Математический Анализ - 2

Серёжа Рахманов | telegram, website
Максим Николаев | telegram

Версия от 08.09.2020 18:22

Содержание

1 Лекция 1 - 01.09.2020 - Ряды

1.1 Определение ряда

Определение 1. Пусть a_n – последовательность, т.е. $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Формальная бесконечная сумма: $a_1+a_2+a_3+\dots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется рядом. $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n$ – частичная сумма, сумма ряда: $S = \lim\limits_{N\to\infty} S_N$

Возможны 3 случая:

1. $\exists S \in \mathbb{R}$
2. $\exists S = \infty$
3. $\nexists S$

В первом случае говорят, что ряд сходится, иначе – что ряд расходится.

Пример.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 0 = 0+0+\dots+0 = 0$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1 = 1+1+\dots+1 = \infty$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1+1-\dots$ не существует

Определение 2. Если ряд сходится, т.е. $S_N \to S$ при $N \to \infty$, то $S - S_N = r_N$ – остаток ряда

$r_N = \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} a_n$, $r_N \to 0$ при $N \to \infty$

1.2 Необходимое условие сходимости

Замечание. Если ряд сходится, то $a_n \to 0$

Доказательство. $a_n = S_n - S_{n-1} \to 0$, т.к. $S_n \to S$ и $S_{n-1} \to S$ ∎

1.3 Критерий Коши

Определение 3. a_n называется фундаментальной, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > m > N \implies |S_n - S_m| < \varepsilon$

Теорема 1.1. *S_n – сходится $\Leftrightarrow$ S_n – фундаментальная*

Доказательство. $S_n - S_m = \sum\limits_{k=m+1}^{n} a_k$ Тогда $\sum a_n$ – сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > m > N\ |a_{m+1}+a_{m+2}+\dots+a_n| < \varepsilon$ ∎

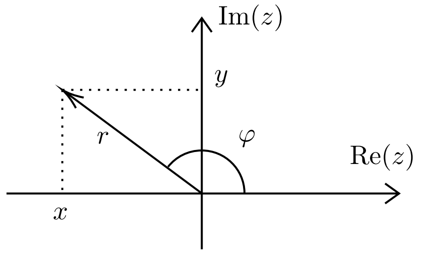
Пример.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

   Заметим, что $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum\limits_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1} \to 1$

   Этот ряд сходится при $N \to \infty$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

2. $z \in \mathbb{C}$, $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$



Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots$

$S_N = 1 + z + z^2 + \dots + z^N = \dfrac{1 - z^{N+1}}{1 - z}$

Ряд сходится $\Leftrightarrow |z| < 1$

$|z| < 1 \Rightarrow z^n \to 0$, $S_N = \dfrac{1 - z^{N+1}}{1 - z} \to \dfrac{1}{1 - z}$

1.4 Положительные ряды

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \geqslant 0$, $S_n \uparrow$, т.к. $S_{n+1} \geqslant S_n$

Возможны 2 случая:

1. $\exists S \in \mathbb{R}$
2. $\exists S = \infty$

Обозначение 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ – ряд сходится, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ – ряд расходится.

1.5 Признаки сравнения

1. Сравнение с помощью неравенства.

   $a_n \leqslant b_n$ при всех $n \geqslant n_0$

   Ряд $\sum b_n$ сходится $\implies$ ряд $\sum a_n$ сходится

   Ряд $\sum a_n$ расходится $\implies$ ряд $\sum b_n$ расходится

2. Сравнение отношений.

   $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ при всех $n \geqslant n_0$

   Ряд $\sum b_n$ сходится $\implies$ ряд $\sum a_n$ сходится

   Ряд $\sum a_n$ расходится $\implies$ ряд $\sum b_n$ расходится

   Доказательство.

   $a_{n_0+1} \leqslant \dfrac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+1}$

   $a_{n_0+2} \leqslant \dfrac{a_{n_0+1}}{b_{n_0+1}} \cdot b_{n_0+2} \leqslant \dfrac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+2}$

   $\vdots$

   $a_{n_0+k} \leqslant \dfrac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+k} \implies \sum\limits_{n=n_0}^{N} a_n \leqslant \dfrac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot \sum\limits_{n=n_0}^{N} b_n$ ■

3. Сравнение с помощью предела.

   $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} \in (0; +\infty) \implies$ сходимость $\sum a_n \iff$ сходимость $\sum b_n$

   Доказательство.

   $c = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} > 0$

   $\forall \varepsilon\ \exists n_0 :\ c - \varepsilon \leqslant \dfrac{a_n}{b_n} \leqslant c + \varepsilon, \forall n \geqslant n_0$

   Возьмём $\varepsilon : c - \varepsilon > 0 \implies (c - \varepsilon) \cdot b_n \leqslant a_n \leqslant (c + \varepsilon) \cdot b_n$

   Сходимость следует из правой части неравенства, а расходимость из левой. ■

1.6 Отсутствие универсального ряда сравнения

Предложение. Не существует ряда $\sum c_n$, $c_n > 0$:

1) $\dfrac{a_n}{c_n} \to 0 \implies$ ряд $\sum a_n$ сходится.

2) $\dfrac{b_n}{c_n} \to \infty \implies$ ряд $\sum b_n$ расходится.

Доказательство.

1. Если ряд $\sum c_n$ расходится, то пусть $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} c_n \to \infty, S_0 = 0$, тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\underbrace{\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}}}_{a_n})$ расходится так как:

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{N} (\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}}) = \sqrt{S_1} - \sqrt{S_0} + \sqrt{S_2} - \sqrt{S_1} + \cdots + \sqrt{S_N} - \sqrt{S_{N-1}} = \sqrt{S_N} - \sqrt{S_0} = \sqrt{S_N} \to \sqrt{S}$

   (b) $\dfrac{\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}}}{c_n} = \dfrac{\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}}}{S_n - S_{n-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}}} \implies \dfrac{a_n}{c_n} \to 0$

   Ряд расходится, но по предположению сходится, получили противоречие.

2. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, то рассмотрим r_n - его n-ный остаток, тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\underbrace{\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}}_{b_n})$, $r_0 = S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, так как:

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{N} (\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}) = \sqrt{r_0} - \sqrt{r_1} + \sqrt{r_1} - \sqrt{r_2} + \cdots + \sqrt{r_{N-1}} - \sqrt{r_N} = \sqrt{r_0} - \sqrt{r_N} = \sqrt{S} - \sqrt{r_N} \to \sqrt{S}$, т.к. $r_N \to 0$

   (b) $\dfrac{\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}}{c_n} = \dfrac{\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}}{r_{n-1} - r_n} = \dfrac{1}{\sqrt{r_{n-1}} + \sqrt{r_n}} \to \infty$, т.к. $\sqrt{r_{n-1}} \to 0$ и $\sqrt{r_n} \to 0$

   Ряд сходится, но по предположению расходится, получили противоречие.

$\blacksquare$

2 Лекция 2 - 08.09.2020 - Положительные ряды

2.1 Признак Лобачевского-Коши

Предложение. Пусть $a_n > 0$ и $a_n \downarrow$

Тогда ряды $\sum a_n$ и $\sum 2^n \cdot a_{2^n}$ ведут себя одинаково

Доказательство. $a_1 + (a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + \dots + a_8) + \dots$

$a_2 \geqslant a_2 \geqslant a_1$

$2a_2 \geqslant a_3 + a_4 \geqslant 2a_4$

$4a_4 \geqslant a_5 + \dots + a_8 \geqslant 4a_8$

$\vdots$

$$a_1 + \sum_{n=0}^{m-1} 2^n a_{2n} \geqslant \sum_{n=1}^{2^m} a_n \geqslant a_1 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{m} 2^n a_{2n}$$

■

Пример. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ – обобщённый гармонический ряд, $p > 0$

$a_n = \dfrac{1}{n^p} \downarrow \qquad a_{2^n} = \dfrac{1}{(2^n)^p}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n$$

Это сумма геометрической прогрессии со знаменателем $q = \dfrac{1}{2^{p-1}}$

$q < 1 \iff p > 1$ – ряды сходятся, например: $\sum \dfrac{1}{n^{1,001}}, \ \sum \dfrac{1}{n^2}$

$q \geqslant 1 \iff p \leqslant 1$ – ряды расходятся, например: $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}, \ \sum \dfrac{1}{n}$

Пример. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^p n}, \ p > 0$

$\dfrac{1}{n \cdot \ln^p n} \downarrow, \ a_{2^n} = \dfrac{1}{2^n \cdot \ln^p 2^n} = \dfrac{1}{2^n \cdot n^p \cdot \ln^p 2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \cdot n^p \cdot \ln^p 2} = \frac{1}{\ln^p 2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

2.2 Теорема Штольца и оценка частичных сумм гармонического ряда

Гармонический ряд: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$

$A_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dots + \dfrac{1}{n-1} - \ln n$

$B_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dots + \dfrac{1}{n} - \ln n$

$A_n \uparrow, B_n \downarrow$

$B_n > A_n$

$B_1 > B_2 > \dots > B_n > A_n > A_{n-1} > \dots > A_1, \forall n \in \mathbb{N}$

$B_n - A_n = \dfrac{1}{n} \to 0$

Значит, $\exists \lim A_n = \lim B_n = \gamma \approx 0.5772\dots$ – число Эйлера-Маскерони

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N} = \ln N + \gamma + o(1)$$

Теорема 2.1. *(Штольца.) Если $p_n, q_n \to 0, q_n \downarrow$ и $\exists lim \dfrac{p_{n+1} - p_n}{q_{n+1} - q_n}$, то $\lim \dfrac{p_n}{q_n} = \lim \dfrac{p_{n+1} - p_n}{q_{n+1} - q_n}$*

Теперь с помощью теоремы Штольца уточним остаточный член у гармонического ряда:

$$\lim \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n - \gamma}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{\frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}} = \lim \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} - 1\right)} \overset{\heartsuit}{=}$$

$$1 + \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Получаем, что $\overset{\heartsuit}{=} \lim \dfrac{-\frac{1}{2n^2}}{-\frac{1}{n^2}} = \dfrac{1}{2}$

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

2.3 Признак Даламбера и радикальный признак Коши

Теорема 2.2. *Признак Дарамбера. Пусть* $a_n > 0$.
$\overline{\lim}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies$ *ряд* $\sum a_n$ *сходится.*
$\underline{\lim}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies$ *ряд* $\sum a_n$ *расходится.*

Теорема 2.3. *Радикальный признак Коши. Пусть* $a_n \geqslant 0$.
$\overline{\lim}\,\sqrt[n]{a_n} < 1 \implies$ *ряд* $\sum a_n$ *сходится.*
$\overline{\lim}\,\sqrt[n]{a_n} > 1 \implies$ *ряд* $\sum a_n$ *расходится.*

Пример. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{n!}$

$a_n = \dfrac{p^n}{n!}$, $\quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{p^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \dfrac{n!}{p^n} = \dfrac{p}{n+1} \to 0 \implies$ ряд сходится по признаку Даламбера.

$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\dfrac{p^n}{n!}} = \dfrac{p}{\sqrt[n]{n!}} \to 0 \implies$ ряд сходится по радикальному признаку Коши.

2.4 Радикальный признак сильнее признака Даламбера

Пусть $a_n > 0$. Тогда:

$$\underline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \underline{\lim}\,\sqrt[n]{a_n} \leqslant \overline{\lim}\,\sqrt[n]{a_n} \leqslant \overline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Если $\overline{\lim}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \overline{\lim}\,\sqrt[n]{a_n} < 1$
Если $\underline{\lim}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies \overline{\lim}\,\sqrt[n]{a_n} < 1$
Если $\exists \lim\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, то $\lim\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \overline{\lim}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow \exists \lim\sqrt[n]{a_n} = \lim\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

2.5 Признак Гаусса

Если $\exists \delta > 0, p{:}\, \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \dfrac{p}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^{1+\delta}}\right)$ то:
$p \leqslant 1 \implies$ ряд $\sum a_n$ сходится.
$p > 1 \implies$ ряд $\sum a_n$ расходится.

2.6 Сравнение с интегралом

Рассмотрим $f(x)\downarrow$ при $x \geqslant n_0 - 1$ и ряд $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$, где $a_n = f(n)$

$$f(n+t) \leqslant a_n \leqslant f(n-1+t), t \in [0;1]$$

$$\int_n^{n+1} f(x)dx \leqslant a_n \leqslant \int_{n-1}^{n} f(x)dx$$

$$\int_{n_0}^{N+1} f(x)dx \leqslant \sum_{n=n_0}^{N} a_n \leqslant \int_{n_0-1}^{N} f(x)dx$$

$\implies \sum a_n$ ведёт себя так же как несобственный интеграл $\displaystyle\int^{\infty} f(x)dx$

2.7 Улучшение сходимости ряда

Пример. $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2} \approx \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Для улучшения сходимости будем пользоваться рядами такого типа:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1, \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}, \quad \dots$

Такие ряды достаточно легко считаются, в нашем примере воспользуемся первым т.к. $\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2+2} - \frac{1}{n(n+1)} \right) = S - 1 \implies S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2+2} - \frac{1}{n(n+1)} \right)$$

$$\frac{1}{n^2+2} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{2}{n^2}} - \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \right) = \frac{1}{n^2} \cdot \left(1 - \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \right) = \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Слагаемые убывают быстрее, чтобы получить число с определённой точностью потребуется значительно меньше сложений.

Получили, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2} \approx 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$