексивно и симметрично. Если для любых  $x, y$  и  $z$  имеет место  $xRy$  и  $yRz$ , то  $x, y$  и  $z$  в силу определения отношения  $R$  принадлежат одному и тому же элементу  $B_i$  разбиения. Следовательно,  $xRz$  и отношение  $R$  транзитивно. Таким образом,  $R$  — эквивалентность на  $A$ . ■

- 18. Равносильность свойств ориентированных графов: (1) каждая компонента сильной связности состоит из одной вершины; (2) вершины графа возможно занумеровать так, чтобы каждое ребро вело из вершины с меньшим номером в вершину с большим номером; (3) в графе нет циклов длины больше 1 (граф ациклический).**

*Доказательство.* Компонента является тривиальной, если состоит из 1ой вершины.

Равносильность условий (1) и (3) вытекает из данного утверждения:

*Утверждение.* Вершины  $u$  и  $v$  лежат в одной компоненте сильной связности тогда и только тогда, когда они лежат на замкнутом маршруте.

*Доказательство.* Действительно, условие двусторонней достижимости влечёт существование маршрутов из  $u$  в  $v$  и из  $v$  в  $u$ , склеив их получим замкнутый маршрут. С другой стороны, замкнутый маршрут, содержащий вершины  $u$  и  $v$  очевидно влечёт двустороннюю достижимость. ■

В графе есть нетривиальная компонента сильной связности тогда и только тогда когда в нём есть замкнутый маршрут длины 2 или больше, а это равносильно существованию цикла.

Из условия (2) очевидно следует условие (3). Действительно, если такая нумерация существует, то если был бы цикл, то в нём вершина с большим номером соединялась бы ребром с меньшим номером.

Для завершения доказательства теоремы осталось доказать импликацию (3)  $\implies$  (2). Докажем для этого вспомогательную лемму.

**Лемма.** В ориентированном ациклическом графе  $G$  есть сток

*Доказательство.* Возьмём самый длинный ориентированный путь  $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_n$  в графе  $G$ . Такой существует, потому что множество путей конечно (вершины в пути повторяться не могут). Докажем от противного, что вершина  $v_n$  является стоком (из неё нет исходящих рёбер).

Если в  $G$  есть ребро  $v_n \rightarrow u$  и  $u \neq v_i$ , то путь можно сделать длиннее, добавив к нему  $u$ ; если же  $u = v_i$ , то в графе  $G$  есть цикл (петель в  $G$  по определению быть не может). Оба случая приводят нас к противоречию. ■

Докажем с помощью леммы импликацию индукцией по числу вершин.

- *База:* для  $|V| = 1$  очевидна: в графе из одной вершины нет рёбер, поэтому занумеровав единственную вершину единицей получим корректную нумерацию.
- *Шаг:* пусть утверждение верно для любого графа на  $n$  вершинах; согласно лемме в графе  $G$  на  $(n + 1)$ -ой вершине существует сток — занумеруем его числом  $n + 1$  и рассмотрим граф  $G_0$ , получающийся из  $G$  удалением этого стока.

По предположению индукции вершины  $G_0$  можно занумеровать корректно; перенеся эту нумерацию на  $G$  получим также корректную нумерацию: поскольку из  $(n + 1)$ -ой вершины не идёт ни одного ребра, испортить нумерацию она не может, а для всех остальных рёбер нумерация корректна. ■