

# Линейная алгебра, Коллоквиум

Бобень Вячеслав

@darkkeks, [GitHub](#)

Большую часть исходного кода предоставила Левина Александра.

Благодарность выражается Левину Александру за видеозаписи лекций.

2019 — 2020

“К коллоку можете даже не готовиться”.

— Роман Сергеевич Авдеев

## Содержание

|          |   |          |
|----------|---|----------|
| <b>1</b> | <b>Определения и формулировки</b>   | <b>4</b> |
| 1.1      | Сумма двух матриц, произведение матрицы на скаляр   | 4        |
| 1.2      | Транспонированная матрица   | 4        |
| 1.3      | Произведение двух матриц  | 4        |
| 1.4      | Диагональная матрица, умножение на диагональную матрицу слева и справа  | 4        |
| 1.5      | Единичная матрица, её свойства  | 4        |
| 1.6      | След квадратной матрицы и его поведение при сложении матриц, умножении матрицы на скаляр и транспонировании                     | 5        |
| 1.7      | След произведения двух матриц   | 5        |
| 1.8      | Совместные и несовместные системы линейных уравнений  | 5        |
| 1.9      | Эквивалентные системы линейных уравнений  | 5        |
| 1.10     | Расширенная матрица системы линейных уравнений  | 5        |
| 1.11     | Элементарные преобразования строк матрицы   | 5        |
| 1.12     | Ступенчатый вид матрицы   | 5        |
| 1.13     | Улучшенный ступенчатый вид матрицы  | 6        |
| 1.14     | Теорема о виде, к которому можно привести матрицу при помощи элементарных преобразований строк                                  | 6        |
| 1.15     | Общее решение совместной системы линейных уравнений   | 6        |
| 1.16     | Сколько может быть решений у системы линейных уравнений с действительными коэффициентами?                                       | 6        |
| 1.17     | Однородная система линейных уравнений. Что можно сказать про её множество решений?  | 6        |
| 1.18     | Свойство однородной системы линейных уравнений, у которой число неизвестных больше числа уравнений                              | 7        |
| 1.19     | Связь между множеством решений совместной системы линейных уравнений и множеством решений соответствующей ей однородной системы | 7        |
| 1.20     | Обратная матрица  | 7        |
| 1.21     | Перестановки множества $\{1, 2, \dots, n\}$   | 7        |
| 1.22     | Инверсия в перестановке. Знак перестановки. Чётные и нечётные перестановки  | 7        |
| 1.23     | Произведение двух перестановок  | 7        |
| 1.24     | Тожественная перестановка и её свойства. Обратная перестановка и её свойства  | 7        |
| 1.25     | Теорема о знаке произведения двух перестановок  | 8        |
| 1.26     | Транспозиция. Знак транспозиции   | 8        |
| 1.27     | Общая формула для определителя квадратной матрицы произвольного порядка   | 8        |
| 1.28     | Определители 2-го и 3-го порядка  | 8        |
| 1.29     | Поведение определителя при разложении строки (столбца) в сумму двух   | 8        |
| 1.30     | Поведение определителя при перестановке двух строк (столбцов)   | 8        |
| 1.31     | Поведение определителя при прибавлении к строке (столбцу) другой, умноженной на скаляр  | 8        |
| 1.32     | Верхнетреугольные и нижнетреугольные матрицы  | 8        |
| 1.33     | Определитель верхнетреугольной (нижнетреугольной) матрицы   | 9        |
| 1.34     | Определитель диагональной матрицы. Определитель единичной матрицы   | 9        |
| 1.35     | Матрица с углом нулей и её определитель   | 9        |
| 1.36     | Определитель произведения двух матриц   | 9        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 1.37     | Дополнительный минор к элементу квадратной матрицы  | 9         |
| 1.38     | Алгебраическое дополнение к элементу квадратной матрицы   | 9         |
| 1.39     | Формула разложения определителя по строке (столбцу)   | 9         |
| 1.40     | Лемма о фальшивом разложении определителя   | 10        |
| 1.41     | Невырожденная матрица   | 10        |
| 1.42     | Присоединённая матрица  | 10        |
| 1.43     | Критерий обратимости квадратной матрицы   | 10        |
| 1.44     | Явная формула для обратной матрицы  | 10        |
| 1.45     | Критерий обратимости произведения двух матриц. Матрица, обратная к произведению двух матриц                                       | 10        |
| 1.46     | Формулы Крамера   | 10        |
| 1.47     | Что такое поле?   | 10        |
| 1.48     | Алгебраическая форма комплексного числа. Сложение, умножение и деление комплексных чисел в алгебраической форме                   | 11        |
| 1.49     | Комплексное сопряжение и его свойства: сопряжение суммы и произведения двух комплексных чисел                                     | 11        |
| 1.50     | Геометрическая модель комплексных чисел, интерпретация в ней сложения и сопряжения  | 11        |
| 1.51     | Модуль комплексного числа и его свойства: неотрицательность, неравенство треугольника, модуль произведения двух комплексных чисел | 11        |
| 1.52     | Аргумент комплексного числа   | 11        |
| 1.53     | Тригонометрическая форма комплексного числа. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме                     | 11        |
| 1.54     | Формула Муавра  | 12        |
| 1.55     | Извлечение корней из комплексных чисел  | 12        |
| 1.56     | Основная теорема алгебры комплексных чисел  | 12        |
| 1.57     | Теорема Безу и её следствие   | 12        |
| 1.58     | Кратность корня многочлена  | 12        |
| 1.59     | Векторное пространство  | 12        |
| 1.60     | Подпространство векторного пространства   | 12        |
| 1.61     | Линейная комбинация конечного набора векторов векторного пространства   | 13        |
| 1.62     | Линейная оболочка подмножества векторного пространства  | 13        |
| 1.63     | Две общих конструкции подпространств в пространстве $F^n$   | 13        |
| 1.64     | Линейная зависимость конечного набора векторов  | 13        |
| 1.65     | Линейная независимость конечного набора векторов  | 13        |
| 1.66     | Критерий линейной зависимости конечного набора векторов   | 13        |
| 1.67     | Основная лемма о линейной зависимости   | 13        |
| 1.68     | Базис векторного пространства   | 13        |
| 1.69     | Конечномерные и бесконечномерные векторные пространства   | 13        |
| 1.70     | Размерность конечномерного векторного пространства  | 13        |
| 1.71     | Характеризация базисов конечномерного векторного пространства в терминах единственности линейного выражения векторов              | 14        |
| 1.72     | Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений   | 14        |
| 1.73     | Лемма о добавлении вектора к конечной линейно независимой системе   | 14        |
| <b>2</b> | <b>Вопросы на доказательство</b>  | <b>14</b> |
| 2.1      | Операции над матрицами  | 14        |
| 2.1.1    | Дистрибутивность произведения матриц по отношению к сложению  | 14        |
| 2.1.2    | Ассоциативность произведения матриц   | 14        |
| 2.1.3    | Некоммутативность произведения матриц   | 15        |
| 2.1.4    | Транспонирование произведения двух матриц   | 15        |
| 2.1.5    | Умножение на диагональную матрицу слева и справа  | 15        |
| 2.1.6    | След произведения двух матриц   | 15        |
| 2.2      | Системы линейных уравнений  | 16        |
| 2.2.1    | Эквивалентность систем линейных уравнений, получаемых друг из друга путём элементарных преобразований строк расширенной матрицы   | 16        |
| 2.2.2    | Теорема о приведении матрицы к ступенчатому и улучшенному ступенчатому виду при помощи элементарных преобразований строк          | 16        |
| 2.2.3    | Реализация элементарных преобразований строк матрицы при помощи умножения на подходящую матрицу                                   | 16        |
| 2.2.4    | Метод Гаусса решения систем линейных уравнений  | 17        |
| 2.2.5    | Связь между множеством решений совместной системы линейных уравнений и множеством решений соответствующей ей однородной системы   | 18        |
| 2.2.6    | Общий метод решения матричных уравнений вида $AX = B$ и $XA = B$  | 18        |
| 2.2.7    | Вычисление обратной матрицы при помощи элементарных преобразований  | 18        |
| 2.3      | Перестановки  | 19        |

|        |   |    |
|--------|---|----|
| 2.3.1  | Ассоциативность произведения перестановок   | 19 |
| 2.3.2  | Некоммутативность произведения перестановок   | 19 |
| 2.3.3  | Теорема о знаке произведения двух перестановок  | 19 |
| 2.3.4  | Знак обратной перестановки  | 19 |
| 2.3.5  | Знак транспозиции   | 19 |
| 2.4    | Определители  | 20 |
| 2.4.1  | Определитель транспонированной матрицы  | 20 |
| 2.4.2  | Поведение определителя при умножении строки (столбца) на скаляр   | 20 |
| 2.4.3  | Поведение определителя при разложении строки (столбца) в сумму двух   | 20 |
| 2.4.4  | Определитель матрицы с двумя одинаковыми строками (столбцами)   | 21 |
| 2.4.5  | Поведение определителя при прибавлении к строке (столбцу) другой, умноженной на скаляр  | 21 |
| 2.4.6  | Поведение определителя при перестановке двух строк (столбцов)   | 21 |
| 2.4.7  | Определитель верхнетреугольной (нижнетреугольной) матрицы   | 22 |
| 2.4.8  | Определитель с углом нулей  | 22 |
| 2.4.9  | Определитель произведения двух матриц   | 23 |
| 2.4.10 | Разложение определителя по строке (столбцу)   | 23 |
| 2.4.11 | Лемма о фальшивом разложении определителя   | 24 |
| 2.4.12 | Единственность обратной матрицы   | 24 |
| 2.4.13 | Определитель обратной матрицы   | 25 |
| 2.4.14 | Критерий обратимости квадратной матрицы и явная формула для обратной матрицы  | 25 |
| 2.4.15 | Матрица, обратная к произведению двух матриц  | 25 |
| 2.4.16 | Формулы Крамера   | 25 |
| 2.5    | Комплексные числа   | 26 |
| 2.5.1  | Построение поля комплексных чисел   | 26 |
| 2.5.2  | Свойства комплексного сопряжения (для суммы и произведения)   | 27 |
| 2.5.3  | Свойства модуля комплексного числа: неотрицательность, неравенство треугольника (алгебраическое доказательство), модуль произведения двух комплексных чисел | 27 |
| 2.5.4  | Умножение, деление и возведение в степень комплексных чисел в тригонометрической форме, формула Муавра  | 27 |
| 2.5.5  | Извлечение корней из комплексных чисел  | 28 |
| 2.6    | Векторные пространства  | 28 |
| 2.6.1  | Понятие векторного пространства, шесть простейших следствий из аксиом   | 28 |
| 2.6.2  | Утверждение о том, что множество решений однородной системы линейных уравнений является подпространством в соответствующем векторном пространстве           | 29 |
| 2.6.3  | Утверждение о том, что линейная оболочка произвольного подмножества векторного пространства является подпространством                                       | 29 |
| 2.6.4  | Критерий линейной зависимости конечной системы векторов   | 29 |
| 2.6.5  | Основная лемма о линейной зависимости   | 30 |
| 2.6.6  | Независимость числа векторов в базисе конечномерного векторного пространства от выбора базиса   | 30 |
| 2.6.7  | Характеризация базисов конечномерного векторного пространства в терминах единственности линейного выражения векторов  | 31 |
| 2.6.8  | Метод построения фундаментальной системы решений для однородной системы линейных уравнений  | 31 |
| 2.6.9  | Существование подмножества конечной системы векторов, являющегося базисом её линейной оболочки  | 32 |
| 2.6.10 | Дополнение линейно независимой системы векторов до базиса конечномерного векторного пространства  | 33 |
| 2.6.11 | Лемма о добавлении вектора к конечной линейно независимой системе   | 33 |

# 1 Определения и формулировки

## 1. Сумма двух матриц, произведение матрицы на скаляр

Для любых  $A, B \in \text{Mat}_{m \times n}$

- Сложение  $A + B := (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$
- Умножение на скаляр  $\lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda A := (\lambda a_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$

## 2. Транспонированная матрица

$$A \in \text{Mat}_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$
$$A^T \in \text{Mat}_{n \times m} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ — транспонированная матрица.}$$

## 3. Произведение двух матриц

- 1) Частный случай: умножение строки на столбец той же длины

$$\underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_{1 \times n} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{n \times 1} = x_1 \cdot y_1 + \dots + x_n \cdot y_n$$

- 2) Общий случай:

$A$  - матрица размера  $m \times n$

$B$  - матрица размера  $n \times p$

$AB := C \in \text{Mat}_{m \times p}$ , где

$$C_{ij} = A_{(i)} B^{(j)} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Количество столбцов матрицы  $A$  равно количеству строк матрицы  $B$  — условие согласованности матриц.

## 4. Диагональная матрица, умножение на диагональную матрицу слева и справа

**Определение.** Матрица  $A \in M_n$  называется *диагональной* если все ее элементы вне главной диагонали равны нулю ( $a_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ )

**Лемма.**  $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n) \in M_n \implies$

- $\forall B \in \text{Mat}_{n \times p} \implies AB = \begin{pmatrix} a_1 B_{(1)} \\ a_2 B_{(2)} \\ \vdots \\ a_n B_{(n)} \end{pmatrix}$
- $\forall B \in \text{Mat}_{m \times n} \implies BA = (a_1 B^{(1)} \quad a_2 B^{(2)} \quad \dots \quad a_n B^{(n)})$

## 5. Единичная матрица, её свойства

**Определение.** Матрица  $E = E_n = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$  называется *единичной матрицей* порядка  $n$ .

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

### Свойства:

1.  $EA = A \quad \forall A \in \text{Mat}_{n \times p}$
2.  $AE = A \quad \forall A \in \text{Mat}_{p \times n}$
3.  $AE = EA = A \quad \forall A \in M_n$

6. След квадратной матрицы и его поведение при сложении матриц, умножении матрицы на скаляр и транспонировании

**Определение.** Следом матрицы  $A \in M_n$  называется число  $tr A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$

### Свойства:

1.  $\text{tr}(A + B) = \text{tr } A + \text{tr } B$
2.  $\text{tr } \lambda A = \lambda \text{tr } A$
3.  $\text{tr } A^T = \text{tr } A$

## 7. След произведения двух матриц

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

$$\forall A \in \text{Mat}_{m \times n}, B \in \text{Mat}_{n \times m}$$

## 8. Совместные и несовместные системы линейных уравнений

**Определение.** СЛУ называется

- *совместной*, если у нее есть хотя бы одно решение,
- *несовместной*, если решений нет.

## 9. Эквивалентные системы линейных уравнений

**Определение.** Две системы уравнений от одних и тех же неизвестных называются *эквивалентными*, если они имеют одинаковые множества решений.

## 10. Расширенная матрица системы линейных уравнений

Для СЛУ

[illegible]

её *расширенной матрицей* называется матрица

$$(A \mid b) = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

## 11. Элементарные преобразования строк матрицы

| тип | СЛУ  | расширенная матрица             |
|-----|--|---------------------------------|
| 1.  | К $i$ -му уравнению прибавить $j$ -ое, умноженное на $\lambda \in \mathbb{R}$ ( $i \neq j$ ) | $\mathfrak{A}_1(i, j, \lambda)$ |
| 2.  | Переставить $i$ -е и $j$ -е уравнения ( $i \neq j$ )   | $\mathfrak{A}_2(i, j)$          |
| 3.  | Умножить $i$ -ое уравнение на $\lambda \neq 0$   | $\mathfrak{A}_3(i, \lambda)$    |

1.  $\mathfrak{E}_1(i, j, \lambda)$ : к  $i$ -ой строке прибавить  $j$ -ую, умноженную на  $\lambda$  (покомпонентно),  
 $a_{ik} \mapsto a_{ik} + \lambda a_{jk} \ \forall k = 1, \dots, n$ ,  
 $b_i \mapsto b_i + \lambda b_j$ .
2.  $\mathfrak{E}_2(i, j)$ : переставить  $i$ -ую и  $j$ -ую строки.
3.  $\mathfrak{E}_3(i, \lambda)$ : умножить  $i$ -ю строку на  $\lambda$  (покомпонентно).

$\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \mathfrak{E}_3$  называются *элементарными преобразованиями строк расширенной матрицы*.

## 12. Ступенчатый вид матрицы

**Определение.** Строка  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  называется *нулевой*, если  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$  и *ненулевой* иначе ( $\exists i : a_i \neq 0$ ).

**Определение.** *Ведущим элементом* ненулевой строки называется первый её ненулевой элемент.

**Определение.** Матрица  $M \in \text{Mat}_{m \times n}$  называется *ступенчатой*, или имеет ступенчатый вид, если:

1. Номера ведущих элементов её ненулевых строк строго возрастают.
2. Все нулевые строки стоят в конце.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \diamond & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \diamond & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \diamond & * & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \diamond & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \diamond \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где  $\diamond \neq 0$ ,  $*$  – что угодно.

### 13. Улучшенный ступенчатый вид матрицы

**Определение.** М имеет *улучшенный ступенчатый вид*, если:

1. М имеет обычный ступенчатый вид.
2. Все ведущие элементы равны 1.
3. В одном столбце с любым ведущим элементом стоят только нули.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & 0 & * & 0 & 0 & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & * & 0 & 0 & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

### 14. Теорема о виде, к которому можно привести матрицу при помощи элементарных преобразований строк

**Теорема.**

- 1) Всякую матрицу элементарными преобразованиями можно привести к ступенчатому виду.
- 2) Всякую ступенчатую матрицу элементарными преобразованиями строк можно привести к улучшенному ступенчатому виду.

**Следствие.** Всякую матрицу элементарными преобразованиями строк можно привести к **улучшенному** ступенчатому виду.

### 15. Общее решение совместной системы линейных уравнений

**Определение.** *Общим решением исходной СЛУ* называется выражение главных неизвестных через свободные.

### 16. Сколько может быть решений у системы линейных уравнений с действительными коэффициентами?

**Определение.** Всякая СЛУ с действительными коэффициентами:

- либо не имеет решений (несовместна)
- либо имеет ровно одно решение
- либо имеет бесконечно много решений

### 17. Однородная система линейных уравнений. Что можно сказать про её множество решений?

**Определение.** СЛУ называется однородной (ОСЛУ), если все её правые части равны 0. Расширенная матрица:  $(A \mid 0)$

**Очевидный факт.** Всякая ОСЛУ имеет нулевое решение ( $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ ).

**Следствие.** Всякая ОСЛУ либо имеет ровно 1 решение (нулевое), либо бесконечно много решений.

**18. Свойство однородной системы линейных уравнений, у которой число неизвестных больше числа уравнений**

**Следствие.** Всякая ОСЛУ, у которой число неизвестных больше числа уравнений, имеет ненулевое решение (бесконечно много ненулевых решений).

**19. Связь между множеством решений совместной системы линейных уравнений и множеством решений соответствующей ей однородной системы**

**Утверждение.** Пусть  $Ax = b$  – совместная СЛУ,

$x_0$  – частное решение  $Ax = b$ ,

$S \subset \mathbb{R}^n$  – множество решений ОСЛУ  $Ax = 0$ ,

$L \subset \mathbb{R}^n$  – множество решений  $Ax = b$ .

Тогда,  $L = x_0 + S$ , где  $x_0 + S = \{x_0 + v \mid v \in S\}$

**20. Обратная матрица**

**Определение.** Матрица  $B \in M_n$  называется *обратной*, к  $A$ , если  $AB = BA = E$ .

Обозначение:  $B = A^{-1}$ .

**21. Перестановки множества  $\{1, 2, \dots, n\}$**

**Определение.** Перестановкой (подстановкой) на множестве  $\{1, 2, \dots, n\}$  называется всякое биективное (взаимно однозначное) отображение множества  $\{1, 2, \dots, n\}$  в себя.

$$\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}.$$

$S_n$  – множество всех перестановок на множестве  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

Запись:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \text{ либо } \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \\ \sigma(i_1) & \sigma(i_2) & \sigma(i_3) & \dots & \sigma(i_n) \end{pmatrix}.$$

Здесь,  $\{i_1, i_2, \dots, i_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$ .

**22. Инверсия в перестановке. Знак перестановки. Чётные и нечётные перестановки**

Пусть  $\sigma \in S_n$ ,  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $i \neq j$

**Определение.** Пара  $\{i, j\}$  (неупорядоченная) образует *инверсию* в  $\sigma$ , если числа  $i - j$  и  $\sigma(i) - \sigma(j)$  имеют разный знак (то есть либо  $i < j$  и  $\sigma(i) > \sigma(j)$ , либо  $i > j$  и  $\sigma(i) < \sigma(j)$ ).

**Определение.** Знак перестановки  $\sigma$  – это число  $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{\text{число инверсий в } \sigma}$ .

**Определение.** Перестановка  $\sigma$  называется *четной*, если  $\text{sgn}(\sigma) = 1$  (четное количество инверсий), и *нечетной* если  $\text{sgn}(\sigma) = -1$  (нечетное количество инверсий).

**23. Произведение двух перестановок**

**Определение.** Произведением (или композицией) двух перестановок  $\sigma, \rho \in S_n$  называется такая перестановка  $\sigma\rho \in S_n$ , что  $(\sigma\rho)(x) := \sigma(\rho(x)) \quad \forall x \in \{1, \dots, n\}$ .

**24. Тожественная перестановка и её свойства. Обратная перестановка и её свойства**

**Определение.** Перестановка  $id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \in S_n$  называется *тождественной* перестановкой.

**Свойства:**

$$\forall \sigma \in S_n \quad id \cdot \sigma = \sigma \cdot id = \sigma.$$

$$\text{sgn}(id) = 1.$$

**Определение.**  $\sigma \in S_n$ ,  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \implies$  подстановка  $\sigma^{-1} := \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$  называется *обратной* к  $\sigma$  перестановкой.

Свойства:  $\sigma \cdot \sigma^{-1} = id = \sigma^{-1} \cdot \sigma$

## 25. Теорема о знаке произведения двух перестановок

**Теорема.**  $\sigma, \rho \in S_n \implies \operatorname{sgn}(\sigma\rho) = \operatorname{sgn} \sigma \cdot \operatorname{sgn} \rho$ .

## 26. Транспозиция. Знак транспозиции

Пусть  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $i \neq j$ .

Рассмотрим перестановку  $\tau_{ij} \in S_n$ , такую что

$$\tau_{ij}(i) = j.$$

$$\tau_{ij}(j) = i.$$

$$\tau_{ij}(k) = k \quad \forall k \neq i, j.$$

**Определение.** Перестановки вида  $\tau_{ij}$  называются *транспозициями*.

**Замечание.**  $\tau$  – транспозиция  $\implies \tau^2 = id, \tau^{-1} = \tau$ .

**Лемма.**  $\tau \in S_n$  – транспозиция  $\implies \operatorname{sgn}(\tau) = -1$ .

## 27. Общая формула для определителя квадратной матрицы произвольного порядка

**Определение.** Определителем матрицы  $A \in M_n$  называется число

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}.$$

( $\sum_{\sigma \in S_n}$  – сумма по всем перестановкам)

## 28. Определители 2-го и 3-го порядка

- $n = 2$

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- $n = 3$

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

## 29. Поведение определителя при разложении строки (столбца) в сумму двух

$$\text{Если } A_{(i)} = A_{(i)}^1 + A_{(i)}^2, \text{ то } \det A = \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)}^1 \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)}^2 \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}.$$

Пример:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

Аналогично, если  $A^{(j)} = A_1^{(j)} + A_2^{(j)}$ , то  $\det A = \det(A^{(1)} \dots A_1^{(j)} \dots A^{(n)}) + \det(A^{(1)} \dots A_2^{(j)} \dots A^{(n)})$ .

## 30. Поведение определителя при перестановке двух строк (столбцов)

Если в  $A$  поменять местами две строки или два столбца, то  $\det A$  поменяет знак.

## 31. Поведение определителя при прибавлении к строке (столбцу) другой, умноженной на скаляр

Если к строке (столбцу) прибавить другую строку (столбец), умноженную на скаляр, то  $\det A$  не изменится.

## 32. Верхнетреугольные и нижнетреугольные матрицы



**Определение.** Матрица называется *верхнетреугольной*, если  $a_{ij} = 0$  при  $i > j$ , *нижнетреугольной*, если  $a_{ij} = 0$  при  $i < j$ .

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - \text{верхнетреугольная}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} - \text{нижнетреугольная}$$

### 33. Определитель верхнетреугольной (нижнетреугольной) матрицы

Если  $A$  верхнетреугольная или нижнетреугольная, то  $\det A = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$ .

### 34. Определитель диагональной матрицы. Определитель единичной матрицы

Так как матрица диагональна, она верхнетреугольна. Тогда, её определитель равен произведению элементов на диагонали:

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

Значит, определитель единичной матрицы  $= 1$ .

$$\det E = 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 = 1.$$

### 35. Матрица с углом нулей и её определитель

**Предложение.**

$$A = \left( \begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline 0 & R \end{array} \right) \text{ или } A = \left( \begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline Q & R \end{array} \right), \quad P \in M_k, \quad R \in M_{n-k} \implies \det A = \det P \det R.$$

Матрица с углом нулей:

$$\left( \begin{array}{c|ccc} * & * & * & * \\ \hline 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{array} \right)$$

НЕ матрица с углом нулей:

$$\left( \begin{array}{c|ccc} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ \hline 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{array} \right)$$

### 36. Определитель произведения двух матриц

**Теорема.**  $A, B \in M_n \implies \det(AB) = \det A \det B$ .

### 37. Дополнительный минор к элементу квадратной матрицы

**Определение.** *Дополнительным минором* к элементу  $a_{ij}$  называется определитель  $(n-1) \times (n-1)$  матрицы, получающейся из  $A$  вычеркиванием  $i$ -ой строки и  $j$ -го столбца.

Обозначение:  $\overline{M}_{ij}$ .

### 38. Алгебраическое дополнение к элементу квадратной матрицы

**Определение.** *Алгебраическим дополнением* к элементу  $a_{ij}$  называется число  $A_{ij} = (-1)^{i+j} \overline{M}_{ij}$ .

### 39. Формула разложения определителя по строке (столбцу)

**Теорема.** При любом фиксированном  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij} \text{ — разложение по } i\text{-й строке.}$$

Аналогично, для любого фиксированного  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij} \text{ — разложение по } j\text{-й столбцу.}$$

#### 40. Лемма о фальшивом разложении определителя

**Лемма.**

1. При любых  $i, k \in \{1, 2, \dots, n\} : i \neq k \implies \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{kj} = 0$ ,
2. При любых  $j, k \in \{1, 2, \dots, n\} : j \neq k \implies \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ik} = 0$ .

#### 41. Невырожденная матрица

**Определение.** Матрица  $A \in M_n$  называется *невырожденной*, если  $\det A \neq 0$ , и *вырожденной* иначе (то есть  $\det A = 0$ ).

#### 42. Присоединённая матрица

**Определение.** Присоединённой к  $A$  матрицей называется матрица  $\hat{A} = (A_{ij})^T$ .

#### 43. Критерий обратимости квадратной матрицы

**Теорема.**  $A$  обратима (то есть  $\exists A^{-1}$ )  $\iff A$  невырождена ( $\det A \neq 0$ ).

#### 44. Явная формула для обратной матрицы

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \hat{A}$$

#### 45. Критерий обратимости произведения двух матриц. Матрица, обратная к произведению двух матриц

**Следствие.**  $A, B \in M_n \implies AB$  обратима  $\iff$  обе  $A, B$  обратимы. При этом  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

#### 46. Формулы Крамера

Пусть есть СЛУ  $Ax = b(\star)$ ,  $A \in M_n$ ,  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ,  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ .

Также,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $A_i = (A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, b, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)})$ .

**Теорема.** Если  $\det A \neq 0$ , то СЛУ  $(\star)$  имеет единственное решение и его можно найти по формулам:

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}.$$

#### 47. Что такое поле?

**Определение.** *Поле* называется множество  $F$ , на котором заданы две операции “сложение”  $((a, b) \rightarrow a + b)$  и “умножение”  $((a, b) \rightarrow a \cdot b)$ , причем  $\forall a, b, c \in F$  выполнены следующие условия:

1.  $a + b = b + a$  (коммутативность сложения)
2.  $(a + b) + c = a + (b + c)$  (ассоциативность сложения)
3.  $\exists 0 \in F : 0 + a = a + 0 = a$  (нулевой элемент)
4.  $\exists (-a) \in F : a + (-a) = (-a) + a = 0$  (противоположный элемент)  
 $\uparrow$  абелева группа  $\uparrow$
5.  $a(b + c) = ab + ac$  (дистрибутивность)
6.  $ab = ba$  (коммутативность умножения)
7.  $(ab)c = a(bc)$  (ассоциативность умножения)
8.  $\exists 1 \in F \setminus \{0\} : 1a = a1 = a$  (единица)
9. Если  $a \neq 0$ ,  $\exists a^{-1} \in F : aa^{-1} = a^{-1}a = 1$  (обратный элемент)

**48. Алгебраическая форма комплексного числа. Сложение, умножение и деление комплексных чисел в алгебраической форме**

**Определение.** Представление числа  $z \in \mathbb{C}$  в виде  $a + bi$ , где  $a, b \in \mathbb{R}$  называется его *алгебраической формой*. Число  $i$  называется *мнимой единицей*.

$a =: \operatorname{Re}(z)$  – действительная часть числа  $z$ .

$b =: \operatorname{Im}(z)$  – мнимая часть числа  $z$ .

**Сложение**  $(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

**Умножение**  $(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$

**Деление**  $\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}i$

**49. Комплексное сопряжение и его свойства: сопряжение суммы и произведения двух комплексных чисел**

**Определение.** Число  $\bar{z} := a - bi$  называется *комплексно сопряженным* к числу  $z = a + bi$ .

Операция  $z \rightarrow \bar{z}$  называется *комплексным сопряжением*.

**Свойства комплексного сопряжения**

- $\overline{\bar{z}} = z$ .
- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ .
- $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ .

**50. Геометрическая модель комплексных чисел, интерпретация в ней сложения и сопряжения**

Числу  $z = a + bi$  соответствует точка (или вектор) на плоскости  $\mathbb{R}^2$  с координатами  $(a, b)$ . Сумме  $z + w$  соответствует сумма соответствующих векторов. Сопряжению  $z \rightarrow \bar{z}$  – это отражение  $z$  относительно действительной оси.

**51. Модуль комплексного числа и его свойства: неотрицательность, неравенство треугольника, модуль произведения двух комплексных чисел**

**Определение.** Число  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  называется *модулем числа*  $z = a + bi \in \mathbb{C}$  (то есть длиной соответствующего вектора).

**Свойства**

1.  $|z| \geq 0$ , причем  $|z| = 0 \iff z = 0$ .
2.  $|z + w| \leq |z| + |w|$  (неравенство треугольника).
3.  $z\bar{z} = |z|^2$ .
4.  $|zw| = |z||w|$ .

**52. Аргумент комплексного числа**

**Определение.** Аргументом числа  $z = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  называется число  $\varphi \in \mathbb{R}$ , такое что

$$\cos \varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$$\sin \varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

В геометрических терминах,  $\varphi$  есть угол между осью  $Ox$  и соответствующим вектором.

**53. Тригонометрическая форма комплексного числа. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме**

**Определение.** Представление числа  $z \in \mathbb{C}$  в виде  $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  называется его *тригонометрической формой*.

**Предложение.** Пусть  $z_1 = |z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$  и  $z_2 = |z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ , тогда

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

**Следствие.** В условиях предложения, предположим, что  $z_2 \neq 0$ .

Тогда  $\frac{z_1}{z_2} = \left| \frac{z_1}{z_2} \right| (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$ .

#### 54. Формула Муавра

Пусть  $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . Тогда  $\forall n \in \mathbb{Z}$ ,

$$z^n = |z|^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) - \text{формула Муавра.}$$

#### 55. Извлечение корней из комплексных чисел

Пусть  $z \in \mathbb{C}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ .

**Определение.** Корнем степени  $n$  (или корнем  $n$ -й степени) из числа  $z$  называется всякое число  $w \in \mathbb{C}$ , что  $w^n = z$ .

$$\sqrt[n]{z} = \{w_0, w_1, \dots, w_{n-1}\}, \text{ где } w_k = \sqrt[n]{|z|} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right)$$

**Замечание.** Числа  $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$  лежат в вершинах правильного  $n$ -угольника с центром в начале координат.

#### 56. Основная теорема алгебры комплексных чисел

**Теорема.** Всякий многочлен степени  $\geq 1$  с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень.

#### 57. Теорема Безу и её следствие

Частный случай деления многочлена  $f(x)$  на многочлен  $g(x)$  с остатком:  $g(x) = x - c$ ,  $\deg g(x) = 1$ :

$$f(x) = q(x)(x - c) + r(x), \text{ где либо } r(x) = 0, \text{ либо } \deg r(x) < \deg g(x) = 1$$

Значит,  $r(x) \equiv r = \text{const} \in F$ .

**Теорема.**  $r = f(c)$ .

**Следствие.** Элемент  $c \in F$  является корнем многочлена  $f(x) \in F[x]$  тогда и только тогда, когда  $f(x)$  делится на  $(x - c)$ .

#### 58. Кратность корня многочлена

**Определение.** Кратностью корня  $c \in F$  многочлена  $f(x)$  называется наибольшее целое  $k$  такое что,  $f(x)$  делится на  $(x - c)^k$ .

#### 59. Векторное пространство

Фиксируем поле  $F$  (можно считать, что  $F = \mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ )

**Определение.** Множество  $V$  называется векторным (линейным) пространством над полем  $F$ , если на  $V$  заданы две операции

- “сложение”:  $V \times V \rightarrow V$ ,  $(x, y) \mapsto x + y$ .
- “умножение на скаляр”:  $F \times V$ ,  $(\alpha \in F, x \in V) \mapsto \alpha x$ .

а также,  $\forall x, y, z \in V$  и  $\alpha, \beta \in F$  выполнены следующие условия (называются аксиомами векторного пространства):

1.  $x + y = y + x$ .
2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$ .
3.  $\exists \vec{0} \in V : x + \vec{0} = \vec{0} + x = x$  (нулевой элемент).
4.  $\exists -x : -x + x = x + (-x) = \vec{0}$  (противоположный элемент).
5.  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ .
6.  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ .
7.  $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ .
8.  $1 \cdot x = x$ .

#### 60. Подпространство векторного пространства

Пусть  $V$  – векторное пространство над  $F$ .

**Определение.** Подмножество  $U \subseteq V$  называется подпространством (в  $V$ ), если

1.  $\vec{0} \in U$ .
2.  $x, y \in U \implies x + y \in U$ .
3.  $x \in U, \alpha \in F \implies \alpha x \in U$ .

## 61. Линейная комбинация конечного набора векторов векторного пространства

Пусть  $V$  – векторное пространство над  $F$  и  $v_1, \dots, v_k \in V$  – набор векторов.

**Определение.** *Линейной комбинацией* векторов  $v_1, \dots, v_k$  называется всякое выражение вида  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$ , где  $\alpha_i \in F$ .

## 62. Линейная оболочка подмножества векторного пространства

Пусть  $S \subseteq V$  – подмножество векторного пространства.

**Определение.** *Линейной оболочкой* множества  $S$  называются множество всех векторов из  $V$ , представимых в виде линейной комбинации какого-то конечного набора векторов из  $S$ .

Обозначение:  $\langle S \rangle$ .

## 63. Две общих конструкции подпространств в пространстве $F^n$

- Пусть  $U \subseteq F^n$  – множество векторов, тогда  $\langle U \rangle$  – подпространство в  $F^n$ .
- Множество решений любой ОСЛУ  $Ax = 0$  ( $A \in \text{Mat}_{m \times n}(F)$ ,  $x \in F^n$ ) является подпространством в  $F^n$ .

Любое подпространство в  $F^n$  можно задать любым из этих способов.

## 64. Линейная зависимость конечного набора векторов

## 65. Линейная независимость конечного набора векторов

**Определение.**

1. Векторы  $v_1, \dots, v_n \in V$  называются *линейно зависимыми* если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная  $\vec{0}$  (то есть  $\exists(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)$ , такие что  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \vec{0}$ ) и *линейно независимыми* иначе (то есть из условия  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \vec{0}$  следует  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ ).
2. Множество  $S \subseteq V$  (возможно бесконечное, возможно с повторяющимися элементами) называется *линейно зависимым* если существует конечное линейно зависимое подмножество, и *линейно независимым* если любое конечное подмножество линейно независимо.

## 66. Критерий линейной зависимости конечного набора векторов

**Предложение.** Пусть  $v_1, \dots, v_n \in V$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , тогда следующие условия эквивалентны:

1.  $\exists(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in F^n$ , такой что  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \vec{0}(\star)$  и  $\alpha_i \neq 0$ .
2.  $v_i \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle$ .

**Следствие.** Векторы  $v_1, \dots, v_n$  линейно зависимы тогда и только тогда, когда  $\exists i \in \{1, \dots, n\}$ , такое что  $v_i \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle$ .

## 67. Основная лемма о линейной зависимости

**Лемма.** Пусть есть две системы векторов  $v_1, \dots, v_m$  и  $w_1, \dots, w_n$ , причем  $m < n$  и  $w_i \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle \quad \forall i = 1, \dots, n$ .

Тогда векторы  $w_1, \dots, w_n$  линейно зависимы.

*Пример.* Любые  $n + 1$  векторов в  $F^n$  линейно зависимы, так как  $F^n = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ .

## 68. Базис векторного пространства

**Определение.** Подмножество  $S \subseteq V$  называется *базисом* пространства  $V$ , если

1.  $S$  линейно независимо,
2.  $\langle S \rangle = V$ .

*Пример.*  $e_1, \dots, e_n$  – это базис в  $F^n$ . Он называется *стандартным базисом* в  $F^n$ .

## 69. Конечномерные и бесконечномерные векторные пространства

**Определение.** Векторное пространство  $V$  называется *конечномерным*, если в нем есть конечный базис, и *бесконечномерным* иначе.

## 70. Размерность конечномерного векторного пространства

**Определение.** *Размерностью* конечномерного векторного пространства называется число элементов в (любом) его базисе.

Обозначение:  $\dim V$ .

Пример.

1.  $\dim F^n = n$ ,
2.  $V = \{\vec{0}\} \implies \dim V = 0$  так как базисом  $V$  будет  $\emptyset$ .

## 71. Характеризация базисов конечномерного векторного пространства в терминах единственности линейного выражения векторов

**Утверждение.** Пусть  $\dim V < \infty$ ,  $e_1, \dots, e_n \in \langle V \rangle$ .

$e_1, \dots, e_n$  — базис  $V$  тогда и только тогда, когда,  $\forall v \in V$  единственным образом представим в виде

$$v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \quad x_i \in F.$$

## 72. Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений

$$Ax = 0 \text{ — ОСЛУ.} \quad (\star)$$

$$A \in \text{Mat}_{m \times n}(F), x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in F^n.$$

$S \subseteq F^n$  — множество решений.

Знаем, что  $S$  — подпространство в  $F^n$ .

**Определение.** Фундаментальной системой решений (ФСР) для ОСЛУ  $(\star)$  называется всякий базис пространства её решений.

**Замечание.** У одной ОСЛУ может быть много разных ФСР.

## 73. Лемма о добавлении вектора к конечной линейно независимой системе

**Лемма.** Пусть  $v, v_1, \dots, v_m \in V$  и  $v_1, \dots, v_m$  линейно независимы, тогда либо  $v, v_1, \dots, v_m$  линейно независимы, либо  $v \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ .

## 2 Вопросы на доказательство

### 2.1 Операции над матрицами

#### 1. Дистрибутивность произведения матриц по отношению к сложению

$$\underbrace{A(B+C)}_x = \underbrace{AB+AC}_y \text{ — левая дистрибутивность.}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} x_{ij} &= A_{(i)}(B+C)^{(j)} = \sum_{k=1}^n a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) \\ &= \sum_{k=1}^n (a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj}) \\ &= \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^n a_{ik}c_{kj} \\ &= A_{(i)}B^{(j)} + A_{(i)}C^{(j)} = y_{ij}. \end{aligned}$$

Правая дистрибутивность доказывается аналогично.

#### 2. Ассоциативность произведения матриц

$$(AB)C = A(BC)$$

$$\text{Доказательство. } \underbrace{(AB)C}_u = x, \underbrace{A(BC)}_v = y.$$

$$\begin{aligned} x_{ij} &= \sum_{k=1}^n u_{ik} \cdot c_{kj} = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{l=1}^p a_{il} b_{lk} \right) c_{kj} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p (a_{il} b_{lk} c_{kj}) \\ &= \sum_{l=1}^p \sum_{k=1}^n (a_{il} b_{lk} c_{kj}) = \sum_{l=1}^p a_{il} \sum_{k=1}^n (b_{lk} c_{kj}) = \sum_{l=1}^p a_{il} v_{lj} = y_{ij}. \end{aligned}$$

### 3. Некоммутативность произведения матриц

Умножение матриц не коммутативно.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### 4. Транспонирование произведения двух матриц

$$\underbrace{(AB)^T}_x = \underbrace{B^T A^T}_y$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} x_{ij} &= [AB]_{ji} = A_{(j)} B^{(i)} = \sum_{k=1}^n a_{jk} \cdot b_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^n b_{ki} \cdot a_{jk} = B_{(i)}^T (A^T)^{(j)} = y_{ij}. \end{aligned}$$

■

### 5. Умножение на диагональную матрицу слева и справа

**Лемма.**  $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n) \in M_n \implies$

$$\begin{aligned} 1. \forall B \in \text{Mat}_{n \times p} &\implies AB = \begin{pmatrix} a_1 B_{(1)} \\ a_2 B_{(2)} \\ \vdots \\ a_n B_{(n)} \end{pmatrix} \\ 2. \forall B \in \text{Mat}_{m \times n} &\implies BA = (a_1 B^{(1)} \ a_2 B^{(2)} \ \dots \ a_n B^{(n)}) \end{aligned}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} 1. [AB]_{ij} &= (0 \ \dots \ 0 \ a_i \ 0 \ \dots \ 0) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_i b_{ij} \\ 2. [BA]_{ij} &= (b_{i1} \ b_{i2} \ \dots \ b_{im}) \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ a_j \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = b_{ij} a_j \end{aligned}$$

■

### 6. След произведения двух матриц

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

$$\forall A \in \text{Mat}_{m \times n}, B \in \text{Mat}_{n \times m}$$

Доказательство.  $AB = x \in M_m, BA = y \in M_n$

$$\begin{aligned} \text{tr } x &= \sum_{i=1}^m x_{ii} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (a_{ij} b_{ji}) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m (b_{ji} a_{ij}) = \sum_{j=1}^n y_{jj} = \text{tr } y. \end{aligned}$$

■

## 2.2 Системы линейных уравнений

### 1. Эквивалентность систем линейных уравнений, получаемых друг из друга путём элементарных преобразований строк расширенной матрицы

**Лемма.** Элементарные преобразования СЛУ не меняют множество решений

*Доказательство.* Пусть мы получили СЛУ(★★) из СЛУ(★) путем применения элементарных преобразований.

1. Всякое решение системы (★) является решением (★★).
2. (★) получается из (★★) путем элементарных преобразований.

| $(★) \rightarrow (★★)$          | $(★★) \rightarrow (★)$                 |
|---------------------------------|--|
| $\mathfrak{E}_1(i, j, \lambda)$ | $\mathfrak{E}_1(i, j, -\lambda)$       |
| $\mathfrak{E}_2(i, j)$          | $\mathfrak{E}_2(i, j)$                 |
| $\mathfrak{E}_3(i, \lambda)$    | $\mathfrak{E}_3(i, \frac{1}{\lambda})$ |

Следовательно, всякое решение (★★) является решением (★)  $\implies$  множества решений совпадают. ■

### 2. Теорема о приведении матрицы к ступенчатому и улучшенному ступенчатому виду при помощи элементарных преобразований строк

**Теорема.**

- 1) Всякую матрицу элементарными преобразованиями можно привести к ступенчатому виду.
- 2) Всякую ступенчатую матрицу элементарными преобразованиями строк можно привести к улучшенному ступенчатому виду.

**Следствие.** Всякую матрицу элементарными преобразованиями строк можно привести к **улучшенному** ступенчатому виду.

*Доказательство.*

1. Алгоритм. Если  $M$  - нулевая, то конец. Иначе:

Шаг 1: Ищем первый ненулевой столбец, пусть  $j$  — его номер.

Шаг 2: Переставляем строки, если нужно, добиваемся того, что  $a_{1j} \neq 0$

Шаг 3: Зануляем элементы в этом столбце используя первую строку —  $\mathfrak{E}_1(2, 1, -\frac{a_{2j}}{a_{1j}}), \dots, \mathfrak{E}_1(m, 1, -\frac{a_{mj}}{a_{1j}})$ .

В результате  $a_{ij} = 0$  при  $i = 2, 3, \dots, m$ .

Далее повторяем все шаги для подматрицы  $M'$  (без первой строки и столбцов  $1, \dots, j$ ).

2. Алгоритм. Пусть  $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{rj_r}$  — ведущие элементы ступенчатой матрицы.

Шаг 1: Выполняем  $\mathfrak{E}_3(1, \frac{1}{a_{1j_1}}), \dots, \mathfrak{E}_3(r, \frac{1}{a_{rj_r}})$ , в результате все ведущие элементы равны 1.

Шаг 2: Выполняем  $\mathfrak{E}_1(r-1, r, -a_{r-1, j_r}), \mathfrak{E}_1(r-2, r, -a_{r-2, j_r}), \dots, \mathfrak{E}_1(1, r, -a_{1, j_r})$ . В результате все элементы над  $a_{rj_r}$  равны 0.

Аналогично обнуляем элементы над всеми остальными ведущими.

Итог: матрица имеет улучшенный ступенчатый вид. ■

### 3. Реализация элементарных преобразований строк матрицы при помощи умножения на подходящую матрицу

Всякое элементарное преобразование строк матрицы реализуется умножением как умножение слева на подходящую “элементарную матрицу”.

- $\mathfrak{E}_1(i, j, \lambda): A \mapsto U_1(i, j, \lambda)A$ , где

$$U_1(i, j, \lambda) = \begin{matrix} & & & & j \\ i \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(на диагонали стоят единицы, на  $i$ -м  $j$ -м месте стоит  $\lambda$ , остальные элементы нули)



- $\Theta_2(i, j): A \mapsto U_2(i, j)A$ , где

$$U_2(i, j) = \begin{matrix} & i & & & j & & \\ i & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ j & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(на диагонали стоят единицы, кроме  $i$ -го и  $j$ -го столбца (на  $i$ -м  $j$ -м и  $j$ -м  $i$ -м местах стоит 1, остальные нули)

- $\Theta_3(i, \lambda): A \mapsto U_3(i, \lambda)A$ , где

$$U_3(i, \lambda) = \begin{matrix} & i & & & & & \\ i & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(на диагонали стоят единицы, кроме  $i$ -го столбца, там  $\lambda$ , остальные элементы нули)

Элементарные преобразования столбцов — умножение на соответствующую матрицу справа.

#### 4. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Дана СЛУ с расширенной матрицей  $(A | b)$ .

Прямой ход метода Гаусса.

Выполняя элементарные преобразования строк в  $(A|b)$ , приведем  $A$  к ступенчатому виду:

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 0 & \dots & 0 & a_{ij_1} & * & \dots & \dots & b_1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_{2j_2} & * & \dots & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{rj_r} & b_r \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{r+1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

**Случай 1**  $\exists i \geq r+1 : b_i \neq 0$  (в  $A$  есть нулевая строка с  $b_i \neq 0$ )

Тогда в новой СЛУ  $i$ -е уравнение  $0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_n = b_i$ , т.е.  $0 = b_i \implies$  СЛУ несовместна.

**Случай 2** либо  $r = m$ , либо  $b_i = 0 \quad \forall i \geq r+1$

Выполняя элементарные преобразования строк приводим матрицу к улучшенному ступенчатому виду — обратный ход метода Гаусса

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 0 & \dots & 0 & 1 & * & 0 & * & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & * & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & b_3 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & b_r \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Неизвестные  $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_r}$  называются *главными*, а остальные *свободными*, где  $j_i$  — индексы столбцов с ведущими элементами.

**Подслучай 2.1**  $r = n$ , т.е. все неизвестные — главные

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right) \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = b_1 \\ x_2 = b_2 \\ \vdots \\ x_r = b_r \end{cases} \quad \text{— единственное решение.}$$

**Подслучай 2.2**  $r < n$ , т.е. есть хотя бы одна свободная неизвестная.

Перенесем в каждом уравнении все члены со свободными неизвестными в правую часть, получаем выражения всех главных неизвестных через свободные, эти выражения называется *общим решением исходной СЛУ*.

## 5. Связь между множеством решений совместной системы линейных уравнений и множеством решений соответствующей ей однородной системы

**Утверждение.** Пусть  $Ax = b$  – совместная СЛУ.

$x_0$  – частное решение  $Ax = b$ ,

$S \subset \mathbb{R}^n$  – множество решений ОСЛУ  $Ax = 0$ ,

$L \subset \mathbb{R}^n$  – множество решений  $Ax = b$ .

Тогда,  $L = x_0 + S$ , где  $x_0 + S = \{x_0 + v \mid v \in S\}$

*Доказательство.*

1. Пусть  $u \in L$  ( $u$  – решение  $Ax = b$ ), положим  $v = u - x_0$ .  
Тогда,  $Av = A(u - x_0) = Au - Ax_0 = b - b = 0 \implies v \in S \implies L \subseteq x_0 + S$ .
2. Пусть  $v \in S$  ( $v$  – решение  $Ax = 0$ ), положим  $u = x_0 + v$ .  
Тогда,  $Au = A(x_0 + v) = Ax_0 + Av = b + 0 = b \implies u \in L \implies x_0 + S \subseteq L$ .

Значит,  $x_0 + S = L$ . ■

## 6. Общий метод решения матричных уравнений вида $AX = B$ и $XA = B$

Два типа матричных уравнений:

1.  $AX = B$   
 $A$  и  $B$  известны,  $X$  – неизвестная матрица.
2.  $XA = C$   
 $A$  и  $C$  известны,  $X$  – неизвестная матрица.

Из второго типа получается первый транспонированием матриц:  $XA = C \iff A^T X^T = B^T$ , то есть достаточно уметь решать только уравнения первого типа.

$A \begin{matrix} X \\ n \times m \end{matrix} = \begin{matrix} B \\ m \times p \end{matrix}$  – это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} AX^{(1)} = B^{(1)} \\ AX^{(2)} = B^{(2)} \\ \vdots \\ AX^{(p)} = B^{(p)} \end{cases}$$

Этот набор СЛУ надо решать одновременно методом Гаусса.

Записываем матрицу  $(A \mid B)$  и элементарными преобразованиями строк с ней приводим  $A$  к улучшенному ступенчатому виду.

Получаем  $(A' \mid B')$ , где  $A'$  имеет улучшенный ступенчатый вид.

Остается выписать общее решение для каждой СЛУ

$$\begin{cases} A'x^{(1)} = B'^{(1)} \\ A'x^{(2)} = B'^{(2)} \\ \vdots \\ A'x^{(p)} = B'^{(p)} \end{cases}$$

## 7. Вычисление обратной матрицы при помощи элементарных преобразований

Факты:

1. Если  $\exists A^{-1}$ , то она определена однозначно.

*Доказательство.* Пусть  $B, B'$  – две матрицы, обратные к  $A$ . Тогда  $B = B(AB') = (BA)B' = B'$ . ■

2. Если  $AB = E$  для некоторой  $B \in M_n$ , то  $BA = E$  автоматически и тогда  $B = A^{-1}$ .

*Доказательство.*

$$AB = E \implies \det A \det B = 1 \implies \det A \neq 0 \implies \exists A^{-1}.$$

$$BA = EBA = (A^{-1}A)BA = A^{-1}(AB)A = A^{-1}A = E. \quad \blacksquare$$

**Следствие.**  $A^{-1}$  является решение матричного уравнения  $AX = E$  (если решение существует).

## 2.3 Перестановки

### 1. Ассоциативность произведения перестановок

**Утверждение.** Умножение подстановок ассоциативно, то есть  $\sigma(\tau\pi) = (\sigma\tau)\pi \quad \forall \sigma, \tau, \pi \in S_n$ .

*Доказательство.*  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$  имеем

$$[\sigma(\tau\pi)](i) = \sigma((\tau\pi)(i)) = \sigma(\tau(\pi(i)))$$

$$[(\sigma\tau)\pi](i) = (\sigma\tau)(\pi(i)) = \sigma(\tau(\pi(i)))$$

■

### 2. Некоммутативность произведения перестановок

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\rho\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

### 3. Теорема о знаке произведения двух перестановок

**Теорема.**  $\sigma, \rho \in S_n \implies \text{sgn}(\sigma\rho) = \text{sgn} \sigma \cdot \text{sgn} \rho$ .

*Доказательство.* Для каждой пары  $i < j$  введем следующие числа:

$$\alpha(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если } \{i, j\} \text{ образует инверсию в } \rho \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\beta(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если } \{\rho(i), \rho(j)\} \text{ образует инверсию в } \sigma \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\gamma(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если } \{i, j\} \text{ образует инверсию в } \sigma\rho \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\text{“число инверсий в } \rho\text{”} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha(i, j)$$

$$\text{“число инверсий в } \sigma\rho\text{”} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \gamma(i, j)$$

$$\text{“число инверсий в } \sigma\text{”} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \beta(i, j) - \text{Почему?}$$

Когда  $\{i, j\}$  пробегает все неупорядоченные пары в  $\{1, 2, \dots, n\}$ , пара  $\{\rho(i), \rho(j)\}$  тоже пробегает все неупорядоченные пары в  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

Зависимость  $\gamma(i, j)$  от  $\alpha(i, j)$  и  $\beta(i, j)$ :

|                |   |   |   |   |
|----------------|---|---|---|---|
| $\alpha(i, j)$ | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $\beta(i, j)$  | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $\gamma(i, j)$ | 0 | 1 | 1 | 0 |

Вывод:  $\alpha(i, j) + \beta(i, j) \equiv \gamma(i, j) \pmod{2}$ .

Тогда  $\text{sgn}(\sigma\rho) = (-1)^{\sum \gamma(i, j)} = (-1)^{\sum \beta(i, j) + \sum \alpha(i, j)} = (-1)^{\sum \alpha(i, j)} \cdot (-1)^{\sum \beta(i, j)} = \text{sgn} \sigma \cdot \text{sgn} \rho$ .

■

### 4. Знак обратной перестановки

**Следствие.**  $\sigma \in S_n \implies \text{sgn}(\sigma^{-1}) = \text{sgn}(\sigma)$ .

*Доказательство.*  $\sigma\sigma^{-1} = id \implies \text{sgn}(\sigma\sigma^{-1}) = \text{sgn}(id) \implies \text{sgn} \sigma \text{sgn} \sigma^{-1} = 1 \implies \text{sgn} \sigma = \text{sgn} \sigma^{-1}$ .

■

### 5. Знак транспозиции

**Лемма.**  $\tau \in S_n$  – транспозиция  $\implies \operatorname{sgn}(\tau) = -1$ .

*Доказательство.* Пусть  $\tau = \tau_{ij}$ , можем считать, что  $i < j$ .

$$\tau := \begin{pmatrix} 1 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n \\ 1 & \dots & i-1 & j & i+1 & \dots & j-1 & i & j+1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Посчитаем инверсии:

$\{i, j\}$

$\{i, k\}$  при  $i+1 \leq k \leq j-1$ , всего  $= j-i-1$

$\{k, j\}$  при  $i+1 \leq k \leq j-1$ , всего  $= j-i-1$

Значит, всего инверсий  $2(j-i-1) + 1 \equiv 1 \pmod{2} \implies \operatorname{sgn}(\tau) = -1$ . ■

## 2.4 Определители

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}. \quad (\star)$$

### 1. Определитель транспонированной матрицы

$$\det A = \det A^T.$$

*Доказательство.* Пусть  $B = A^T$ , тогда  $b_{ij} = a_{ji}$ .

$$\begin{aligned} \det A^T = \det B &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} \dots b_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)^{-1}} a_{2\sigma(2)^{-1}} \dots a_{n\sigma(n)^{-1}} \quad // \text{ замена } \sigma^{-1} = \rho // \\ &= \sum_{\rho \in S_n} \operatorname{sgn}(\rho) a_{1\rho(1)} a_{2\rho(2)} \dots a_{n\rho(n)} = \det A. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

### 2. Поведение определителя при умножении строки (столбца) на скаляр

Если в  $A$  все элементы одной строки или одного столбца домножить на одно и то же число  $\lambda$ , то  $\det A$  тоже умножается на  $\lambda$ .

$$\begin{vmatrix} * & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda * & \lambda * & \lambda * & \lambda * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & \dots & * \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} * & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & * & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & \dots & * \end{vmatrix}$$

*Доказательство.* В связи со свойством Т можно доказать только для строк.

$A_{(i)} \rightarrow \lambda A_{(i)} \implies a_{ij} \rightarrow \lambda a_{ij} \forall j \implies$  в  $(\star)$  каждое слагаемое умножается на  $\lambda \implies \det A$  умножается на  $\lambda$ . ■

### 3. Поведение определителя при разложении строки (столбца) в сумму двух

$$\text{Если } A_{(i)} = A_{(i)}^1 + A_{(i)}^2, \text{ то } \det A = \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)}^1 \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)}^2 \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}.$$

Пример:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

Аналогично, если  $A^{(j)} = A_1^{(j)} + A_2^{(j)}$ , то  $\det A = \det(A^{(1)} \dots A_1^{(j)} \dots A^{(n)}) + \det(A^{(1)} \dots A_2^{(j)} \dots A^{(n)})$ .

*Доказательство.* В связи со свойством Т можно доказать только для строк.

Пусть  $A_{(i)}^1 = (a'_{i1}a'_{i2}\dots a'_{in})$ ,  $A_{(i)}^2 = (a''_{i1}a''_{i2}\dots a''_{in}) \implies a_{ij} = a'_{ij} + a''_{ij}$ .

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots (a'_{i\sigma(i)} + a''_{i\sigma(i)}) \dots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a'_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a''_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} \\ &= \det A_1 + \det A_2.\end{aligned}$$

■

#### 4. Определитель матрицы с двумя одинаковыми строками (столбцами)

Если в  $A$  есть две одинаковые строки (столбца), то  $\det A = 0$ .

*Доказательство.* В связи со свойством Т можно доказать только для строк.

При перестановке двух одинаковых строк (столбцов):

–  $A$  не изменится  $\implies \det A$  не изменится

– по свойству 3:  $\det A$  меняет знак

Значит,  $\det A = -\det A \implies \det A = 0$ .

■

#### 5. Поведение определителя при прибавлении к строке (столбцу) другой, умноженной на скаляр

Если к строке (столбцу) прибавить другую строку (столбец), умноженный на скаляр, то  $\det A$  не изменится.

*Доказательство.* В связи со свойством Т можно доказать только для строк.

$$A \rightarrow A' = \begin{pmatrix} \dots \\ A_{(i)} + \lambda A_{(j)} \\ \dots \\ A_{(j)} \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$|A'| = \begin{vmatrix} \dots \\ A_{(i)} \\ \dots \\ A_{(j)} \\ \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dots \\ \lambda A_{(j)} \\ \dots \\ A_{(j)} \\ \dots \end{vmatrix} = |A| + \lambda \begin{vmatrix} \dots \\ A_{(j)} \\ \dots \\ A_{(j)} \\ \dots \end{vmatrix} = |A| + \lambda 0 = |A|.$$

■

#### 6. Поведение определителя при перестановке двух строк (столбцов)

Если в  $A$  поменять местами две строки или два столбца, то  $\det A$  поменяет знак.

*Доказательство.* В связи со свойством Т можно доказать только для строк.

Пусть  $A = (a_{ij}) \in M_n$ ,  $B = (b_{ij}) \in M_n$  – матрица, полученная из  $A$  перестановкой  $p$ -ой и  $q$ -ой строк.

Так же,  $\tau = \tau_{pq}$ .

$$b_{ij} = a_{\tau(i)j} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{если } i \neq p, q \\ a_{qj}, & \text{если } i = p \\ a_{pj}, & \text{если } i = q \end{cases}$$

$$b_{ij} = a_{\tau(i)j} \implies b_{i\sigma(i)} = a_{\tau(i)\sigma(i)} = a_{\tau(i),(\sigma\tau\tau)(i)}$$

$$\begin{aligned}
\det B &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot b_{1\sigma(1)} \cdot b_{2\sigma(2)} \cdot \dots \cdot b_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{\tau(1),\sigma(1)} \cdot a_{\tau(2),\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{\tau(n),\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{\tau(1),(\sigma\tau\tau)(1)} \cdot a_{\tau(2),(\sigma\tau\tau)(2)} \cdot \dots \cdot a_{\tau(n),(\sigma\tau\tau)(n)} \\
&\quad // \text{ уберем } \tau(i), \text{ переупорядочив элементы в произведении } // \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1,(\sigma\tau)(1)} \cdot a_{2,(\sigma\tau)(2)} \cdot \dots \cdot a_{n,(\sigma\tau)(n)} \\
&= - \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma\tau) \cdot a_{1,(\sigma\tau)(1)} \cdot a_{2,(\sigma\tau)(2)} \cdot \dots \cdot a_{n,(\sigma\tau)(n)} \\
&\quad // \text{ замена } \rho = \sigma\tau // \\
&= - \sum_{\rho \in S_n} \operatorname{sgn}(\rho) \cdot a_{1,\rho(1)} \cdot a_{2,\rho(2)} \cdot \dots \cdot a_{n,\rho(n)} \\
&= - \det A.
\end{aligned}$$

## 7. Определитель верхнетреугольной (нижнетреугольной) матрицы

Если  $A$  верхнетреугольная или нижнетреугольная, то  $\det A = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$ .

*Доказательство.* В связи со свойством Т можно доказать только для строк.

Выделим в  $(\star)$  слагаемые, которые могут быть отличны от нуля.

$$\begin{aligned}
&a_{1,\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{n-1,\sigma(n-1)} a_{n,\sigma(n)} \neq 0 \\
&\implies a_{n\sigma(n)} \neq 0 \implies \sigma(n) = n. \\
&\implies a_{n-1,\sigma(n-1)} \neq 0 \implies \sigma(n-1) \in \{n-1, n\},
\end{aligned}$$

но  $n$  уже занято, значит  $\sigma(n-1) = n-1$ , и так далее.

Рассуждая аналогично, получаем  $\sigma(k) = k \ \forall k \implies \sigma = id$  – это единственное слагаемое в  $(\star)$ , которое может быть не равно 0.

$$\operatorname{sgn}(id) = +1 \implies \det A = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}.$$

## 8. Определитель с углом нулей

**Предложение.**

$$A = \left( \begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline 0 & R \end{array} \right) \text{ или } A = \left( \begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline Q & R \end{array} \right), \quad P \in M_k, \quad R \in M_{n-k} \implies \det A = \det P \det R.$$

Матрица с углом нулей:

$$\left( \begin{array}{c|cccc} * & * & * & * & * \\ \hline 0 & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \end{array} \right)$$

НЕ матрица с углом нулей:

$$\left( \begin{array}{c|cccc} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ \hline 0 & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \end{array} \right)$$

*Доказательство.* В силу свойства Т достаточно доказать для строк.

1. Элементарными преобразованиями строк в  $A$ , приведем  $(P \mid Q)$  к виду  $(P' \mid Q')$ , в котором  $P'$  имеет ступенчатый вид. При этом  $\det A$  и  $\det P$  умножаются на один и тот же скаляр  $\alpha \neq 0$ .
2. Элементарными преобразованиями строк в  $A$ , приведем  $(0 \mid R)$  к виду  $(0 \mid R')$ , в котором  $R'$  имеет ступенчатый вид. При этом  $\det A$  и  $\det R$  умножаются на один и тот же скаляр  $\beta \neq 0$ .

$$\begin{pmatrix} P' & Q' \\ 0 & R' \end{pmatrix} - \text{верхнетреугольная} \implies \det \begin{pmatrix} P' & Q' \\ 0 & R' \end{pmatrix} = \det P' \det R'.$$

$$\alpha\beta \det A = \det \begin{pmatrix} P' & Q' \\ 0 & R' \end{pmatrix} = \det P' \det R' = (\alpha \det P)(\beta \det R) = \alpha\beta \det P \det R. \quad \blacksquare$$

## 9. Определитель произведения двух матриц

**Теорема.**  $A, B \in M_n \implies \det(AB) = \det A \det B$ .

*Доказательство.* Выполним с матрицей  $A$  одно элементарное преобразование строк, получим матрицу  $A'$ .

$$A \rightsquigarrow A' = UA.$$

Такое же преобразование строк с  $AB$ .

$$AB \rightsquigarrow U(AB) = (UA)B = A'B.$$

Таким образом, сначала выполнив элементарное преобразование и домножив на матрицу  $B$ , либо домножив на  $B$  и затем применив элементарное преобразование, получим тот же результат.

Тогда, цепочка элементарных преобразований строк:

$$A \rightsquigarrow C - \text{улучшенный ступенчатый вид.}$$

Так же цепочка для  $AB$ :

$$AB \rightsquigarrow CB.$$

При этом,  $\det A$  и  $\det AB$  умножились на один и тот же скаляр  $\alpha \neq 0$

$$\det C = \alpha \det A.$$

$$\det CB = \alpha \det AB.$$

**Случай 1** Последняя строка состоит из нулей:

$$\begin{aligned} C_{(n)} &= (0 \dots 0) \\ \implies [CB]_{(n)} &= C_{(n)}B = (0 \dots 0) \\ \implies \det CB &= 0 = 0 \cdot \det B = \det C \det B. \end{aligned}$$

**Случай 2** Последняя строка ненулевая:

$$C_{(n)} \implies C = E,$$

так как матрица  $C$  имеет улучшенный ступенчатый вид.

Значит,

$$\det CB = \det B = 1 \cdot \det B = \det C \cdot \det B.$$

Из этих двух случаев следует, что  $\det CB = \det C \det B$ .

Сокращая  $\alpha$  получаем,

$$\det CB = \det C \det B \implies \det AB = \det A \det B. \quad \blacksquare$$

## 10. Разложение определителя по строке (столбцу)

**Лемма.** Пусть  $a_{ik} = 0$  при всех  $k \neq j$ . Тогда  $\det A = a_{ij} \cdot A_{ij}$ .

*Доказательство.*

$$A = \left( \begin{array}{c|c|c} P & U & Q \\ \hline 0 \dots 0 & a_{ij} & 0 \dots 0 \\ \hline R & V & S \end{array} \right).$$

Переставляя соседние строки  $i-1$  раз, вытолкнем  $i$ -ю строку наверх.

$$A' = \left( \begin{array}{c|c|c} 0 \dots 0 & a_{ij} & 0 \dots 0 \\ \hline P & U & Q \\ \hline R & V & S \end{array} \right)$$

Переставляя соседние столбцы  $j - 1$  раз, переместим  $j$ -й столбец на первое место.

$$A'' = \left( \begin{array}{c|c|c} a_{ij} & 0 \dots 0 & 0 \dots 0 \\ \hline U & P & Q \\ \hline V & R & S \end{array} \right)$$

$$\det A'' = a_{ij} \det \left( \begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline R & S \end{array} \right) = a_{ij} \overline{M}_{ij}.$$

$$\implies \det A = (-1)^{i-1+j-1} \det A'' = (-1)^{i+j} a_{ij} \overline{M}_{ij} = a_{ij} A_{ij}.$$

**Теорема.** При любом фиксированном  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij} \text{ — разложение по } i\text{-й строке.}$$

Аналогично, для любого фиксированного  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij} \text{ — разложение по } j\text{-й столбцу.}$$

*Доказательство.* В силу свойства Т достаточно доказать для строк.

$$A_{(i)} = (a_{i1}, 0, \dots, 0) + (0, a_{i2}, 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, 0, a_{in}).$$

Требуемое следует из свойства определителей (разложение строки в сумму двух) и леммы. ■

## 11. Лемма о фальшивом разложении определителя

**Лемма.**

1. При любых  $i, k \in \{1, 2, \dots, n\} : i \neq k \implies \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{kj} = 0$ .
2. При любых  $j, k \in \{1, 2, \dots, n\} : j \neq k \implies \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ik} = 0$

*Доказательство.* В силу свойства Т достаточно доказать для строк.

Пусть  $B \in M_n$  — матрица, полученная из  $A$  заменой  $k$ -й строки на  $i$ -ю.

$$B = \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \dots \\ A_{(i)} \\ \dots \\ A_{(i)} \\ \dots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$$

В  $B$  есть две одинаковые строки  $\implies \det B = 0$ .

Разлагая  $\det B$  по  $k$ -й строке, получаем

$$\det B = \sum_{j=1}^n b_{kj}B_{kj} = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{kj}.$$

## 12. Единственность обратной матрицы

Пусть дана  $A \in M_n$ .

**Определение.** Матрица  $B \in M_n$  называется *обратной* к  $A$ , если  $AB = BA = E$ .

Обозначение:  $A^{-1}$ .

**Лемма.** Если  $\exists A^{-1}$ , то она единственна.

*Доказательство.* Пусть  $B, C \in M_n$  такие, что  $AB = BA = E$  и  $AC = CA = E$ . Тогда,

$$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C \implies B = C. \quad \blacksquare$$



### 13. Определитель обратной матрицы

**Лемма.** Если  $\exists A^{-1}$ , то  $\det A \neq 0$ .

*Доказательство.*  $AA^{-1} = E \implies \det(AA^{-1}) = \det E \implies \det A \det(A^{-1}) = 1$ . ■

### 14. Критерий обратимости квадратной матрицы и явная формула для обратной матрицы

**Теорема.**  $A$  обратима (то есть  $\exists A^{-1}$ )  $\iff A$  невырождена ( $\det A \neq 0$ ), при этом  $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \hat{A}$ .

*Доказательство.* Утверждение в одну сторону следует из предыдущего пункта.

Пусть  $\det A \neq 0$ . Покажем, что  $\frac{1}{\det A} \hat{A} = A^{-1}$ . Для этого достаточно доказать, что  $A\hat{A} = \hat{A}A = \det A \cdot E$ .

Для  $X = A\hat{A}$  имеем

$$x_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} [\hat{A}]_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = \begin{cases} \det A, & \text{при } i = j \\ 0, & \text{при } i \neq j \end{cases}.$$

Для  $Y = \hat{A}A$  имеем

$$y_{ij} = \sum_{k=1}^n [\hat{A}]_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^n A_{ki} a_{kj} = \begin{cases} \det A, & \text{при } i = j \\ 0, & \text{при } i \neq j \end{cases}.$$

### 15. Матрица, обратная к произведению двух матриц

**Следствие.**  $A, B \in M_n \implies AB$  обратима  $\iff$  обе  $A, B$  обратимы. При этом  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

*Доказательство.* Эквивалентность ( $\iff$ ) следует из условия  $\det AB = \det A \det B$ .

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = E. \quad \blacksquare$$

### 16. Формулы Крамера

Пусть есть СЛУ  $Ax = b(\star)$ ,  $A \in M_n$ ,  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ,  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ .

Также,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $A_i = (A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, b, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)})$ .

**Теорема.** Если  $\det A \neq 0$ , то СЛУ  $(\star)$  имеет единственное решение и его можно найти по формулам:

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}.$$

*Доказательство.*  $\det A \neq 0 \implies \exists A^{-1} \implies (\star) \iff x = A^{-1}b$  – единственное решение.

$$b = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 A^{(1)} + x_2 A^{(2)} + \dots + x_n A^{(n)}.$$

$$\begin{aligned} \det A_i &= \det \left( A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, x_1 A^{(1)} + \dots + x_n A^{(n)}, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)} \right) \\ &= x_1 \det \left( A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, A^{(1)}, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)} \right) \\ &\quad + x_2 \det \left( A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, A^{(2)}, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)} \right) \\ &\quad + \dots + \\ &\quad + x_n \det \left( A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, A^{(n)}, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)} \right) \\ &= x_i \det A \quad // \text{ Все слагаемые кроме } i\text{-го равны } 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## 2.5 Комплексные числа

### 1. Построение поля комплексных чисел

Цель — построить поле  $\mathbb{C}$  комплексных чисел.

Неформально,  $\mathbb{C}$  — это наименьшее поле со следующими свойствами:

1.  $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$ .
2. Многочлен  $x^2 + 1$  имеет корень, то есть  $\exists i : i^2 = -1$ .

#### Формальная конструкция поля $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

- $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$
- $(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1)$

Неформально, каждой такой паре  $(a, b)$  соответствует комплексное число  $a + bi$ :

- $(a, b) \iff a + bi$
- $(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$
- $(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = a_1a_2 + a_1b_2i + a_2b_1i + b_1b_2 \underbrace{i^2}_{=-1} = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$

#### Проверка аксиом

- 1, 2. Очевидны.
3.  $0 = (0, 0)$ .
4.  $-(a, b) = (-a, -b)$ .
5. Дистрибутивность

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1i)((a_2 + b_2i) + (a_3 + b_3i)) &= (a_1 + b_1i)((a_2 + a_3) + (b_2 + b_3)i) \\ &= (a_1(a_2 + a_3) - b_1(b_2 + b_3)) + (a_1(b_2 + b_3) + b_1(a_2 + a_3))i \\ &= a_1a_2 + a_1a_3 - b_1b_2 - b_1b_3 + (a_1b_2 + a_1b_3 + b_1a_2 + b_1a_3)i \\ &= ((a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i) + ((a_1a_3 + b_1b_3) + (b_1a_3 + a_1b_3)i) \\ &= (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) + (a_1 + b_1i)(a_3 + b_3i) \end{aligned}$$

6. Коммутативность умножения — из явного вида формулы.

$$(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$$

7. Ассоциативность умножения

$$\begin{aligned} (a_1, b_1)(a_2, b_2)(a_3, b_3) &= (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1)(a_3, b_3) \\ &= (a_1a_2a_3 - b_1b_2a_3 - a_1b_2b_3 - b_1a_2b_3, a_1a_2b_3 - b_1b_2b_3 + a_1b_2a_3 + b_1a_2a_3) \\ &= (a_1, b_1)(a_2a_3 - b_2b_3, a_2b_3 + b_2a_3) \\ &= (a_1, b_1)(a_2, b_2)(a_3, b_3). \end{aligned}$$

8.  $1 = (1, 0)$ .
9.  $(a, b) \neq 0 \implies a^2 + b^2 \neq 0$ . Тогда,  $(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$ .  
 $(a, b) \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right) = \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}, \frac{-ab}{a^2+b^2} + \frac{ba}{a^2+b^2}\right) = (1, 0)$ .

Итак,  $\mathbb{C}$  — поле.

## Проверка свойств

1.  $a \in \mathbb{R} \leftrightarrow (a, 0) \in \mathbb{C}$ .  
 $a + b \leftrightarrow (a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$ .  
 $ab \leftrightarrow (a, 0)(b, 0) = (ab, 0)$   
Значит,  $\mathbb{R}$  отождествляется в  $\mathbb{C}$ .
2.  $i = (0, 1) \implies i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$ .

## 2. Свойства комплексного сопряжения (для суммы и произведения)

- $\overline{\overline{z}} = z$ .
- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ .
- $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ .

Доказательство.

- $\overline{\overline{z}} = \overline{a + bi} = \overline{a - bi} = a + bi = z$ .
- $\overline{z + w} = \overline{(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i)} = \overline{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i} = (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)i = (a_1 - b_1i) + (a_2 - b_2i) = \overline{z} + \overline{w}$ .
- $\overline{z \cdot w} = \overline{(a_1 - b_1i)(a_2 - b_2i)} = \overline{(a_1a_2 - b_1b_2) - (a_1b_2 + a_2b_1)i} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ . ■

## 3. Свойства модуля комплексного числа: неотрицательность, неравенство треугольника (алгебраическое доказательство), модуль произведения двух комплексных чисел

**Определение.** Число  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  называется *модулем числа*  $z = a + bi \in \mathbb{C}$  (то есть длина соответствующего вектора).

### Свойства

1.  $|z| \geq 0$ , причем  $|z| = 0 \iff z = 0$ .
2.  $|z + w| \leq |z| + |w|$  (неравенство треугольника).  
Пусть  $z = a + bi$ ,  $w = c + di$ .

$$\begin{aligned} |z + w| &\leq |z| + |w| \\ \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2} &\leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \\ (a + c)^2 + (b + d)^2 &\leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \\ ac + bd &\leq \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \\ ac + bd &\leq \sqrt{(ac)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 + (bd)^2} \\ (ac)^2 + (bd)^2 + 2acbd &\leq (ac)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 + (bd)^2 \\ 2acbd &\leq (ad)^2 + (bc)^2 \\ 0 &\leq (ad)^2 + (bc)^2 - 2acbd \\ 0 &\leq (ad - bc)^2 \end{aligned}$$

3.  $z\overline{z} = |z|^2$ .  
 $z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$
4.  $|zw| = |z||w|$   
 $|zw|^2 = (zw) \cdot (\overline{zw}) = z \cdot w \cdot \overline{z} \cdot \overline{w} = |z|^2 |w|^2$

## 4. Умножение, деление и возведение в степень комплексных чисел в тригонометрической форме, формула Муавра

**Предложение.** Пусть  $z_1 = |z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$  и  $z_2 = |z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ , тогда

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1| |z_2| (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\ &= |z_1| |z_2| ((\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)) \\ &= |z_1| |z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$
 ■

**Следствие.** В условиях предложения, предположим, что  $z_2 \neq 0$ .

Тогда  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$ .

## Возведение в степень комплексных чисел в тригонометрической форме, формула Муавра

**Следствие.** Пусть  $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . Тогда  $\forall n \in \mathbb{Z}$ ,

$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) - \text{формула Муавра.}$$

### 5. Извлечение корней из комплексных чисел

Пусть  $z \in \mathbb{C}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ .

**Определение.** Корнем степени  $n$  (или корнем  $n$ -й степени) из числа  $z$  называется всякое число  $w \in \mathbb{C}$ , что  $w^n = z$ .

Положим  $\sqrt[n]{z} := \{w \in \mathbb{C} \mid w^n = z\}$ .

Опишем множество  $\sqrt[n]{z}$ .

$$w = \sqrt[n]{z} \implies w^n = z \implies |w|^n = |z|.$$

$$\text{Если } z = 0, \text{ то } |z| = 0 \implies |w| = 0 \implies w = 0 \implies \sqrt[n]{0} = \{0\}.$$

Далее считаем, что  $z \neq 0$ .

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$w = |w|(\cos \psi + i \sin \psi)$$

$$z = w^n = |w|^n(\cos(n\psi) + i \sin(n\psi))$$

Отсюда,

$$z = w^n \iff \begin{cases} |z| = |w|^n \\ n\psi = \varphi + 2\pi k, \text{ для некоторого } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \text{ для некоторого } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

С точностью до  $2\pi l$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ , получается ровно  $n$  различных значений для  $\psi$ , при  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .

В результате  $\sqrt[n]{z} = \{w_0, w_1, \dots, w_{n-1}\}$ , где  $w_k = \sqrt[n]{|z|} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right)$

**Замечание.** Числа  $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$  лежат в вершинах правильного  $n$ -угольника с центром в начале координат.

## 2.6 Векторные пространства

### 1. Понятие векторного пространства, шесть простейших следствий из аксиом

Фиксируем поле  $F$  (можно считать, что  $F = \mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ )

**Определение.** Множество  $V$  называется *векторным (линейным) пространством* над полем  $F$ , если на  $V$  заданы две операции

- “сложение”:  $V \times V \rightarrow V$ ,  $(x, y) \mapsto x + y$ .
- “умножение на скаляр”:  $F \times V \rightarrow V$ ,  $(\alpha \in F, x \in V) \mapsto \alpha x$ .

а также,  $\forall x, y, z \in V$  и  $\alpha, \beta \in F$  выполнены следующие условия (называются *аксиомами векторного пространства*):

1.  $x + y = y + x$ .
2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$ .
3.  $\exists \vec{0} \in V : x + \vec{0} = \vec{0} + x = x$  (нулевой элемент).
4.  $\exists -x : -x + x = x + (-x) = \vec{0}$  (противоположный элемент).
5.  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ .
6.  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ .
7.  $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ .
8.  $1 \cdot x = x$ .

### Простейшие следствия из аксиом

$\forall \alpha \in F, x \in V$ .

1. Элемент  $\vec{0}$  единственный.  
Если  $\vec{0}'$  — другой такой ноль, то  $\vec{0}' = \vec{0}' + \vec{0} = \vec{0}$ .

2. Элемент  $-x$  единственный.

Если  $(-x)'$  – другой такой противоположный элемент, то

$$(-x)' = (-x)' + \vec{0} = (-x)' + (x + (-x)) = ((-x)' + x) + (-x) = \vec{0} + (-x) = -x.$$

3.  $\alpha \vec{0} = \vec{0}$ .

Рассмотрим равенство  $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$ . Домножив на  $\alpha$  получаем  $\alpha(\vec{0} + \vec{0}) = \alpha \vec{0}$ .

Раскроем скобки,  $\alpha \vec{0} + \alpha \vec{0} = \alpha \vec{0}$ .

Прибавим к обоим частям обратный элемент к  $\alpha \vec{0}$ , получим  $\alpha \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \implies \alpha \vec{0} = \vec{0}$ .

4.  $\alpha(-x) = -(\alpha x)$ .

Рассмотрим равенство  $x + (-x) = \vec{0}$ .

$$x + (-x) = \vec{0} \implies ax + a(-x) = 0 \implies a(-x) = -(\alpha x).$$

5.  $0 \cdot x = \vec{0}$ .

Доказывается так же, как пункт 3, но с 0 вместо  $\vec{0}$ .

6.  $(-1) \cdot x = -x$ .

Рассмотрим равенство  $1 + (-1) = 0$ . Домножив на  $x$  получаем  $(1 + (-1))x = 0x$ .

Раскроем скобки и воспользуемся пунктом 5 –  $1x + (-1)x = 0$  или  $x + (-1)x = 0$ .

Прибавим к обоим частям  $-x$ , получим  $0 + (-1)x = -x$  или  $(-1)x = -x$ .

## 2. Утверждение о том, что множество решений однородной системы линейных уравнений является подпространством в соответствующем векторном пространстве

**Предложение.** Множество решений любой ОСЛУ  $Ax = 0$  ( $A \in \text{Mat}_{m \times n}(F)$ ,  $x \in F^n$ ) является подпространством в  $F^n$ .

*Доказательство.* Пусть  $S$  – множество решений ОСЛУ  $Ax = 0$ .

$$1. \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in S.$$

$$2. x, y \in S \implies Ax = \vec{0} \text{ и } Ay = \vec{0} \implies A(x + y) = Ax + Ay = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \implies x + y \in S.$$

$$3. x \in S, \alpha \in F \implies Ax = \vec{0} \implies A(\alpha x) = \alpha(Ax) = \alpha \vec{0} = \vec{0} \implies \alpha x \in S. \quad \blacksquare$$

## 3. Утверждение о том, что линейная оболочка произвольного подмножества векторного пространства является подпространством

Пусть  $V$  – векторное пространство,  $S \subseteq V$ .

**Предложение.**  $\langle S \rangle$  является подпространством в  $V$ .

*Доказательство.*

1. Два случая:

$$S = \emptyset \implies \langle \emptyset \rangle = \{\vec{0}\} \implies \vec{0} \in \langle S \rangle.$$

$$S \neq \emptyset \implies \exists v \in S \implies \underbrace{0V}_{\in \langle S \rangle} = \vec{0} \implies \vec{0} \in \langle S \rangle.$$

2. Пусть  $v, w \in \langle S \rangle$ :

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m,$$

$$w = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_n w_n, \text{ где } v_i, w_i \in S, \alpha_i, \beta_i \in F.$$

$$\text{Тогда, } v + w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m + \beta_1 w_1 + \dots + \beta_n w_n \in \langle S \rangle.$$

$$(\text{если } v_i = w_j, \text{ то } \alpha_i v_i + \beta_j w_j = (\alpha_i + \beta_j) w_j)$$

$$3. v \in \langle S \rangle, \alpha \in F \implies v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$$

$$\implies \alpha v = (\alpha \alpha_1) v_1 + \dots + (\alpha \alpha_m) v_m \in \langle S \rangle. \quad \blacksquare$$

## 4. Критерий линейной зависимости конечной системы векторов

**Предложение.** Пусть  $v_1, \dots, v_n \in V$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , тогда следующие условия эквивалентны:

1.  $\exists(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in F^n$ , такой что  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \vec{0}(\star)$  и  $\alpha_i \neq 0$ .
2.  $v_i \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle$ .

*Доказательство.*

$$(1) \implies (2) \quad \alpha_i \neq 0 \text{ в } (\star) \implies v_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} v_1 - \dots - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} v_{i-1} - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} v_{i+1} - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_i} v_n \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle.$$

$$(2) \implies (1) \quad v_i = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_{i-1} v_{i-1} + \beta_{i+1} v_{i+1} + \dots + \beta_n v_n \implies$$

$$\beta_1 v_1 + \dots + \beta_{i-1} v_{i-1} + \underbrace{(-1)}_{\neq 0} v_i + \beta_{i+1} v_{i+1} + \dots + \beta_n v_n = \vec{0}.$$

(нетривиальная линейная комбинация с  $i$ -м скаляром  $\neq 0$ ). ■

**Следствие.** Векторы  $v_1, \dots, v_n$  линейно зависимы тогда и только тогда, когда  $\exists i \in \{1, \dots, n\}$ , такое что  $v_i \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle$ .

## 5. Основная лемма о линейной зависимости

**Лемма.** Пусть есть две системы векторов  $v_1, \dots, v_m$  и  $w_1, \dots, w_n$ , причем  $m < n$  и  $w_i \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle \quad \forall i = 1, \dots, n$ . Тогда векторы  $w_1, \dots, w_n$  линейно зависимы.

*Доказательство.*

$$w_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \dots + a_{m1}v_m = (v_1, \dots, v_m) \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

...

$$w_n = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \dots + a_{mn}v_m = (v_1, \dots, v_m) \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

$$\implies (w_1, \dots, w_n) = (v_1, \dots, v_m)A, \quad (\star)$$

где  $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{m \times n}(F)$ .

Так как  $m < n$ , то ОСЛУ  $Ax = \vec{0}$  имеет ненулевое решение  $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix} \in F^n$ .

Тогда умножим  $(\star)$  справа на  $z$ :

$$(w_1, \dots, w_n) \cdot z = (v_1, \dots, v_m) \cdot \underbrace{A \cdot z}_{=\vec{0}} = (v_1, \dots, v_m) \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

$$\implies (w_1, \dots, w_n) \begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix} = \vec{0} \implies z_1 w_1 + \dots + z_n w_n = \vec{0}.$$

Это нетривиальная линейная комбинация, так как  $z \neq 0$ .

Следовательно,  $w_1, \dots, w_n$  линейно зависимы. ■

*Пример.* Любые  $n+1$  векторов в  $F^n$  линейно зависимы, так как  $F^n = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ .

## 6. Независимость числа векторов в базисе конечномерного векторного пространства от выбора базиса

**Предложение.**  $V$  – конечномерное векторное пространство. Тогда, все базисы в  $V$  содержат одно и то же количество элементов.

*Доказательство.*  $V$  конечномерно, тогда существует конечный базис  $e_1, \dots, e_n$ .

Пусть  $S \subseteq V$  – другой базис. Так как  $\langle e_1, \dots, e_n \rangle = V$ , то  $\forall v \in S \implies v \in \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ . Тогда любые  $n+1$  векторов в  $S$  линейно зависимы по основной лемме о линейной зависимости. Но  $S$  линейно независимо, значит  $|S| \leq n$ .

Пусть  $S = \{e'_1, \dots, e'_m\}$ , где  $m \leq n$ . Тогда  $\forall i = 1, \dots, n \quad e_i \in \langle e'_1, \dots, e'_m \rangle$ , по основной лемме о линейной зависимости получаем  $n \leq m$ .

То есть  $m = n$ . ■

## 7. Характеризация базисов конечномерного векторного пространства в терминах единственности линейного выражения векторов

**Утверждение.** Пусть  $\dim V < \infty$ ,  $e_1, \dots, e_n \in \langle V \rangle$ .

$e_1, \dots, e_n$  – базис  $V$  тогда и только тогда, когда,  $\forall v \in V$  единственным образом представим в виде

$$v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \quad x_i \in F.$$

*Доказательство.*

$\implies$  Пусть есть два представления  $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = x'_1 e_1 + \dots + x'_n e_n$ .

Тогда,  $(x_1 - x'_1)e_1 + \dots + (x_n - x'_n)e_n = \vec{0}$ .

Так как  $e_1, \dots, e_n$  линейно независимы, то  $(x_1 - x'_1) = \dots = (x_n - x'_n) = 0$ .

Значит,  $x_i = x'_i \quad \forall i$ .

$\Leftarrow \forall v \in V$  имеем  $v \in \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ .

Значит,  $\langle e_1, \dots, e_n \rangle = V$ .

Для  $v = \vec{0}$  существует единственное представление  $\vec{0} = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ .

Но мы знаем, что  $\vec{0} = 0e_1 + \dots + 0e_n$ .

Следовательно  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ , то есть  $e_1, \dots, e_n$  линейно независимо.

Итого:  $e_1, \dots, e_n$  – базис  $V$ . ■

## 8. Метод построения фундаментальной системы решений для однородной системы линейных уравнений

Приведем матрицу к улучшенному ступенчатому виду элементарными преобразованиями строк.

$$(A | \vec{0}) \rightsquigarrow (B | \vec{0}) \quad \leftarrow \text{улучшенный ступенчатый вид.}$$

Пусть  $r$  – число ненулевых строк в  $B$ .

Тогда будет  $r$  главных неизвестных и  $n - r$  свободных.

Выполнив перенумерацию будем считать что,

$$\begin{aligned} x_1, \dots, x_r & \text{ – главные неизвестные,} \\ x_{r+1}, \dots, x_n & \text{ – свободные.} \end{aligned}$$

Тогда, общее решение для  $(\star)$  имеет вид

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11}x_{r+1} + c_{12}x_{r+2} + \dots + c_{1,n-r}x_n \\ x_2 &= c_{21}x_{r+1} + c_{22}x_{r+2} + \dots + c_{2,n-r}x_n \\ &\dots \\ x_r &= c_{r1}x_{r+1} + c_{r2}x_{r+2} + \dots + c_{r,n-r}x_n. \end{aligned}$$

Предъявим некоторую систему решений

$$u_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \dots \\ c_{r1} \\ \underline{1} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \dots \\ c_{r2} \\ 0 \\ \underline{1} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad u_{n-r} = \begin{pmatrix} c_{1,n-r} \\ c_{2,n-r} \\ \dots \\ c_{r,n-r} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \underline{1} \end{pmatrix}.$$

$$u_1, \dots, u_{n-r} \in S$$

**Предложение.**  $u_1, \dots, u_{n-r}$  – это ФСР для ОСЛУ  $(\star)$ .

*Доказательство.*

1. Линейная независимость.

Пусть  $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{n-r} u_{n-r} = \vec{0}$ .

При любом  $k \in \{1, \dots, n-r\}$ ,  $(r+k)$ -я координата левой части равна  $\alpha_k$ , значит  $\alpha_k = 0$ .

Следовательно  $\alpha_1 = \dots = \alpha_{n-r} = 0$ .

2.  $\langle u_1, \dots, u_{n-r} \rangle = S$ .

“ $\subseteq$ ” Верно, так как  $u_1, \dots, u_{n-r} \in S$ .

“ $\supseteq$ ” Пусть  $u \in S$ , тогда

$$u = \begin{pmatrix} * \\ \dots \\ * \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_{n-r} \end{pmatrix} \quad \text{для некоторых } \alpha_1, \dots, \alpha_{n-r} \in F.$$

Положим  $v := u - \alpha_1 u_1 - \dots - \alpha_{n-r} u_{n-r}$ .

Тогда,  $v \in S$ , но

$$v = \begin{pmatrix} * \\ \dots \\ * \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда формулы для общего решения дают  $v = \vec{0}$ .

Поэтому  $u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{n-r} u_{n-r}$ .

Значит  $\langle u_1, \dots, u_{n-r} \rangle = S$ . ■

*Пример.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = 3x_2 - x_4 \\ x_3 = 2x_4 \end{cases}$$

Тогда ФСР:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

## 9. Существование подмножества конечной системы векторов, являющегося базисом её линейной оболочки

Пусть  $V$  – векторное пространство над  $F$ .

Наблюдение: если  $v, v_1, \dots, v_m \in V$  и  $v \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ , тогда  $\langle v, v_1, \dots, v_m \rangle = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$

**Предложение.** Из всякой конечной системы векторов  $S \subseteq V$  можно выбрать подсистему, которая является базисом в линейной оболочке  $\langle S \rangle$ .

*Доказательство.* Пусть  $S = \{v_1, \dots, v_m\}$ .

Индукция по  $m$ .

**База**  $m = 1$ :  $S = \{v_1\}$ .

Если  $v_1 = \vec{0}$ , то  $\langle S \rangle = \{\vec{0}\}$ , значит в качестве базиса берем  $\emptyset$ .

Если  $v_1 \neq 0$ , то  $S$  линейно независимо.

Следовательно  $S$  – базис в  $\langle S \rangle$ .



**Шаг** Пусть доказано для  $< m$ , докажем для  $m$ .

Если  $v_1, \dots, v_m$  линейно независимы, то  $v_1, \dots, v_m$  — это уже базис в  $\langle S \rangle$ .

Иначе,  $\exists i : v_i \in \langle S \setminus \{v_i\} \rangle$ .

Положим  $S' := S \setminus \{v_i\}$ .

Тогда,  $\langle S' \rangle = \langle S \rangle$ .

Так как  $|S'| = m - 1 < m$ , то по предположению индукции в  $S'$  можно выбрать базис для  $\langle S' \rangle = \langle S \rangle$ . ■

## 10. Дополнение линейно независимой системы векторов до базиса конечномерного векторного пространства

**Предложение.** Пусть  $\dim V < \infty$ , тогда всякую линейно независимую систему векторов в  $V$  можно дополнить до базиса всего пространства  $V$ .

*Доказательство.* Пусть  $v_1, \dots, v_m$  — данная линейно независимая система.

Так как  $\dim V < \infty$ , в  $V$  есть конечный базис  $e_1, \dots, e_n$ .

Рассмотрим систему векторов  $v_1, \dots, v_m, e_1, \dots, e_n$ .

Пройдемся по этим векторам слева направо и выбросим те, которые линейно выражаются через предыдущие (не выброшенные).

При этом:

- 1) линейная оболочка системы сохраняется и равна  $\langle v_1, \dots, v_m, e_1, \dots, e_n \rangle = V$ ;
- 2)  $v_1, \dots, v_m$  останутся в системе, так как они линейно независимы;
- 3) в новой системе никакой вектор линейно не выражается через предыдущие.

Пусть новая система — это  $S' = \{v_1, \dots, v_m, e_{i_1}, \dots, e_{i_t}\}$ .

Докажем, что  $S'$  — базис в  $V$ .

По свойству 1) имеем, что  $\langle S' \rangle = V$ .

Осталось доказать, что  $S'$  линейно независимо.

Пусть  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n + \beta_1 e_{i_1} + \dots + \beta_t e_{i_t} = \vec{0}$ .

Предположим, что эта линейная комбинация нетривиальна.

Так как  $v_1, \dots, v_m$  линейно независимы, то  $\exists k : \beta_{i_k} \neq 0$ .

Выберем  $k$  максимальным с этим свойством.

Тогда,  $e_{i_k}$  линейно выражается через предыдущие — противоречие. ■

## 11. Лемма о добавлении вектора к конечной линейно независимой системе

**Лемма.** Пусть  $v, v_1, \dots, v_m \in V$  и  $v_1, \dots, v_m$  линейно независимы, тогда либо  $v, v_1, \dots, v_m$  линейно независимы, либо  $v \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ .

*Доказательство.* Пусть  $v, v_1, \dots, v_m$  линейно зависимы, тогда  $\exists (\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \neq (0, \dots, 0)$ , такой что

$$\alpha v + \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = \vec{0}.$$

Но, так как  $v_1, \dots, v_m$  линейно независимы, то  $\alpha \neq 0$ . Значит,  $v \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$  по предложению. ■