

Второй коллоквиум по МА-2

Денис Козлов

[Telegram](#)

Версия от 17.12.2020 17:35

0.1

0.2

0.3

0.4

0.5 Докажите, что простые множества в \mathbb{R}^m образуют кольцо

Утв.: Класс всех простых множеств образует кольцо.

Док-во:

1. $\emptyset = [a; a)$ - пустой полуинтервал является простым множеством.
2. $E_1 \cup E_2 = E$ - объединение простых множеств является простым множеством. Так как каждое из простых множеств представимо в виде объединения конечного количества полуинтервалов, то их объединение представимо в виде объединения всех полуинтервалов входящих в каждое из простых, а значит является простым множеством.
3. $E_1 \cap E_2 = E$ - пересечение простых множеств является простым множеством. Пересечение представимо в виде объединения пересечений всех возможных пар из первого и второго множества. Так как пересечение полуинтервалов является полуинтервалом, то пересечение простых множеств, является простым множеством.
4. $E_1 \setminus E_2 = E$ - разность простых множеств является простым множеством. Пусть есть некоторый полуинтервал $[a; b)$ покрывающий E_1 и E_2 , тогда $[a; b) \setminus E_2$ очевидно является простым множеством. В таком случае исходную разность можно записать в виде $E_1 \cap ([a; b) \setminus E_2)$, что будет пересечением простых множеств, а значит является полуинтервалом.

■

0.6 Дайте определение внешней меры Жордана в \mathbb{R}^m

Опр.: Пусть $A \subset \mathbb{R}^m$ - произвольное ограниченное множество. Внешней мерой Жордана множества A называется

$$\bar{\mu}(A) = \inf_{E \supseteq A} \mu(E),$$

где точная нижняя грань берется по всем простым множествам, содержащим A .

0.7 Сформулируйте и докажите основные свойства внешней меры Жордана: монотонность и полуаддитивность

Св-во: Монотонность внешней меры означает, что при $A \subseteq B$ выполняется $\bar{\mu}(A) \leq \bar{\mu}(B)$.

Док-во: Обозначим через \mathcal{E}_A класс простых множеств, покрывающих заданное ограниченное множество A . Так как $A \subseteq B$, то класс \mathcal{E}_A шире чем \mathcal{E}_B , а значит в нем найдется простое множество которое не больше любого из \mathcal{E}_B , а отсюда из определения внешней меры следует, что $\bar{\mu}(A) \leq \bar{\mu}(B)$

■

Св-во: Полуаддитивностью внешней меры называется

$$\bar{\mu}(A \sqcup B) \leq \bar{\mu}(A) + \bar{\mu}(B),$$

где A и B - произвольные ограниченные множества.

Док-во: Для любых E_A и E_B покрывающих A и B соответственно, верно что $E_A \cup E_B$ - покрывает $A \cup B$. По свойствам меры верно

$$\mu(E_A \cup E_B) \leq \mu(E_A) + \mu(E_B)$$

Далее по определению точной нижней грани, для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие E_A и E_B , что

$$\mu(E_A) \leq \bar{\mu}(A) + \varepsilon, \quad \mu(E_B) \leq \bar{\mu}(B) + \varepsilon$$

Отсюда имеем

$$\bar{\mu}(A \cup B) \leq \mu(E_A \cup E_B) \leq \bar{\mu}(A) + \bar{\mu}(B) + 2\varepsilon$$

Переходя к пределу $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем

$$\bar{\mu}(A \cup B) \leq \bar{\mu}(A) + \bar{\mu}(B)$$

(Искомое свойство выполняется как частный случай)

■

0.8 Что такое измеримое по Жордану (= жорданово) множество? Как определяется его мера? Приведите примеры измеримого и неизмеримого множества

Опр.: Ограниченное множество $A \subset \mathbb{R}^m$ называется *измеримым по Жордану*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists E, E \supseteq A \quad \bar{\mu}(E \setminus A) < \varepsilon$$

ПРОВЕРИТЬ, НАДО ЛИ ЧТО-ТО ДОБАВИТЬ

Заметим, что так как измеримые множества образуют кольцо, а также внешняя мера на кольце измеримых множеств обладает свойством аддитивности, то выполняются все свойства меры, а значит можно дать следующее определение

Опр.: Мерой Жордана измеримого множества называется его внешняя мера Жордана.

Пример: Любое просто множество является измеримым по Жордану.

Пример: Пусть $Q = \{q_1, q_2, \dots\}$ - множество всех рациональных чисел отрезка $[0; 1]$ и $A_n = [0; 1] \setminus \{q_1, \dots, q_n\}$. Множество $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = [0; 1] \setminus Q$ не является измеримым

0.9 Докажите, что измеримые по Жордану множества образуют кольцо

Утв.: Измеримые по Жордану множества образуют кольцо

Док-во:

1. \emptyset - пустое множество является простым, а значит измеримо.
2. A, B - измеримы, $A \cup B$ - объединение измеримых множеств измеримо.

Пусть $A_i \subseteq E_i$ и $\bar{\mu}(E_i \setminus A_i) < \frac{\varepsilon}{2}$, при $i = 1, 2$.

Тогда так как

$$(E_1 \cup E_2) \setminus (A_1 \cup A_2) \subseteq (E_1 \setminus A_1) \cup (E_2 \setminus A_2)$$

в силу монотонности имеем

$$\bar{\mu}((E_1 \cup E_2) \setminus (A_1 \cup A_2)) \leq \bar{\mu}((E_1 \setminus A_1) \cup (E_2 \setminus A_2)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

а из этого следует, что объединение измеримо.

3. A, B - измеримы, $A \cap B$ - пересечение измеримых множеств измеримо.

Проведем рассуждения аналогично предыдущему пункту.

Так как

$$(E_1 \cap E_2) \setminus (A_1 \cap A_2) \subseteq (E_1 \setminus A_1) \cup (E_2 \setminus A_2)$$

в силу монотонности имеем

$$\bar{\mu}((E_1 \cap E_2) \setminus (A_1 \cap A_2)) \leq \bar{\mu}((E_1 \setminus A_1) \cup (E_2 \setminus A_2)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

а из этого следует, что пересечение измеримо.

4. A, B - измеримы, $A \setminus B$ - разность измеримых множеств измерима.

Пусть $A_i \subseteq E_i$, при $i = 1, 2$ и простые множества E_i таковы, что $\bar{\mu}(E_1 \setminus A_1) < \frac{\varepsilon}{2}$, а $E_2 \setminus A_2 \subseteq E'_2$, где $\mu(E'_2) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Обозначим

$$A = A_1 \setminus A_2, \text{ и } E = (E_1 \setminus E_2) \cup E'_2$$

Докажем, что $A \subseteq E$. Из всех возможных вариантов рассмотрим следующий. Пусть $x \in A_1$ и $x \notin A_2$. Тогда $x \in E_1$, а если $x \in E_2$, то $x \in E'_2$. Все прочие случаи тривиальны.

Теперь докажем, что

$$(E \setminus A) \subseteq (E_1 \setminus A_1) \cup E'_2$$

Снова из всех возможных вариантов рассмотрим следующее. Пусть $x \in E$ и $x \notin A$. Отсюда пусть $x \in E_1$ и $x \notin E_2$. Если $x \in A_1$, то либо $x \in A$, что противоречит первоначальному условию, либо $x \in A_1 \cap A_2$, что также невозможно, так как $x \notin E_2$. Отсюда следует, что $x \notin A_1$. Все прочие случаи тривиальны.

Далее имеем

$$\bar{\mu}(E \setminus A) \leq \bar{\mu}(E_1 \setminus A_1) + \bar{\mu}(E'_2) = \varepsilon$$

Из чего следует, что разность измеримых множеств измерима.

Все необходимые условия выполнены а это значит, что измеримые множества образуют кольцо.

■

0.10 Докажите, что множество измеримо по Жордану ровно тогда, когда его граница имеет Жорданову меру нуль

МУТНАЯ ТЕМА, ЕСТЬ ВОПРОСЫ

Теор.: Пусть $A \subseteq \mathbb{R}^m$ - произвольное множество, тогда множество измеримо тогда и только тогда, когда $\bar{\mu}(\partial A) = 0$, где ∂A - граница множества A .

Док-во:

\Rightarrow Пусть множество A - измеримо по Жордану. Пусть $E_1 \subseteq A$ - простое множество, такое что $\mu(E_1) = \underline{\mu}(A)$, а также $E_2 \supseteq A$ - такое, что $\mu(E_2) = \bar{\mu}(A)$

По определению границы знаем, что $\partial A \subseteq E_2 \setminus E_1$. Можно заметить, что так как $E_1 \subseteq A \subseteq E_2$, то $E_2 \setminus E_1 = (E_2 \setminus A) \cup (A \setminus E_1)$

0.11 Что такое разбиение Жорданова множества? Как вводится произведение разбиений? В каком случае говорят, что одно разбиение является измельчением другого?

Пусть $E \supseteq D$ - простое множество покрывающее D . Пусть $E = \sqcup Q_i$, где Q_i - m -мерные полуинтервалы составляющие простое множество E .

Опр.: Разбиением τ множества D , соответствующим данному простому множеству E , назовем представление D в виде

$$D = \sqcup (D \cap Q_i) = \sqcup D_i, \quad D_i = D \cap Q_i$$

Опр.: Произведение разбиений $\tau = \{D_i \mid i = 1, \dots, n\}$ и $\tau' = \{D'_j \mid j = 1, \dots, k\}$ называется система множеств

$$\tau \cdot \tau' = \{D_i \cap D'_j \mid i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, k\}$$

Опр.: Разбиение τ называется *измельчением* разбиения τ' (пишется $\tau \leq \tau'$), если для любого $D'_j \in \tau'$ найдутся такие $D_1, \dots, D_m \in \tau$, что

$$D'_j = D_1 \sqcup \dots \sqcup D_m$$

0.12 Докажите, что произведение разбиений является измельчением и одного, и другого разбиения

Утв.: Пусть τ и τ' - произвольные разбиения некоторого множества, тогда $\tau \cdot \tau'$ является измельчением τ и τ'

Док-во: Пусть $D_i \in \tau$ и $D'_j \in \tau'$, тогда так как

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} D_i = D_i \cap D = D_i \cap \left(\bigsqcup_j D_j \right) = \bigsqcup_j (D_i \cap D'_j)$$

По определению произведения $D_i \cap D'_j \subseteq \tau \cdot \tau'$, а значит по определению измельчения $\tau \cdot \tau'$ является измельчением τ (τ' также является измельчением; доказывается симметрично)

■

0.13 Что такое диаметр разбиения? Покажите, что при измельчении разбиения диаметр не увеличивается.

Опр.: Пусть τ - некоторое разбиение, тогда *диаметром* разбиения называют

$$\Delta(\tau) = \max_i \sup_{x, y \in D_i} |x - y|$$

Утв.: При измельчении разбиения его диаметр не увеличивается.

Док-во: Пусть τ и τ' - некоторые разбиения, причем $\tau \leq \tau'$

Тогда пусть $D'_i \in \tau'$ - некоторое множество. По определению измельчения

$$D'_i = D_{i_1} \sqcup \dots \sqcup D_{i_k}$$

где $D_{i_1}, \dots, D_{i_k} \in \tau$. Очевидно, что так как $\forall j D_{i_j} \in D'_i$, то диаметр D_{i_j} не превосходит диаметр D'_i . Данное утверждение верно для любого i , а значит, что при измельчении разбиения диаметр не увеличивается. ■

0.14 Сформулируйте определение интеграла Римана от функции по жордановому множеству. Что такое интегрируемая функция?

Пусть $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ - заданная на D числовая функция и $\tau = \{D_i\}$ - разбиение множества D . Выберем произвольно точки $\xi_i \in D_i$. Систему выбранных точек будем обозначать $p = \{\xi_i\}$

Опр.: *Интегральной суммой* функции f на жордановом множестве D , соответствующей разбиению τ и выбору точек p , называется

$$I_D(f, \tau, p) = \sum_i f(\xi_i) \mu(D_i)$$

Опр.: Функция f называется *интегрируемой по Риману* на D , если существует такое число I , что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad |I_D(f, \tau, p) - I| < \varepsilon \text{ при } \Delta(\tau) < \delta$$

Причем это число I называется *интегралом Римана* функции f на D и обозначается

$$I = \int_D f(x) dx$$

Множество всех функций, интегрируемых по Риману на жордановом множестве D , обозначается $\mathcal{R}(D)$

0.15 Сформулируйте и докажите критерий Коши интегрируемости функции по Риману.

Теор.: Пусть f - некоторая функция. Если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, что при любом выборе разбиений τ, τ' , с диаметрами $\Delta(\tau), \Delta(\tau')$ и при любом выборе систем точек p, p' выполняется

$$|I_D(f, \tau, p) - I_D(f, \tau', p')| < \varepsilon,$$

то функция интегрируема по Риману.

ПРОВЕРИТЬ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Док-во:

\Leftarrow Пусть $f \in \mathcal{R}(D)$, тогда существует I , такое что

$$|I_D(f, \tau, p) - I| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|I_D(f, \tau', p') - I| < \frac{\varepsilon}{2}$$

отсюда имеем

$$|I_D(f, \tau, p) - I_D(f, \tau', p')| \leq |I_D(f, \tau, p) - I| + |I_D(f, \tau', p') - I| < \varepsilon$$

\Rightarrow Возьмем последовательности τ_n и p_n , причем $\Delta(\tau_n) \rightarrow 0$

С помощью данных последовательностей образуем последовательность интегральных сумм $I_D(f, \tau_n, p_n)$.

Теперь положим, что выполнен критерий Коши

$$|I_D(f, \tau_m, p_m) - I_D(f, \tau_n, p_n)| < \varepsilon$$

из чего следует, что $I_D(f, \tau_n, p_n) \rightarrow I$, где I - некоторое число.

Теперь в исходное неравенство подставим $I_D(f, \tau_n, p_n)$ и устримим его к I

$$|I_D(f, \tau, p) - I_D(f, \tau_n, p_n)| < \varepsilon$$

$$|I_D(f, \tau, p) - I| < \varepsilon$$

из чего следует, что функция интегрируема по Риману. ■

0.16

0.17 Покажите, что на жордановом множестве меры нуль любая функция интегрируема

Имеем D - жорданово множество, причем $\mu(D) = 0$

Рассмотрим некоторое разбиение $\tau = \{D_i\}$

Очевидно, что так как $\forall i D_i \subseteq D$, то $\mu(D_i) = 0$

Теперь пусть задана некоторая система точек p

Рассмотрим интегральную сумму

$$I_D(f, \tau, p) = \sum_i f(\xi_i) \mu(D_i)$$

отсюда заметим, что так как $\forall i \mu(D_i) = 0$, то и интегральная сумма также будет равна 0, вне зависимости от функции. Теперь пусть имеем $I = 0$, рассмотрим

$$|I_D(f, \tau, p) - I| = |0 - 0| < \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$$

Таким образом любая функция f интегрируема на жордановом множестве меры нуль, причем значение интеграла равно нулю.

0.18 Выведите формулу для интеграла константы

$$\int_D \dots \int C dx_1 \dots dx_n = C \mu(D), \quad \text{где } C - \text{константа}$$

Док-во: Пусть имеем некоторое разбиение τ и систему точек p , рассмотрим интегральную сумму

$$I_D(f, \tau, p) = \sum_i f(\xi_i) \mu(D_i) = C \sum_i \mu(D_i)$$

Так как $\forall i \neq j, D_i \cap D_j = \emptyset$, а также в силу аддитивности меры имеем

$$C \sum_i \mu(D_i) = C \mu(D)$$

очевидно, что в данном случае

$$I = \int_D \dots \int C dx_1 \dots dx_n = C \mu(D)$$
■

0.19 Дайте определение верхней и нижней сумм Дарбу для ограниченной функции

Пусть $\tau = \{D_i\}$ - некоторое разбиение жорданова множества D . Предполагая функцию f ограниченной на D , введем следующие обозначения

$$m_i = \inf_{x \in D_i} f(x), \quad M_i = \sup_{x \in D_i} f(x)$$

Опр.: Нижней и верхней суммами Дарбу ограниченной функции f на D , соответствующими разбиению τ , называются

$$s_D(f, \tau) = \sum_i m_i \mu(D_i), \quad S_D(f, \tau) = \sum_i M_i \mu(D_i)$$

0.20 Сформулируйте и докажите основные свойства сумм Дарбу

ПРОВЕРИТЬ ВСЕ ЛИ НУЖНЫЕ СВОЙСТВА ТУТ

Св-во: При измельчении разбиения $\tau \leq \tau'$ нижняя сумма Дарбу не уменьшается $s_D(f, \tau) \geq s_D(f, \tau')$

Док-во: Рассмотрим $D'_j = D_{j1} \sqcup \dots \sqcup D_{jk}$. Тогда $\forall i, m'_j \leq m_{ji}$ и в силу аддитивности меры $\mu(D'_j) = \mu(D_{j1}) + \dots + \mu(D_{jk})$
Из этого следует, что

$$m'_j \mu(D'_j) \leq m_{j1} \mu(D_{j1}) + \dots + m_{jk} \mu(D_{jk})$$

Данное неравенство верно при всех j , из чего как и раз и следует искомое. ■

Св-во: При измельчении разбиения $\tau \leq \tau'$ верхняя сумма Дарбу не увеличивается $S_D(f, \tau) \leq S_D(f, \tau')$

Док-во: Аналогично предыдущему пункту. ■

Св-во: Для любых разбиений τ и τ' выполняется $s_D(f, \tau) \leq S_D(f, \tau')$

Док-во: Рассмотрим измельчение $\tau'' = \tau \cdot \tau'$

Из двух предыдущих пунктов имеем

$$s_D(f, \tau) \leq s_D(f, \tau'')$$

$$S_D(f, \tau') \geq S_D(f, \tau'')$$

так как $s_D \leq S_D$ при каком либо фиксированном разбиении, а также из этих двух неравенств имеем

$$s_D(f, \tau) \leq s_D(f, \tau'') \leq S_D(f, \tau'') \leq S_D(f, \tau')$$

■

0.21 Что такое верхний и нижний интегралы Дарбу для ограниченной функции?

Опр.: Нижним и верхним интегралами Дарбу называются

$$\bar{s}_D(f) = \sup_{\tau} s_D(f, \tau), \quad \underline{S}_D(f) = \inf_{\tau} S_D(f, \tau)$$

0.22 Сформулируйте и докажите критерий Дарбу интегрируемости ограниченной функции

Разность точных граней ограниченной функции f на множестве D_i называется колебанием функции и обозначается:

$$\omega_i = M_i - m_i = \sup_{x, y \in D_i} |f(x) - f(y)| \geq 0$$

используя это обозначение сформулируем теорему

Теор.: Критерий Дарбу интегрируемости функции по Риману.

Пусть f - ограниченная функция, тогда f - интегрируема на жордановом множестве D тогда и только тогда когда выполнено следующее

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \Delta(\tau) < \delta \Rightarrow S_D(f, \tau) - s_D(f, \tau) = \sum_i \omega_i \mu(D_i) < \varepsilon$$

Док-во:

Необходимость: Пусть $f \in \mathcal{R}(D)$, тогда выполнено следующее

$$|I_D(f, \tau, p') - I_D(f, \tau, p'')| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{при } \Delta(\tau) < \delta$$

(доказывается элементарно)

Выбором p интегральная сумма ограниченной функции может быть сделана сколь угодно близкой к нижней (верхней) сумме Дарбу

$$I_D(f, \tau, p') - s_D(f, \tau) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad S_D(f, \tau) - I_D(f, \tau, p'') < \frac{\varepsilon}{3}$$

(также доказывается элементарно)
из этих 3 неравенств следует

$$\begin{aligned}
\varepsilon &> |S_D(f, \tau) - I_D(f, \tau, p'')| + |I_D(f, \tau, p'') - I_D(f, \tau, p')| + \\
&+ |I_D(f, \tau, p') - s_D(f, \tau)| \geq \\
&\geq |S_D(f, \tau) - I_D(f, \tau, p'') + I_D(f, \tau, p'') - I_D(f, \tau, p')| + \\
&+ |I_D(f, \tau, p') - s_D(f, \tau)| = \\
&= |S_D(f, \tau) - I_D(f, \tau, p')| + |I_D(f, \tau, p') - s_D(f, \tau)| \geq \\
&\geq |S_D(f, \tau) - I_D(f, \tau, p') + I_D(f, \tau, p') - s_D(f, \tau)| = \\
&= |S_D(f, \tau) - s_D(f, \tau)| < \varepsilon
\end{aligned}$$

Достаточность: Пусть критерий Дарбу выполнен. Сперва докажем, что $\bar{s}_D(f) = \underline{S}_D(f)$. Пусть это не так, тогда $\bar{s}_D(f) < \underline{S}_D(f)$, в таком случае для какого либо τ

$$s_D(f, \tau) \leq \bar{s}_D(f) < \underline{S}_D(f) \leq S_D(f, \tau)$$

В таком случае можно подобрать такой ε , что критерий выполняться не будет \Rightarrow противоречие.

Теперь пусть $I = \bar{s}_D(f) = \underline{S}_D(f)$

Очевидно, что для любого разбиения τ и системы точек p выполняется

$$s_D(f, \tau) \leq I, I(f, \tau, p) \leq S_D(f, \tau)$$

Принимая во внимание данное неравенство, а также критерий Дарбу можно утверждать что

$$|I_D(f, \tau, p) - I| \leq \varepsilon, \quad \text{причем } \Delta(\tau) < \delta$$

что как раз значит, что функция Интегрируема по Риману на D

■

0.23

0.24 Сформулируйте критерий Дюбуа-Реймона интегрируемости ограниченной функции

Теор.: Критерий Дюбуа-Реймона интегрируемости ограниченной функции. Для любых $\alpha, \nu > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех разбиений τ , удовлетворяющих условию $\Delta(\tau) < \delta$, выполняется

$$\sum_{i: \omega_i \geq \alpha} \mu(D_i) < \nu$$

где $\omega_i = \sup_{x \in D_i} f(x) - \inf_{x \in D_i} f(x)$, а D_i - жорданово множество

0.25 Что такое множество лебеговой меры нуль? В каком случае функция называется непрерывной почти всюду на множестве?

Опр.: Множество $A \subset \mathbb{R}^m$ имеет m -мерную меру Лебега нуль, если для любого $\varepsilon > 0$ существует счетный набор m -мерных полуинтервалов

$$Q_i = [a_i^1; b_i^1) \times \dots \times [a_i^m; b_i^m), \quad i \in \mathbb{N}$$

имеющий сумму мер

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(Q_i) < \varepsilon$$

и объединение которых покрывает A

$$A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Q_i$$

Опр.: Функция f , определенная на множестве D , называется непрерывной на D почти всюду, если существует такое множество A лебеговой меры нуль, что f непрерывна на $D \setminus A$

0.26 Сформулируйте критерий Лебега интегрируемости ограниченной функции

Опр.: Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману. Функция f ограниченная на D , интегрируема на D ровно в том случае, когда она непрерывна на D почти всюду.

0.27 Сформулируйте и докажите свойство линейности интеграла

Св-во: Из того, что $f, g \in \mathcal{R}(D)$ следует, что $f + g \in \mathcal{R}(D)$, причем

$$\int_D (f(x) + g(x))dx = \int_D f(x)dx + \int_D g(x)dx$$

Док-во: Рассмотрим интегральную сумму

$$\begin{aligned} I_D(f + g, \tau, p) &= \sum_i (f + g)(\xi_i) \mu(D_i) = \sum_i f(\xi_i) \mu(D_i) + \sum_i g(\xi_i) \mu(D_i) = \\ &= I_D(f, \tau, p) + I_D(g, \tau, p) \end{aligned}$$

Обе интегральные суммы имеют предел при $\Delta(\tau) \rightarrow 0$, а значит и интегральная сумма от $f + g$ имеет предел. Следовательно $f + g \in \mathcal{R}(D)$ ■

0.28 Сформулируйте и докажите теорему об интегрируемости произведения ограниченных интегрируемых функций

Теор.: Пусть функции f, g ограничены и интегрируемы на D . Покажите, что

$$f \cdot g \in \mathcal{R}(D)$$

Док-во: Воспользуемся критерием Дарбу. Заметим, что

$$f(x)g(x) - f(y)g(y) = (f(x) - f(y)) \cdot g(x) + f(y) \cdot (g(x) - g(y))$$

Сл-но, можно оценить колебание произведения функций на D_i

$$w_i(f \cdot g) = \sup_{x, y \in D_i} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| \leq C_g w_i(f) + C_f w_i(g)$$

где $C_f = \sup |f(x)|$ и $C_g = \sup |g(x)|$. Поэтому $\sum w_i(f \cdot g) \mu(D_i)$ мала при малых $\sum w_i(f) \mu(D_i)$ и $\sum w_i(g) \mu(D_i)$ ■

0.29 Сформулируйте и докажите утверждение об интеграле от модуля функции.

Теор.: Если ограниченная функция f интегрируема на D , то и $|f| \in \mathcal{R}(D)$

Док-во: Поскольку

$$|f(x) - f(y)| \geq |f(x)| - |f(y)|,$$

то колебание функции $w_i(f)$ связано с колебанием функции $|w_i(f)|$ неравенством

$$w_i(f) = \sup_{x, y \in D_i} |f(x) - f(y)| \leq \sup_{x, y \in D_i} ||f(x)| - |f(y)|| = w_i(|f|)$$

Остается воспользоваться критерием Дарбу интегрируемости функции ■

0.30 Сформулируйте и докажите теорему о среднем значении.

Теор.: Пусть f, g ограничены и интегрируемы на D , причем $g \geq 0$. Покажите, что

$$m \int_D g(x)dx \leq \int_D f(x)g(x)dx \leq M \int_D g(x)dx,$$

где $m = \inf_{x \in D} f(x)$ и $M = \sup_{x \in D} f(x)$

Док-во: Произведение ограниченных интегрируемых функций - интегрируемая функция. Остается воспользоваться монотонностью интеграла. ■

0.31 Сформулируйте свойство непрерывности интеграла (о предельном переходе под знаком интеграла).

Теорема. Пусть все функции f_n ограничены и интегрируемы на D , а также $f_n \Rightarrow f$ на D . Тогда функция f будет интегрируема на D и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_D f_n(x) dx = \int_D f(x) dx.$$

0.32 Сформулируйте свойство аддитивности интеграла.

Теорема. Пусть D — жорданово множество, а функция f — ограничена и интегрируема на D . Пусть A и B это дизъюнктные (непересекающиеся) жордановы подмножества D . Тогда:

$$\int_{A \sqcup B} f(x) dx = \int_A f(x) dx + \int_B f(x) dx.$$

0.33 Как вводится понятие заряда на кольце множеств? Покажите, что для заряда справедлива формула включения-исключения.

Определение. Функция ν , определенная на некотором кольце множеств, называется зарядом, если

- а) $\nu(\emptyset) = 0$;
- б) $\nu(A \sqcup B) = \nu(A) + \nu(B)$ (аддитивность).

Таким образом, мера — это неотрицательный заряд.

Пример. Пусть f это ограниченная интегрируемая функция на множестве D . В силу свойства аддитивности интеграла имеем

$$\nu(A) = \int_A f(x) dx.$$

Теорема. Для заряда справедлива формула включений-исключений:

$$\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B) - \nu(A \cap B).$$

Доказательство. Заметим, что $A \cup B = A \sqcup (B \setminus A)$ и $B = (B \setminus A) \sqcup (A \cap B)$.

- С одной стороны имеем

$$\nu(A \cup B) = \nu(A \sqcup (B \setminus A)) = \nu(A) + \nu(B \setminus A).$$

- С другой стороны имеем

$$\nu(A) + \nu(B) - \nu(A \cap B) = \nu(A) + \nu((B \setminus A) \sqcup (A \cap B)) - \nu(A \cap B) = \nu(A) + \nu(B \setminus A) + \nu(A \cap B) - \nu(A \cap B) = \nu(A) + \nu(B \setminus A).$$

То есть оба выражения равны $\nu(A) + \nu(B \setminus A)$, из чего делаем вывод:

$$\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B \setminus A) = \nu(A) + \nu(B) - \nu(A \cap B).$$

■

0.34

0.35

0.36

0.37

0.38

0.39

0.40

0.41

0.42

0.43

0.44

0.45 Дайте определение цилиндрических координат (формулы, область задания, координатные линии, матрица Якоби перехода, якобиан)

Цилиндрические координаты (r, φ, z) в пространстве (x, y, z) вводятся формулами

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$z = z$$

При этом $U = (0; +\infty) \times [0; 2\pi) \times \mathbb{R}$ и $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) | z \in \mathbb{R}\}$ Выколота ось z при этом называется полярной осью. Угол φ называется азимутом или азимутальным углом.

Координатные линии r – лучи, выходящие из точки на полярной оси перпендикулярно полярной оси. Координатные линии φ – окружности с центром на полярной оси, расположенные в плоскостях, перпендикулярных полярной оси. Координатные линии z – прямые, параллельные полярной оси.

Матрица Якоби перехода имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Якобиан равен r .

0.46 Дайте определение сферических координат (формулы, область задания, координатные линии, матрица Якоби перехода, якобиан)

Сферические координаты (r, θ, φ) в пространстве (x, y, z) вводятся формулами

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$

При этом $U = (0; +\infty) \times (0; \pi) \times [0; 2\pi)$ и $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) | z \in \mathbb{R}\}$ Выколота ось z при этом называется полярной осью. Угол θ называется полярным углом, а угол φ называется азимутальным углом.

Координатные линии r – лучи, выходящие из начала координат. Координатные линии θ – полуокружности с центром в начале координат, и концами, расположенными на полярной оси. Координатные линии φ – окружности с центром на полярной оси, расположенные в плоскостях, перпендикулярных полярной оси.

Матрица Якоби перехода имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

Якобиан равен $r^2 \sin \theta$.

0.47

0.48

0.49

0.50

0.51

0.52

0.53

0.54

0.55

0.56

0.57

0.58

0.59

0.60

0.61

0.62

0.63

0.64 Выведите формулу для площади гладкой поверхности в \mathbb{R}^3 , заданной уравнением $z = f(x, y)$, f – непрерывно дифференцируемая функция.

Простейший способ задать поверхность D – это задать её как график функции $f(x, y)$. Параметризацией такой поверхности будет

$$z = f(x, y), (x, y) \in G$$

Получим формулу для её площади. Вычислим матрицу Якоби:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f'_x & f'_y \end{pmatrix}$$

Найдём матрицу Грама:

$$\left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x, y)} \right)^T \cdot \left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x, y)} \right) = \begin{pmatrix} (f'_x)^2 + 1 & f'_x f'_y \\ f'_x f'_y & (f'_y)^2 + 1 \end{pmatrix}$$

и её определитель:

$$((f'_x)^2 + 1)((f'_y)^2 + 1) - (f'_x f'_y)^2 = (f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1$$

Получаем площадь графика функции $z = f(x, y)$

$$\mu(D) = \iint_G \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1} dx dy$$

0.65 Выведите формулу для площади гладкой поверхности вращения в \mathbb{R}^3 , заданной в цилиндрических координатах (r, φ, z) уравнением $z = \rho(z)$, где ρ – непрерывно дифференцируемая функция.

Поверхность D называется поверхностью вращения, если она может быть задана в цилиндрических координатах уравнением

$$r = \rho(z)$$

Параметризация поверхности вращения имеет вид

$$x = \rho(z) \cos \varphi, y = \rho(z) \sin \varphi, z \in [a; b], \varphi \in [0; 2\pi)$$

Получим формулу для площади поверхности вращения. Вычислим матрицу Якоби:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(z, \varphi)} = \begin{pmatrix} \rho'(z) \cos \varphi & -\rho(z) \sin \varphi \\ \rho'(z) \sin \varphi & \rho(z) \cos \varphi \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдём матрицу Грама:

$$\left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(z, \varphi)} \right)^T \cdot \left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(z, \varphi)} \right) = \begin{pmatrix} (\rho'(z))^2 + 1 & 0 \\ 0 & \rho^2(z) \end{pmatrix}$$

и её определитель:

$$((\rho'(z))^2 + 1)\rho^2(z)$$

Получаем площадь поверхности вращения

$$\mu(D) = \iint_G \sqrt{(\rho'(z))^2 + 1} \rho(z) dz d\varphi = \int_a^b d\varphi \int_0^{2\pi} \sqrt{(\rho'(z))^2 + 1} \rho(z) dz = 2\pi \int_a^b \sqrt{(\rho'(z))^2 + 1} \rho(z) dz$$

0.66 Что такое исчерпание $\{D_n\}$ множества $D \subseteq \mathbb{R}^m$? Что можно утверждать в случае, когда D – жорданово множество?

Пусть множество $D \subseteq R^m$ таково, что существует последовательность жордановых множеств $D_n \subseteq D$ такая, что

$$D_1 \subseteq D_2 \subseteq \dots, \text{ а также } D_1 \cup D_2 \cup \dots = D$$

Тогда последовательность $\{D_n\}$ называется *исчерпанием* множества D , а само множество D называется *пределом* возрастающей последовательности $\{D_n\}$.

Теорема. Если D – жорданово, то $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(D_n) = \mu(D)$

Доказательство. Последовательность жордановых множеств $A_n = D \setminus D_n$ убывает и сходится к пустому множеству. ■

0.67

0.68

0.69

0.70

0.71

0.72

0.73

0.74

0.75