Теория вероятностей и математическая статистика, Коллоквиум III

Версия от 02.04.2021 12:10

Содержание

1. Неравенство Чебышева и закон больших чисел в слабой форме для общих случайных величин. Усиленный закон больших чисел Колмогорова (б/д). Сходимости случайных величин: почти наверное и по вероятности. Взаимосвязь сходимостей по вероятности и почти наверное.

1.1. Неравенство Чебышева и закон больших чисел в слабой форме для общих случайных величин.

Теорема (Неравенство Маркова)**.** Пусть X это случайная величина и $X \geqslant 0$ почти наверное. Тогда для любого $t > 0$ выполняется

$$\mathrm{P}[X \geqslant t] \leqslant \frac{\mathrm{E}[X]}{t}$$

почти наверное.

Доказательство. Заметим, что для любого $t > 0$ выполняется $t \cdot \mathrm{I}[x \geqslant t] \leqslant X$ почти наверное (здесь I это индикатор), так как в левой части будут учтены $t \leqslant X$, с суммарным коэффициентом не больше 1.
Возьмем математическое ожидание от обеих сторон и получим то, что нас просили:

$$t \cdot \mathrm{I}[x \geqslant t] \leqslant X \iff t \cdot \mathrm{P}[x \geqslant t] \leqslant \mathrm{E}[X] \iff \mathrm{P}[x \geqslant t] \leqslant \frac{\mathrm{E}[X]}{t}.$$

■

Теорема (Неравенство Чебышева)**.** Пусть у случайной величины X конечный второй момент, то есть $\mathrm{E}[X^2] \leqslant \infty$. Тогда

$$\mathrm{P}[|X - \mathrm{E}[X]| \geqslant \varepsilon] \leqslant \frac{\mathrm{D}[X]}{\varepsilon^2}.$$

Доказательство. Для доказательства рассмотрим случайную величину $Y = |X - \mathrm{E}[X]|^2$ и применим неравенство Маркова.
Для любого ε выполняется

$$\mathrm{P}[Y \geqslant \varepsilon^2] \leqslant \frac{\mathrm{E}[Y]}{\varepsilon^2} \iff \mathrm{P}[|X - \mathrm{E}[X]|^2 \geqslant \varepsilon^2] \leqslant \frac{\mathrm{D}[X]}{\varepsilon^2} \iff \mathrm{P}[|X - \mathrm{E}[X]| \geqslant \varepsilon] \leqslant \frac{\mathrm{D}[X]}{\varepsilon^2}.$$

■

Теорема (Закон Больших Чисел в слабой форме)**.** Рассмотрим последовательность $\{X_n\}_n$ случайных независимых величин, что $\mathrm{E}[X_n^2] < \infty$ для любого n.
Обозначим $\mathrm{E}[X_n] = a_n$ и $\mathrm{D}[X_n] = \sigma_n^2$. Если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2}{n^2} = 0,$$

то для всякого $\varepsilon > 0$ выполняется

$$\mathrm{P}\left[\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right] \leqslant \frac{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2}{n^2\varepsilon^2}.$$

Доказательство. Рассмотрим случайную величину $X = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$.
По линейности математического ожидания получаем

$$\mathrm{E}[X] = \frac{\mathrm{E}[X_1] + \cdots + \mathrm{E}[X_n]}{n} = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

Теперь необходимо найди дисперсию случайной величины X:

- Константа из дисперсии выносится с возведением в квадрат, поэтому

$$\mathrm{D}[X] = \mathrm{D}\left[\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right] = \frac{\mathrm{D}[X_1 + \cdots + X_n]}{n^2}.$$

- Так как $\{X_n\}_n$ это последовательность **независимых** случайных величин, дисперсия суммы может быть раскрыта как сумма дисперсий:

$$\mathrm{D}[X] = \frac{\mathrm{D}[X_1 + \cdots + X_n]}{n^2} = \frac{\mathrm{D}[X_1] + \cdots + \mathrm{D}[X_n]}{n^2} = \frac{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2}{n^2}.$$

Воспользуемся неравенством Чебышева для случайной величины X и подставим найденное математическое ожидания и дисперсию:

$$\mathrm{P}[|X - \mathrm{E}[X]| \geqslant \varepsilon] \leqslant \frac{\mathrm{D}[X]}{\varepsilon^2} \iff \mathrm{P}\left[\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right] \leqslant \frac{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2}{n^2\varepsilon^2}$$

■

Закон больших чисел удобно применять, когда X_n это независимые одинаково распределенные случайные величины (с конечным вторым моментом). В частности это означает, что у всех величин одно и то же математическое ожидание и одна и та же математическая дисперсия: $\mathrm{E}[X_n] = a$ и $\mathrm{D}[X_n] = \sigma^2$.
Тогда дисперсия среднего арифметического $\dfrac{\mathrm{D}[X_1] + \cdots + \mathrm{D}[X_n]}{n^2} = \dfrac{\sigma^2}{n}$ стремится к нулю и получаем

$$\mathrm{P}\left[\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - a\right| \geqslant \varepsilon\right] \to 0.$$

То есть в каком-то смысле среднее арифметическое приближается к математическому ожиданию.

1.2. Усиленный закон больших чисел Колмогорова (б/д).

Теорема (Усиленный закон больших чисел Колмогорова)**.** Пусть $\{X_n\}_n$ — это последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, у которых есть математическое ожидание и пусть $\mathrm{E}[X_n] = a$.
Тогда

$$\mathrm{P}\left[\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} = a\right] = 1.$$

Заметьте, что мы не требуем наличия второго момента, в отличие ЗБЧ в слабой форме. Также, эта сходимость более сильная, так как предел находится внутри условия вероятности, это будет объяснено позже.

1.3. Сходимости случайных величин: почти наверное и по вероятности.

Определение. Последовательность случайных величин X_n сходится к случайной величине X **по вероятности**, если для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}[|X_n - X| \geqslant \varepsilon] = 0.$$

Записывают в следующем виде: $X_n \xrightarrow{P} X$.

Определение. Последовательность случайных величин X_n сходится к случайной величине X **почти наверное**, если

$$\mathrm{P}[\lim_{n\to\infty} X_n = X] = 1.$$

Записывают в следующем виде: $X_n \xrightarrow{\text{п. н.}} X$.

То есть в законе больших чисел в слабой форме речь идет о сходимости по вероятности, а в усиленном законе больших чисел Колмогорова — о сходимости почти наверное.
Из сходимости почти наверное следует сходимость по вероятности, поэтому усиленный закон больших чисел называется усиленным.

1.4. Взаимосвязь сходимостей по вероятности и почти наверное.

Теорема. Если последовательность случайных величин X_n сходится к X почти наверное, то X_n сходится к X и по вероятности.

Доказательство. Хотим доказать. что $\mathrm{P}[|X_n - X| > \varepsilon] \to 0$, что равносильно $\mathrm{P}[|X_n - X| < \varepsilon] \to 1$, что мы и будем заказывать.
Переформулируем выражение «множество исходов, что для любого $\varepsilon > 0$ существует N, что для любого $n > N$ выполняется $|X_n - X| < \varepsilon$» с помощью множеств:

$$\bigcup_{N} \bigcap_{n=N+1}^{\infty} \{w : |X_n - X| < \varepsilon\}.$$

Но это множество включает в себя множество исходов, для которых $\lim X_n = X$:

$$\bigcup_N \bigcap_{n=N+1}^{\infty} \{w : |X_n - X| < \varepsilon\} \supseteq \{w : \lim X_n = X\}.$$

Но по условию $\mathrm{P}[\lim X_n = X] = 1$, поэтому

$$\mathrm{P}\left[\bigcup_N \bigcap_{n=N+1}^{\infty} \{w : |X_n - X| < \varepsilon\}\right] = 1.$$

Обозначим $B_N = \bigcap\limits_{n=N+1}^{\infty} \{w : |X_n - X| < \varepsilon\}$. Тогда

$$B_{N+2} \supseteq B_{N+1} \supseteq B_N \supseteq \cdots \supseteq B_1,$$

так как чем больше номер множества, тем из меньшего числа пересечения оно состоит.
Из второго модуля про вероятность вложенных событий мы знаем (теорема о непрерывности вероятностных мер), что

$$\mathrm{P}\left[\bigcup_{N=1}^{\infty} B_N\right] = \lim_{N\to\infty} \mathrm{P}[B_N].$$

Но мы уже доказали, что $\mathrm{P}\left[\bigcup\limits_{N=1}^{\infty} B_N\right] = 1$, тогда

$$\mathrm{P}\left[\bigcap_{n=N+1}^{\infty} \{w : |X_n - X| < \varepsilon\}\right] \xrightarrow[N\to\infty]{} 1,$$

Заметим, что вероятность одного множества событий не меньше вероятности пересечения, поэтому о лемме о двух миллиционерах:

$$\mathrm{P}[\{w : |X_n - X| < \varepsilon\}] \to 1.$$

■

2. Сходимость случайных величин по распределению. Лемма о достаточном условии сходимости ожиданий функций из заданного семейства от последовательности случайных величин (лемма 2 из лекции 2). Эквивалентное описание сходимости по распределению.

3. Абсолютная непрерывность математического ожидания. Теорема Лебега о мажорируемой сходимости. Подстановка сходящейся по вероятности последовательности случайных величин в непрерывную функцию. Взаимосвязь сходимостей по вероятности и по распределению.

4. Характеристические функции: определение и свойства. Вычисление характеристической функции нормальной случайной величины. Производные характеристических функций.

4.1. Характеристические функции: определение и свойства.

Определение. Пусть X это случайная величина. Тогда характеристическая функция случайной величины X это

$$\varphi_X(t) := \mathrm{E}[e^{itX}] = \mathrm{E}[\cos(t \cdot X)] + i \cdot \mathrm{E}[\sin(t \cdot X)].$$

Теорема (Свойства характеристических функций)**.** У характеристической функции есть следующие свойства:

1. Для любой случайной величины X выполняется $\varphi_X(0) = 1$.

2. Для любой случайной величины и любого $t \in \mathbb{R}$ выполняется $|\varphi_X(t)| \leqslant 1$.

3. Для чисел a и b выполняется
$$\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb} \cdot \varphi_X(at).$$

4. Если X_n это последовательность **независимых** случайных величин, то
$$\varphi_{X_1+X_2+\dots+X_n}(t) = \varphi_{X_1}(t) \cdot \varphi_{X_2}(t) \cdot \dots \cdot \varphi_{X_n}(t).$$

Доказательство. Для доказательства будем пользоваться следующей формулой:
$$\varphi_X(t) = \mathrm{E}[\cos(t \cdot X)] + i \cdot \mathrm{E}[\sin(t \cdot X)],$$
которая следует из формулы Эйлера $e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x$.
Докажем свойства:

1. Для любой случайной величины X выполняется $\varphi_X(0) = 1$.

   Проверяется подстановкой:
$$\varphi_X(0) = \mathrm{E}[e^{i \cdot 0 \cdot X}] = \mathrm{E}[e^0] = \mathrm{E}[1] = 1.$$

2. Для любой случайной величины и любого $t \in \mathbb{R}$ выполняется $|\varphi_X(t)| \leqslant 1$.

   Рассмотрим случайную величину Y. Знаем, что ее дисперсия неотрицательна, то есть $\mathrm{D}[Y] = \mathrm{E}[Y^2] - (\mathrm{E}[Y])^2 \geqslant 0$, откуда следует, что для любой случайной величины Y справедливо $\mathrm{E}[Y^2] \geqslant (\mathrm{E}[Y])^2$.

   Значение характеристической функции это комплексное число. Квадрат модуля комплексного числа это сумма квадратов его мнимой и действительной частей:
$$|\varphi_X(t)|^2 = (\mathrm{E}[\cos(t \cdot X)])^2 + (\mathrm{E}[\sin(t \cdot X)])^2.$$

   С помощью знаний о $\mathrm{E}[Y^2] \geqslant (\mathrm{E}[Y])^2$ оценим квадрат модуля характеристической функции:
$$|\varphi_X(t)|^2 = (\mathrm{E}[\cos(t \cdot X)])^2 + (\mathrm{E}[\sin(t \cdot X)])^2 \leqslant \mathrm{E}[\cos^2(t \cdot X)] + \mathrm{E}[\sin^2(t \cdot X)] = \mathrm{E}[\cos^2(t \cdot X) + \sin^2(t \cdot X)] = \mathrm{E}[1] = 1.$$

3. Для чисел a и b выполняется
$$\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb} \cdot \varphi_X(at).$$

   Заметим, что если y это некоторое число, то $\mathrm{E}[y \cdot X] = y \cdot \mathrm{E}[X]$ по линейности математического ожидания.

   Запишем по определению:
$$\varphi_{aX+b}(t) = \mathrm{E}[e^{it \cdot aX + it \cdot b}] = \mathrm{E}[e^{it \cdot aX} \cdot e^{it \cdot b}] = e^{it \cdot b} \cdot \mathrm{E}[e^{it \cdot aX}] = e^{it \cdot b} \cdot \varphi_{aX}(t).$$

4. Если X_n это последовательность **независимых** случайных величин, то
$$\varphi_{X_1+X_2+\dots+X_n}(t) = \varphi_{X_1}(t) \cdot \varphi_{X_2}(t) \cdot \dots \cdot \varphi_{X_n}(t).$$

   Пусть $Y_n = e^{i \cdot t \cdot X_n}$. Тогда $Y_1, \dots Y_n$ это последовательность независимых случайных величин (в силу независимости X_n) и $\mathrm{E}[Y_1 \cdot \dots \cdot Y_n] = \mathrm{E}[Y_1] \cdot \dots \cdot \mathrm{E}[Y_n]$.

   Запишем по определению:
$$\varphi_{X_1+X_2+\dots+X_n}(t) = \mathrm{E}[e^{itX_1+\dots+itX_n}] = \mathrm{E}[e^{itX_1} \cdot \dots \cdot e^{itX_n}] = \mathrm{E}[Y_1 \cdot \dots \cdot Y_n] = \mathrm{E}[Y_1] \cdot \dots \cdot \mathrm{E}[Y_n] = \varphi_{X_1}(t) \cdot \dots \cdot \varphi_{X_n}(t).$$

■

4.2. Вычисление характеристической функции нормальной случайной величины.

Хотим вычислить $\varphi_\xi(t)$, где $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$.
Запишем по определению:

$$\varphi_\xi(t) = \mathrm{E}[e^{it\xi}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos(tx) \exp\big[-x^2/2\big]\,\mathrm{d}x + \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin(tx) \exp\big[-x^2/2\big]\,\mathrm{d}x.$$

Заметим, что второе слагаемое $\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin(tx) \exp\big[-x^2/2\big]\,\mathrm{d}x$ равно нулю, так как это интеграл нечетной функции по симметричному промежутку. Тогда

$$\varphi_\xi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos(tx) \exp\big[-x^2/2\big]\,\mathrm{d}x.$$

Возьмем производную по t (считаем, что она берется):

$$\begin{aligned}
\varphi_\xi'(t) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \sin(tx) \exp\big[-x^2/2\big]\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin(tx)\,\mathrm{d}\big(\exp\big[-x^2/2\big]\big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sin(tx) \exp\big[-x^2/2\big]\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{t}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos(tx) \exp\big[-x^2/2\big]\,\mathrm{d}x \\
&= 0 - \frac{t}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos(tx) \exp\big[-x^2/2\big]\,\mathrm{d}x = -t \cdot \varphi_\xi(t).
\end{aligned}$$

Пришли к дифференциальному уравнению:

$$\varphi_\xi'(t) = -t \cdot \varphi_\xi(t) \implies \frac{\varphi_\xi'(t)}{\varphi_\xi(t)} = -t.$$

Интегрируем обе части:

$$\int \frac{\mathrm{d}(\varphi_\xi(t))}{\varphi_\xi(t)} = \ln|\varphi_\xi(t)| + C = \int -t\mathrm{d}t = -\frac{t^2}{2}.$$

Теперь берем экспоненту от обеих частей:

$$\varphi_\xi(t) = C' \cdot \exp\big[-t^2/2\big],$$

где C' это некоторая константа.
Про характеристическую функцию мы знаем, что $\varphi_\xi(0) = 1$. Тогда

$$\varphi_\xi(0) = 1 = C' \cdot \exp[0] = C',$$

откуда находим $C' = 1$.
Тогда характеристическая функция стандартной нормальной величины имеет следующий вид:

$$\varphi_\xi(t) = \exp\big[-t^2/2\big].$$

4.3. Производные характеристических функций.

Теорема. Пусть X это случайная величина с конечным k-ым моментом ($\mathrm{E}[|X|^k] < \infty$). Тогда φ_X k раз дифференцируема и

$$\varphi_X^{(k)}(0) = i^k \cdot \mathrm{E}[X^k].$$

Доказательство. Докажем для $k = 1$, для остальных порядков аналогично.
Мы хотим найти производную:

$$\lim_{h_n \to 0} \frac{\varphi_X(t+h_n) - \varphi_X(t)}{h_n} = \lim_{h_n \to 0} \frac{1}{h_n} \cdot \Big(\mathrm{E}[e^{i(t+h_n)X}] - \mathrm{E}[e^{itX}]\Big) = \lim_{h_n \to 0} E\left[\frac{e^{i(t+h_n)X} - e^{itX}}{h_n}\right] =: \lim_{h_n \to 0} E[g_n],$$

то есть обозначили $g_n = \dfrac{e^{i(t+h_n)X} - e^{itX}}{h_n}$.
Поймем, что мы знаем про функцию g_n:

- У нее есть поточечный предел:
$$\lim_{n\to\infty} g_n(X) = \left(e^{itX}\right)'_t = iXe^{itX}.$$

- Надо как-то оценить $|g_n|$.

  Знаем, что модуль комплексной экспоненты равен 1, то есть $|e^{itX}| = 1$. Тогда
$$|g_n(X)| = \left|\frac{e^{itX}\cdot(e^{ih_nX}-1)}{h_n}\right| = |e^{itX}|\cdot\left|\frac{e^{ih_nX}-1}{h_n}\right| = \left|\frac{e^{ih_nX}-1}{h_n}\right| = \left|\frac{e^{ih_nX}-e^{i\cdot 0\cdot X}}{h_n}\right| = \left(e^{itX}\right)'_t(\xi) = \left|iXe^{i\xi X}\right|$$
  для некоторого $\xi \in (0; h_n)$.

  Предпоследний переход выполнен по теореме Лагранжа, которая гласит следующее:
$$\exists \xi \in (a;b): \quad \frac{f'(b)-f'(a)}{b-a} = f'(\xi).$$

  Опять же воспользуемся тем, что модуль комплексной экспоненты равен 1:
$$|g_n(X)| = \left|iXe^{i\xi X}\right| = |i|\cdot|X|\cdot\left|e^{i\xi X}\right| = 1\cdot|X|\cdot 1 = |X|.$$

Мы получили, что

- $|g_n(X)| \leqslant |X|$ и $\mathrm{E}[|X|] < \infty$ (для этого и нужна конечность моментов);
- $g_n(X) \xrightarrow{\text{п. н.}} i\cdot X\cdot e^{itX}$.

Тогда по теореме Лебега предел ожиданий есть ожидание предела:
$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[g_n(X)] = \mathrm{E}[i\cdot X\cdot e^{itX}].$$

Возвращаемся в самое начало:
$$\varphi_X(t)' = \lim_{n\to\infty} g_n = i\cdot\mathrm{E}[X\cdot e^{itX}].$$

■

5. Переформулировка сходимости по распределению в терминах характеристических функций. Однозначность задания распределения случайной величины ее характеристической функцией. Центральная предельная теорема.

6. Подстановка сходящейся по распределению последовательности случайных величин в непрерывную функцию. Сходимость суммы и произведения сходящихся по распределению последовательностей случайных величин в случае, когда одна из предельных случайных величин постоянная. Примеры применения: выборочная дисперсия и взаимосвязь с ЦПТ. Теорема о сходимости последовательности вида $\frac{f(a+h_nX_n)-f(a)}{h_n}$ для сходящейся по распределению последовательности X_n. Взаимосвязь с ЦПТ.

6.1. Подстановка сходящейся по распределению последовательности случайных величин в непрерывную функцию.

Теорема. Если последовательность случайных величин X_n сходится по распределению к X, то для всякой непрерывной функции f случайные величины $f(X_n)$ сходятся по распределению к $f(X)$.

Доказательство.
Из лекции 2 мы знаем, что
$$X_n \xrightarrow{d} X \Leftrightarrow \forall g\ \mathbb{E}g(X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}g(X), \text{ где g – непрерывная, ограниченная функция}$$

$g \circ f := h$ – непрерыная функция (т.к. композиция непрерывных функция), ограниченная(т.к. g ограниченная)

$$\mathbb{E}g(f(X_n)) = \mathbb{E}h(X_n),\ \mathbb{E}g(f(X)) = \mathbb{E}h(X)$$

Значит из утверждения выше

$$X_n \xrightarrow{d} X \Rightarrow \mathbb{E}h(X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}h(X)$$

Снова применяем утверждение

$$\mathbb{E}g(f(X_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}g(f(X)) \Rightarrow f(X_n) \xrightarrow{d} f(X)$$

■

6.2. Сходимость суммы и произведения сходящихся по распределению последовательностей случайных величин в случае, когда одна из предельных случайных величин постоянная.

Лемма. Пусть X, Y, Z случайные величины. Тогда $\forall t \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0$ выполнено

$$P(X+Z \leqslant t-\varepsilon) - P(|Y-Z| \geqslant \varepsilon) \leqslant P(X+Y \leqslant t) \leqslant P(X+Z \leqslant t+\varepsilon) + P(|Y-Z| \geqslant \varepsilon)$$

Доказательство.

$$P(X+Y \leqslant t) \leqslant P(X+Y \leqslant t, |Y-Z| \geqslant \varepsilon) + P(X+Y \leqslant t, |Y-Z| \geqslant \varepsilon) \leqslant P(X+Y \leqslant t, |Y-Z| \geqslant \varepsilon) + P(|Y-Z| \geqslant \varepsilon)$$

Расскроем модуль

$$-\varepsilon \leqslant Y - Z \Rightarrow Z - \varepsilon \leqslant Y$$

Подставим вместо Y $Z-\varepsilon$

Событие $X + Z - \varepsilon \leqslant t$ вложено в событие $X + Y \leqslant t \cap |Y - Z| \geqslant \varepsilon$

$$\leqslant P(X+Z-\varepsilon \leqslant t) + P(|Y-Z| \geqslant \varepsilon)$$

Ищем другую оценку

Заменим в получившемся неравенстве Y на Z, Z на Y

$$P(X+Z \leqslant t) \leqslant P(X+Y-\varepsilon \leqslant t) + P(|Z-Y| \geqslant \varepsilon) =$$

$$= P(X+Y \leqslant t+\varepsilon) + P(|Y-Z| \geqslant \varepsilon)$$

Обозначим $t + \varepsilon := t$

$$P(X+Z \leqslant t-\varepsilon) \leqslant P(X+Y \leqslant t) + P(|Y-Z| \geqslant \varepsilon)$$

$$P(X+Y \leqslant t) \geqslant P(X+Z \leqslant t-\varepsilon) - P(|Y-Z| \geqslant \varepsilon)$$

■

Теорема. Если $X_n \xrightarrow{d} X$ и $Y_n \xrightarrow{d} C = const$ то

$$X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + C$$

$$X_n \cdot Y_n \xrightarrow{d} X \cdot C$$

Доказательство. Вспомним доказательство того что

$$Y_n \xrightarrow{d} C = const \Rightarrow Y_n \xrightarrow{p} C$$

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - C| \geqslant \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} P(X_n - C \geqslant \varepsilon\ or\ -X_n + C \geqslant \varepsilon) \leqslant$$

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n - C \geqslant \varepsilon) + \lim_{n\to\infty} P(X_n \leqslant C - \varepsilon) =$$

$$= 1 - F_{X_n}(\varepsilon + C) + F_{X_n}(C - \varepsilon) \underbrace{=}_{n\to\infty} 0$$

Используем лемму

$$P(X_n + C \leqslant t - \varepsilon) - P(|Y_n - C| \geqslant \varepsilon) \leqslant P(X_n + Y_n \leqslant t) \leqslant P(X_n + C \leqslant t + \varepsilon) + P(|Y_n - C| \geqslant \varepsilon)$$

$$F_{X_n}(t - \varepsilon - C) - P(|Y_n - C| \geqslant \varepsilon) \leqslant F_{X_n+Y_n}(t) \leqslant F_{X_n}(t + \varepsilon - C) + P(|Y_n - C| \geqslant \varepsilon)$$

1) $n \to \infty$

Заметим, что мы всегда можем выбрать точки $t - \varepsilon - C, t + \varepsilon - C$ в которых функция F_X непрерывна, т.к. точек разрыва счетное количество, а ε континуальная переменная.

Т.к. $Y_n \xrightarrow{p} C \Leftrightarrow_{def} \lim\limits_{n\to\infty} P(|Y_n - C| \geqslant \varepsilon) = 0$

$$F_X(t - \varepsilon - C) \leqslant \underline{lim}_{n\to\infty} F_{X_n+Y_n}(t) \leqslant \overline{lim}_{n\to\infty} F_{X_n+Y_n}(t) \leqslant F_X(t + \varepsilon - C)$$

2) $\varepsilon \to 0$

Заметим, что t - C точка непрерывности функции F_X тогда и только тогда, когда t точка непрерывности функции F_{X+C}.

$$F_X(t - C) \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} F_{X_n+Y_n}(t) \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} F_{X_n+Y_n}(t) \leqslant F_X(t - C)$$

Так как слева и справа у нас одно и тоже значение $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} F_{X_n+Y_n}(t) = F_X(t - C) = F_{X+C}(t)$

1) C = 0

$$\{|X_n \cdot Y_n \geqslant \varepsilon\} \subset \{|X_n| > R\} \cup \{|Y_n| \geqslant \frac{\varepsilon}{R}\}$$

$$P(|X_n \cdot Y_n \geqslant \varepsilon) \leqslant P(|X_n| > R) + P(|Y_n| \geqslant \frac{\varepsilon}{R})$$

$$P(|X_n| \geqslant R) = P(X_n \geqslant R) + P(X_n \leqslant -R) \leqslant P(X_n > \frac{R}{2}) + F_{X_n}(-R) = 1 - F_{X_n}(\frac{R}{2}) + F_{X_n}(-R)$$

$$P(|X_n \cdot Y_n \geqslant \varepsilon) \leqslant P(|X_n| > R) + P(|Y_n| \geqslant \frac{\varepsilon}{R}) \leqslant 1 - F_{X_n}(\frac{R}{2}) + F_{X_n}(-R) + P(|Y_n| \geqslant \frac{\varepsilon}{R})$$

a) $n \to \infty$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} P(|X_n \cdot Y_n \geqslant \varepsilon) \leqslant 1 - F_X(\frac{R}{2}) + F_X(-R) + 0$$

b) $R \to \infty$

R – точка непрерывности F_X

$$0 \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} P(|X_n \cdot Y_n \geqslant \varepsilon) \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} P(|X_n \cdot Y_n \geqslant \varepsilon) \leqslant 1 - F_X(\frac{R}{2}) + F_X(-R) \leqslant 0$$

$$\Rightarrow X_n \cdot Y_n \xrightarrow{p} 0 \Rightarrow_{\text{Лекция 1}} X_n \cdot Y_n \xrightarrow{d} 0$$

2) Общий случай

$$X_n(Y_n - C) \xrightarrow{d} 0 \text{ по 1)}$$

$$CX_n \xrightarrow{d} CX$$

$$CX + 0 \xrightarrow{d} CX \text{ сумму разбирали выше}$$

■

6.3. Примеры применения: выборочная дисперсия и взаимосвязь с ЦПТ.

Пример 1(Выборочная дисперсия)

Пусть задана последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин X_j, причем $\mathbb{E}X_j = a$ и $\mathbb{D}Xj = \sigma^2$. Тогда последовательность случайных величин

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X_n})^2, \text{ где } \overline{X_n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

Проверим это

$$\overline{X_n} \xrightarrow{p} a(\text{ЗБЧ})$$

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X_n})^2 = \frac{n}{n-1}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j^2 - \frac{1}{n-1}\left(-2\underbrace{\sum_{j=1}^{n}X_j}_{n\overline{X_n}}\cdot\overline{X_n} + n\overline{X_n}^2\right) = \frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j^2 - \overline{X_n}^2\right)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j^2 \xrightarrow{p} \mathbb{E}X_1^2(\text{ЗБЧ})$$

$$\overline{X_n}^2 \xrightarrow{p} (\mathbb{E}X_1)^2$$

$$\frac{n}{n-1} \to 1$$

$$\xrightarrow{p} \mathbb{D}X_1 = \sigma^2$$

$$\mathbb{E}s_n^2 = \frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\cdot n \cdot \mathbb{E}X_1^2 - \mathbb{E}(\overline{X_n})^2\right) =$$

$$\mathbb{E}(\overline{X_n})^2 = \mathbb{E}(\overline{X_n} - a + a)^2 = \mathbb{E}(\overline{X_n} - a)^2 + a^2 - 2a\underbrace{\mathbb{E}(\overline{X_n} - a)}_{0} = a^2 + \mathbb{D}\overline{X_n} = a^2 + \frac{1}{n^2}\mathbb{D}(X_1 + \ldots + X_n) = a^2 + \frac{\sigma^2}{n}$$

$$= \frac{n}{n-1}(\sigma^2 + a^2 - a^2 - \frac{\sigma^2}{n}) = \sigma^2$$

Пример 2(Взаимосвязь с ЦПТ)

Обозначения сохранятется с прошлого примера

Хотип показать, что

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X_n} - a)}{\sqrt{s_n^2}} \to Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X_n} - a)}{\sqrt{s_n^2}} = \frac{\sqrt{n}(\overline{X_n} - a)}{\sigma} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{s_n^2}}$$

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X_n} - a)}{\sigma} \to Z \sim \mathcal{N}(0,1)\text{из лекции 4}$$

$$\sqrt{\frac{\sigma^2}{s_n^2}} \xrightarrow{p} \sqrt{\frac{\sigma^2}{\sigma^2}} = 1(\text{Обсуждали выше})$$

Значит

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X_n} - a)}{\sqrt{s_n^2}} \to Z \cdot 1 \xrightarrow{d} Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

6.4. Теорема о сходимости последовательности вида $\dfrac{f(a+h_nX_n)-f(a)}{h_n}$ для сходящейся по распределению последовательности X_n.

Теорема. Пусть$a, h_n \in \mathbb{R}, h_n \to 0$и f непрерывная на $\mathbb{R}$ и дифференцируемая в точке a функция. Если последовательность случайных величин $X_n \xrightarrow{d} X$, то

$$\frac{f(a+h_nX_n)-f(a)}{h_n} \xrightarrow{d} f^{'}(a)X$$

Доказательство. Введем функция

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(a+x)-f(a)}{x} & x \neq 0 \\ f^{(}a) & x = 0 \end{cases}$$

g – непрерывная

$$h_n \xrightarrow{d} 0$$

$$X_n \xrightarrow{d} X$$

$$h_nX_n \xrightarrow{d} 0(\text{ теорема про произведения}) \Rightarrow$$

$$g(h_nX_n) \xrightarrow{d} g(0)(\text{первая теорема в билете6}) = f^{'}(a)$$

$$\frac{f(a+h_nX_n)-f(a)}{h_n} = X_n \cdot g(h_nX_n) = X_n \cdot \frac{f(a+h_nX_n)-f(a)}{h_nX_n} \xrightarrow{d} f^{'}(a)X(\text{ теорема про произведения})$$

■

6.5. Взаимосвязь с ЦПТ.

Пример

Обозначения сохранятется с прошлого примера

Пусть задана последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин X_j, причем $\mathbb{E}X_j = a$ и $\mathbb{D}X_j = \sigma^2 > 0$. Если f дифференцируемая функция, то

$$\sqrt{n}(f(\overline{X_n}) - f(a)) \xrightarrow{d} Y \sim \mathcal{N}(0, q^2),\ q = \sigma f^{'}(a)$$

Докажем это

Введем

$$Z_n = \frac{\sqrt{n}(\overline{X_n} - a)}{\sigma} \xrightarrow{d} Z \sim \mathcal{N}(0{,}1)$$

Тогда

$$\frac{\sqrt{n}(f(\overline{X_n}) - f(a))}{\sigma} = \frac{f(a + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_n) - f(a)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \xrightarrow{d} f^{'}(a)Z$$

$$\sqrt{n}(f(\overline{X_n}) - f(a)) = \sigma \cdot \frac{\sqrt{n}(f(\overline{X_n}) - f(a))}{\sigma} \xrightarrow{d} \sigma f^{'}(a)Z \sim \mathcal{N}(0, q^2)$$

7. **Неравенство типа Хефдинга-Чернова. Пример применения.**

8. **Многомерная характеристическая функция. Сходимость по распределению последовательности случайных векторов. Эквивалентное описание сходимости по распределению через сходимость характеристических функций (без доказательства). Независимость случайных величин в терминах характеристической функции совместного распределения. Матрица ковариаций, смысл задаваемой ей билинейной формы, ее изменение при линейных преобразованиях. Многомерная ЦПТ.**

9. **Многомерное нормальное распределение. Свойства нормального вектора: линейный образ нормального распределения нормален, характеризация через одномерные распределения, значение параметров нормального вектора, равносильность независимости и некоррелированности компонент. Представление нормального вектора, как линейный образ стандартного нормального вектора, ортогонализация. Плотность нормального вектора.**

10. **Условное математическое ожидание в дискретном случае относительно разбиения и относительно случайной величины. Основные свойства: линейность, монотонность, формула полной вероятности, условное ожидание величины, независимой с разбиением, вынесение случайной величины из под знака условного ожидания. Эквивалентное определение условного математического ожидания и геометрическая интерпретация.**

11. **Условное математическое ожидание в общем случае: определение и свойства. Формула для вычисления условного математического ожидания при известной плотности совместного распределения, условная плотность. Аналог фомрулы Байеса.**