

# Математический Анализ - 2 - Коллоквиум 1

Серёжа Рахманов | [telegram](#), [website](#)

Версия от 07.10.2020 20:30

1. Дайте определения: числовой ряд, частичная сумма ряда, сумма ряда, сходящийся ряд, расходящийся ряд. Рассмотрим ряд с общим членом  $a_n$ . Докажите, что  $a_n \rightarrow 0$ .

**Определение 1.** Пусть  $a_n$  – последовательность, т.е.  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . Формальная бесконечная сумма:  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  называется рядом.  $S_N = \sum_{n=1}^N a_n$  – частичная сумма, сумма ряда:  $S = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N$

Возможны 3 случая:

- (a)  $\exists S \in \mathbb{R}$
- (b)  $\exists S = \infty$
- (c)  $\nexists S$

В первом случае говорят, что ряд сходится, иначе – что ряд расходится.

**Замечание.** Если ряд сходится, то  $a_n \rightarrow 0$

*Доказательство.*  $a_n = S_n - S_{n-1} \rightarrow 0$ , т.к.  $S_n \rightarrow S$  и  $S_{n-1} \rightarrow S$  ■

2. Сформулируйте критерий Коши сходимости числовой последовательности. Сформулируйте и докажите критерий Коши сходимости числового ряда.

**Определение 2.**  $a_n$  называется фундаментальной, если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > m > N, |S_n - S_m| < \varepsilon$

**Теорема 0.1.**  $S_n$  – сходится  $\Leftrightarrow S_n$  – фундаментальная

*Доказательство.*  $S_n - S_m = \sum_{k=m+1}^n a_k$  Тогда  $\sum a_n$  – сходится  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > m > N |a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n| < \varepsilon$  ■

3. Сформулируйте и докажите признак сравнения положительных числовых рядов, основанный на неравенстве  $a_n \leq b_n$ .

$a_n \leq b_n$  при всех  $n \geq n_0$

Ряд  $\sum b_n$  сходится  $\Rightarrow$  ряд  $\sum a_n$  сходится

Ряд  $\sum a_n$  расходится  $\Rightarrow$  ряд  $\sum b_n$  расходится

4. Сформулируйте и докажите признак сравнения положительных числовых рядов, основанный на неравенстве

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Ряд  $\sum b_n$  сходится  $\Rightarrow$  ряд  $\sum a_n$  сходится

Ряд  $\sum a_n$  расходится  $\Rightarrow$  ряд  $\sum b_n$  расходится

*Доказательство.*

$$a_{n_0+1} \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+1}$$

$$a_{n_0+2} \leq \frac{a_{n_0+1}}{b_{n_0+1}} \cdot b_{n_0+2} \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+2}$$

$\vdots$

$$a_{n_0+k} \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+k} \Rightarrow \sum_{n=n_0}^N a_n \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot \sum_{n=n_0}^N b_n$$
 ■

5. Сформулируйте и докажите признак сравнения положительных числовых рядов, основанный на пределе  $\lim \frac{a_n}{b_n}$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0; +\infty) \implies \text{сходимость } \sum a_n \iff \text{сходимость } \sum b_n$$

*Доказательство.*

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$$

$$\forall \varepsilon \exists n_0 : c - \varepsilon \leq \frac{a_n}{b_n} \leq c + \varepsilon, \text{ при } n \geq n_0$$

$$\text{Возьмём } c - \varepsilon > 0 \implies (c - \varepsilon) \cdot b_n \leq a_n \leq (c + \varepsilon) \cdot b_n$$

Сходимость следует из правой части неравенства, а расходимость из левой. ■

6. Пусть последовательности  $\{a_n\}$ ,  $\{A_n\}$  таковы, что  $a_n - (A_n - A_{n-1}) = c_n$  и ряд  $\sum c_n$  сходится. Докажите, что существует  $C$  такое, что  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = A_n + C + o(1)$ .

7. Сформулируйте и докажите признак Лобачевского-Коши.

**Предложение.** Пусть  $a_n > 0$  и  $a_n \downarrow$

Тогда ряды  $\sum a_n$  и  $\sum 2^n \cdot a_{2^n}$  ведут себя одинаково

*Доказательство.*  $a_1 + (a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + \dots + a_8) + \dots$

$$a_2 \leq a_1$$

$$a_2 \leq a_2$$

$$a_3 + a_4 \leq 2a_2$$

$$a_3 + a_4 \geq 2a_4$$

$$a_5 + \dots + a_8 \leq 4a_4$$

$$a_5 + \dots + a_8 \geq 4a_8$$

...

$$a_1 + \sum_{n=0}^{m-1} 2^n a_{2^n} \leq \sum_{n=1}^{2^m} a_n \leq a_1 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^m 2^n a_{2^n}$$

8. Примените признак Лобачевского-Коши к ряду  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln^p(\ln n)}$ ,  $p > 0$

Рассмотрим данный нам ряд. Заметим, что  $\frac{1}{n \ln n \ln^p(\ln n)}$  убывает, поскольку  $n \ln n \ln^p(\ln n)$  является возрастающей функцией ( $n, \ln n$  и  $\ln^p(\ln n)$  сами по себе возрастают). Кроме того,  $\forall n, n \geq 2, a_n > 0$ , поскольку  $1 > 0$  и  $n \ln n \ln^p(\ln n) > 0$ . В таком случае, аналогично данному ряду будет вести себя ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{2^n \ln 2^n \ln^p(\ln 2^n)} =$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln 2^n \ln^p(\ln 2^n)}, p > 0.$$

9. Сформулируйте теорему Штольца о пределе последовательности  $\frac{p_n}{q_n}$ ,  $p_n, q_n \rightarrow 0$ .

**Теорема 0.2. (Штольца.)** Если  $p_n, q_n \rightarrow 0, q_n \downarrow$  и  $\exists \lim \frac{p_{n+1} - p_n}{q_{n+1} - q_n}$ , то  $\lim \frac{p_n}{q_n} = \lim \frac{p_{n+1} - p_n}{q_{n+1} - q_n}$

10. Покажите на примере, как с помощью теоремы Штольца можно уточнить асимптотическую оценку для частичной суммы ряда.

11. Пусть  $\sum a_n, \sum a'_n$  - сходящиеся положительные ряды. Говорят, что ряд  $\sum a'_n$  сходится быстрее ряда  $\sum a_n$ , если  $a'_n = o(a_n)$ . Докажите, что в этом случае также  $r'_n = o(r_n)$ , где  $r_n, r'_n$  - остатки соответствующих рядов.

Рассмотрим остатки каждого из рядов.  $r_n = S - S_N$ , где  $S_N$  - частичная сумма ряда  $\sum a_n$  и  $S_N \rightarrow S$  при  $N \rightarrow \infty$ . Для  $\sum a'_n$  аналогично  $r'_n = S' - S'_N$ , где  $S'_N$  - частичная сумма ряда  $\sum a'_n$  и  $S'_N \rightarrow S'$  при  $N \rightarrow \infty$ . Идёт речь о том, что ряд  $a'_n$  сходится быстрее ряда  $a_n$ , т.е. оба ряда сходятся и  $S = S'$ . Но, поскольку члены рядов находятся в отношении  $a'_n = o(a_n)$ , то мы можем сделать выводы о частичных суммах  $S_N$  и  $S'_N$ .  $\forall N, S'_N = o(S_N)$ , что указывает нам в результате на отношение между остатками  $r'_n = o(r_n)$ .

12. -  
 13. -  
 14. -  
 15. Сформулируйте признак Даламбера для положительного ряда

**Теорема 0.3.** *Признак Даламбера. Пусть  $a_n > 0$ .*

$$\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \text{ряд } \sum a_n \text{ сходится.}$$

$$\underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies \text{ряд } \sum a_n \text{ расходится.}$$

16. Сформулируйте радикальный признак Коши для положительного ряда.

**Теорема 0.4.** *Радикальный признак Коши. Пусть  $a_n \geq 0$ .*

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} < 1 \implies \text{ряд } \sum a_n \text{ сходится.}$$

$$\underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} > 1 \implies \text{ряд } \sum a_n \text{ расходится.}$$

17. Докажите, что всякий раз, когда признак Даламбера даёт ответ на вопрос о сходимости ряда, то радикальный признак Коши даёт тот же ответ на этот вопрос.

Пусть  $a_n > 0$ . Тогда:

$$\underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$\text{Если } \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} < 1$$

$$\text{Если } \underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies \underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} > 1$$

$$\text{Если } \exists \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}, \text{ то } \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow \exists \lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

18. -  
 19. -  
 20. -  
 21. Сформулируйте признак Гаусса для положительного ряда. Приведите пример применения признака Гаусса.

$$\text{Если } \exists \delta > 0, p: \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right) \text{ то:}$$

$$p > 1 \implies \text{ряд } \sum a_n \text{ сходится.}$$

$$p \leq 1 \implies \text{ряд } \sum a_n \text{ расходится.}$$

22. -  
 23. -  
 24. Что такое улучшение сходимости положительного ряда? Покажите на примере как можно улучшить сходимость ряда.

Пусть у нас есть некоторый ряд  $\sum a_n$  и он сходится медленно. В таких случаях для расчёта суммы ряда с необходимой точностью потребуется взять больше членов, что неудобно. Мы можем преобразовать наш ряд для улучшения сходимости, т.е. получить некоторый ряд  $\sum a'_n$ , который будет сходиться быстрее, чем исходный  $\sum a_n$ .

*Пример.* Пусть у нас есть ряд  $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ . Воспользуемся методом Куммера. Для улучшения

$$\text{сходимости будем брать ряды вида } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}, \dots$$

В данном случае нам подойдёт первый ряд в этом списке, поскольку  $\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n(n+1)}$ .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2+2} - \frac{1}{n(n+1)} \right) = S - 1 \implies S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2+2} - \frac{1}{n(n+1)} \right).$$

$$\frac{1}{n^2+2} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2} \cdot \left( \frac{1}{\frac{2}{n^2}} - \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \right) = \frac{1}{n^2} \cdot \left( 1 - \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} - o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Получили ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ , который сходится быстрее,  $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2}$ .

25. Дайте определения: знакопеременный ряд, знакочередующийся ряд, абсолютно сходящийся ряд, условно сходящийся ряд, положительная часть ряда, отрицательная часть ряда.

**Определение 3.** Пусть существует ряд  $\sum a_n$ . такой, что  $\forall i, a_i$  может быть, как больше 0, так и меньше 0. В таком случае ряд  $\sum a_n$  называется знакопеременным.

**Определение 4.** Пусть существует ряд  $\sum a_n$ . такой, что  $\forall i, a_i \cdot a_{i+1} < 0$ . В таком случае ряд  $\sum a_n$  называется знакочередующимся.

**Определение 5.** Рассмотрим дополнительный ряд  $\sum |a_n|$ . В случае, когда он расходится, мы называем ряд  $\sum a_n$  абсолютно сходящимся. Если  $\sum |a_n|$  расходится, то  $\sum a_n$  называется сходящимся условно.

**Определение 6.** Введем два ряда:  $a_n^+ = \begin{cases} a_n, a_n > 0 \\ 0 \end{cases}$  и  $a_n^- = \begin{cases} |a_n|, a_n < 0 \\ 0 \end{cases}$ . Тогда ряды  $\sum a_n^+$  и  $\sum a_n^-$  соответственно называются положительной и отрицательной частью ряда  $\sum a_n$ .

26. Докажите, что ряд сходится абсолютно ровно в том случае, когда сходятся его положительная и отрицательная части.

*Доказательство.* Рассмотрим ряд  $\sum a_n$ , дополнительный ряд  $\sum |a_n|$ , а также положительную и отрицательную части  $\sum a_n^+$  и  $\sum a_n^-$ .

1) Пусть ряд  $\sum a_n$  сходится абсолютно. В таком случае ряд  $\sum |a_n|$  сходится, а так как члены рядов  $\sum a_n^+$  и  $\sum a_n^-$  все содержатся в ряде  $\sum |a_n|$ , то для всех их частичных сумм справедливо следующее:  $P_k \leq A'_n$  и  $Q_m \leq A'_n$ , где  $P_k$  и  $Q_m$  - частичные суммы положительной и отрицательной части соответственно, а  $A'_n$  - частичная сумма дополнительного ряда и  $A'_n = P_k + Q_m, n = m + k$ . Это значит, что оба ряда  $\sum a_n^+$  и  $\sum a_n^-$  сходятся.

2) Исходя из того, что  $S_n = P_k - Q_m, n = m + k$  и положительных и отрицательных элементов в  $\sum a_n$  бесконечное множество, мы получаем, что при  $n \rightarrow \infty$  одновременно  $m \rightarrow \infty$  и  $k \rightarrow \infty$ . Переходя к пределу получаем, что исходный ряд сходится абсолютно и его сумма будет равна  $P - Q$ . ■

27. Докажите, что если ряд сходится условно, то его положительная и отрицательная части расходятся (имеют бесконечные суммы).

*Доказательство.* Рассмотрим ряд  $\sum a_n$ , дополнительный ряд  $\sum |a_n|$ , а также положительную и отрицательную части  $\sum a_n^+$  и  $\sum a_n^-$ . Поскольку ряд  $\sum a_n$  сходится условно, то  $\sum |a_n|$  расходится. Рассмотрим частичные суммы  $\sum |a_n|$ ,  $\sum a_n^+$  и  $\sum a_n^-$  -  $A'_n, P_k, Q_m$  соответственно. Для любого  $n = m + k, A'_n = P_k + Q_m$ . При  $n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty$  и  $k \rightarrow \infty$ . Так как ряд  $\sum |a_n|$  расходится, то сумма  $A'_n \rightarrow \infty$ . Поскольку число положительных и отрицательных элементов бесконечно, то получаем  $P_k \rightarrow \infty$  и  $Q_m \rightarrow \infty$ , а значит ряды  $\sum a_n^+$  и  $\sum a_n^-$  расходятся. ■