Линейная алгебра, Коллоквиум II

Бобень Вячеслав
@darkkeks, GitHub
Благодарность выражается Левину Александру (@azerty1234567890)
и Милько Андрею (@andrew_milko) за видеозаписи лекций.

Дата изменения: 2020.05.22 в 00:42
2019 — 2020

"К коллоку можете даже не готовиться".

— Роман Сергеевич Авдеев

Содержание

1 Определения и формулировки

1. **Сумма двух подпространств векторного пространства**

   Пусть V – векторное пространство над F.

   $U, W \subseteq V$ – подпространства.

   Определение. *Суммой* подпространств U, W называется множество

   $$U + W := \{u + w \mid v \in U, w \in W\}.$$

2. **Теорема о связи размерности суммы двух подпространств с размерностью их пересечения**

   Теорема. $\dim(U \cap W) + \dim(U + W) = \dim U + \dim W$.

   Пример. Всякие две плоскости в $\mathbb{R}^3$ (содержащие 0) имеют общую прямую.

   Здесь $V = \mathbb{R}^3$, $\dim U = 2$, $\dim W = 2$.

   При этом $\dim(U + W) \leqslant 3$.

   Тогда, $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) \geqslant 2 + 2 - 3 = 1$.

3. **Сумма нескольких подпространств векторного пространства**

   Пусть $U_1, \dots U_k \subseteq V$ – подпространства.

   Определение. *Суммой* подпространств $U_1, \dots U_k$ называется множество

   $$U_1 + \dots + U_k = \{u_1 + \dots + u_k \mid u_i \in U_i\}.$$

   Замечание. $\dim(U_1 + \dots + U_k) \leqslant \dim U_1 + \dots + \dim U_k$.

4. **Линейная независимость нескольких подпространств векторного пространства**

   Определение. Подпространства $U_1, \dots, U_k$ называются *линейно независимыми*, если $\forall u_1 \in U_1, \dots, u_k \in U_k$ из условия $u_1 + \dots + u_k = 0$ следует $u_1 = \dots = u_k = 0$.

   Пример. Если $\dim U_i = 1$ и $U_i = \langle u_i \rangle$ $\forall i$, то $U_1, \dots, U_k$ линейно независимы $\iff$ $u_1, \dots, u_k$ линейно независимы.

5. **Разложение векторного пространства в прямую сумму подпространств**

   Определение. Говорят, что векторное пространство V разлагается в *прямую сумму* $U_1, \dots, U_k$, если

   1. $V = U_1 + \dots + U_k$,
   2. $U_1, \dots, U_k$ линейно независимы.

   Обозначение: $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k$.

   Пример. Если $e_1, \dots, e_n$ – базис V, то $V = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle e_n \rangle$

6. **При каких условиях на подпространства U_1, U_2 векторного пространства V имеет место разложение $V = U_1 \oplus U_2$?**

   $$V = U_1 \oplus U_2 \iff \begin{cases} V = U_1 + U_2, \\ U_1 \cap U_2 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} \dim V = \dim U_1 + \dim U_2, \\ U_1 \cap U_2 = 0. \end{cases}$$

7. **Проекция вектора на подпространство вдоль дополнительного подпространства**

   Замечание. $V = U_1 \oplus U_2 \implies \forall v \in V\ \exists! u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$, такие что $v = u_1 + u_2$.

   Тогда, u_1 называется проекцией вектора v на U_1 вдоль U_2.

   Так же, u_2 называется проекцией вектора v на U_2 вдоль U_1.

8. **Матрица перехода от одного базиса векторного пространства к другому**

   Пусть $(e_1, \dots, e_n)$ и $(e'_1, \dots, e'_n)$ — два базиса в V,

   $$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C,$$

   при этом $\det C \neq 0$.

   Определение. Матрица C называется *матрицей перехода* от базиса $(e_1, \dots, e_n)$ к базису $(e'_1, \dots, e'_n)$.

   Замечание. Матрица перехода от $(e'_1, \dots, e'_n)$ к $(e_1, \dots, e_n)$ — это C^{-1}.

9. Формула преобразования координат вектора при замене базиса

Пусть C — матрица перехода от базиса $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ к базису $\mathbb{e}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$, $v \in V$, тогда

$$v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$$
$$v = x'_1 e'_1 + \cdots + x'_n e'_n.$$

Предложение.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \ldots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

10. Линейное отображение векторных пространств, его простейшие свойства

Пусть V, W — векторные пространства над F.

Определение. Отображение $\varphi\colon V \to W$ называется *линейным*, если

1. $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$,
2. $\varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v)$.

$\forall v_1, v_2, v \in V$, $\forall \lambda \in F$.

Простейшие свойства

1. $\varphi(\overrightarrow{0_V}) = \overrightarrow{0_W}$.
2. $\varphi(-v) = -\varphi(v)$.

11. Изоморфизм векторных пространств, изоморфные векторные пространства

Определение. Отображение $\varphi\colon V \to W$ называется *изоморфизмом* если оно линейно и биективно.

Обозначение: $\varphi\colon V \xrightarrow{\sim} W$.

Определение. Два векторных пространства V, W называются *изоморфными*, если существует изоморфизм $\varphi\colon V \xrightarrow{\sim} W$.

Обозначается: $V \simeq W$ (либо $V \cong W$).

12. Какими свойствами обладает отношение изоморфности на множестве всех векторных пространств?

Теорема. *Отношение изоморфности является отношением эквивалентности на множестве всех векторных пространств над фиксированным полем F.*

13. Критерий изоморфности двух конечномерных векторных пространств

Теорема. *Пусть V, W — два конечномерных векторных пространства над F.*

Тогда, $V \simeq W \iff \dim V = \dim W$.

14. Матрица линейного отображения

Пусть V, W — векторные пространства над F.

$\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V,

$\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ — базис W.

Пусть $\varphi\colon V \to W$ — линейное отображение.

$\forall j = 1, \ldots, n$

$$\varphi(e_j) = a_{1j} f_1 + a_{2j} f_2 + \cdots + a_{mj} f_m = (f_1, \ldots, f_m) \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \ldots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

Тогда, $(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) = (f_1, \ldots, f_m) \cdot A$, где $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(F)$.

Определение. A называется матрицей линейного отображения φ в базисах $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$.

Обозначение: $A = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$.

В j-м столбце матрицы A стоят координаты вектора $\varphi(e_j)$ в базисе $\mathbb{f}$.

15. Связь между координатами вектора и его образа при линейном отображении

Предложение. Пусть $\varphi\colon V \to W$ — линейное отображение,

$\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V,

$\mathbb{f} = (f_1, \dots, f_m)$ — базис W,

$A = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$.

$v \in V \implies v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n,$

$\qquad\qquad \varphi(v) = y_1 f_1 + \dots + y_m f_m.$

Тогда,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

16. Формула изменения матрицы линейного отображения при замене базисов

Пусть $\mathbb{e}'$ — другой базис в V, $\mathbb{f}'$ — другой базис в W.

$\mathbb{e}' = \mathbb{e} \cdot C_{\in M_n}$,

$\mathbb{f}' = \mathbb{f} \cdot D_{\in M_m}$.

$A = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$,

$A' = A(\varphi, \mathbb{e}', \mathbb{f}')$.

Предложение. $A' = D^{-1}AC$.

17. Сумма двух линейных отображений и её матрица. Произведение линейного отображения на скаляр и его матрица

Пусть $\varphi, \psi \in \operatorname{Hom}(V, W)$, $\lambda \in F$.

Определение.

1. *Суммой* линейных отображений φ и ψ называется линейное отображение $\varphi + \psi \in \operatorname{Hom}(V, W)$, такое что $(\varphi + \psi)(v) := \varphi(v) + \psi(v)$.
2. Произведение φ на λ — это линейное отображение $\lambda\varphi \in \operatorname{Hom}(V, W)$, такое что $(\lambda\varphi)(v) := \lambda\varphi(v)$.

Зафиксируем базисы $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ в V и $\mathbb{f} = (f_1, \dots, f_m)$ в W.

Предложение.

1. $\varphi, \psi \in \operatorname{Hom}(V, W),\ A_\varphi = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$
   $\qquad\qquad\qquad\qquad A_\psi = A(\psi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$
   $\qquad\qquad\qquad\qquad A_{\varphi+\psi} = A(\varphi + \psi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) \quad \implies A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$
2. $\lambda \in F, \varphi \in \operatorname{Hom}(V, W),\ A_\varphi = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$
   $\qquad\qquad\qquad\qquad A_{\lambda\varphi} = A(\lambda\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) \quad \implies A_{\lambda\varphi} = \lambda A_\varphi$

18. Композиция двух линейных отображений и её матрица

Пусть $U \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{\varphi} W$ — цепочка линейных отображений, а $\varphi \circ \psi : U \to W$ — их композиция,

$\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V,

$\mathbb{f} = (f_1, \dots, f_m)$ — базис W,

$\mathbb{g} = (g_1, \dots, g_k)$ — базис U.

$A_\varphi = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$,

$A_\psi = A(\psi, \mathbb{g}, \mathbb{e})$,

$A_{\varphi\circ\psi} = A(\varphi \circ \psi, \mathbb{g}, \mathbb{f})$.

Тогда, $A_{\varphi\circ\psi} = A_\varphi \cdot A_\psi$.

19. Ядро и образ линейного отображения. Являются ли они подпространствами в соответствующих векторных пространствах?

Пусть $\varphi\colon V \to W$.

Определение. *Ядро* линейной оболочки φ — это $\ker\varphi := \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\} \subseteq V$.

Образ линейного отображения φ — это $\operatorname{Im}\varphi := \varphi(V) \subseteq W$.

Предложение.

1. Ядро — подпространство в V.
2. Образ — подпространство в W.

20. Критерий инъективности линейного отображения в терминах его ядра

Пусть V, W — векторные пространства над F,

$\varphi\colon V \to W$ — линейное отображение.

Предложение.

(a) φ инъективно $\iff \ker\varphi = \{0\}$,

(b) φ сюръективно $\iff \operatorname{Im}\varphi = W$.

21. Связь между рангом матрицы линейного отображения и размерностью его образа

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V,

$\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ — базис W,

$A = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$.

Теорема. $\operatorname{rk} A = \dim \operatorname{Im}\varphi$.

Замечание. Число $\dim\operatorname{Im}\varphi$ называется *рангом* линейного отображения φ, обозначается $\operatorname{rk}\varphi$.

Следствие. $\operatorname{rk} A$ не зависит от выбора пары базисов $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$.

22. Каким свойством обладает набор векторов, дополняющих базис ядра линейного отображения до базиса всего пространства?

Предложение. Пусть $e_1, \ldots, e_k$ — базис $\ker\varphi$ и векторы $e_{k+1}, \ldots, e_n$ дополняют его до базиса всего V.

Тогда, $\varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_n)$ образуют базис в $\operatorname{Im}\varphi$.

23. Теорема о связи размерностей ядра и образа линейного отображения

Теорема. $\dim\operatorname{Im}\varphi + \dim\ker\varphi = \dim V$.

24. К какому простейшему виду можно привести матрицу линейного отображения путём замены базисов?

Предложение. Пусть $\operatorname{rk}\varphi = r$. Тогда существует базис $\mathbb{e}$ в V и базис $\mathbb{f}$ в W, такие что

$$A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) = \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \begin{array}{c} \\ r \\ \\ \\ \\ m-r \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & r & & & & n-r & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

25. Линейная функция на векторном пространстве

Определение. *Линейной функцией* (или *линейной формой*, или *линейным функционалом*) на V называется всякое линейное отображение $\alpha\colon V \to F$.

Обозначение. $V^* := \operatorname{Hom}(V, F)$ — множество всех линейных функций на V.

26. Сопряжённое (двойственное) векторное пространство и его размерность

Из общей теории линейных отображений:

1. V^* — векторное пространство (оно называется *сопряженным* или *двойственным*).
2. Если $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — фиксированный базис в V, то есть изоморфизм $V^* \simeq \operatorname{Mat}_{1\times n}(F)$ (а это ни что иное, как строки длины n).
   $\alpha \to (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$
   $v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$
   $\alpha(v) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n.$
   $\alpha_i = \alpha(e_i)$ — коэффициенты линейной функции α в базисе $\mathbb{e}$.

Следствие. $\dim V^* = \dim V$ ($\implies V^* \simeq V$).

27. Базис сопряжённого пространства, двойственный к данному базису исходного векторного пространства

При $i = 1, \dots, n$ рассмотрим линейную функцию $\varepsilon_i \in V^*$, соответствующую строке $(0 \dots 1 \dots 0)$. Тогда $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ — базис V^*, он однозначно определяется условием $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$. ($\delta_{ij}$ — символ Кронекера)

Определение. Базис $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ пространства V^*, определенный условием выше, называется базисом, *двойственным* (сопряженным) к базису $\mathbb{e}$.

Удобная запись условия:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} (e_1, \dots, e_n) = E.$$

28. Билинейная форма на векторном пространстве

Пусть V — векторное пространство над F.

Определение. *Билинейная форма* на V — это отображение $\beta \colon V \times V \to F$, линейное по каждому аргументу.

Линейность по 1-му аргументу

- $\beta(x_1 + x_2, y) = \beta(x_1, y) + \beta(x_2, y) \quad \forall x_1, x_2, y \in V$,
- $\beta(\lambda x, y) = \lambda\beta(x, y) \quad \forall x, y \in V,\ \lambda \in F$.

Линейность по 2-му аргументу

- $\beta(x, y_1 + y_2) = \beta(x, y_1) + \beta(x, y_2) \quad \forall x, y_1, y_2 \in V$,
- $\beta(x, \lambda y) = \lambda\beta(x, y) \quad \forall x, y \in V,\ \lambda \in F$.

29. Матрица билинейной формы

Считаем, что $\dim V = n < \infty$.

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V.

Определение. Матрицей билинейной формы β в базисе $\mathbb{e}$ называется такая матрица $B \in M_n$, что $b_{ij} = \beta(e_i, e_j)$.

Обозначение: $B(\beta, \mathbb{e})$.

30. Формула для вычисления значений билинейной формы в координатах

Пусть $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$,

$\quad\quad y = y_1e_1 + \dots + y_ne_n$.

Тогда,

$$\beta(x, y) = (x_1, \dots, x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

31. Формула изменения матрицы билинейной формы при замене базисов

$B = B(\beta, \mathbb{e})$.

Пусть $\mathbb{e}' = (e'_1, \dots e'_n)$ — другой базис V.

$\mathbb{e}' = \mathbb{e} \cdot C$.

$B' := B(\beta, \mathbb{e}')$.

Предложение. $B' = C^T BC$.

32. Симметричная билинейная форма. Критерий симметричности билинейной формы в терминах её матрицы

Определение. Билинейная форма β называется *симметричной*, если $\beta(x, y) = \beta(y, x)\ \forall x, y \in V$.

Пусть $\mathbb{e}$ — произвольный базис V.

Предложение. β симметрична $\iff B = B^T$.

33. Квадратичная форма

Пусть $\beta\colon V \times V \to F$ — билинейная форма на V.

Определение. Отображение $Q_\beta\colon V \to F$, $Q_\beta(x) = \beta(x, x)$, называется *квадратичной формой*, ассоциированной с билинейной формой β.

Пусть $\mathbb{e}$ — базис V, $x = x_1 e_1 + \dots x_n e_n$, $B = B(\beta, \mathbb{e})$.

Тогда,

$$Q_\beta(x) = (x_1 \dots x_n) B \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (b_{ij} + b_{ji}) x_i x_j.$$

34. Соответствие между симметричными билинейными формами и квадратичными формами

Предложение. Пусть в поле F выполнено условие $1 + 1 \neq 0$ (то есть $2 \neq 0$). Тогда отображение $\beta \mapsto Q_\beta$ является биекцией между симметричными билинейными формами на V и квадратичным формами на V.

35. Симметризация билинейной формы

Билинейная форма $\sigma(x, y) = \frac{1}{2}\left(\beta(x, y) + \beta(y, x)\right)$ называется *симметризацией* билинейной формы β.

Если B и S — матрицы билинейных форм β и σ в некотором базисе, то $S = \frac{1}{2}(B + B^T)$.

36. Поляризация квадратичной формы

Симметричная билинейная форма $\beta(x, y) = \frac{1}{2}\left[Q(x + y) - Q(x) - Q(y)\right]$ называется *поляризацией* квадратичной формы Q.

37. Матрица квадратичной формы

Определение. Матрицей квадратной формы Q в базисе $\mathbb{e}$ называется матрица соответствующей симметричной билинейной формы (поляризации) в базисе $\mathbb{e}$.

Обозначение: $B(Q, \mathbb{e})$.

Пример. Пусть $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$.

Если $\mathbb{e}$ — стандартный базис, то $B(Q, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

38. Канонический вид квадратичной формы

Определение. Квадратичная форма Q имеет в базисе $\mathbb{e}$ *канонический вид*, если $B(Q, \mathbb{e})$ диагональна.

Если $B(Q, \mathbb{e}) = \operatorname{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n)$, то $Q(x_1, \dots, x_n) = b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + \dots + b_n x_n^2$.

39. Нормальный вид квадратичной формы над $\mathbb{R}$

Определение. Квадратичная форма над $\mathbb{R}$ имеет *нормальный вид* в базисе $\mathbb{e}$, если в этом базисе

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \varepsilon_1 x_1^2 + \dots + \varepsilon_n x_n^2,$$

где $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$.

40. Индексы инерции квадратичной формы над $\mathbb{R}$

Пусть $F = \mathbb{R}$.

Пусть $Q\colon V \to \mathbb{R}$ — квадратичная форма.

Можно привести к нормальному виду

$$Q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_{s+t}^2.$$

Здесь $i_+ := s$ — положительный индекс инерции квадратичной формы Q,
$i_- := t$ — отрицательный индекс инерции квадратичной формы Q.

41. Закон инерции для квадратичной формы над $\mathbb{R}$

Теорема. *Числа i_+ и i_- не зависят от базиса в котором Q принимает нормальный вид.*

42. Положительно/неотрицательно определённая квадратичная форма над $\mathbb{R}$

43. Отрицательно/неположительно определённая квадратичная форма над $\mathbb{R}$

44. Неопределённая квадратичная форма над $\mathbb{R}$

Определение. Квадратичная форма Q над $\mathbb{R}$ называется

Термин	Обозначение	Условие	Нормальный вид	Индексы инерции
Положительно определённой	$Q > 0$	$Q(x) > 0\ \forall x \neq 0$	$x_1^2 + \dots + x_n^2$	$i_+ = n, i_- = 0$
Отрицательно определённой	$Q < 0$	$Q(x) < 0\ \forall x \neq 0$	$-x_1^2 - \dots - x_n^2$	$i_+ = 0, i_- = n$
Неотрицательно определённой	$Q \geqslant 0$	$Q(x) \geqslant 0\ \forall x$	$x_1^2 + \dots + x_k^2,\ k \leqslant n$	$i_+ = k, i_- = 0$
Неположительно определённой	$Q \leqslant 0$	$Q(x) \leqslant 0\ \forall x$	$-x_1^2 - \dots - x_k^2,\ k \leqslant n$	$i_+ = 0, i_- = k$
Неопределённой	—	$\exists x : Q(x) > 0$ $\exists y : Q(y) < 0$	$x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - x_{s+t}^2$ $s, t \geqslant 1$	$i_+ = s, i_- = t$

45. Способ нахождения индексов инерции квадратичной формы над $\mathbb{R}$, вытекающий из метода Якоби

Пусть $Q\colon V \to \mathbb{R}$ — квадратичная форма,

$\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис,

$B = B(Q, \mathbb{e})$,

δ_k — k-й угловой минор матрицы B.

Следствие (из метода Якоби)**.** Пусть $\delta_k \neq 0\ \forall k$. Тогда:

Число i_+ равно количеству сохранений знака в последовательности $1, \delta_1, \dots, \delta_n$.

Число i_- равно количеству перемен знака в последовательности $1, \delta_1, \dots, \delta_n$.

46. Критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы над $\mathbb{R}$

Пусть V — векторное пространство над $\mathbb{R}$, $\dim V = n$,

$\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V,

$B = B(Q, \mathbb{e})$,

B_k — левый верхний $k \times k$ блок,

$\delta_k = \det B_k$.

Теорема (Критерий Сильвестра положительной определенности)**.**

$$Q > 0 \iff \delta_k > 0\ \forall k = 1 \dots n.$$

47. Критерий отрицательной определённости квадратичной формы над $\mathbb{R}$

Следствие.

$$Q < 0 \iff \delta_k \begin{cases} > 0 & \text{при } k \mathrel{\vdots} 2, \\ < 0 & \text{при } k \not\mathrel{\vdots} 2. \end{cases}$$

48. Евклидово пространство

Определение. *Евклидово пространство* — это векторное пространство $\mathbb{E}$ над $\mathbb{R}$, на котором задано *скалярное произведение*, то есть такое отображение $(\bullet, \bullet)\colon \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R}$, что

1. $(\bullet, \bullet)$ — симметричная билинейная форма,
2. Квадратичная форма (x, x) положительно определённая.

49. Длина вектора в евклидовом пространстве

Определение. *Длина* вектора $x \in \mathbb{E}$ — это $|x| := \sqrt{(x, x)}$.

Свойство: $|x| \geqslant 0$, причем $|x| = 0 \iff x = 0$.

Пример. Если $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением, то $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.

50. Неравенство Коши–Буняковского

Предложение (неравенство Коши-Буняковского)**.** $\forall x, y \in \mathbb{E}$ верно $|(x, y)| \leqslant |x| \cdot |y|$, причём равенство $\iff$ x, y пропорциональны.

Пример. Пусть $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением, тогда

$$|x_1y_1 + \dots + x_ny_n| \leqslant \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}.$$

51. Угол между ненулевыми векторами евклидова пространства

Пусть $x, y \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$, тогда $-1 \leqslant \dfrac{(x,y)}{|x| \cdot |y|} \leqslant 1$.

Определение. Угол между ненулевыми векторами $x, y \in \mathbb{E}$, это такой $\alpha \in [0, \pi]$, что $\cos\alpha = \dfrac{(x,y)}{|x| \cdot |y|}$.

Тогда $(x, y) = |x||y| \cos\alpha$.

52. Матрица Грама системы векторов евклидова пространства

Пусть $v_1, \dots, v_k$ — произвольная система векторов.

Определение. *Матрица Грама* этой системы — это

$$G(v_1, \dots, v_k) = \begin{pmatrix} (v_1, v_1) & (v_1, v_2) & \dots & (v_1, v_k) \\ (v_2, v_1) & (v_2, v_2) & \dots & (v_2, v_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (v_k, v_1) & (v_k, v_2) & \dots & (v_k, v_k) \end{pmatrix}.$$

Пример. $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением.
$a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n \rightsquigarrow A := (a_1, \dots, a_k) \in \mathrm{Mat}_{n \times k}(\mathbb{R})$.
Тогда, $G(a_1, \dots, a_k) = A^T \cdot A$.

53. Свойства определителя матрицы Грама

Предложение. $\forall v_1, \dots, v_k \in \mathbb{E} \implies \det G(v_1, \dots, v_k) \geqslant 0$.

Более того, $\det G(v_1, \dots, v_k) > 0 \iff v_1, \dots, v_k$ линейно независимы.

54. Ортогональное дополнение подмножества евклидова пространства

Определение. *Ортогональное дополнение* множества $S \subseteq \mathbb{E}$ — это множество $S^\perp := \{x \in \mathbb{E} \mid (x, y) = 0\ \forall y \in S\}$.

55. Чему равна размерность ортогонального дополнения к подпространству евклидова пространства?

Пусть $\dim \mathbb{E} = n$, $S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство.

Тогда, $\dim S^\perp = n - \dim S$.

56. Каким свойством обладают подпространство евклидова пространства и его ортогональное дополнение?

Считаем, что $\dim \mathbb{E} = n < \infty$.

Предложение. Пусть $S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство. Тогда:

1. $\dim S^\perp = n - \dim S$.
2. $\mathbb{E} = S \oplus S^\perp$.
3. $(S^\perp)^\perp = S$.

57. Ортогональная проекция вектора на подпространство

$\Downarrow$

58. Ортогональная составляющая вектора относительно подпространства

S — подпространство $\implies \mathbb{E} = S \oplus S^\perp$

$\forall v \in \mathbb{E} \exists! x \in S, y \in S^\perp$, такие что $x + y = v$.

Определение.

1. x называется *ортогональной проекцией* вектора v на подпространство S.
   Обозначение: $x = \mathrm{pr}_S\, v$.
2. y называется *ортогональной составляющей* вектора v относительно подпространства S.
   Обозначение: $y = \mathrm{ort}_S\, v$.

59. Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в $\mathbb{R}^n$, заданное своим базисом

Пусть $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением.

$S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство, $a_1, \dots, a_k$ — базис S.

Пусть $A := (a_1, \dots, a_k) \in \mathrm{Mat}_{n \times k}(\mathbb{R})$, $A^{(i)} = a_i$.

Предложение. $\forall v \in \mathbb{R}^n \quad \mathrm{pr}_S\, v = A(A^T A)^{-1} A^T v$.

60. Ортогональная система векторов евклидова пространства. Ортогональный базис

$\Downarrow$

61. Ортонормированная система векторов евклидова пространства. Ортонормированный базис

Определение. Система ненулевых векторов $v_1, \dots, v_k$ называется

1. *ортогональной*, если $(v_i, v_j) = 0 \ \forall i \neq j$ (то есть $G(v_1, \dots, v_k)$ диагональна),
2. *ортонормированной*, если $(v_i, v_j) = 0 \ \forall i \neq j$ и $(v_i, v_i) = 1$ ($\iff |v_i| = 1$). То есть $G(v_1, \dots, v_k) = E$.

Замечание. Всякая ортогональная (и в частности ортонормированная) система векторов автоматически линейно независима.

$$\det G(v_1, \dots, v_k) = |v_1|^2 \dots |v_k|^2 \neq 0.$$

Определение. Базис пространства называется *ортогональным* (соответственно *ортонормированным*), если он является ортогональной (ортонормированной) системой векторов.

62. Описание всех ортонормированных базисов евклидова пространства в терминах одного такого базиса и матриц перехода

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — ортонормированный базис в E.

Пусть $\mathbb{e}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ — какой-то другой базис.

$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C$, $C \in M_n^0(\mathbb{R})$.

Предложение. $\mathbb{e}'$ — ортонормированный базис $\iff C^T \cdot C = E$.

63. Ортогональная матрица

Определение. Матрица $C \in M_n(\mathbb{R})$ называется *ортогональной* если $C^T C = E$.

Замечание. $C^T C = E \iff CC^T = E \iff C^{-1} = C^T$.

Свойства.

1. $C^T C = E \implies$ система столбцов $C^{(1)}, \dots, C^{(n)}$ — это ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$,
2. $CC^T = E \implies$ система строк $C_{(1)}, \dots, C_{(n)}$ — это тоже ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$,

В частности, $|c_{ij}| \leqslant 1$.

3. $\det C = \pm 1$.

Пример. $n = 2$. Ортогональный матрицы:

$$\underset{\det = 1}{\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}} \qquad \underset{\det = -1}{\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}}.$$

64. Формула для координат вектора в ортогональном и ортонормированном базисах евклидова пространства

Пусть $\mathbb{E}$ — евклидово пространство, $(e_1, \dots, e_n)$ — ортогональный базис.

$v \in \mathbb{E}$.

Предложение. $v = \dfrac{(v, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 + \dfrac{(v, e_2)}{(e_2, e_2)} e_2 + \dots + \dfrac{(v, e_n)}{(e_n, e_n)} e_n$.

В частности, если $e_1, \dots, e_n$ ортонормирован, то $v = (v, e_1) e_1 + \dots + (v, e_n) e_n$.

65. Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в терминах его ортогонального базиса

Пусть $S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство.

$e_1, \dots, e_k$ — ортогональный базис в S.

Предложение. $\forall v \in \mathbb{E} \quad \mathrm{pr}_S\, v = \sum_{i=1}^{k} \dfrac{(v, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i$.

В частности, если $e_1, \ldots, e_k$ ортонормирован, то $\mathrm{pr}_S\, v = \sum_{i=1}^{k} (v, e_i) e_i$.

66. Метод ортогонализации Грама–Шмидта

Как построить ортогональный (ортонормированный) базис в $\mathbb{E}$?

Если $f_1, \ldots, f_n$ — ортогональный базис, то $\left(\frac{f_1}{|f_1|}, \ldots, \frac{f_n}{|f_n|}\right)$ — ортонормированный базис.

Тогда, достаточно построить ортогональный базис.

Пусть $e_1, \ldots, e_k$ — линейно независимая система векторов.

i-й угловой минор в $G(e_1, \ldots, e_k)$ — это $\det G(e_1, \ldots, e_k) > 0$.

Следовательно, применим метод Якоби:

$\exists!$ система векторов $f_1, \ldots, f_k$, такая что

$$\begin{aligned}
&f_1 = e_1, \\
&f_2 \in e_2 + \langle e_1 \rangle, \\
&f_3 \in e_3 + \langle e_1, e_2 \rangle, \\
&\ldots, \\
&f_k \in e_k + \langle e_1, \ldots, e_{k-1} \rangle
\end{aligned}$$

И выполнены следующие свойства $\forall i = 1, \ldots, k$:

0. $f_1, \ldots, f_k$ ортогональны.
1. $\langle e_1, \ldots, e_i \rangle = \langle f_1, \ldots, f_i \rangle$.
2. $f_i = e_i - \sum_{j=1}^{i-1} \dfrac{(e_i, f_j)}{(f_j, f_j)} f_j \ (\star)$.
3. $\det G(e_1, \ldots, e_i) = \det G(f_1, \ldots, f_i) \ (\heartsuit)$.

Построение базиса $f_1, \ldots, f_k$ по формулам $(\star)$ называется методом (процессом) ортогонализации Грамма-Шмидта.

67. Теорема Пифагора в евклидовом пространстве

Теорема. *Пусть* $x, y \in \mathbb{E}$, $(x, y) = 0$. *Тогда* $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$.

68. Расстояние между векторами евклидова пространства

Определение. *Расстояние* между векторами $x, y \in \mathbb{E}$ — это $\rho(x, y) = |x - y|$.

69. Неравенство треугольника в евклидовом пространстве

Предложение. $\forall a, b, c \in \mathbb{E} \implies \rho(a, b) + \rho(b, c) \geqslant \rho(a, c)$.

70. Теорема о расстоянии между вектором и подпространством в терминах ортогональной составляющей

Теорема. *Пусть* $x \in \mathbb{E}$, $S \subseteq \mathbb{E}$ *— подпространство. Тогда,* $\rho(x, S) = |\mathrm{ort}_S\, x|$, *причем* $\mathrm{pr}_S\, x$ *— это ближайший к* x *вектор из* S.

71. Псевдорешение несовместной системы линейных уравнений

СЛУ $Ax = b$, $A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$.

$$x_0 \text{ — решение системы} \iff Ax_0 = b \iff Ax_0 - b = 0 \iff |Ax_0 - b| = 0 \iff \rho(Ax_0, b) = 0.$$

Если СЛУ несовместна, то x_0 называется *псевдорешением*, если $\rho(Ax_0, b)$ минимально.

$$\rho(Ax_0, b) = \min_{x \in R^n} \rho(Ax, b).$$

x_0 — решение задачи оптимизации $\rho(Ax, b) \xrightarrow[x \in \mathbb{R}^n]{} \min$.

Если столбцы $A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}$ линейно независимы, то псевдорешение единственно и может быть найдено по формуле $x_0 = (A^T A)^{-1} A^T b$.

72. Формула для расстояния от вектора до подпространства в терминах матриц Грама

Пусть $\mathbb{E}$ — евклидово пространство, $\dim \mathbb{E} = n < \infty$.

$S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство, $e_1, \ldots, e_k$ — базис в S.

Теорема. $\forall x \in \mathbb{E} \quad \rho(x, S)^2 = \dfrac{\det G(e_1, \ldots, e_k, x)}{\det G(e_1, \ldots, e_k)}$.

73. k-мерный параллелепипед и его объём

Определение. *k-мерный параллелепипед*, натянутый на векторы $a_1, \ldots, a_k$, это множество

$$P(a_1, \ldots, a_k) := \left\{ \sum_{i=1}^{k} x_i a_i \middle| 0 \leqslant x_i < 1 \right\}.$$

Основание: $P(a_1, \ldots, a_{k-1})$.

Высота: $h := \left|\operatorname{ort}_{\langle a_1, \ldots, a_{k-1} \rangle} a_k\right|$.

Определение. *k-мерный объем* k-мерного параллелепипеда $P(a_1, \ldots, a_k)$ — это величина $\operatorname{vol} P(a_1, \ldots, a_k)$, определяемая индуктивно:

$k = 1 \implies \operatorname{vol} P(a_1) := |a_1|$.

$k > 1 \implies \operatorname{vol} P(a_1, \ldots, a_k) := \operatorname{vol} P(a_1, \ldots, a_{k-1}) \cdot h$.

74. Формула для объёма k-мерного параллелепипеда в n-мерном евклидовом пространстве

Теорема. $\operatorname{vol} P(a_1, \ldots, a_k)^2 = \det G(a_1, \ldots, a_k)$.

75. Формула для объёма n-мерного параллелепипеда в n-мерном евклидовом пространстве в терминах координат в ортонормированном базисе

Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ — ортонормированный базис в $\mathbb{E}$,

$(a_1, \ldots, a_n) = (e_1, \ldots, e_n) \cdot A$, $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Предложение. $\operatorname{vol} P(a_1, \ldots, a_n) = |\det A|$.

76. В каком случае два базиса евклидова пространства называются одинаково ориентированными?

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ и $\mathbb{e}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ — два базиса в $\mathbb{E}$.

$(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n) \cdot C$, $C \in M_n^0(\mathbb{R})$.

Определение. Говорят, что $\mathbb{e}$ и $\mathbb{e}'$ одинаково ориентированы, если $\det C > 0$.

77. Ориентированный объём n-мерного параллелепипеда в n-мерном евклидовом пространстве

Фиксируем ориентацию в $\mathbb{E}$.

Фиксируем положительно ориентированный ортонормированный базис $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ в $\mathbb{E}$.

Пусть $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{E}$, $(a_1, \ldots, a_n) = (e_1, \ldots, e_n) \cdot A$.

Определение. *Ориентированным объемом* параллелепипеда $P(a_1, \ldots, a_n)$ называется величина

$$\operatorname{Vol}(a_1, \ldots, a_n) = \det A.$$

78. Свойства ориентированного объёма n-мерного параллелепипеда в n-мерном евклидовом пространстве

1. $\operatorname{Vol}(a_1, \ldots, a_n)$ линеен по каждому аргументу.
2. $\operatorname{Vol}(a_1, \ldots, a_n)$ кососимметрична (то есть меняет знак при перестановке любых двух аргументов).
3. $\operatorname{Vol}(a_1, \ldots, a_n) > 0 \iff (a_1, \ldots, a_n)$ — положительно ориентированный базис в $\mathbb{E}$.
4. $\operatorname{Vol}(a_1, \ldots, a_n) < 0 \iff (a_1, \ldots, a_n)$ — отрицательно ориентированный базис в $\mathbb{E}$.
5. $\operatorname{Vol}(a_1, \ldots, a_n) = 0 \iff (a_1, \ldots, a_n)$ линейно зависимы.

79. Связь векторного произведения со скалярным и ориентированным объёмом

80. Формула для вычисления векторного произведения в терминах координат в положительно ориентированном ортонормированном базисе

Если $\mathbb{e} = (e_1, e_2, e_3)$ — положительно ориентированный базис и $\begin{array}{l} a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 \\ b = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 \end{array}$, то

$$[a, b] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} := \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} e_3. \qquad (\star)$$

81. Смешанное произведение векторов трёхмерного евклидова пространства

Определение. $\forall a, b, c \in \mathbb{E}$ число $(a, b, c) := ([a, b], c)$ называется *смешанным произведением* векторов a, b, c.

Замечание. $(a, b, c) = \mathrm{Vol}(a, b, c)$.

82. Формула для вычисления смешанного произведения в терминах координат в положительно ориентированном ортонормированном базисе

Если e_1, e_2, e_3 — положительно ориентированный ортонормированный базис, то

$$\left.\begin{array}{r} a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 \\ b = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 \\ c = c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3 \end{array}\right| \implies (a, b, c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

83. Критерий компланарности трёх векторов трёхмерного евклидова пространства

a, b, c компланарны $\iff$ $(a, b, c) = 0$.

84. Критерий коллинеарности двух векторов трёхмерного евклидова пространства

Предложение. $a, b \in \mathbb{E}$ коллинеарны $\iff$ $[a, b] = 0$.

85. Геометрические свойства векторного произведения

Предложение.

1. $[a, b] \perp \langle a, b \rangle$.
2. $|[a, b]| = \mathrm{vol}\, P(a, b)$.
3. $\mathrm{Vol}(a, b, [a, b]) \geqslant 0$.

86. Линейное многообразие. Характеризация линейных многообразий как сдвигов подпространств

Определение. *Линейное многообразие* в $\mathbb{R}^n$ — это множество решений некоторой совместной СЛУ.

Пусть $Ax = b$ — СЛУ, $\varnothing \neq L \subseteq \mathbb{R}^n$ — множество решений, $x_z \in L$ — частное решение.

Было: Лемма: $L = x_z + S$, где S — множество решений ОСЛУ $Ax = 0$.

Предложение. Множество $L \subseteq \mathbb{R}^n$ является линейны многообразием $\iff$ $L = v_0 + S$ для некоторых $v_0 \in \mathbb{R}^n$ и подпространства $S \subseteq \mathbb{R}^n$.

87. Критерий равенства двух линейных многообразий. Направляющее подпространство и размерность линейного многообразия

Предложение. Пусть $L_1 = v_1 + S_1$ и $L_2 = v_2 + S_2$ — два линейных многообразия в $\mathbb{R}^n$. Тогда,

$$L_1 = L_2 \iff \begin{cases} S_1 = S_2 \ (= S) \\ v_1 - v_2 \in S \end{cases}.$$

Если L — линейное многообразие, то $L = v_0 + S$, где S определено однозначно.

Определение. S называется *направляющим подпространством* линейного многообразия L.

Определение. *Размерностью* линейного многообразия называется размерность его направляющего подпространства.

88. Теорема о плоскости, проходящей через $k + 1$ точку в $\mathbb{R}^n$

Теорема.

a) *Через любые $k+1$ точек в $\mathbb{R}^n$ проходит плоскость размерности $\leqslant k$.*

b) *Если это точки не лежат в плоскости размерности $< k$, то через них проходит ровно одна плоскость размерности k.*

Следствие.

1. Через любые две различные точки проходит ровно одна прямая.
2. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит ровно одна плоскость.

89. Три способа задания прямой в $\mathbb{R}^2$. Уравнение прямой в $\mathbb{R}^2$, проходящей через две различные точки

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} \qquad \begin{array}{c} x_1 = x_0 \implies x = x_0, \\ y_1 = y_0 \implies y = y_0. \end{array}$$

90. Три способа задания плоскости в $\mathbb{R}^3$

91. Уравнение плоскости в $\mathbb{R}^3$, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

92. Три способа задания прямой в $\mathbb{R}^3$

93. Уравнения прямой в $\mathbb{R}^3$, проходящей через две различные точки

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}.$$

94. Случаи взаимного расположения двух прямых в $\mathbb{R}^3$

95. Формула для расстояния от точки до прямой в $\mathbb{R}^3$

96. Формула для расстояния от точки до плоскости в $\mathbb{R}^3$

97. Формула для расстояния между двумя скрещивающимися прямыми в $\mathbb{R}^3$

2 Вопросы на доказательство

2.1 Подпространства

1. **Теорема о связи размерности суммы двух подпространств с размерностью их пересечения**

   Теорема. $\dim(U \cap W) + \dim(U + W) = \dim U + \dim W$.

   Пример. Всякие две плоскости в $\mathbb{R}^3$ (содержащие 0) имеют общую прямую.
   Здесь $V = \mathbb{R}^3$, $\dim U = 2$, $\dim W = 2$.
   При этом $\dim(U + W) \leqslant 3$.
   Тогда, $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) \geqslant 2 + 2 - 3 = 1$.

   Доказательство. Пусть $\dim(U \cap W) = p$, $\dim U = q$, $\dim W = r$.
   Пусть $a = \{a_1, \dots, a_p\}$ – базис в $U \cap W$.
   Тогда, a можно дополнить до базиса в U и в W:
   $b = \{b_1, \dots, b_{q-p}\}$ – такая система, что $a \cup b$ – базис в U.
   $c = \{c_1, \dots, c_{r-p}\}$ – такая система, что $a \cup c$ – базис в W.

   Докажем, что $a \cup b \cup c$ – базис в $U + W$.

   1. $\langle a \cup b \cup c \rangle = U + W$:
      $v \in U + W \implies \exists u \in U, w \in W$, такие что $v = u + w$.
      $u \in U = \langle a \cup b \rangle \subseteq \langle a \cup b \cup c \rangle$.
      $w \in W = \langle a \cup c \rangle \subseteq \langle a \cup b \cup c \rangle$.
      Значит, $v \in \langle a \cup b \cup c \rangle$.
   2. $a \cup b \cup c$ линейно независимо.
      Пусть $\underbrace{\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_p a_p}_{x} + \underbrace{\beta_1 b_1 + \dots + \beta_{q-p} b_{q-p}}_{y} + \underbrace{\gamma_1 c_1 + \dots + \gamma_{r-p} c_{r-p}}_{z} = 0$, где $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k \in F$.
      Тогда, $z = -\underset{\in U}{x} - \underset{\in U}{y} \in U$.
      Но, $z \in W$, значит $z \in U \cap W$.
      То есть $z = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p$, $\lambda_i \in F$.
      Тогда, $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p - \gamma_1 c_1 - \dots - \gamma_{r-p} c_{r-p} = 0$
      Так как $a \cup c$ линейно независимо, то $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = \gamma_1 = \dots = \gamma_{r-p} = 0$ и $z = 0$.
      Следовательно, $x + y = 0$, то есть $\alpha_1 a_1 + \dots \alpha_p a_p + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_{q-p} b_{q-p} = 0$.
      Так как $a \cup b$ линейно независимо, то $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = \beta_1 = \dots = \beta_{q-p} = 0$.
      Получаем, что $a \cup b \cup c$ линейно независимо.

   Итог: $a \cup b \cup c$ – базис в $U + W$.

   $$\begin{aligned} \dim(U + W) &= |a| + |b| + |c| \\ &= p + q - p + r - p \\ &= q + r - p \\ &= \dim U + \dim W - \dim(U \cap W). \end{aligned}$$ ■

   .

2. **Теорема о пяти эквивалентных условиях, определяющих линейно независимый набор подпространств векторного пространства**

   Теорема. *Следующие условия эквивалентны:*

   (1) $U_1, \dots, U_k$ *линейно независимы.*
   (2) всякий $u \in U_1 + \dots + U_k$ *единственным образом представим в виде* $u = u_1 + \dots + u_k$, *где* $u_i \in U_i$.
   (3) Если $\mathbb{e}_i$ *— базис в* U_i $\forall i$, *то* $\underbrace{\mathbb{e}_1 \sqcup \mathbb{e}_2 \sqcup \dots \sqcup \mathbb{e}_k}_{\text{объединение мультимножеств}}$ *— базис в* $U_1 + \dots + U_k$.
   (4) $\dim(U_1 + \dots + U_k) = \dim U_1 + \dots + \dim U_k$.
   (5) $\forall i = 1, \dots, k \quad U_i \cap (U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_k) = 0$.

Пример. Если $\mathbb{e}_1 = \{e_1, e_2\}, \mathbb{e}_2 = \{e_2, e_3\}$, то

- $\mathbb{e}_1 \cup \mathbb{e}_2 = \{e_1, e_2, e_3\}$ – 3 элемента,
- $\mathbb{e}_1 \sqcup \mathbb{e}_2 = \{e_1, e_2, e_2, e_3\}$ – 4 элемента.

Доказательство. Пусть $\widehat{U}_i = U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_k$.

(1) $\Longrightarrow$ **(2)** Пусть $u_1 + \dots + u_k = u_1' + \dots + u_k'$, где $u_i, u_i' \in U_i$.
Тогда, $(\underset{\in U_1}{u_1 - u_1'}) + (\underset{\in U_2}{u_2 - u_2'}) + \dots + (\underset{\in U_k}{u_k - u_k'}) = 0 \implies u_i - u_i' = \dots = u_k - u_k' = 0$.
То есть, $u_1 = u_1', \dots, u_k = u_k'$.

(2) $\Longrightarrow$ **(3)** Пусть $u \in U_1 + \dots + U_k$ – произвольный.
u единственным образом представим в виде $u = u_1 + \dots + u_k$, где $u_i \in U_i$,
u_i единственным образом представим в виде линейной комбинации векторов из $\mathbb{e}_i$.
Следовательно, u единственным образом представим в виде линейной комбинации векторов из $\mathbb{e}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathbb{e}_k$.
То есть, $\mathbb{e}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathbb{e}_k$ — базис в $U_1 + \dots + U_k$.

(3) $\Longrightarrow$ **(4)** Очевидно.

(4) $\Longrightarrow$ **(5)**

$$\begin{aligned}
\dim(U_i \cap \widehat{U}_i) &= \dim U_i + \dim \widehat{U}_i - \dim(U_1 + \dots + U_k) \\
&\leqslant \dim U_i + (\dim U_1 + \dots + \dim U_{i-1} + \dim U_{i+1} + \dots + \dim U_k) - (\dim U_1 + \dots + \dim U_k) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(5) $\Longrightarrow$ **(1)** $u_1 + \dots + u_k = 0$, где $u_i \in U_i$.
Тогда, $\underset{\in U_i}{u_i} = \underbrace{-u_1 - \dots - u_{i-1} - u_{i+1} - \dots - u_k}_{\in \widehat{U}_i}$
Следовательно, $u_i \in U_i \cap \widehat{U}_i = 0 \implies u_i = 0$. ∎

Следствие. Пусть $k = 2$, тогда
U_1, U_2 линейно независимы $\iff U_1 \cap U_2 = 0$.

2.2 Линейные отображения

1. **Свойства отношения изоморфности на множестве всех векторных пространств**

Предложение. Если $\varphi \colon V \to W$ — изоморфизм, то φ^{-1} — тоже изоморфизм.

Доказательство. Биективность есть, так как φ^{-1} — обратное отображение. Проверим линейность:

1) $w_1, w_2 \in W \implies w_1 = \varphi(\varphi^{-1}(w_1)),\ w_2 = \varphi(\varphi^{-1}(w_2))$

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(w_1 + w_2) &= \varphi^{-1}\Big(\underbrace{\varphi\left(\varphi^{-1}(w_1)\right)}_{w_1} + \underbrace{\varphi\left(\varphi^{-1}(w_2)\right)}_{w_2}\Big) \\
&= \underbrace{\varphi^{-1}\big(\varphi}_{Id}\left(\varphi^{-1}(w_1) + \varphi^{-1}(w_2)\right)\big) \\
&= \varphi^{-1}(w_1) + \varphi^{-1}(w_2).
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(\lambda \cdot w_1) &= \varphi^{-1}\left(\lambda \cdot \varphi\left(\varphi^{-1}(w_1)\right)\right) \\
&= \underbrace{\varphi^{-1}\big(\varphi}_{Id}\left(\lambda \cdot \varphi^{-1}(w_1)\right)\big) \\
&= \lambda \varphi^{-1}(w_1).
\end{aligned}$$

∎

Пусть $U \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{\varphi} W$, тогда $\varphi \circ \psi : U \to W$ — композиция.

Предложение.

1. Если φ, ψ линейны, то $\varphi \circ \psi$ тоже линейна.
2. Если φ, ψ — изоморфизмы, то $\varphi \circ \psi$ — тоже изоморфизм.

Доказательство.

1. (1) $(\varphi \circ \psi)(u_1 + u_2) = \varphi(\psi(u_1 + u_2)) = \varphi(\psi(u_1) + \psi(u_2)) = \varphi(\psi(u_1)) + \varphi(\psi(u_2)) = (\varphi \circ \psi)(u_1) + (\varphi \circ \psi)(u_2)$.
   (2) $(\varphi \circ \psi)(\lambda u) = \varphi(\psi(\lambda u)) = \varphi(\lambda\psi(u)) = \lambda\varphi(\psi(u)) = \lambda(\varphi \circ \psi)(u)$.
2. из 1 следует, что $(\varphi \circ \psi)$ линейно, но при этом биективно как композиция двух биекций. ■

Теорема. *Отношение изоморфности является отношением эквивалентности на множестве всех векторных пространств над фиксированным полем F.*

Доказательство.

1. Рефлексивность: $Id : V \xrightarrow{\sim} V$.
2. Симметричность: $V \simeq W \implies W \simeq V$ следует из Предложения 1.
3. Транзитивность: $U \simeq V$, $V \simeq W \implies U \simeq W$ следует из Предложения 2. ■

2. Критерий изоморфности двух конечномерных векторных пространств

Теорема. *Пусть V, W — два конечномерных векторных пространства над F.*
Тогда, $V \simeq W \iff \dim V = \dim W$.

Лемма. $\dim V = n \implies V \simeq F^n$.

Доказательство. Фиксируем базис $(e_1, \dots, e_n)$ в V.
Тогда, отображение $\varphi \colon V \to F^n$ — изоморфизм.

$$v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \implies \varphi(v) := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

■

Лемма. Пусть $\varphi \colon V \xrightarrow{\sim} W$ и $e_1, \dots, e_n$ — базис V, тогда $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ — базис W.

Доказательство. Пусть $w \in W$. Тогда $\exists x_1, \dots, x_n \in F$, такие что $\varphi^{-1}(w) = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$.
Тогда, $w = \varphi\left(\varphi^{-1}(w)\right) = \varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1\varphi(e_1) + \dots + x_n\varphi(e_n) \implies W = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \rangle$.
Теперь докажем линейную независимость:
Пусть $\alpha_1\varphi(e_1) + \dots + \alpha_n\varphi(e_n) = \overrightarrow{0}$.
Тогда, $\varphi(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) = \overrightarrow{0}$.
Применяя φ^{-1} получаем, $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = \varphi^{-1}(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$. Значит, $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.
Итог: $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ — базис в V. ■

Доказательство теоремы.

$\Longleftarrow$ Пусть $\dim V = \dim W = n$. Тогда по лемме 1 $V \simeq F^n, W \simeq F^n$, значит $V \simeq W$.
$\implies$ Пусть $V \simeq W$. Фиксируем изоморфизм $\varphi \colon V \xrightarrow{\sim} W$.
Тогда по лемме 2 получаем, что $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ — базис W, а значит $\dim V = n = \dim W$. ■

3. Существование и единственность линейного отображения с заданными образами базисных векторов

Пусть V, W — векторные пространства над F и $(e_1, \dots, e_n)$ — фиксированный базис в V.

Предложение.

1. Если $\varphi \colon V \to W$ — линейное отображение, то φ однозначно определяется векторами $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$,
2. $\forall w_1, \dots, w_n \in W$ $\exists!$ линейное отображение φ, такое что, $\varphi(e_1) = w_1, \dots, \varphi(e_n) = w_n$.

Доказательство.

1. $v \in V \implies v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \implies \varphi(v) = x_1\varphi(e_1) + \dots + x_n\varphi(e_n)$.

2. Зададим $\varphi\colon V \to W$ формулой $\varphi(x_1e_1 + \dots + x_ne_n) = x_1w_1 + \dots + x_nw_n$.
   Тогда φ — линейное отображение из V в W (упражнение).
   Единственность следует из 1. ■

4. Связь между координатами вектора и его образа при линейном отображении

Предложение. Пусть $\varphi\colon V \to W$ — линейное отображение,
$\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V,
$\mathbb{f} = (f_1, \dots, f_m)$ — базис W,
$A = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$.
$v \in V \implies v = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$,
$\varphi(v) = y_1f_1 + \dots + y_mf_m$.
Тогда,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Доказательство. $v = (e_1, \dots, e_m) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Значит,

$$\varphi(v) = (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (f_1, \dots, f_m) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

При этом,

$$\varphi(v) = (f_1, \dots, f_m) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Так как $f_1, \dots, f_m$ линейно независимы, то

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

■

5. Формула изменения матрицы линейного отображения при замене базисов

Пусть теперь $\mathbb{e}'$ — другой базис в V, $\mathbb{f}'$ — другой базис в W.
$\mathbb{e}' = \mathbb{e} \cdot C_{\in M_n}$,
$\mathbb{f}' = \mathbb{f} \cdot D_{\in M_m}$.
$A = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$,
$A' = A(\varphi, \mathbb{e}', \mathbb{f}')$.

Предложение. $A' = D^{-1}AC$.

Доказательство.

$$(e'_1, \dots e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C.$$

Применим φ,

$$(\varphi(e'_1), \dots, \varphi(e'_n)) = (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) \cdot C = (f_1, \dots, f_m) \cdot A \cdot C$$

При этом,

$$(\varphi(e'_1), \dots, \varphi(e'_n)) = (f'_1, \dots, f'_m) \cdot A' = (f_1, \dots, f_m) \cdot D \cdot A'.$$

Отсюда,

$$A \cdot C = D \cdot A' \implies A' = D^{-1} \cdot A \cdot C.$$

■

6. **Изоморфизм** $\mathrm{Hom}(V,W) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Mat}_{m\times n}(F)$ **при фиксированных базисах** V **и** W

Следствие. При фиксированном $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$ отображение $\varphi \mapsto A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$ является изоморфизмом между $\mathrm{Hom}(V, W)$ и $\mathrm{Mat}_{m\times n}(F)$.

Зафиксируем базисы $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ в V и $\mathbb{f} = (f_1, \dots, f_m)$ в W.

Линейность.

1. $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(V, W),\ A_\varphi = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$
   $A_\psi = A(\psi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$
   $A_{\varphi+\psi} = A(\varphi + \psi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) \implies A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$
2. $\lambda \in F, \varphi \in \mathrm{Hom}(V, W),\ A_\varphi = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$
   $A_{\lambda\varphi} = A(\lambda\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) \implies A_{\lambda\varphi} = \lambda A_\varphi$

Доказательство.

1. $$\begin{aligned}(f_1, \dots, f_m) \cdot A_{\varphi+\psi} &= ((\varphi + \psi)(e_1), \dots, (\varphi + \psi)(e_n))\\ &= (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) + (\psi(e_1), \dots, \psi(e_n))\\ &= (f_1, \dots, f_m)A_\varphi + (f_1, \dots, f_m)A_\psi\\ &= (f_1, \dots, f_m)(A_\varphi + A_\psi).\end{aligned}$$

   Следовательно, $A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$.
2. $$\begin{aligned}(f_1, \dots, f_m) \cdot A_{\lambda\varphi} &= ((\lambda\varphi)(e_1), \dots, (\lambda\varphi)(e_n))\\ &= ((\varphi)(e_1), \dots, (\varphi)(e_n))\lambda\\ &= (f_1, \dots, f_m)A_\varphi\lambda.\end{aligned}$$

   Следовательно, $A_{\lambda\varphi} = \lambda A_\varphi$. ■

Биективность. По определению, в j-м столбце матрицы A стоят координаты вектора $\varphi(e_j)$ в базисе $\mathbb{f}$.

А значит, из пункта 2.3 следует, что при фиксированных базисах $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$ отображение $\varphi \mapsto A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$ является биекцией между $\mathrm{Hom}(V, W)$ и $\mathrm{Mat}_{m\times n}(F)$.

7. **Матрица композиции двух линейных отображений**

Пусть $U \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{\varphi} W$ — цепочка линейных отображений, а $\varphi \circ \psi : U \to W$ — их композиция,

$\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V,

$\mathbb{f} = (f_1, \dots, f_m)$ — базис W,

$\mathbb{g} = (g_1, \dots, g_k)$ — базис U.

$A_\varphi = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$,

$A_\psi = A(\psi, \mathbb{g}, \mathbb{e})$,

$A_{\varphi\circ\psi} = A(\varphi \circ \psi, \mathbb{g}, \mathbb{f})$.

Тогда, $A_{\varphi\circ\psi} = A_\varphi \cdot A_\psi$.

Доказательство. $(\psi(g_1), \dots, \psi(g_k)) = (e_1, \dots, e_n)A_\psi$. Тогда применяя φ,

$$(\varphi(\psi(g_1)), \dots, \varphi(\psi(g_k))) = (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))\, A_\psi = (f_1, \dots, f_m)A_\varphi A_\psi.$$

С другой стороны,

$$(\varphi(\psi(g_1)), \dots, \varphi(\psi(g_k))) = (f_1, \dots, f_m)A_{\varphi\circ\psi}.$$

Значит, $A_\varphi \cdot A_\psi = A_{\varphi\circ\psi}$. ■

8. **Утверждение о том, что ядро и образ — подпространства в соответствующих векторных пространствах**

Предложение.

1. Ядро — подпространство в V.
2. Образ — подпространство в W.

Доказательство.

1. (a) $\varphi(0_V) = 0_W$,
   (b) $v_1, v_2 \in \ker\varphi \implies \varphi(v_1+v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = 0 + 0 = 0 \implies v_1 + v_2 \in \ker\varphi$,
   (c) $\lambda \in F, v \in V \implies \varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v) = \lambda 0 = 0 \implies \lambda v \in \ker\varphi$.
2. (a) $0_W = \varphi(W) \in \operatorname{Im}\varphi$,
   (b) $w_1, w_2 \in \operatorname{Im}\varphi \implies \exists v_1, v_2 : w_1 = \varphi(v_1), w_2 = \varphi(v_2) \implies w_1 + w_2 = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \varphi(v_1 + v_2) \in \operatorname{Im}\varphi$,
   (c) $\varphi \in F, w \in \operatorname{Im}\varphi \implies \exists v \in V : w = \varphi(v) \implies \lambda w = \lambda\varphi(v) = \varphi(\lambda v) \in \operatorname{Im}\varphi$. ■

9. Связь между рангом матрицы линейного отображения и размерностью его образа

Пусть $U \subseteq V$ — подпространство, $u_1, \ldots, u_k$ — базис в U.

Лемма. Тогда, $\varphi(U) = \langle\varphi(u_1), \ldots, \varphi(u_k)\rangle$. В частности, $\dim\varphi(U) \leqslant \dim U$ и $\dim\operatorname{Im}\varphi \leqslant \dim V$.

Доказательство. $u \in U \implies u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k$, $\alpha_i \in F$, тогда

$$\varphi(u) = \alpha_1\varphi(u_1) + \cdots + \alpha_k\varphi(u_k) \in \langle\varphi(u_1), \ldots, \varphi(u_k)\rangle\,.$$ ■

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V,
$\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ — базис W,
$A = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$.

Теорема. $\operatorname{rk} A = \dim\operatorname{Im}\varphi$.

Доказательство. По лемме, $\operatorname{Im}\varphi = \langle\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)\rangle$. Поэтому, $\dim\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{rk}\{\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)\}$.
Так как j-й столбец матрицы A составлен из координат вектора $\varphi(e_j)$ в базисе $\mathbb{f}$, то

$$\alpha_1\varphi(e_1) + \cdots + \alpha_n\varphi(e_n) = 0 \iff \alpha_1 A^{(1)} + \cdots + \alpha_n A^{(n)} = 0.$$

Значит, $\dim\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{rk}\{\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)\} = \operatorname{rk}\{A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}\} = \operatorname{rk} A$. ■

Замечание. Число $\dim\operatorname{Im}\varphi$ называется *рангом* линейного отображения φ, обозначается $\operatorname{rk}\varphi$.

10. Лемма о дополнении базиса ядра линейного отображения до базиса всего пространства

Предложение. Пусть $e_1, \ldots, e_k$ — базис $\ker\varphi$ и векторы $e_{k+1}, \ldots, e_n$ дополняют его до базиса всего V.
Тогда, $\varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_n)$ образуют базис в $\operatorname{Im}\varphi$.

Доказательство. $\operatorname{Im}\varphi = \langle\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_k), \varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_n)\rangle = \langle\varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_n)\rangle$. (так как $\varphi(e_1) = \cdots = \varphi(e_k) = 0$).
Осталось показать, что $\varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_n)$ линейно независимы.
Пусть $\alpha_{k+1}\varphi(e_{k+1}) + \cdots + \alpha_n\varphi(e_n) = 0$, где $\alpha_i \in F$.
Тогда $\varphi(\alpha_{k+1}e_{k+1} + \ldots \alpha_n e_n) = 0 \implies \alpha_{k+1}e_{k+1} + \cdots + \alpha_n e_n \in \ker\varphi$.
Но тогда $\alpha_{k+1}e_{k+1} + \ldots \alpha_n e_n = \beta_1 e_1 + \cdots + \beta_k e_k$, где $\beta_j \in F$.
Так как $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис V, то $\alpha_i = \beta_j = 0\ \forall i, j$. ■

11. Теорема о связи размерностей ядра и образа линейного отображения, приведение матрицы линейного отображения к диагональному виду с единицами и нулями на диагонали

Теорема. $\dim\operatorname{Im}\varphi + \dim\ker\varphi = \dim V$.

Доказательство. Вытекает из предыдущего предложения так как в его доказательстве:
$\dim V = n$,
$\dim\ker\varphi = k$,
$\dim\operatorname{Im}\varphi = n - k$. ■

Предложение. Пусть $\operatorname{rk}\varphi = r$. Тогда существует базис $\mathbb{e}$ в V и базис $\mathbb{f}$ в W, такие что

$$A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) = \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} & r & & & & n-r & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ r \\ \\ \\ \\ m-r \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Доказательство. Пусть $e_{r+1}, \dots, e_n$ — базис $\ker\varphi$. Дополним его векторами $e_1, \dots, e_r$ до базиса всего V.

Положим $f_1 = \varphi(e_1)$, $\dots$, $f_r = \varphi(e_r)$, тогда $(f_1, \dots, f_r)$ — базис $\operatorname{Im}\varphi$.

Дополним $f_1, \dots, f_r$ до базиса $f_1, \dots, f_m$ всего W.

Тогда, $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ и $\mathbb{f} = (f_1, \dots, f_m)$ — искомые базисы. ■

2.3 Линейные, билинейные и квадратичные формы

1. **Свойство базиса сопряжённого векторного пространства**

$\varepsilon_i(x_1e_1 + \dots + x_ne_n) = x_i$, поэтому ε_i называется i-й координатной функцией в базисе $\mathbb{e}$.

Предложение. Всякий базис пространства V^* двойствен некоторому базису пространства V.

Доказательство. Пусть $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$ — базис пространства V^*. Фиксируем какой-то базис $\mathbb{e}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ пространства V, и пусть $\varepsilon' = \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \dots \\ \varepsilon'_n \end{pmatrix}$ — соответствующий ему двойственный базис V^*.

Тогда, $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \dots \\ \varepsilon'_n \end{pmatrix}$ для некоторой матрицы $C \in M_n^0(F)$.

Положим $(e_1, \dots, e_n) = (e'_1, \dots, e'_n) \cdot C^{-1}$.

Тогда,

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} (e_1, \dots, e_n) = C \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \dots \\ \varepsilon'_n \end{pmatrix} (e'_1, \dots, e'_n) C^{-1} = CEC^{-1} = E.$$

Значит, ε двойствен к $\mathbb{e}$. ■

Упражнение. $\mathbb{e}$ определён однозначно.

2. **Формула для вычисления значений билинейной формы в координатах**

Пусть $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$,

$\qquad y = y_1e_1 + \dots + y_ne_n$.

Тогда,

$$\begin{aligned} \beta(x, y) &= \beta\left(\sum_{i=1}^n x_ie_i,\ \sum_{j=1}^n y_je_j\right) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \beta\left(e_i,\ \sum_{j=1}^n y_je_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_iy_j \underbrace{\beta(e_i, e_j)}_{\beta_{ij}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i\beta_{ij}y_j \\ &= (x_1, \dots, x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. **Существование и единственность билинейной формы с заданной матрицей**

Предложение. Пусть $\mathbb{e}$ — фиксированный базис V.

1. Всякая билинейная форма β на V однозначно определяется матрицей $B(\beta, \mathbb{e})$.
2. $\forall B \in M_n(F)$ $\exists!$ билинейная форма β на V, такая что $B(\beta, \mathbb{e}) = B$.

Доказательство.

1. Следует из формулы выше.
2. Единственность следует из формулы выше. Докажем существование:
   Определим β по формуле выше.
   Тогда β — билинейная форма на V (упражнение).

$$\beta(e_i, e_j) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & i & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \cdot B \cdot \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array} = \beta_{ij}.$$

Действительно, $B(\beta, \mathbb{e}) = B$. ■

4. Формула изменения матрицы билинейной формы при переходе к другому базису

$B = B(\beta, \mathbb{e})$.

Пусть $\mathbb{e}' = (e'_1, \dots e'_n)$ — другой базис V.

$\mathbb{e}' = \mathbb{e} \cdot C$.

$B' := B(\beta, \mathbb{e}')$.

Предложение. $B' = C^T BC$.

Доказательство.

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = x'_1 e'_1 + \dots + x'_n e'_n,$$

$$y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n = y'_1 e'_1 + \dots + y'_n e'_n.,$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} y'_1 \\ \dots \\ y'_n \end{pmatrix}.$$

Тогда,

$$\beta(x, y) = (x_1 \dots x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = (x'_1 \dots x'_n) C^T BC \begin{pmatrix} y'_1 \\ \dots \\ y'_n \end{pmatrix}$$
$$\beta(x, y) = (x'_1 \dots x'_n) B' \begin{pmatrix} y'_1 \\ \dots \\ y'_n \end{pmatrix}.$$

Получаем, что $B' = C^T BC$. ■

5. Критерий симметричности билинейной формы в терминах её матрицы в каком-либо базисе

Пусть $\mathbb{e}$ — произвольный базис V.

Предложение. β симметрична $\iff$ $B = B^T$.

Доказательство.

$\implies$ $b_{ji} = \beta(e_j, e_i) = \beta(e_i, e_j) = b_{ij}$,

$\Longleftarrow$ $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$,

$y = y_1e_1 + \dots + y_ne_n$,

Тогда,

$$\beta(y, x) = (y_1 \dots y_n)B \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1 \dots x_n)B^T \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1 \dots x_n)B \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \beta(x, y).$$

■

6. Соответствие между симметричными билинейными формами и квадратичными формами

Предложение. Пусть в поле F выполнено условие $1 + 1 \neq 0$ (то есть $2 \neq 0$). Тогда отображение $\beta \mapsto Q_\beta$ является биекцией между симметричными билинейными формами на V и квадратичным формами на V.

Доказательство.

Сюръективность Q — квадратичная форма $\implies Q = Q_\beta$ для некоторой билинейной формы на V.

То есть $Q(x) = \beta(x, x)\ \forall x \in V$.

Положим $\sigma(x, y) = \frac{1}{2}\left[\beta(x, y) + \beta(y, x)\right]$, тогда σ — симметричная билинейная форма.

$$\sigma(x, x) = \frac{1}{2}\left[\beta(x, x) + \beta(x, x)\right] = \beta(x, x).$$

Инъективность β — симметричная билинейная форма на V.

$Q_\beta(x+y) = \beta(x+y, x+y) = \underbrace{\beta(x, x)}_{Q_\beta(x)} + \underbrace{\beta(x, y) + \beta(y, x)}_{\text{равны между собой}} + \underbrace{\beta(y, y)}_{Q_\beta(y)} \implies \beta(x, y) = \frac{1}{2}\left[Q_\beta(x + y) - Q_\beta(x) - Q_\beta(y)\right]$.

■

7. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду

8. Метод Якоби приведения квадратичной формы к каноническому виду

9. Существование нормального вида для квадратичной формы над $\mathbb{R}$

Следствие (из метода Лагранжа)**.** Для всякой квадратичной формы Q над $\mathbb{R}$ существует базис, в котором Q имеет нормальный вид.

Доказательство. Из теоремы знаем, что существует базис $\mathbb{e}$, в котором Q имеет канонический вид

$$Q(x_1, \dots, x_n) = b_1x_1^2 + \dots + b_nx_n^2.$$

Делаем замену

$$x_i = \begin{cases} \frac{x_i'}{\sqrt{|b_i|}}, & b_i \neq 0 \\ x_i, & b_i = 0 \end{cases}.$$

Тогда в новых координатах $Q(x_1', \dots, x_n') = \varepsilon_1x_1'^2 + \dots + \varepsilon_nx_n'^2$,

$$\varepsilon_i = \operatorname{sgn} b_i = \begin{cases} 1, & b_i > 0 \\ 0, & b_i = 0 \\ -1, & b_i < 0 \end{cases}.$$

■

10. Закон инерции

Пусть $F = \mathbb{R}$.

Пусть $Q\colon V \to \mathbb{R}$ — квадратичная форма.

Можно привести к нормальному виду

$$Q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_{s+t}^2.$$

Теорема. *Числа i_+ и i_- не зависят от базиса в котором Q принимает нормальный вид.*

Доказательство. $s+t=\operatorname{rk}Q$, то есть не зависит от выбора базиса. Следовательно, достаточно показать, что число s определено однозначно.

Пусть $\mathbb{e}=(e_1,\dots,e_n)$ — базис, в котором Q принимает нормальный вид

$$Q=x_1^2+\dots+x_s^2-x_{s+1}^2-\dots-x_{s+t}^2.$$

Пусть $\mathbb{e}'=(e'_1,\dots,e'_n)$ — другой базис, в котором Q принимает нормальный вид

$$Q=x_1'^2+\dots+x_{s'}'^2-x_{s'+1}'^2-\dots-x_{s'+t'}'^2.$$

Предположим, что $s\neq s'$, можно считать что $s>s'$.

Положим $L:=\langle e_1,\dots,e_s\rangle$, $\dim L=s$,

$L':=\left\langle e'_{s'+1},\dots,e'_n\right\rangle$, $\dim L'=n-s'$.

Так как $L+L'\subseteq V$, то $\dim(L+L')\leqslant n$.

Тогда, $\dim(L\cap L')\geqslant s+(n-s')-n=s-s'>0$.

Значит, $\exists$ вектор $v\in L\cap L'$, такой что $v\neq 0$.

Теперь:

1. Так как $v\in L$, то $Q(v)>0$,
2. Так как $v\in L'$, то $Q(v)\leqslant 0$.

Противоречие. ■

11. Следствие метода Якоби о нахождении индексов инерции квадратичной формы над $\mathbb{R}$

Пусть $Q\colon V\to\mathbb{R}$ — квадратичная форма,

$\mathbb{e}=(e_1,\dots,e_n)$ — базис,

$B=B(Q,\mathbb{e})$,

δ_k — k-й угловой минор матрицы B.

Следствие (из метода Якоби)**.** Пусть $\delta_k\neq 0\ \forall k$. Тогда:

Число i_+ равно количеству сохранений знака в последовательности $1,\delta_1,\dots,\delta_n$.

Число i_- равно количеству перемен знака в последовательности $1,\delta_1,\dots,\delta_n$.

Доказательство. Метод Якоби $\implies\exists$ базис, в котором Q принимает канонический вид

$$Q=\delta_1x_1^2+\frac{\delta_2}{\delta_1}x_2^2+\dots+\frac{\delta_n}{\delta_{n-1}}x_n^2.$$

Здесь, знак отношения $\frac{\delta_i}{\delta_{i-1}}$ соответствует смене либо сохранению знака в рассматриваемой последовательности.

По закону инерции, количества знаков + и − не изменяются от выбора базиса. ■

12. Критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы, критерий отрицательной определёности квадратичной формы

Пусть V — векторное пространство над $\mathbb{R}$, $\dim V=n$,

$\mathbb{e}=(e_1,\dots,e_n)$ — базис V,

$B=B(Q,\mathbb{e})$,

B_k — левый верхний $k\times k$ блок,

$\delta_k=\det B_k$.

Теорема (Критерий Сильвестра положительной определенности)**.**

$$Q>0\iff\delta_k>0\ \forall k=1\dots n.$$

Доказательство.

$\Longleftarrow$ По следствию из метода Якоби, $i_+=n$, то есть $Q>0$.

$\implies$ $Q>0\implies\exists C\in M_n^0(\mathbb{R})$, такая что $C^TBC=E$.

Тогда, $\det C^T\cdot\underbrace{\det B}_{=\delta_n}\cdot\det C=1$. Отсюда, $\delta_n=\frac{1}{(\det C)^2}>0$.

Теперь, для любого k ограничение Q на $\langle e_1,\dots,e_k\rangle$ тоже положительно определённо, а его матрица в базисе $e_1,\dots,e_k$ равна B_k. Следовательно, $\det B_k>0$. ■

2.4 Евклидовы пространства

1. Неравенство Коши–Буняковского

Предложение (неравенство Коши-Буняковского)**.** $\forall x, y \in \mathbb{E}$ верно $|(x,y)| \leqslant |x| \cdot |y|$, причём равенство $\iff$ x, y пропорциональны.

Доказательство. Случаи:

1. x, y пропорциональны. Тогда, можно считать, что $y = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
   $|(x,y)| = |(x, \lambda x)| = |\lambda||(x,x)| = |\lambda||x|^2 = |x| \cdot |\lambda x| = |x| \cdot |y|$.
2. x, y не пропорциональны. Тогда x, y линейно независимы.
   Значит они образуют базис в $\langle x, y\rangle$.
   Получаем
   $$\begin{vmatrix} (x,x) & (x,y) \\ (y,x) & (y,y) \end{vmatrix} > 0 \quad \text{(критерий Сильвестра)}.$$
   Отсюда, $(x,x) \cdot (y,y) - (x,y)^2 > 0 \implies (x,y)^2 < |x|^2 \cdot |y|^2$.

■

Пример. Пусть $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением, тогда

$$|x_1 y_1 + \dots + x_n y_n| \leqslant \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}.$$

2. Свойства определителя матрицы Грама системы векторов евклидова пространства

Предложение. $\forall v_1, \dots, v_k \in \mathbb{E} \implies \det G(v_1, \dots, v_k) \geqslant 0$.

Более того, $\det G(v_1, \dots, v_k) > 0 \iff v_1, \dots, v_k$ линейно независимы.

Доказательство. Пусть $G := G(v_1, \dots, v_k)$. Случаи:

1. $v_1, \dots, v_k$ линейно независимы. Тогда, G — матрица билинейной формы $(\bullet, \bullet)\Big|_{\langle v_1, \dots, v_k\rangle}$ в базисе $v_1, \dots, v_k$ подпространства $\langle v_1, \dots, v_k\rangle$, а значит $\det G > 0$ по критерию Сильвестра.
2. $v_1, \dots, v_k$ линейно зависимы. Тогда, $\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$, такие что $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$.
   А значит, $\forall i = 1, \dots, k \implies \alpha_1 (v_1, v_i) + \dots + \alpha_k (v_k, v_i) = 0$.
   Отсюда, $a_1 G_{(1)} + \dots + \alpha_k G_{(k)} = 0 \implies$ строки в G линейно зависимы $\implies \det G = 0$. ■

3. Свойства ортогонального дополнения к подпространству в евклидовом пространстве: размерность, разложение в прямую сумму, ортогональное дополнение к ортогональному дополнению

Далее считаем, что $\dim \mathbb{E} = n < \infty$.

Предложение. Пусть $S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство. Тогда:

1. $\dim S^\perp = n - \dim S$.
2. $\mathbb{E} = S \oplus S^\perp$.
3. $(S^\perp)^\perp = S$.

Доказательство.

1. Пусть $\dim S = k$ и $e_1, \dots, e_k$ — базис S.
   Дополним $e_1, \dots, e_k$ до базиса $e_1, \dots, e_n$ всего $\mathbb{E}$.
   Тогда, $\forall x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in \mathbb{E}$.
   $$\begin{aligned} x \in S^\perp &\iff (x, e_i) = 0 \ \forall i = 1, \dots, k \\ &\iff \begin{cases} (e_1, e_1)x_1 + \dots + (e_n, e_1)x_n = 0 \\ (e_1, e_2)x_1 + \dots + (e_n, e_2)x_n = 0 \\ \dots \\ (e_1, e_k)x_1 + \dots + (e_n, e_k)x_n = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$
   Это ОСЛУ с матрицей $G \in \mathrm{Mat}_{k \times n}(\mathbb{R})$, причём левый $k \times k$ блок в G — это $\underbrace{G(e_1, \dots, e_k)}_{\det \neq 0}$.

   Это означает, что $\operatorname{rk} G = k$.
   Следовательно, пространство решений этой ОСЛУ имеет размерность $n - k$.
   Отсюда, $\dim S^\perp = n - k = n - \dim S$.

2. (a) $\dim S + \dim S^{\perp} = k + (n-k) = n = \dim E$.
   (b) $v \in S \cap S^{\perp} \implies (v,v) = 0 \implies v = 0 \implies S \cap S^{\perp} = \{0\}$.
   А значит, $E = S \oplus S^{\perp}$.
3. Заметим, что $S \subseteq (S^{\perp})^{\perp}$ (по определению).
   $\dim (S^{\perp})^{\perp} = n - \dim S^{\perp} = n - (n - \dim S) = \dim S$.
   Следовательно, $S = (S^{\perp})^{\perp}$. ■

4. Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в $\mathbb{R}^n$ в терминах его произвольного базиса

Пусть $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением.

$S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство, $a_1, \dots, a_k$ — базис S.

Пусть $A := (a_1, \dots, a_k) \in \mathrm{Mat}_{n\times k}(\mathbb{R})$, $A^{(i)} = a_i$.

Предложение. $\forall v \in \mathbb{R}^n \quad \mathrm{pr}_S\, v = A(A^TA)^{-1}A^Tv$.

Доказательство. Корректность: $A^TA = G(a_1, \dots, a_k) \in M_k^0(\mathbb{R})$.

Положим $x := \mathrm{pr}_S\, v$, $y := \mathrm{ort}_S\, v$.

Так как $x \in S$, $x = A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_k \end{pmatrix}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

$y \in S^{\perp} \implies A^Ty = 0$.

$$\begin{aligned} A(A^TA)^{-1}A^Tv &= A(A^TA)^{-1}A^T(x+y) \\ &= A\underbrace{(A^TA)^{-1}A^T A}_{E} \overbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_k \end{pmatrix}}^{x} + A(A^TA)^{-1}\underbrace{A^Ty}_{0} \\ &= A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = x = \mathrm{pr}_S\, v. \end{aligned}$$

■

5. Существование ортонормированного базиса в евклидовом пространстве, дополнение ортогональной (ортонормированной) системы векторов до ортогонального (ортонормированного) базиса

Теорема. *Во всяком конечномерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.*

Доказательство. Следует из теоремы о приведении квадратичной формы (x,x) к нормальному виду (который будет E в силу положительной определённости). ■

Следствие. Всякую ортогональную (ортонормированную) систему векторов можно дополнить до ортогонального (ортонормированного) базиса.

Доказательство. Пусть $e_1, \dots, e_k$ — данная система.

Пусть $e_{k+1}, \dots, e_n$ — это ортогональный (ортонормированный) базис в $\langle e_1, .., e_k\rangle^{\perp}$.

Тогда $e_1, \dots, e_n$ — искомый базис. ■

6. Описание всех ортонормированных базисов в терминах одного и матриц перехода

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — ортонормированный базис в E.

Пусть $\mathbb{e}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ — какой-то другой базис.

$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C$, $C \in M_n^0(\mathbb{R})$.

Предложение. $\mathbb{e}'$ — ортонормированный базис $\iff C^T \cdot C = E$.

Доказательство. $G(e'_1, \dots, e'_n) = C^T \underbrace{G(e_1, \dots, e_n)}_{E} C = C^TC$.

$\mathbb{e}'$ ортонормированный $\iff G(e'_1, \dots, e'_n) = E \iff C^TC = E$. ■

7. **Формула для координат вектора в ортогональном (ортонормированном) базисе. Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в терминах его ортогонального (ортонормированного) базиса**

Пусть $\mathbb{E}$ — евклидово пространство, $(e_1, \ldots, e_n)$ — ортогональный базис.

$v \in \mathbb{E}$.

Предложение. $v = \dfrac{(v, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 + \dfrac{(v, e_2)}{(e_2, e_2)} e_2 + \cdots + \dfrac{(v, e_n)}{(e_n, e_n)} e_n$.

В частности, если $e_1, \ldots, e_n$ ортонормирован, то $v = (v, e_1)e_1 + \cdots + (v, e_n)e_n$.

Доказательство. $v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots \lambda_n e_n$.

$\forall i = 1, \ldots, n \quad (v, e_i) = \lambda_1 (e_1, e_i) + \cdots + \lambda_n (e_n, e_i)$.

Так как базис ортогонален, то $(v, e_i) = \lambda_i (e_i, e_i) \implies \lambda_i = \dfrac{(v, e_i)}{(e_i, e_i)}$. ■

8. **Теорема Пифагора и неравенство треугольника в евклидовом пространстве**

Теорема. *Пусть* $x, y \in \mathbb{E}$, $(x, y) = 0$. *Тогда* $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$.

Доказательство.

$$|x + y|^2 = (x + y, x + y) = \underbrace{(x, x)}_{|x|^2} + \underbrace{(x, y)}_{0} + \underbrace{(y, x)}_{0} + \underbrace{(y, y)}_{|y|^2} = |x|^2 + |y|^2.$$ ■

9. **Теорема о расстоянии между вектором и подпространством в терминах ортогональной составляющей**

Теорема. *Пусть* $x \in \mathbb{E}$, $S \subseteq \mathbb{E}$ *— подпространство. Тогда,* $\rho(x, S) = |\operatorname{ort}_S x|$, *причем* $\operatorname{pr}_S x$ *— это ближайший к* x *вектор из* S.

Доказательство. Положим $y = \operatorname{pr}_S x$, $z = \operatorname{ort}_S x$. Тогда, $x = y + z$. Для любого $y' \in S$, $y' \neq 0$ имеем

$$\rho(x, y + y')^2 = |x - y - y'|^2 = |z - y'|^2 = |z|^2 + |y'|^2 > |z|^2 = |x - y|^2 = \rho(x, y)^2.$$ ■

10. **Метод наименьших квадратов для несовместных систем линейных уравнений: постановка задачи и её решение. Единственность псевдорешения и явная формула для него в случае линейной независимости столбцов матрицы коэффициентов**

СЛУ $Ax = b$, $A \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$.

$$x_0 \text{ — решение системы} \iff Ax_0 = b \iff Ax_0 - b = 0 \iff |Ax_0 - b| = 0 \iff \rho(Ax_0, b) = 0.$$

Если СЛУ несовместна, то x_0 называется *псевдорешением*, если $\rho(Ax_0, b)$ минимально.

$$\rho(Ax_0, b) = \min_{x \in R^n} \rho(Ax, b).$$

x_0 — решение задачи оптимизации $\rho(Ax, b) \xrightarrow[x \in \mathbb{R}^n]{} \min$.

Пусть $S \subseteq \mathbb{R}^n$ — подпространство натянутое на столбцы матрицы A.

$S = \langle A^{(1)}, \ldots, A^{(n)} \rangle$.

Положим $c := \operatorname{pr}_S b$.

Предложение.

1. x_0 — псевдорешение $Ax = b \iff x_0$ — решение для $Ax = c$.
2. Если столбцы $A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}$ линейно независимы, то псевдорешение единственно и может быть найдено по формуле $x_0 = (A^T A)^{-1} A^T b$.

Доказательство.

1.
$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad Ax = x_1 A^{(1)} + \cdots + x_n A^{(n)} \implies \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\} = S \implies \min_{x \in \mathbb{R}^n} \rho(Ax, b) = \rho(S, b).$$

   По теореме о расстоянии от вектора до подпространства минимум достигается при $Ax = c = \operatorname{pr}_S b$.

2. Так как $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$ линейно независимы, то c единственным образом представим в виде линейной комбинации этих столбцов.

   Следовательно, x_0 единственно.

   Знаем, что $A\underbrace{(A^TA)^{-1}A^Tb}=c$. Значит, $x_0=(A^TA)^{-1}A^Tb$. ■

11. Формула для расстояния между вектором и подпространством в терминах матриц Грама

Пусть $\mathbb{E}$ — евклидово пространство, $\dim\mathbb{E}=n<\infty$.

$S\subseteq\mathbb{E}$ — подпространство, $e_1,\dots,e_k$ — базис в S.

Теорема. $\forall x\in\mathbb{E}\quad \rho(x,S)^2=\dfrac{\det G(e_1,\dots,e_k,x)}{\det G(e_1,\dots,e_k)}$.

Доказательство. Пусть $z:=\operatorname{ort}_S x$, тогда $\rho(x,S)^2=|z|^2$.

1. $x\in S\implies \rho(x,S)=0$:
   так как $e_1,\dots,e_k$ линейно независимы, то $\det G(e_1,\dots,e_k,x)=0$.
2. $x\notin S$.
   Ортогонализация Грама-Шмидта: $e_1,\dots,e_k,x\rightsquigarrow f_1,\dots,f_k,z$.
   По свойству ($\heartsuit$) получаем

$$\frac{\det G(e_1,\dots,e_k,x)}{\det G(e_1,\dots,e_k)}=\frac{\det G(f_1,\dots,f_k,z)}{\det G(f_1,\dots,f_k)}=\frac{|f_1|^2\dots|f_k|^2|z|^2}{|f_1|^2\dots|f_k|^2}=|z|^2=\rho(x,S)^2.$$

■

12. Две формулы для объёма k-мерного параллелепипеда в евклидовом пространстве

Теорема. $\operatorname{vol}P(a_1,\dots,a_k)^2=\det G(a_1,\dots,a_k)$.

Доказательство. Индукция по k:

$k=1:\ |a_1|^2=(a_1,a_1)$ — верно.

$k>1:\ \operatorname{vol}P(a_1,\dots,a_k)^2=\operatorname{vol}P(a_1,\dots,a_{k-1})^2\cdot h^2=\det G(a_1,\dots,a_{k-1})\cdot h^2=(\star)$.

Если $a_1,\dots,a_{k-1}$ линейно независимы, то $h^2=\dfrac{\det G(a_1,\dots,a_k)}{\det G(a_1,\dots,a_{k-1})}$. Тогда, $(\star)=\det G(a_1,\dots,a_k)$.

Если же $a_1,\dots,a_{k-1}$ линейно зависимы, то $\det G(a_1,\dots,a_{k-1})=0\implies(\star)=0$. Но $a_1,\dots,a_k$ тоже линейно зависимы, а значит $\det G(a_1,\dots,a_k)=0$. ■

Пусть $(e_1,\dots,e_n)$ — ортонормированный базис в $\mathbb{E}$,

$(a_1,\dots,a_n)=(e_1,\dots,e_n)\cdot A$, $A\in M_n(\mathbb{R})$.

Предложение. $\operatorname{vol}P(a_1,\dots,a_n)=|\det A|$.

Доказательство.

$$G(a_1,\dots,a_n)=A^T\cdot A\implies \operatorname{vol}P(a_1,\dots,a_n)^2=\det(A^TA)=(\det A)^2$$ ■.

2.5 Элементы аналитической геометрии и линейные многообразия

1. Теорема о векторном произведении и формуле для него в координатах в положительно ориентированном ортонормированном базисе

Лемма. Пусть $v_1,v_2\in\mathbb{E}$. Тогда, $(v_1,x)=(v_2,x)\ \forall x\in\mathbb{E}\implies v_1=v_2$.

Доказательство. Имеем $(v_1-v_2,x)=0\ \forall x\in\mathbb{E}$. Тогда, $v_1-v_2\in\mathbb{E}^\perp=\{0\}\implies v_1-v_2=0\implies v_1=v_2$. ■

Теорема. *Пусть $a,b\in\mathbb{R}^3$. Тогда*

1. $\exists! v\in\mathbb{E}$, такой что $(v,x)=\operatorname{Vol}(a,b,x)\quad\forall x\in\mathbb{R}^3$.

2. *Если* $\mathbb{e} = (e_1, e_2, e_3)$ *— положительно ориентированный ортонормированный базис и* $a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$, $b = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$ *то*

$$v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} := \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} e_3. \qquad (\star)$$

Доказательство.

Единственность если v' — другой такой вектор, то $(v, x) = (v', x)\ \forall x \in \mathbb{R}^3$, а значит $v' = v$ по лемме.

Существование Покажем, что v, заданный формулой $(\star)$ подойдёт.

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \implies (v, x) = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} x_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} x_3$$
$$= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = \mathrm{Vol}(a, b, x).$$

■

2. Критерий коллинеарности двух векторов трёхмерного евклидова пространства

Предложение. $a, b \in \mathbb{E}$ коллинеарны $\iff [a, b] = 0$.

Доказательство.

$\implies$

$$(a, b, x) = 0\ \forall x \implies ([a, b], x) = 0\ \forall x \implies [a, b] = 0.$$

$\impliedby$

$$[a, b] = 0 \implies ([a, b], x) = 0\ \forall x \implies (a, b, x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Если a, b линейно независимы, то можно взять x, который дополняет их до базиса в $\mathbb{R}^3$.
Тогда, $(a, b, x) \neq 0$ — противоречие. Значит a, b линейно зависимы $\implies$ коллинеарны. ■

3. Геометрические свойства векторного произведения

Предложение.

1. $[a, b] \perp \langle a, b \rangle$.
2. $|[a, b]| = \mathrm{vol}\, P(a, b)$.
3. $\mathrm{Vol}(a, b, [a, b]) \geqslant 0$.

Доказательство.

1. $([a, b], a) = (a, b, a) = 0 = (a, b, b) = ([a, b], b)$.
2. Если a, b коллинеарны, то обе части равны 0.
   Пусть $[a, b] \neq 0$.
   $$|[a, b]|^2 = ([a, b], [a, b]) = (a, b, [a, b]) = (\#) > 0.$$
   $$[a, b] \perp \langle a, b \rangle \implies (\#) = \mathrm{vol}\, P(a, b, [a, b]) = \mathrm{Vol}(a, b, [a, b]) = \mathrm{vol}\, P(a, b,) \cdot |[a, b]|\,.$$
   Сокращая на $|[a, b]| \neq 0$, получаем требуемое.
3. $\mathrm{Vol}(a, b, [a, b]) = ([a, b], [a, b]) \geqslant 0$. ■

4. Антикоммутативность и билинейность векторного произведения

Предложение.

1. $[a, b] = -[b, a] \quad \forall a, b$ (антикоммутативность).
2. $[\cdot, \cdot]$ билинейно (то есть линейно по каждому аргументу).

Доказательство.

1. $([a, b], x) = (a, b, x) = -(b, a, x) = -([b, a], x) = (-[b, a], x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \implies [a, b] = -[b, a]$

2. Пусть $u = [\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, b]$, $v = \lambda_1[a_1, b] + \lambda_2[a_2, b]$. Тогда $\forall x \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}(u, x) &= (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, b, x) \\ &= \lambda_1(a_1, b, x) + \lambda_2(a_2, b, x) \\ &= \lambda_1([a_1, b], x) + \lambda_2([a_2, b], x) \\ &= (\lambda_1[a_1, b] + \lambda_2[a_2, b], x) = (v, x).\end{aligned}$$

Значит $u = v$. Аналогично линейность по второму аргументу. ■

5. Линейные многообразия как сдвиги подпространств

Пусть $Ax = b$ — СЛУ, $\varnothing \neq L \subseteq \mathbb{R}^n$ — множество решений, $x_z \in L$ — частное решение.

Было: Лемма: $L = x_z + S$, где S — множество решений ОСЛУ $Ax = 0$.

Предложение. Множество $L \subseteq \mathbb{R}^n$ является линейным многообразием $\iff$ $L = v_0 + S$ для некоторых $v_0 \in \mathbb{R}^n$ и подпространства $S \subseteq \mathbb{R}^n$.

Доказательство.

$\Longrightarrow$ Из леммы.

$\Longleftarrow$ $L = v_0 + S$. Значит существует ОСЛУ $Ax = 0$, для которой S является множеством решений. Тогда, L — множество решений СЛУ $Ax = Av_0$ (по лемме). ■

6. Критерий равенства двух линейных многообразий

Предложение. Пусть $L_1 = v_1 + S_1$ и $L_2 = v_2 + S_2$ — два линейных многообразия в $\mathbb{R}^n$. Тогда,

$$L_1 = L_2 \iff \begin{cases} S_1 = S_2 \ (= S) \\ v_1 - v_2 \in S \end{cases}.$$

Доказательство.

$\Longleftarrow$ $L_1 = v_1 + S_1 = v_1 + S_2 = v_2 + (v_1 - v_2) + S = v_2 + S = L_2$.

$\Longrightarrow$ $v_1 = v_1 + 0 \in L_1 = L_2 = v_2 + S_2 \implies v_1 - v_2 \in S_2$,
$v \in S_1 \implies v + v_1 \in L_1 = L_2 = v_2 + S_2 \implies v \in (v_2 - v_1) + S_2 = S_2 \implies S_1 \subseteq S_2$.
Аналогично, $v_1 - v_2 \in S_1$ и $S_2 \subseteq S_1$. ■

7. Теорема о плоскости, проходящей через $k + 1$ точку в $\mathbb{R}^n$

Теорема.

a) Через любые $k + 1$ точек в $\mathbb{R}^n$ проходит плоскость размерности $\leqslant k$.

b) Если это точки не лежат в плоскости размерности $< k$, то через них проходит ровно одна плоскость размерности k.

Доказательство.

a) Пусть $v_0, v_1, \ldots, v_k$ — данные точки. Тогда через них проходит плоскость $P = v_0 + \langle v_1 - v_0, \ldots, v_k - v_0 \rangle$.
Ясно, что $\dim P \leqslant k$.

b) Из условия следует, что $\dim P = k \implies v_1 - v_0, \ldots, v_k - v_0$ линейно независимы.
Если $P' = v_0 + S$ — другая плоскость размерности k, содержащая $v_0, \ldots, v_k$, то $v_1 - v_0, \ldots, v_k - v_0 \in S \implies S = \langle v_1 - v_0, \ldots, v_k - v_0 \rangle \implies P' = P$. ■