

# Математический Анализ - 2

Серёжа Рахманов | [telegram](#), [website](#)

Максим Николаев | [telegram](#)

Версия от 03.09.2020 20:46

## Содержание

|          |  |          |
|----------|--|----------|
| <b>1</b> | <b>Лекция 1 - 01.09.2020 - Ряды</b>                | <b>2</b> |
| 1.1      | Определение ряда . . . . .                         | 2        |
| 1.2      | Необходимое условие сходимости . . . . .           | 2        |
| 1.3      | Критерий Коши . . . . .                            | 2        |
| 1.4      | Положительные ряды . . . . .                       | 3        |
| 1.5      | Признаки сравнения . . . . .                       | 3        |
| 1.6      | Отсутствие универсального ряда сравнения . . . . . | 4        |

# 1 Лекция 1 - 01.09.2020 - Ряды

## 1.1 Определение ряда

**Определение 1.** Пусть  $a_n$  – последовательность, т.е.  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . Формальная бесконечная сумма:  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

называется рядом.  $S_N = \sum_{n=1}^N a_n$  – частичная сумма, сумма ряда:  $S = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N$

Возможны 3 случая:

1.  $\exists S \in \mathbb{R}$
2.  $\exists S = \infty$
3.  $\nexists S$

В первом случае говорят, что ряд сходится, иначе – что ряд расходится.

*Пример.*

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0 + 0 + \dots + 0 = 0$
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + \dots + 1 = \infty$
3.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 + \dots$  не существует

**Определение 2.** Если ряд сходится, т.е.  $S_N \rightarrow S$  при  $N \rightarrow \infty$ , то  $S - S_N = r_N$  – остаток ряда

## 1.2 Необходимое условие сходимости

**Замечание.** Если ряд сходится, то  $a_n \rightarrow 0$

*Доказательство.*  $a_n = S_n - S_{n-1} \rightarrow 0$ , т.к.  $S_n \rightarrow S$  и  $S_{n-1} \rightarrow S$  ■

## 1.3 Критерий Коши

**Определение 3.**  $a_n$  называется фундаментальной, если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > m > N, |S_n - S_m| < \varepsilon$

**Теорема 1.1.**  $S_n$  – сходится  $\Leftrightarrow S_n$  – фундаментальная

*Доказательство.*  $S_n - S_m = \sum_{k=m+1}^n a_k$  Тогда  $\sum a_n$  – сходится  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > m > N |a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n| < \varepsilon$  ■

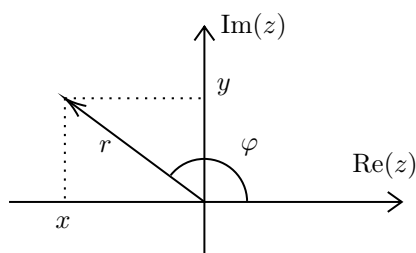
*Пример.*

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Заметим, что  $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \left( 1 - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left( \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} \right) = 1 - \frac{1}{N+1} \rightarrow 1$

Этот ряд сходится при  $N \rightarrow \infty$ :  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

2.  $z \in \mathbb{C}, z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$



Рассмотрим ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots$

$$S_N = 1 + z + z^2 + \dots + z^N = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z}$$

Ряд сходится  $\Leftrightarrow |z| < 1$

$$|z| < 1 \Rightarrow z^N \rightarrow 0, S_N = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z} \rightarrow \frac{1}{1 - z}$$

## 1.4 Положительные ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \geq 0, S_n \uparrow, \text{ т.к. } S_{n+1} \geq S_n$$

Возможны 2 случая:

$$1. \exists S \in \mathbb{R}$$

$$2. \exists S = \infty$$

**Обозначение 1.**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$  – ряд сходится,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$  – ряд расходится.

## 1.5 Признаки сравнения

1. Сравнение с помощью неравенства.

$$a_n \leq b_n \text{ при всех } n \geq n_0$$

$$\text{Ряд } \sum b_n \text{ сходится} \Rightarrow \text{ряд } \sum a_n \text{ сходится}$$

$$\text{Ряд } \sum a_n \text{ расходится} \Rightarrow \text{ряд } \sum b_n \text{ расходится}$$

2. Сравнение отношений.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

$$\text{Ряд } \sum b_n \text{ сходится} \Rightarrow \text{ряд } \sum a_n \text{ сходится}$$

$$\text{Ряд } \sum a_n \text{ расходится} \Rightarrow \text{ряд } \sum b_n \text{ расходится}$$

*Доказательство.*

$$a_{n_0+1} \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+1}$$

$$a_{n_0+2} \leq \frac{a_{n_0+1}}{b_{n_0+1}} \cdot b_{n_0+2} \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+2}$$

$\vdots$

$$a_{n_0+k} \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+k} \Rightarrow \sum_{n=n_0}^N a_n \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot \sum_{n=n_0}^N b_n$$

■

3. Сравнение с помощью предела.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0; +\infty) \Rightarrow \text{сходимость } \sum a_n \Leftrightarrow \text{сходимость } \sum b_n$$

*Доказательство.*

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$$

$$\forall \varepsilon \exists n_0 : c - \varepsilon \leq \frac{a_n}{b_n} \leq c + \varepsilon, \text{ при } n \geq n_0$$

$$\text{Возьмём } c - \varepsilon > 0 \Rightarrow (c - \varepsilon) \cdot b_n \leq a_n \leq (c + \varepsilon) \cdot b_n$$

Сходимость следует из правой части неравенства, а расходимость из левой.

■

## 1.6 Отсутствие универсального ряда сравнения

**Предложение.** Не существует ряда  $\sum c_n$ ,  $c_n > 0$  :

- 1)  $\frac{a_n}{c_n} \rightarrow 0 \implies$  ряд  $\sum a_n$  сходится.
- 2)  $\frac{b_n}{c_n} \rightarrow \infty \implies$  ряд  $\sum b_n$  расходится.

*Доказательство.*

1. Если ряд  $\sum c_n$  расходится, тогда пусть  $S_N = \sum_{n=1}^N c_n \rightarrow \infty, S_0 = 0$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}})$ , где  $\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}} = a_n$  расходится, так как

$$(a) \sum_{n=1}^N (\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}}) = \sqrt{S_N} - \sqrt{S_0} = \sqrt{S_N} \rightarrow \sqrt{S}$$

$$(b) \frac{\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}}}{c_n} = \frac{\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}}}{S_n - S_{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}}} \implies \frac{a_n}{c_n} \rightarrow 0$$

Ряд расходится, но по предположению сходится, получили противоречие

2. Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  сходится, то рассмотрим  $r_n$  - его  $n$ -ый остаток, то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n})$ , где  $\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n} = b_n, r_0 = S = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$  - сходится, так как

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}) = \sqrt{r_0} - \sqrt{r_1} + \sqrt{r_1} - \sqrt{r_2} + \dots = \sqrt{r_0} - \sqrt{r_n} = \sqrt{S} - \sqrt{r_n} \rightarrow \sqrt{S}$$

$$(b) \frac{\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}}{c_n} = \frac{\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}}{r_{n-1} - r_n} = \frac{1}{\sqrt{r_{n-1}} + \sqrt{r_n}} \rightarrow \infty$$

Ряд сходится, но по предположению расходится, получили противоречие.

■