

# Второй коллоквиум по МА-2

Денис Козлов

[Telegram](#)

Версия от 17.12.2020 16:39

0.1

0.2

0.3

0.4

0.5 Докажите, что простые множества в  $\mathbb{R}^m$  образуют кольцо

Утв.: Класс всех простых множеств образует кольцо.

Док-во:

1.  $\emptyset = [a; a)$  - пустой полуинтервал является простым множеством.
2.  $E_1 \cup E_2 = E$  - объединение простых множеств является простым множеством. Так как каждое из простых множеств представимо в виде объединения конечного количества полуинтервалов, то их объединение представимо в виде объединения всех полуинтервалов входящих в каждое из простых, а значит является простым множеством.
3.  $E_1 \cap E_2 = E$  - пересечение простых множеств является простым множеством. Пересечение представимо в виде объединения пересечений всех возможных пар из первого и второго множества. Так как пересечение полуинтервалов является полуинтервалом, то пересечение простых множеств, является простым множеством.
4.  $E_1 \setminus E_2 = E$  - разность простых множеств является простым множеством. Пусть есть некоторый полуинтервал  $[a; b)$  покрывающий  $E_1$  и  $E_2$ , тогда  $[a; b) \setminus E_2$  очевидно является простым множеством. В таком случае исходную разность можно записать в виде  $E_1 \cap ([a; b) \setminus E_2)$ , что будет пересечением простых множеств, а значит является полуинтервалом.

■

0.6 Дайте определение внешней меры Жордана в  $\mathbb{R}^m$

Опр.: Пусть  $A \subset \mathbb{R}^m$  - произвольное ограниченное множество. Внешней мерой Жордана множества  $A$  называется

$$\bar{\mu}(A) = \inf_{E \supseteq A} \mu(E),$$

где точная нижняя грань берется по всем простым множествам, содержащим  $A$ .

0.7 Сформулируйте и докажите основные свойства внешней меры Жордана: монотонность и полуаддитивность

Св-во: Монотонность внешней меры означает, что при  $A \subseteq B$  выполняется  $\bar{\mu}(A) \leq \bar{\mu}(B)$ .

Док-во: Обозначим через  $\mathcal{E}_A$  класс простых множеств, покрывающих заданное ограниченное множество  $A$ . Так как  $A \subseteq B$ , то класс  $\mathcal{E}_A$  шире чем  $\mathcal{E}_B$ , а значит в нем найдется простое множество которое не больше любого из  $\mathcal{E}_B$ , а отсюда из определения внешней меры следует, что  $\bar{\mu}(A) \leq \bar{\mu}(B)$

■

Св-во: Полуаддитивностью внешней меры называется

$$\bar{\mu}(A \sqcup B) \leq \bar{\mu}(A) + \bar{\mu}(B),$$

где  $A$  и  $B$  - произвольные ограниченные множества.

Док-во: Для любых  $E_A$  и  $E_B$  покрывающих  $A$  и  $B$  соответственно, верно что  $E_A \cup E_B$  - покрывает  $A \cup B$ . По свойствам меры верно

$$\mu(E_A \cup E_B) \leq \mu(E_A) + \mu(E_B)$$

Далее по определению точной нижней грани, для любого  $\varepsilon > 0$  найдутся такие  $E_A$  и  $E_B$ , что

$$\mu(E_A) \leq \bar{\mu}(A) + \varepsilon, \quad \mu(E_B) \leq \bar{\mu}(B) + \varepsilon$$

Отсюда имеем

$$\bar{\mu}(A \cup B) \leq \mu(E_A \cup E_B) \leq \bar{\mu}(A) + \bar{\mu}(B) + 2\varepsilon$$

Переходя к пределу  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеем

$$\bar{\mu}(A \cup B) \leq \bar{\mu}(A) + \bar{\mu}(B)$$

(Искомое свойство выполняется как частный случай)

■

## 0.8 Что такое измеримое по Жордану (= жорданово) множество? Как определяется его мера? Приведите примеры измеримого и неизмеримого множества

**Опр.:** Ограниченное множество  $A \subset \mathbb{R}^m$  называется *измеримым по Жордану*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists E, E \supseteq A \quad \bar{\mu}(E \setminus A) < \varepsilon$$

\*\*\*ПРОВЕРИТЬ, НАДО ЛИ ЧТО-ТО ДОБАВИТЬ\*\*\*

Заметим, что так как измеримые множества образуют кольцо, а также внешняя мера на кольце измеримых множеств обладает свойством аддитивности, то выполняются все свойства меры, а значит можно дать следующее определение

**Опр.:** Мерой Жордана измеримого множества называется его внешняя мера Жордана.

**Пример:** Любое просто множество является измеримым по Жордану.

**Пример:** Пусть  $Q = \{q_1, q_2, \dots\}$  - множество всех рациональных чисел отрезка  $[0; 1]$  и  $A_n = [0; 1] \setminus \{q_1, \dots, q_n\}$ . Множество  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = [0; 1] \setminus Q$  не является измеримым

## 0.9 Докажите, что измеримые по Жордану множества образуют кольцо

**Утв.:** Измеримые по Жордану множества образуют кольцо

**Док-во:**

1.  $\emptyset$  - пустое множество является простым, а значит измеримо.
2.  $A, B$  - измеримы,  $A \cup B$  - объединение измеримых множеств измеримо.

Пусть  $A_i \subseteq E_i$  и  $\bar{\mu}(E_i \setminus A_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ , при  $i = 1, 2$ .

Тогда так как

$$(E_1 \cup E_2) \setminus (A_1 \cup A_2) \subseteq (E_1 \setminus A_1) \cup (E_2 \setminus A_2)$$

в силу монотонности имеем

$$\bar{\mu}((E_1 \cup E_2) \setminus (A_1 \cup A_2)) \leq \bar{\mu}((E_1 \setminus A_1) \cup (E_2 \setminus A_2)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

а из этого следует, что объединение измеримо.

3.  $A, B$  - измеримы,  $A \cap B$  - пересечение измеримых множеств измеримо.

Проведем рассуждения аналогично предыдущему пункту.

Так как

$$(E_1 \cap E_2) \setminus (A_1 \cap A_2) \subseteq (E_1 \setminus A_1) \cup (E_2 \setminus A_2)$$

в силу монотонности имеем

$$\bar{\mu}((E_1 \cap E_2) \setminus (A_1 \cap A_2)) \leq \bar{\mu}((E_1 \setminus A_1) \cup (E_2 \setminus A_2)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

а из этого следует, что пересечение измеримо.

4.  $A, B$  - измеримы,  $A \setminus B$  - разность измеримых множеств измерима.

Пусть  $A_i \subseteq E_i$ , при  $i = 1, 2$  и простые множества  $E_i$  таковы, что  $\bar{\mu}(E_1 \setminus A_1) < \frac{\varepsilon}{2}$ , а  $E_2 \setminus A_2 \subseteq E'_2$ , где  $\mu(E'_2) < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Обозначим

$$A = A_1 \setminus A_2, \text{ и } E = (E_1 \setminus E_2) \cup E'_2$$

Докажем, что  $A \subseteq E$ . Из всех возможных вариантов рассмотрим следующий. Пусть  $x \in A_1$  и  $x \notin A_2$ . Тогда  $x \in E_1$ , а если  $x \in E_2$ , то  $x \in E'_2$ . Все прочие случаи тривиальны.

Теперь докажем, что

$$(E \setminus A) \subseteq (E_1 \setminus A_1) \cup E'_2$$

Снова из всех возможных вариантов рассмотрим следующее. Пусть  $x \in E$  и  $x \notin A$ . Отсюда пусть  $x \in E_1$  и  $x \notin E_2$ . Если  $x \in A_1$ , то либо  $x \in A$ , что противоречит первоначальному условию, либо  $x \in A_1 \cap A_2$ , что также невозможно, так как  $x \notin E_2$ . Отсюда следует, что  $x \notin A_1$ . Все прочие случаи тривиальны.

Далее имеем

$$\bar{\mu}(E \setminus A) \leq \bar{\mu}(E_1 \setminus A_1) + \bar{\mu}(E'_2) = \varepsilon$$

Из чего следует, что разность измеримых множеств измерима.

Все необходимые условия выполнены а это значит, что измеримые множества образуют кольцо. ■

## 0.10 Докажите, что множество измеримо по Жордану ровно тогда, когда его граница имеет Жорданову меру нуль

\*\*\*МУТНАЯ ТЕМА, ЕСТЬ ВОПРОСЫ\*\*\*

**Теор.:** Пусть  $A \subseteq \mathbb{R}^m$  - произвольное множество, тогда множество измеримо тогда и только тогда, когда  $\bar{\mu}(\partial A) = 0$ , где  $\partial A$  - граница множества  $A$ .

**Док-во:**

$\Rightarrow$  Пусть множество  $A$  - измеримо по Жордану. Пусть  $E_1 \subseteq A$  - простое множество, такое что  $\mu(E_1) = \underline{\mu}(A)$ , а также  $E_2 \supseteq A$  - такое, что  $\mu(E_2) = \bar{\mu}(A)$

По определению границы знаем, что  $\partial A \subseteq E_2 \setminus E_1$ . Можно заметить, что так как  $E_1 \subseteq A \subseteq E_2$ , то  $E_2 \setminus E_1 = (E_2 \setminus A) \cup (A \setminus E_1)$

## 0.11 Что такое разбиение Жорданова множества? Как вводится произведение разбиений? В каком случае говорят, что одно разбиение является измельчением другого?

Пусть  $E \supseteq D$  - простое множество покрывающее  $D$ . Пусть  $E = \sqcup Q_i$ , где  $Q_i$  -  $m$ -мерные полуинтервалы составляющие простое множество  $E$ .

**Опр.:** Разбиением  $\tau$  множества  $D$ , соответствующим данному простому множеству  $E$ , назовем представление  $D$  в виде

$$D = \sqcup (D \cap Q_i) = \sqcup D_i, \quad D_i = D \cap Q_i$$

**Опр.:** Произведение разбиений  $\tau = \{D_i \mid i = 1, \dots, n\}$  и  $\tau' = \{D'_j \mid j = 1, \dots, k\}$  называется система множеств

$$\tau \cdot \tau' = \{D_i \cap D'_j \mid i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, k\}$$

**Опр.:** Разбиение  $\tau$  называется *измельчением* разбиения  $\tau'$  (пишется  $\tau \leq \tau'$ ), если для любого  $D'_j \in \tau'$  найдутся такие  $D_1, \dots, D_m \in \tau$ , что

$$D'_j = D_1 \sqcup \dots \sqcup D_m$$

## 0.12 Докажите, что произведение разбиений является измельчением и одного, и другого разбиения

**Утв.:** Пусть  $\tau$  и  $\tau'$  - произвольные разбиения некоторого множества, тогда  $\tau \cdot \tau'$  является измельчением  $\tau$  и  $\tau'$

**Док-во:** Пусть  $D_i \in \tau$  и  $D'_j \in \tau'$ , тогда так как

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad D_i = D_i \cap D = D_i \cap \left( \bigsqcup_j D_j \right) = \bigsqcup_j (D_i \cap D'_j)$$

По определению произведения  $D_i \cap D'_j \in \tau \cdot \tau'$ , а значит по определению измельчения  $\tau \cdot \tau'$  является измельчением  $\tau$  ( $\tau'$  также является измельчением; доказывается симметрично) ■

**0.13 Что такое диаметр разбиения? Покажите, что при измельчении разбиения диаметр не увеличивается.**

**Опр.:** Пусть  $\tau$  - некоторое разбиение, тогда *диаметром* разбиения называют

$$\Delta(\tau) = \max_i \sup_{x, y \in D_i} |x - y|$$

**Утв.:** При измельчении разбиения его диаметр не увеличивается.

**Док-во:** Пусть  $\tau$  и  $\tau'$  - некоторые разбиения, причем  $\tau \leq \tau'$

Тогда пусть  $D'_i \in \tau'$  - некоторое множество. По определению измельчения

$$D'_i = D_{i_1} \sqcup \dots \sqcup D_{i_k}$$

где  $D_{i_1}, \dots, D_{i_k} \in \tau$ . Очевидно, что так как  $\forall j D_{i_j} \in D'_i$ , то диаметр  $D_{i_j}$  не превосходит диаметр  $D'_i$ . Данное утверждение верно для любого  $i$ , а значит, что при измельчении разбиения диаметр не увеличивается. ■

**0.14 Сформулируйте определение интеграла Римана от функции по жордановому множеству. Что такое интегрируемая функция?**

Пусть  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  - заданная на  $D$  числовая функция и  $\tau = \{D_i\}$  - разбиение множества  $D$ . Выберем произвольно точки  $\xi_i \in D_i$ . Систему выбранных точек будем обозначать  $p = \{\xi_i\}$

**Опр.:** *Интегральной суммой* функции  $f$  на жордановом множестве  $D$ , соответствующей разбиению  $\tau$  и выбору точек  $p$ , называется

$$I_D(f, \tau, p) = \sum_i f(\xi_i) \mu(D_i)$$

**Опр.:** Функция  $f$  называется *интегрируемой по Риману* на  $D$ , если существует такое число  $I$ , что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad |I_D(f, \tau, p) - I| < \varepsilon \text{ при } \Delta(\tau) < \delta$$

Причем это число  $I$  называется *интегралом Римана* функции  $f$  на  $D$  и обозначается

$$I = \int_D f(x) dx$$

Множество всех функций, интегрируемых по Риману на жордановом множестве  $D$ , обозначается  $\mathcal{R}(D)$

**0.15 Сформулируйте и докажите критерий Коши интегрируемости функции по Риману.**

**Теор.:** Пусть  $f$  - некоторая функция. Если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta > 0$ , что при любом выборе разбиений  $\tau, \tau'$ , с диаметрами  $\Delta(\tau), \Delta(\tau')$  и при любом выборе систем точек  $p, p'$  выполняется

$$|I_D(f, \tau, p) - I_D(f, \tau', p')| < \varepsilon,$$

то функция интегрируема по Риману.

\*\*\*ПРОВЕРИТЬ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО\*\*\*

**Док-во:**

$\Leftarrow$  Пусть  $f \in \mathcal{R}(D)$ , тогда существует  $I$ , такое что

$$|I_D(f, \tau, p) - I| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|I_D(f, \tau', p') - I| < \frac{\varepsilon}{2}$$

отсюда имеем

$$|I_D(f, \tau, p) - I_D(f, \tau', p')| \leq |I_D(f, \tau, p) - I| + |I_D(f, \tau', p') - I| < \varepsilon$$

$\Rightarrow$  Возьмем последовательности  $\tau_n$  и  $p_n$ , причем  $\Delta(\tau_n) \rightarrow 0$

С помощью данных последовательностей образуем последовательность интегральных сумм  $I_D(f, \tau_n, p_n)$ .

Теперь положим, что выполнен критерий Коши

$$|I_D(f, \tau_m, p_m) - I_D(f, \tau_n, p_n)| < \varepsilon$$

из чего следует, что  $I_D(f, \tau_n, p_n) \rightarrow I$ , где  $I$  - некоторое число.

Теперь в исходное неравенство подставим  $I_D(f, \tau_n, p_n)$  и устримим его к  $I$

$$|I_D(f, \tau, p) - I_D(f, \tau_n, p_n)| < \varepsilon$$

$$|I_D(f, \tau, p) - I| < \varepsilon$$

из чего следует, что функция интегрируема по Риману. ■

## 0.16

### 0.17 Покажите, что на жордановом множестве меры нуль любая функция интегрируема

Имеем  $D$  - жорданово множество, причем  $\mu(D) = 0$

Рассмотрим некоторое разбиение  $\tau = \{D_i\}$

Очевидно, что так как  $\forall i D_i \subseteq D$ , то  $\mu(D_i) = 0$

Теперь пусть задана некоторая система точек  $p$

Рассмотрим интегральную сумму

$$I_D(f, \tau, p) = \sum_i f(\xi_i) \mu(D_i)$$

отсюда заметим, что так как  $\forall i \mu(D_i) = 0$ , то и интегральная сумма также будет равна 0, вне зависимости от функции. Теперь пусть имеем  $I = 0$ , рассмотрим

$$|I_D(f, \tau, p) - I| = |0 - 0| < \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$$

Таким образом любая функция  $f$  интегрируема на жордановом множестве меры нуль, причем значение интеграла равно нулю.

### 0.18 Выведите формулу для интеграла константы

$$\int_D \dots \int C dx_1 \dots dx_n = C \mu(D), \quad \text{где } C - \text{константа}$$

Док-во: Пусть имеем некоторое разбиение  $\tau$  и систему точек  $p$ , рассмотрим интегральную сумму

$$I_D(f, \tau, p) = \sum_i f(\xi_i) \mu(D_i) = C \sum_i \mu(D_i)$$

Так как  $\forall i \neq j, D_i \cap D_j = \emptyset$ , а также в силу аддитивности меры имеем

$$C \sum_i \mu(D_i) = C \mu(D)$$

очевидно, что в данном случае

$$I = \int_D \dots \int C dx_1 \dots dx_n = C \mu(D)$$
■

### 0.19 Дайте определение верхней и нижней сумм Дарбу для ограниченной функции

Пусть  $\tau = \{D_i\}$  - некоторое разбиение жорданова множества  $D$ . Предполагая функцию  $f$  ограниченной на  $D$ , введем следующие обозначения

$$m_i = \inf_{x \in D_i} f(x), \quad M_i = \sup_{x \in D_i} f(x)$$

Опр.: Нижней и верхней суммами Дарбу ограниченной функции  $f$  на  $D$ , соответствующими разбиению  $\tau$ , называются

$$s_D(f, \tau) = \sum_i m_i \mu(D_i), \quad S_D(f, \tau) = \sum_i M_i \mu(D_i)$$

## 0.20 Сформулируйте и докажите основные свойства сумм Дарбу

\*\*\*ПРОВЕРИТЬ ВСЕ ЛИ НУЖНЫЕ СВОЙСТВА ТУТ\*\*\*

**Св-во:** При измельчении разбиения  $\tau \leq \tau'$  нижняя сумма Дарбу не уменьшается  $s_D(f, \tau) \geq s_D(f, \tau')$

**Док-во:** Рассмотрим  $D'_j = D_{j1} \sqcup \dots \sqcup D_{jk}$ . Тогда  $\forall i, m'_j \leq m_{ji}$  и в силу аддитивности меры  $\mu(D'_j) = \mu(D_{j1}) + \dots + \mu(D_{jk})$   
Из этого следует, что

$$m'_j \mu(D'_j) \leq m_{j1} \mu(D_{j1}) + \dots + m_{jk} \mu(D_{jk})$$

Данное неравенство верно при всех  $j$ , из чего как и раз и следует искомое. ■

**Св-во:** При измельчении разбиения  $\tau \leq \tau'$  верхняя сумма Дарбу не увеличивается  $S_D(f, \tau) \leq S_D(f, \tau')$

**Док-во:** Аналогично предыдущему пункту. ■

**Св-во:** Для любых разбиений  $\tau$  и  $\tau'$  выполняется  $s_D(f, \tau) \leq S_D(f, \tau')$

**Док-во:** Рассмотрим измельчение  $\tau'' = \tau \cdot \tau'$

Из двух предыдущих пунктов имеем

$$s_D(f, \tau) \leq s_D(f, \tau'')$$

$$S_D(f, \tau') \geq S_D(f, \tau'')$$

так как  $s_D \leq S_D$  при каком либо фиксированном разбиении, а также из этих двух неравенств имеем

$$s_D(f, \tau) \leq s_D(f, \tau'') \leq S_D(f, \tau'') \leq S_D(f, \tau')$$

■

## 0.21 Что такое верхний и нижний интегралы Дарбу для ограниченной функции?

**Опр.:** Нижним и верхним интегралами Дарбу называются

$$\bar{s}_D(f) = \sup_{\tau} s_D(f, \tau), \quad \underline{S}_D(f) = \inf_{\tau} S_D(f, \tau)$$

## 0.22 Сформулируйте и докажите критерий Дарбу интегрируемости ограниченной функции

Разность точных граней ограниченной функции  $f$  на множестве  $D_i$  называется колебанием функции и обозначается:

$$\omega_i = M_i - m_i = \sup_{x, y \in D_i} |f(x) - f(y)| \geq 0$$

используя это обозначение сформулируем теорему

**Теор.:** Критерий Дарбу интегрируемости функции по Риману.

Пусть  $f$  - ограниченная функция, тогда  $f$  - интегрируема на жордановом множестве  $D$  тогда и только тогда когда выполнено следующее

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \Delta(\tau) < \delta \Rightarrow S_D(f, \tau) - s_D(f, \tau) = \sum_i \omega_i \mu(D_i) < \varepsilon$$

**Док-во:**

**Необходимость:** Пусть  $f \in \mathcal{R}(D)$ , тогда выполнено следующее

$$|I_D(f, \tau, p') - I_D(f, \tau, p'')| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{при } \Delta(\tau) < \delta$$

(доказывается элементарно)

Выбором  $p$  интегральная сумма ограниченной функции может быть сделана сколь угодно близкой к нижней (верхней) сумме Дарбу

$$I_D(f, \tau, p') - s_D(f, \tau) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad S_D(f, \tau) - I_D(f, \tau, p'') < \frac{\varepsilon}{3}$$

(также доказывается элементарно)  
из этих 3 неравенств следует

$$\begin{aligned}
\varepsilon &> |S_D(f, \tau) - I_D(f, \tau, p'')| + |I_D(f, \tau, p'') - I_D(f, \tau, p')| + \\
&+ |I_D(f, \tau, p') - s_D(f, \tau)| \geq \\
&\geq |S_D(f, \tau) - I_D(f, \tau, p'') + I_D(f, \tau, p'') - I_D(f, \tau, p')| + \\
&+ |I_D(f, \tau, p') - s_D(f, \tau)| = \\
&= |S_D(f, \tau) - I_D(f, \tau, p')| + |I_D(f, \tau, p') - s_D(f, \tau)| \geq \\
&\geq |S_D(f, \tau) - I_D(f, \tau, p') + I_D(f, \tau, p') - s_D(f, \tau)| = \\
&= |S_D(f, \tau) - s_D(f, \tau)| < \varepsilon
\end{aligned}$$

**Достаточность:** Пусть критерий Дарбу выполнен. Сперва докажем, что  $\bar{s}_D(f) = \underline{S}_D(f)$ . Пусть это не так, тогда  $\bar{s}_D(f) < \underline{S}_D(f)$ , в таком случае для какого либо  $\tau$

$$s_D(f, \tau) \leq \bar{s}_D(f) < \underline{S}_D(f) \leq S_D(f, \tau)$$

В таком случае можно подобрать такой  $\varepsilon$ , что критерий выполняться не будет  $\Rightarrow$  противоречие.

Теперь пусть  $I = \bar{s}_D(f) = \underline{S}_D(f)$

Очевидно, что для любого разбиения  $\tau$  и системы точек  $p$  выполняется

$$s_D(f, \tau) \leq I, I(f, \tau, p) \leq S_D(f, \tau)$$

Принимая во внимание данное неравенство, а также критерий Дарбу можно утверждать что

$$|I_D(f, \tau, p) - I| \leq \varepsilon, \quad \text{причем } \Delta(\tau) < \delta$$

что как раз значит, что функция Интегрируема по Риману на  $D$

■

## 0.23

### 0.24 Сформулируйте критерий Дюбуа-Реймона интегрируемости ограниченной функции

**Теор.:** Критерий Дюбуа-Реймона интегрируемости ограниченной функции. Для любых  $\alpha, \nu > 0$  найдется такое  $\delta > 0$ , что для всех разбиений  $\tau$ , удовлетворяющих условию  $\Delta(\tau) < \delta$ , выполняется

$$\sum_{i: \omega_i \geq \alpha} \mu(D_i) < \nu$$

где  $\omega_i = \sup_{x \in D_i} f(x) - \inf_{x \in D_i} f(x)$ , а  $D_i$  - жорданово множество

### 0.25 Что такое множество лебеговой меры нуль? В каком случае функция называется непрерывной почти всюду на множестве?

**Опр.:** Множество  $A \subset \mathbb{R}^m$  имеет  $m$ -мерную меру Лебега нуль, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует счетный набор  $m$ -мерных полуинтервалов

$$Q_i = [a_i^1; b_i^1) \times \dots \times [a_i^m; b_i^m), \quad i \in \mathbb{N}$$

имеющий сумму мер

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(Q_i) < \varepsilon$$

и объединение которых покрывает  $A$

$$A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Q_i$$

**Опр.:** Функция  $f$ , определенная на множестве  $D$ , называется непрерывной на  $D$  почти всюду, если существует такое множество  $A$  лебеговой меры нуль, что  $f$  непрерывна на  $D \setminus A$

## 0.26 Сформулируйте критерий Лебега интегрируемости ограниченной функции

**Опр.:** Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману. Функция  $f$  ограниченная на  $D$ , интегрируема на  $D$  ровно в том случае, когда она непрерывна на  $D$  почти всюду.

## 0.27 Сформулируйте и докажите свойство линейности интеграла

**Св-во:** Из того, что  $f, g \in \mathcal{R}(D)$  следует, что  $f + g \in \mathcal{R}(D)$ , причем

$$\int_D (f(x) + g(x))dx = \int_D f(x)dx + \int_D g(x)dx$$

**Док-во:** Рассмотрим интегральную сумму

$$\begin{aligned} I_D(f + g, \tau, p) &= \sum_i (f + g)(\xi_i) \mu(D_i) = \sum_i f(\xi_i) \mu(D_i) + \sum_i g(\xi_i) \mu(D_i) = \\ &= I_D(f, \tau, p) + I_D(g, \tau, p) \end{aligned}$$

Обе интегральные суммы имеют предел при  $\Delta(\tau) \rightarrow 0$ , а значит и интегральная сумма от  $f + g$  имеет предел. Следовательно  $f + g \in \mathcal{R}(D)$  ■

## 0.28 Сформулируйте и докажите теорему об интегрируемости произведения ограниченных интегрируемых функций

**Теор.:** Пусть функции  $f, g$  ограничены и интегрируемы на  $D$ . Покажите, что

$$f \cdot g \in \mathcal{R}(D)$$

**Док-во:** Воспользуемся критерием Дарбу. Заметим, что

$$f(x)g(x) - f(y)g(y) = (f(x) - f(y)) \cdot g(x) + f(y) \cdot (g(x) - g(y))$$

Сл-но, можно оценить колебание произведения функций на  $D_i$

$$w_i(f \cdot g) = \sup_{x, y \in D_i} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| \leq C_g w_i(f) + C_f w_i(g)$$

где  $C_f = \sup |f(x)|$  и  $C_g = \sup |g(x)|$ . Поэтому  $\sum w_i(f \cdot g) \mu(D_i)$  мала при малых  $\sum w_i(f) \mu(D_i)$  и  $\sum w_i(g) \mu(D_i)$  ■

## 0.29 Сформулируйте и докажите утверждение об интеграле от модуля функции.

**Теор.:** Если ограниченная функция  $f$  интегрируема на  $D$ , то и  $|f| \in \mathcal{R}(D)$

**Док-во:** Поскольку

$$|f(x) - f(y)| \geq |f(x)| - |f(y)|,$$

то колебание функции  $w_i(f)$  связано с колебанием функции  $|w_i(f)|$  неравенством

$$w_i(f) = \sup_{x, y \in D_i} |f(x) - f(y)| \leq \sup_{x, y \in D_i} ||f(x)| - |f(y)|| = w_i(|f|)$$

Остается воспользоваться критерием Дарбу интегрируемости функции ■

## 0.30 Сформулируйте и докажите теорему о среднем значении.

**Теор.:** Пусть  $f, g$  ограничены и интегрируемы на  $D$ , причем  $g \geq 0$ . Покажите, что

$$m \int_D g(x)dx \leq \int_D f(x)g(x)dx \leq M \int_D g(x)dx,$$

где  $m = \inf_{x \in D} f(x)$  и  $M = \sup_{x \in D} f(x)$

**Док-во:** Произведение ограниченных интегрируемых функций - интегрируемая функция. Остается воспользоваться монотонностью интеграла. ■



**0.31 Сформулируйте свойство непрерывности интеграла (о предельном переходе под знаком интеграла).**

**Теорема.** Пусть все функции  $f_n$  ограничены и интегрируемы на  $D$ , а также  $f_n \Rightarrow f$  на  $D$ . Тогда функция  $f$  будет интегрируема на  $D$  и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_D f_n(x) dx = \int_D f(x) dx.$$

**0.32 Сформулируйте свойство аддитивности интеграла.**

**Теорема.** Пусть  $D$  — жорданово множество, а функция  $f$  — ограничена и интегрируема на  $D$ . Пусть  $A$  и  $B$  это дизъюнктные (непересекающиеся) жордановы подмножества  $D$ . Тогда:

$$\int_{A \sqcup B} f(x) dx = \int_A f(x) dx + \int_B f(x) dx.$$

**0.33 Как вводится понятие заряда на кольце множеств? Покажите, что для заряда справедлива формула включения-исключения.**

**Определение.** Функция  $\nu$ , определенная на некотором кольце множеств, называется зарядом, если

- а)  $\nu(\emptyset) = 0$ ;
- б)  $\nu(A \sqcup B) = \nu(A) + \nu(B)$  (аддитивность).

Таким образом, мера — это неотрицательный заряд.

*Пример.* Пусть  $f$  это ограниченная интегрируемая функция на множестве  $D$ . В силу свойства аддитивности интеграла имеем

$$\nu(A) = \int_A f(x) dx.$$

**Теорема.** Для заряда справедлива формула включений-исключений:

$$\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B) - \nu(A \cap B).$$

*Доказательство.* Заметим, что  $A \cup B = A \sqcup (B \setminus A)$  и  $B = (B \setminus A) \sqcup (A \cap B)$ .

- С одной стороны имеем

$$\nu(A \cup B) = \nu(A \sqcup (B \setminus A)) = \nu(A) + \nu(B \setminus A).$$

- С другой стороны имеем

$$\nu(A) + \nu(B) - \nu(A \cap B) = \nu(A) + \nu((B \setminus A) \sqcup (A \cap B)) - \nu(A \cap B) = \nu(A) + \nu(B \setminus A) + \nu(A \cap B) - \nu(A \cap B) = \nu(A) + \nu(B \setminus A).$$

То есть оба выражения равны  $\nu(A) + \nu(B \setminus A)$ , из чего делаем вывод:

$$\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B \setminus A) = \nu(A) + \nu(B) - \nu(A \cap B).$$

■

0.34

0.35

0.36

0.37

0.38

0.39

0.40

0.41

0.42

0.43

0.44

**0.45 Дайте определение цилиндрических координат (формулы, область задания, координатные линии, матрица Якоби перехода, якобиан)**

Цилиндрические координаты  $(r, \varphi, z)$  в пространстве  $(x, y, z)$  вводятся формулами

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$z = z$$

При этом  $U = (0; +\infty) \times [0; 2\pi) \times \mathbb{R}$  и  $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) | z \in \mathbb{R}\}$  Выколота ось  $z$  при этом называется полярной осью. Угол  $\varphi$  называется азимутом или азимутальным углом.

Координатные линии  $r$  – лучи, выходящие из точки на полярной оси перпендикулярно полярной оси. Координатные линии  $\varphi$  – окружности с центром на полярной оси, расположенные в плоскостях, перпендикулярных полярной оси. Координатные линии  $z$  – прямые, параллельные полярной оси.

Матрица Якоби перехода имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Якобиан равен  $r$ .

**0.46 Дайте определение сферических координат (формулы, область задания, координатные линии, матрица Якоби перехода, якобиан)**

Сферические координаты  $(r, \theta, \varphi)$  в пространстве  $(x, y, z)$  вводятся формулами

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$

При этом  $U = (0; +\infty) \times (0; \pi) \times [0; 2\pi)$  и  $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) | z \in \mathbb{R}\}$  Выколота ось  $z$  при этом называется полярной осью. Угол  $\theta$  называется полярным углом, а угол  $\varphi$  называется азимутальным углом.

Координатные линии  $r$  – лучи, выходящие из начала координат. Координатные линии  $\theta$  – полуокружности с центром в начале координат, и концами, расположенными на полярной оси. Координатные линии  $\varphi$  – окружности с центром на полярной оси, расположенные в плоскостях, перпендикулярных полярной оси.

Матрица Якоби перехода имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

Якобиан равен  $r^2 \sin \theta$ .

0.47

0.48

0.49

0.50

0.51

0.52

0.53

0.54

0.55

0.56

0.57

0.58

0.59

0.60

0.61

0.62

0.63

**0.64 Выведите формулу для площади гладкой поверхности в  $\mathbb{R}^3$ , заданной уравнением  $z = f(x, y)$ ,  $f$  – непрерывно дифференцируемая функция.**

Простейший способ задать поверхность  $D$  – это задать её как график функции  $f(x, y)$ . Параметризацией такой поверхности будет

$$z = f(x, y), (x, y) \in G$$

Получим формулу для её площади. Вычислим матрицу Якоби:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f'_x & f'_y \end{pmatrix}$$

Найдём матрицу Грама:

$$\left( \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x, y)} \right)^T \cdot \left( \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x, y)} \right) = \begin{pmatrix} (f'_x)^2 + 1 & f'_x f'_y \\ f'_x f'_y & (f'_y)^2 + 1 \end{pmatrix}$$

и её определитель:

$$((f'_x)^2 + 1)((f'_y)^2 + 1) - (f'_x f'_y)^2 = (f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1$$

Получаем площадь графика функции  $z = f(x, y)$

$$\mu(D) = \iint_G \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1} dx dy$$

0.65  
0.66  
0.67  
0.68  
0.69  
0.70  
0.71  
0.72  
0.73  
0.74  
0.75