Математический Анализ 2, Коллоквиум II

Александр Шитов Telegram | Анастасия Смородинникова Telegram | Владимир Сушков Telegram | Денис Козлов Telegram

Елизавета Орешонок Telegram | Игорь Балюк Telegram | Серёжа Рахманов Telegram | Сергей Лоптев Telegram

Сергей Пилипенко Telegram | Ульяна Виноградова Telegram | Цирк Максимус Telegram

Версия от 18.12.2020 23:04

Содержание

1. Что такое кольцо множеств? Дайте определение меры на кольце.

Определение 1 (Маевский)**.** Множество $\mathcal{F}$ называется кольцом, если:

1. $\varnothing \in \mathcal{F}$;

2. $\forall A, B \in \mathcal{F} : A \cup B, A \cap B, A \setminus B \in \mathcal{F}$.

Определение 2. Пусть $\mathcal{F}$ — некоторое семейство подмножеств множества X, т.е $\mathcal{F} \subseteq 2^X$.
Функция $\mu : \mathcal{F} \to [0; +\infty)$ называется мерой на $\mathcal{F}$, если она обладает свойством аддитивности:

$$\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B),$$

где $\sqcup$ — операция объединения непересекающихся (дизъюнктных) множеств.

Свойства. Если μ — мера на кольце множеств $\mathcal{F}$ и $A, B \in \mathcal{F}$, то:

1. $\mu(\varnothing) = 0$;

2. $A \subseteq B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$ (монотонность);

3. $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$ (ФВИ).

2. Сформулируйте и докажите свойство монотонности меры

Если $\mu : \mathcal{F} \to [0; +\infty)$ — мера на кольце $\mathcal{F}$, то выполнено свойство монотонности:

$$A \subseteq B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$$

Доказательство.

$$A \subseteq B \implies B = A \sqcup (B \setminus A) \implies \mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$$

$$\forall X\ \mu(X) \geq 0 \implies \mu(B) \geq \mu(A), \text{что и требовалось доказать.}$$

∎

3. Сформулируйте и докажите формулы включения-исключения для 2-х и 3-х множеств.

Если $\mu : \mathcal{F} \to [0; +\infty)$ — мера на кольце $\mathcal{F}$, то верна формула включения-исключения:

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

Доказательство. Покажем сначала, что $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(A \cap B)$:

$$A = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B) \implies \mu(A) = \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B) \Leftrightarrow \mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(A \cap B)$$

При этом:

$$A \cup B = (A \setminus B) \sqcup (B \setminus A) \sqcup (A \cap B) \implies$$

$$\implies \mu(A \cup B) = \mu((A \setminus B) \sqcup (B \setminus A) \sqcup (A \cap B)) =$$

$$= \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B) =$$

$$= \mu(A) - \mu(A \cap B) + \mu(B) - \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B) =$$

$$= \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B), \text{что и требовалось доказать.}$$

Для трех множеств:

$$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C \implies \mu(A \cup B \cup C) = \mu((A \cup B) \cup C) =$$

$$= \mu(A \cup B) + \mu(C) - \mu((A \cup B) \cap C) = \mu(A \cup B) + \mu(C) - \mu((A \cap C) \cup (B \cap C)) =$$

$$= \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) + \mu(C) - (\mu(A \cap C) + \mu(B \cap C) - \mu((A \cap C) \cap (B \cap C)) =$$

$$= \mu(A) + \mu(B) + \mu(C) - \mu(A \cap B) - \mu(A \cap C) - \mu(B \cap C) + \mu(A \cap B \cap C)$$

■

4. Что такое полуинтервал в $\mathbb{R}^m$? Как определяется простое множество?

Определение 3. Полуинтервалом в $\mathbb{R}^m$ называется декартово произведение m полуинтервалов из $\mathbb{R}$:

$$[a^1; b^1) \times [a^2; b^2) \times \cdots \times [a^m; b^m)$$

(при этом $[a; b) \subseteq \mathbb{R} := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$)

Определение 4. Простым множеством называется объединение конечного числа полуинтервалов:

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i = \bigcup_{i=1}^{n} [a_i; b_i),$$

где a_i, b_i — точки в m-мерном пространстве.

5. Докажите, что простые множества в $\mathbb{R}^m$ образуют кольцо

Утв.: Класс всех простых множеств образует кольцо.
Док-во:

1. $\varnothing = [a; a)$ - пустой полуинтервал является простым множеством.
2. $E_1 \cup E_2 = E$ - объединение простых множеств является простым множеством. Так как каждое из простых множеств представимо в виде объединения конечного количества полуинтервалов, то их объединение представимо в виде объединения всех полуинтервалов входящих в каждое из простых, а значит является простым множеством.
3. $E_1 \cap E_2 = E$ - пересечение простых множеств является простым множеством. Пересечение представимо в виде объединения пересечений всех возможных пар из первого и второго множества. Так как пересечение полуинтервалов является полуинтервалом, то пересечение простых множеств, является простым множеством.
4. $E_1 \backslash E_2 = E$ - разность простых множеств является простым множеством. Пусть есть некоторый полуинтервал $[a; b)$ покрывающий E_1 и E_2, тогда $[a; b) \backslash E_2$ очевидно является простым множеством. В таком случае исходную разность можно записать в виде $E_1 \cap ([a; b) \backslash E_2)$, что будет пересечением простых множеств, а значит является полуинтервалом.

■

6. Дайте определение внешней меры Жордана в $\mathbb{R}^m$

Опр.: Пусть $A \subset \mathbb{R}^m$ - произвольное ограниченное множество. *Внешней мерой Жордана* множества A называется

$$\overline{\mu}(A) = \inf_{E \supseteq A} \mu(E),$$

где точная нижняя грань берется по всем простым множествам, содержащим A.

7. Сформулируйте и докажите основные свойства внешней меры Жордана: монотонность и полуаддитивность

Св-во: Монотонность внешней меры означает, что при $A \subseteq B$ выполняется $\overline{\mu}(A) \leqslant \overline{\mu}(B)$.

Док-во: Обозначим через $\mathcal{E}_A$ класс простых множеств, покрывающих заданное ограниченное множество A. Так как $A \subseteq B$, то класс $\mathcal{E}_A$ шире чем $\mathcal{E}_B$, а значит в нем найдется простое множество которое не больше любого из $\mathcal{E}_B$, а отсюда из определения внешней меры следует, что $\overline{\mu}(A) \leqslant \overline{\mu}(B)$

■

Св-во: Полуаддитивностью внешней меры называется

$$\overline{\mu}(A \sqcup B) \leqslant \overline{\mu}(A) + \overline{\mu}(B),$$

где A и B - произвольные ограниченные множества.

Док-во: Для любых E_A и E_B покрывающих A и B соответственно, верно что $E_A \cup E_B$ - покрывает $A \cup B$. По свойствам меры верно

$$\mu(E_A \cup E_B) \leqslant \mu(E_A) + \mu(E_B)$$

Далее по определению точной нижней грани, для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие E_A и E_B, что

$$\mu(E_A) \leqslant \overline{\mu}(A) + \varepsilon, \quad \mu(E_B) \leqslant \overline{\mu}(B) + \varepsilon$$

Отсюда имеем

$$\overline{\mu}(A \cup B) \leqslant \mu(E_A \cup E_B) \leqslant \overline{\mu}(A) + \overline{\mu}(B) + 2\varepsilon$$

Переходя к пределу $\varepsilon \to 0$ имеем

$$\overline{\mu}(A \cup B) \leqslant \overline{\mu}(A) + \overline{\mu}(B)$$

(Искомое свойство выполняется как частный случай)

■

8. Что такое измеримое по Жордану (= жорданово) множество? Как определяестя его мера? Приведите примеры измеримого и неизмеримого множества

Опр.: Ограниченное множество $A \subset \mathbb{R}^m$ называется *измеримым по Жордану*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists E, E \supseteq A \quad \overline{\mu}(E \backslash A) < \varepsilon$$

ПРОВЕРИТЬ, НАДО ЛИ ЧТО-ТО ДОБАВИТЬ

Заметим, что так как измеримые множества образуют кольцо, а также внешняя мера на кольце измеримых множеств обладает свойством аддитивности, то выполняются все свойства меры, а значит можно дать следующее определение

Опр.: *Мерой Жордана* измеримого множества называется его внешняя мера Жордана.

Пример: Любое просто множество является измеримым по Жордану.

Пример: Пусть $Q = \{q_1, q_2, ...\}$ - множество всех рациональных чисел отрезка $[0;1]$ и $A_n = [0;1] \backslash \{q_1, ..., q_n\}$. Множество $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n = [0;1] \backslash Q$ не является измеримым

9. Докажите, что измеримые по Жордану множества образуют кольцо

Утв.: Измеримые по Жордану множества образуют кольцо

Док-во:

1. $\varnothing$ - пустое множество является простым, а значит измеримо.

2. A, B - измеримы, $A \cup B$ - объединение измеримых множеств измеримо.
   Пусть $A_i \subseteq E_i$ и $\overline{\mu}(E_i \backslash A_i) < \dfrac{\varepsilon}{2}$, при $i = 1, 2$.
   Тогда так как
   $$(E_1 \cup E_2) \backslash (A_1 \cup A_2) \subseteq (E_1 \backslash A_1) \cup (E_2 \backslash A_2)$$
   в силу монотонности имеем
   $$\overline{\mu}((E_1 \cup E_2) \backslash (A_1 \cup A_2)) \leqslant \overline{\mu}((E_1 \backslash A_1) \cup (E_2 \backslash A_2)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
   а из этого следует, что объединение измеримо.

3. A, B - измеримы, $A \cap B$ - пересечение измеримых множеств измеримо.
   Проведем рассуждения аналогично предыдущему пункту.
   Так как
   $$(E_1 \cap E_2) \backslash (A_1 \cap A_2) \subseteq (E_1 \backslash A_1) \cup (E_2 \backslash A_2)$$
   в силу монотонности имеем
   $$\overline{\mu}((E_1 \cap E_2) \backslash (A_1 \cap A_2)) \leqslant \overline{\mu}((E_1 \backslash A_1) \cup (E_2 \backslash A_2)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
   а из этого следует, что пересечение измеримо.

4. A, B - измеримы, $A \backslash B$ - разность измеримых множеств измерима.
   Пусть $A_i \subseteq E_i$, при $i = 1, 2$ и простые множества E_i таковы, что $\overline{\mu}(E_1 \backslash A_1) < \dfrac{\varepsilon}{2}$, а $E_2 \backslash A_2 \subseteq E_2'$, где $\mu(E_2') < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
   Обозначим
   $$A = A_1 \backslash A_2, \text{ и } E = (E_1 \backslash E_2) \cup E_2'$$
   Докажем, что $A \subseteq E$. Из всех возможных вариантов рассмотрим следующий. Пусть $x \in A_1$ и $x \notin A_2$. Тогда $x \in E_1$, а если $x \in E_2$, то $x \in E_2'$. Все прочие случаи тривиальны.
   Теперь докажем, что
   $$(E \backslash A) \subseteq (E_1 \backslash A_1) \cup E_2'$$
   Снова из всех возможных вариантов рассмотрим следующее. Пусть $x \in E$ и $x \notin A$. Отсюда пусть $x \in E_1$ и $x \notin E_2$. Если $x \in A_1$, то либо $x \in A$, что противоречит первоначальному условию, либо $x \in A_1 \cap A_2$, что также невозможно, так как $x \notin E_2$. Отсюда следует, что $x \notin A_1$. Все прочие случаи тривиальны.
   Далее имеем
   $$\overline{\mu}(E \backslash A) \leqslant \overline{\mu}(E_1 \backslash A_1) + \overline{\mu}(E_2') = \varepsilon$$
   Из чего следует, что разность измеримых множеств измерима.

Все необходимые условия выполнены а это значит, что измеримые множества образуют кольцо.

■

10. Докажите, что множество измеримо по Жордану ровно тогда, когда его граница имеет Жорданову меру нуль

МУТНАЯ ТЕМА, ЕСТЬ ВОПРОСЫ

Теор.: Пусть $A \subseteq \mathbb{R}^m$ - произвольное множество, тогда множество измеримо тогда и только тогда, когда $\overline{\mu}(\partial A) = 0$, где ∂A - граница множества A.

Док-во:
$\Rightarrow$ Пусть множество A - измеримо по Жордану. Пусть $E_1 \subseteq A$ - простое множество, такое что $\mu(E_1) = \underline{\mu}(A)$, а также $E_2 \supseteq A$ - такое, что $\mu(E_2) = \overline{\mu}(A)$
По определению границы знаем, что $\partial A \subseteq E_2 \backslash E_1$. Можно заметить, что так как $E_1 \subseteq A \subseteq E_2$, то $E_2 \backslash E_1 = (E_2 \backslash A) \cup (A \backslash E_1)$

11. Что такое разбиение Жорданова множества? Как вводится произведение разбиений? В каком случае говорят, что одно разбиение является измельчением другого?

Пусть $E \supseteq D$ - простое множество покрывающее D. Пусть $E = \sqcup Q_i$, где Q_i - m-мерные полуинтервалы составляющие простое множество E.

Опр.: *Разбиением* τ множества D, соответствующим данному простому множеству E, назовем представление D в виде

$$D = \sqcup (D \cap Q_i) = \sqcup D_i, \qquad D_i = D \cap Q_i$$

Опр.: *Произведение разбиений* $\tau = \{D_i \mid i = 1, ..., n\}$ и $\tau' = \{D'_j \mid j = 1, ..., k\}$ называется система множеств

$$\tau \cdot \tau' = \{D_i \cap D'_j \mid i = 1, ..., n,\ j = 1, ..., k\}$$

Опр.: Разбиение τ называется *измельчением* разбиения τ' (пишется $\tau \leqslant \tau'$), если для любого $D'_j \in \tau'$ найдутся такие $D_1, ..., D_m \in \tau$, что

$$D'_j = D_1 \sqcup ... \sqcup D_m$$

12. Докажите, что произведение разбиений является измельчением и одного, и другого разбиения

Утв.: Пусть τ и τ' - произвольные разбиения некоторого множества, тогда $\tau \cdot \tau'$ является измельчением τ и τ'
Док-во: Пусть $D_i \subseteq \tau$ и $D'_i \subseteq \tau'$, тогда так как

$$\forall i \in \{1, ..., n\}\ D_i = D_i \cap D = D_i \cap (\bigsqcup_j D_j) = \bigsqcup_j (D_i \cap D'_j)$$

По определению произведения $D_i \cap D'_j \subseteq \tau \cdot \tau'$, а значит по определению измельчения $\tau \cdot \tau'$ является измельчением τ (τ' также является измельчением; доказывается симметрично)

■

13. Что такое диаметр разбиения? Покажите, что при измельчении разбиения диаметр не увеличивается.

Опр.: Пусть τ - некоторое разбиение, тогда *диаметром* разбиения называют

$$\Delta(\tau) = \max_i \sup_{x,y \in D_i} |x - y|$$

Утв.: При измельчении разбиения его диаметр не увеличивается.
Док-во: Пусть τ и τ' - некоторые разбиения, причем $\tau \leqslant \tau'$
Тогда пусть $D'_i \in \tau'$ - некоторое множество. По определению измельчения

$$D'_i = D_{i_1} \sqcup ... \sqcup D_{i_k}$$

где $D_{i_1}, ..., D_{i_k} \in \tau$. Очевидно, что так как $\forall j\ D_{i_j} \in D'_i$, то диаметр D_{i_j} не превосходит диаметр D'_i. Данное утверждение верно для любого i, а значит, что при измельчении разбиения диаметр не увеличивается.

■

14. Сформулируйте определение интеграла Римана от функции по жордановому множеству. Что такое интегрируемая функция?

Пусть $f : D \to \mathbb{R}$ - заданная на D числовая функция и $\tau = \{D_i\}$ - разбиение множества D. Выберем произвольно точки $\xi_i \in D_i$. Систему выбранных точек будем обозначать $p = \{\xi_i\}$

Опр.: *Интегральной суммой* функции f на жордановом множестве D, соответствующей разбиению τ и выбору точек p, называется

$$I_D(f, \tau, p) = \sum_i f(\xi_i)\mu(D_i)$$

Опр.: Функция f называется *интегрируемой по Риману* на D, если существует такое число I, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad |I_D(f, \tau, p) - I| < \varepsilon \text{ при } \Delta(\tau) < \delta$$

Причем это число I называется *интегралом Римана* функции f на D и обозначается

$$I = \int\limits_D f(x)dx$$

Множество всех функций, интегрируемых по Риману на жордановом множестве D, обозначается $\mathcal{R}(D)$

15. Сформулируйте и докажите критерий Коши интегрируемости функции по Риману.

Теор.: Пусть f - некоторая функция. Если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, что при любом выборе разбиений τ, τ', с диаметрами $\Delta(\tau), \Delta(\tau')$ и при любом выборе систем точек p, p' выполняется

$$|I_D(f, \tau, p) - I_D(f, \tau', p')| < \varepsilon,$$

то функция интегрируема по Риману.

ПРОВЕРИТЬ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Док-во:

$\Leftarrow$ Пусть $f \in \mathcal{R}(D)$, тогда существует I, такое что

$$|I_D(f, \tau, p) - I| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|I_D(f, \tau', p') - I| < \frac{\varepsilon}{2}$$

отсюда имеем

$$|I_D(f, \tau, p) - I_D(f, \tau', p')| \leqslant |I_D(f, \tau, p) - I| + |I_D(f, \tau', p') - I| < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ Возьмем последовательности τ_n и p_n, причем $\Delta(\tau_n) \to 0$

С помощью данных последовательностей образуем последовательность интегральных сумм $I_D(f, \tau_n, p_n)$.

Теперь положим, что выполнен критерий Коши

$$|I_D(f, \tau_m, p_m) - I_D(f, \tau_n, p_n)| < \varepsilon$$

из чего следует, что $I_D(f, \tau_n, p_n) \to I$, где I - некоторое число.

Теперь в исходное неравенство подставим $I_D(f, \tau_n, p_n)$ и устримим его к I

$$|I_D(f, \tau, p) - I_D(f, \tau_n, p_n)| < \varepsilon$$

$$|I_D(f, \tau, p) - I| < \varepsilon$$

из чего следует, что функция интегрируема по Риману.

■

16. Докажите, что интегрируемая на полуинтервале функция ограничена.

Теорема 0.1. *Рассмотрим произвольный полуинтервал D. Можем взять, например, $(0;1]^n$, но подойдет любой. Тогда, если f интегрируема на D, она ограничена.*

Доказательство. Пусть f не ограничена на D и последовательность $\{x_n\} \subset D$ такова, что $f(x_n) \to \infty$. Поскольку $\{x_n\}$ ограничена, то из нее можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой предельной точке a множества D. Далее будем считать, что $\{x_n\}$ это и есть выделенная подпоследовательность и $x_n \to a$. Точка a является либо внутренней, либо граничной точкой множества D.
Пусть последовательность разбиений τ_n с $\Delta(\tau_n) \to 0$ организована таким образом, что точка a лежит внутри или на границе множества D_{n1} и $\mu(D_{n1}) > 0$ (это можно сделать нарезав на кубы нужного размера, а куб, куда попала a при необходимости порезать по a). Тогда точка $\xi_{n1} \in D_{n1}$ может быть выбрана так, чтобы

$$|f(\xi_{n1})\mu(D_1)| > n + \left|\sum_{i>1} f(\xi_{ni})\mu(D_{ni})\right|$$

Тогда интегральная сумма $|I_D(f, \tau_n, p_n)| > n$ и, следовательно, не может иметь конечный предел. ∎

17. Покажите, что на жордановом множестве меры нуль любая функция интегрируема

Имеем D - жорданово множество, причем $\mu(D) = 0$
Рассмотрим некоторое разбиение $\tau = \{D_i\}$
Очевидно, что так как $\forall i \ D_i \subseteq D$, то $\mu(D_i) = 0$
Теперь пусть задана некоторая система точек p
Рассмотрим интегральную сумму

$$I_D(f, \tau, p) = \sum_i f(\xi_i)\mu(D_i)$$

отсюда заметим, что так как $\forall i \ \mu(D_i) = 0$, то и интегральная сумма также будет равна 0, вне зависимости от функции.
Теперь пусть имеем $I = 0$, рассмотрим

$$|I_D(f, \tau, p) - I| = |0 - 0| < \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$$

Таким образом любая функция f интегрируема на жордановом множестве меры нуль, причем значение интеграла равно нулю.

18. Выведите формулу для интеграла константы

$$\int \cdots \int_D C dx_1 ... dx_n = C\mu(D), \quad \text{где } C \text{ - константа}$$

Док-во: Пусть имеем некоторое разбиение τ и систему точек p, рассмотрим интегральную сумму

$$I_D(f, \tau, p) = \sum_i f(\xi_i)\mu(D_i) = C\sum_i \mu(D_i)$$

Так как $\forall i \neq j, \ D_i \cap D_j = \varnothing$, а также в силу аддитивности меры имеем

$$C\sum_i \mu(D_i) = C\mu(D)$$

очевидно, что в данном случае

$$I = \int \cdots \int_D C dx_1 ... dx_n = C\mu(D)$$

∎

19. Дайте определение верхней и нижней сумм Дарбу для ограниченной функции

Пусть $\tau = \{D_i\}$ - некоторое разбиение жорданова множества D. Предполагая функцию f ограниченной на D, введем следующие обозначения

$$m_i = \inf_{x \in D_i} f(x), \qquad M_i = \sup_{x \in D_i} f(x)$$

Опр.: *Нижней* и *верхней суммами Дарбу* ограниченной функции f на D, соответствующими разбиению τ, называются

$$s_D(f,\tau) = \sum_i m_i \mu(D_i), \qquad S_D(f,\tau) = \sum_i M_i \mu(D_i)$$

20. Сформулируйте и докажите основные свойства сумм Дарбу

ПРОВЕРИТЬ ВСЕ ЛИ НУЖНЫЕ СВОЙСТВА ТУТ

Св-во: При измельчении разбиения $\tau \leqslant \tau'$ нижняя сумма Дарбу не уменьшается $s_D(f,\tau) \geqslant s_D(f,\tau')$

Док-во: Рассмотрим $D'_j = D_{j1} \sqcup ... \sqcup D_{jk}$. Тогда $\forall i,\ m'_j \leqslant m_{ji}$ и в силу аддитивности меры $\mu(D'_j) = \mu(D_{j1}) + ... + \mu(D_{jk})$

Из этого следует, что

$$m'_j \mu(D'_j) \leqslant m_{j1}\mu(D_{j1}) + ... + m_{jk}\mu(D_{jk})$$

Данное неравенство верно при всех j, из чего как и раз и следует искомое.

■

Св-во: При измельчении разбиения $\tau \leqslant \tau'$ верхняя сумма Дарбу не увеличивается $S_D(f,\tau) \leqslant S_D(f,\tau')$

Док-во: Аналогично предыдущему пункту.

■

Св-во: Для любых разбиений τ и τ' выполняется $s_D(f,\tau) \leqslant S_D(f,\tau')$

Док-во: Рассмотрим измельчение $\tau'' = \tau \cdot \tau'$

Из двух предыдущих пунктов имеем

$$s_D(f,\tau) \leqslant s_D(f,\tau'')$$

$$S_D(f,\tau') \geqslant S_D(f,\tau'')$$

так как $s_D \leqslant S_D$ при каком либо фиксированном разбиении, а также из этих двух неравенств имеем

$$s_D(f,\tau) \leqslant s_D(f,\tau'') \leqslant S_D(f,\tau'') \leqslant S_D(f,\tau')$$

■

21. Что такое верхний и нижний интегралы Дарбу для ограниченной функции?

Опр.: *Нижним* и *верхним интегралами Дарбу* называются

$$\overline{s}_D(f) = \sup_\tau s_D(f,\tau), \qquad \underline{S}_D(f) = \inf_\tau S_D(f,\tau)$$

22. Сформулируйте и докажите критерий Дарбу интегрируемости ограниченной функции

Разность точных граней ограниченной функции f на множестве D_i называется колебанием функции и обозначается:

$$\omega_i = M_i - m_i = \sup_{x,y \in D_i} |f(x) - f(y)| \geqslant 0$$

используя это обозначение сформулируем теорему

Теор.: *Критерий Дарбу интегрируемости* функции по Риману.

Пусть f - ограниченная функция, тогда f - интегрируема на жордановом множестве D тогда и только тогда когда выполнено следующее

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0:\ \Delta(\tau) < \delta \Rightarrow\ S_D(f,\tau) - s_D(f,\tau) = \sum_i \omega_i\mu(D_i) < \varepsilon$$

Док-во:

Необходимость: Пусть $f \in \mathcal{R}(D)$, тогда выполнено следующее

$$|I_D(f,\tau,p') - I_D(f,\tau,p'')| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{при } \Delta(\tau) < \delta$$

(доказывается элементарно)

Выбором p интегральная сумма ограниченной функции может быть сделана сколь угодно близкой к нижней (верхней) сумме Дарбу

$$I_D(f,\tau,p') - s_D(f,\tau) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad S_D(f,\tau) - I_D(f,\tau,p'') < \frac{\varepsilon}{3}$$

(также доказывается элементарно)

из этих 3 неравенств следует

$$\begin{aligned}&\varepsilon > |S_D(f,\tau) - I_D(f,\tau,p'')| + |I_D(f,\tau,p'') - I_D(f,\tau,p')| + |I_D(f,\tau,p') - s_D(f,\tau)| \geqslant \\ &\geqslant |S_D(f,\tau) - I_D(f,\tau,p'') + I_D(f,\tau,p'') - I_D(f,\tau,p')| + |I_D(f,\tau,p') - s_D(f,\tau)| = \\ &= |S_D(f,\tau) - I_D(f,\tau,p')| + |I_D(f,\tau,p') - s_D(f,\tau)| \geqslant \\ &\geqslant |S_D(f,\tau) - I_D(f,\tau,p') + I_D(f,\tau,p') - s_D(f,\tau)| = \\ &\qquad = |S_D(f,\tau) - s_D(f,\tau)| < \varepsilon\end{aligned}$$

Достаточность: Пусть критерий Дарбу выполнен. Сперва докажем, что $\overline{s}_D(f) = \underline{S}_D(f)$. Пусть это не так, тогда $\overline{s}_D(f) < \underline{S}_D(f)$, в таком случае для какого либо τ

$$s_D(f,\tau) \leqslant \overline{s}_D(f) < \underline{S}_D(f) \leqslant S_D(f,\tau)$$

В таком случае можно подобрать такой ε, что критерий выполнятся не будет $\Rightarrow$ противоречие.

Теперь пусть $I = \overline{s}_D(f) = \underline{S}_D(f)$

Очевидно, что для любого разбиения τ и системы точек p выполняется

$$s_D(f,\tau) \leqslant I, I(f,\tau,p) \leqslant S_D(f,\tau)$$

Принимая во внимание данное неравенство, а также критерий Дарбу можно утверждать что

$$|I_D(f,\tau,p) - I|\varepsilon, \quad \text{причем } \Delta(\tau) < \delta$$

что как раз значит, что функция Интегриурема по Риману на D

■

23. Докажите, что равномерно непрерывная на жордановом множестве функция - интегрируема

Теорема. Равномерно непрерывная на жордановом множестве функция - интегрируема.

Доказательство. **Опр.:** *f равномерно непрерывна на D* $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0:\ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ Если $\Delta(\tau) < \delta \Rightarrow |x-y| < \delta$ для x,$y \in D_i \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \Rightarrow \omega_i \leqslant \varepsilon$, тогда $0 \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \cdot \mu(D_i) \leqslant \varepsilon \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \cdot\mu(D_i) = \varepsilon \cdot \mu(D)$ так как D измеримо по Жордану, следовательно $\mu(D)$ конечна, значит $\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \cdot \mu(D_i) < \varepsilon$, а значит по критерию Дарбу f интегрируема. ■

■

24. Сформулируйте критерий Дюбуа-Реймона интегрируемости ограниченной функции

Теор.: *Критерий Дюбуа-Реймона* интегрируемости ограниченной функции. Для любых $\alpha, \nu > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех разбиений τ, удовлетворяющих условию $\Delta(\tau) < \delta$, выполняется

$$\sum_{i:\omega_i \geqslant \alpha} \mu(D_i) < \nu$$

где $\omega_i = \sup\limits_{x \in D_i} f(x) - \inf\limits_{x \in D_i} f(x)$, а D_i - жорданово множество

25. Что такое множество лебеговой меры нуль? В каком случае функция называется непрерывной почти всюду на множестве?

Опр.: Множество $A \subset \mathbb{R}^m$ имеет m-мерную *меру Лебега нуль*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует счетный набор m-мерных полуинтервалов

$$Q_i = [a_i^1; b_i^1) \times ... \times [a_i^m; b_i^m), \quad i \in \mathbb{N}$$

имеющий сумму мер

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(Q_i) < \varepsilon$$

и объединение которых покрывает A

$$A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Q_i$$

Опр.: Функция f, определенная на множестве D, называется непрерывной на D *почти всюду*, если существует такое множество A лебеговой меры нуль, что f непрерывна на $D \backslash A$

26. Сформулируйте критерий Лебега интегрируемости ограниченной функции

Опр.: Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману. Функция f ограниченная на D, интегрируема на D ровно в том случае, когда она непрерывна на D почти всюду.

27. Сформулируйте и докажите свойство линейности интеграла

Св-во: Из того, что $f, g \in \mathcal{R}(D)$ следует, что $f + g \in \mathcal{R}(D)$, причем

$$\int\limits_D (f(x) + g(x))dx = \int\limits_D f(x)dx + \int\limits_D g(x)dx$$

Док-во: Рассмотрим интегральную сумму

$$I_D(f+g, \tau, p) = \sum_i (f+g)(\xi_i)\mu(D_i) = \sum_i f(\xi_i)\mu(D_i) + \sum_i g(\xi_i)\mu(D_i) =$$
$$= I_D(f, \tau, p) + I_D(g, \tau, p)$$

Обе интегральные суммы имеют предел при $\Delta(\tau) \to 0$, а значит и интегральная сумма от $f + g$ имеет предел. Следовательно $f + g \in \mathcal{R}(D)$

■

28. Сформулируйте и докажите теорему об интегрируемости произведения ограниченных интегрируемых функций

Теор.: Пусть функции f, g ограничены и интегрируемы на D. Покажите, что

$$f \cdot g \in \mathcal{R}(D)$$

Док-во: Воспользуемся критерием Дарбу. Заметим, что

$$f(x)g(x) - f(y)g(y) = (f(x) - f(y)) \cdot g(x) + f(y) \cdot (g(x) - g(y))$$

Сл-но, можно оценить колебание произведения функций на D_i

$$w_i(f \cdot g) = \sup_{x,y \in D_i} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| \leqslant C_g w_i(f) + C_f w_i(g)$$

где $C_f = sup|f(x)|$ и $C_g = sup|g(x)|$. Поэтому $\sum w_i(f \cdot g)\mu(D_i)$ мала при малых $\sum w_i(f)\mu(D_i)$ и $\sum w_i(g)\mu(D_i)$

■

29. Сформулируйте и докажите утверждение об интеграле от модуля функции.

Теор.: Если ограниченная функция f интегрируема на D, то и $|f| \in \mathcal{R}(D)$
Док-во: Поскольку

$$|f(x) - f(y)| \geqslant |f(x)| - |f(y)|,$$

то колебание функции $w_i(f)$ связано с колебанием функции $|w_i(f)|$ неравенством

$$w_i(f) = \sup_{x,y \in D_i} |f(x) - f(y)| \geqslant \sup_{x,y \in D_i} ||f(x)| - |f(y)|| = w_i(|f|)$$

Остается воспользоваться критерием Дарбу интегрируемости функции

■

30. Сформулируйте и докажите теорему о среднем значении.

Теор.: Пусть f, g ограничены и интегрируемы на D, причем $g \geqslant 0$. Покажите, что

$$m \int\limits_D g(x)dx \leqslant \int\limits_D f(x)g(x)dx \leqslant M \int\limits_D g(x)dx,$$

где $m = \inf\limits_{x \in D} f(x)$ и $M = \sup\limits_{x \in D} f(x)$
Док-во: Произведение ограниченных интегрируемых функций - интегрируемая функция. Остается воспользоваться монотонностью интеграла.

■

31. Сформулируйте свойство непрерывности интеграла (о предельном переходе под знаком интеграла).

Теорема. Пусть все функции f_n ограничены и интегрируемы на D, а также $f_n \rightrightarrows f$ на D. Тогда функция f будет интегрируема на D и

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_D f_n(x)dx = \int\limits_D f(x)dx.$$

32. Сформулируйте свойство аддитивности интеграла.

Теорема. Пусть D — жорданово множество, а функция f — ограничена и интегрируема на D. Пусть A и B это дизъюнктные (непересекающиеся) жордановы подмножества D. Тогда:

$$\int\limits_{A\sqcup B} f(x)dx = \int\limits_{A} f(x)dx + \int\limits_{B} f(x)dx.$$

33. Как вводится понятие заряда на кольце множеств? Покажите, что для заряда справедлива формула включения-исключения.

Определение. Функция ν, определенная на некотором кольце множеств, называется зарядом, если

a) $\nu(\varnothing) = 0$;

b) $\nu(A \sqcup B) = \nu(A) + \nu(B)$ (аддитивность).

Таким образом, мера — это неотрицательный заряд.

Теорема. Для заряда справедлива формула включений-исключений:

$$\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B) - \nu(A \cap B).$$

Доказательство. Заметим, что $A \cup B = A \sqcup (B \setminus A)$ и $B = (B \setminus A) \sqcup (A \cap B)$.

- С одной стороны имеем

$$\nu(A \cup B) = \nu(A \sqcup (B \setminus A)) = \nu(A) + \nu(B \setminus A).$$

- С другой стороны имеем

$$\nu(A)+\nu(B)-\nu(A\cap B) = \nu(A)+\nu((B\setminus A)\sqcup(A\cap B))-\nu(A\cap B) = \nu(A)+\nu(B\setminus A)+\nu(A\cap B)-\nu(A\cap B) = \nu(A)+\nu(B\setminus A).$$

То есть оба выражения равны $\nu(A) + \nu(B \setminus A)$, из чего делаем вывод:

$$\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B \setminus A) = \nu(A) + \nu(B) - \nu(A \cap B).$$

■

34. Каким образом интеграл определяет некоторый заряд? В каком случае это будет мера?

Пусть f это ограниченная интегрируемая функция на множестве D. В силу свойства аддитивности интеграла имеем

$$\nu(A) = \int\limits_{A} f(x)dx.$$

Неотрицательный заряд является мерой. Тогда если интеграл, описанный выше, является неотрицательной функцией, то заряд является мерой.

35. Как определяется плотность заряда в точке? Приведите пример заряда, не имеющего плотности.

Определение. замыканием $\overline{A}$ множества A называется пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A.

Удобно представлять, что $\overline{A} = A \sqcup ($ граница $A)$.

Определение. Число ρ называется плотностью заряда ν в точке a, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что из выполнения следующих условий:

1) жорданово множество $A \subseteq D$;

2) точка a лежит в $\overline{A}$;

3) $\mu(A) > 0$;

4) диаметр $\operatorname{diam} A = \sup\limits_{x,y \in A} |x - y| < \delta$;

следует $\left|\dfrac{\nu(A)}{\mu(A)} - \rho\right| < \varepsilon$. То есть мы устремляем диаметр множества A к нулю таким образом, чтобы точка a лежала в замыкании этого множества.
Эквивалентная запись через математические символы:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \left[\text{жорданово } A \subseteq D, a \in \overline{A}, \mu(A) > 0, \operatorname{diam} A = \sup_{x,y \in A} |x - y| < \delta)\right] \implies \left|\frac{\nu(A)}{\mu(A)} - \rho\right| < \varepsilon.$$

Можно рассмотреть аналогию с плотностью в физике. Если мы рассматриваем множество малого объема, окружающего точку a, то мы должны взять соответствующую массу этого множества и разделить на величину объема этого множества. И если эта дробь при бесконечном измельчении множества (диаметр стремится к 0) стремится к некоторому число, то это число ρ называется плотностью в этой точке.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на жордановом множестве D и $\nu(A) = \int\limits_A f(x)dx$, то плотность ν в точке a есть $f(a)$.

Пример. Возьмем конечный набор точек множества D и каждой из них сопоставим некоторое число — заряд точки. Каждому подмножеству A множества D поставим в соответствие заряд, равный сумме зарядов тех выделенных точек, которые попали в множество A. Если не попало ни одной выделенной точки, тогда заряд равен 0.
Легко видеть, что таким образом определенный заряд в самом деле является зарядом (удовлетворяет определению). С другой стороны, он не имеет плотности ни в одной из выделенных точек, следовательно, он не имеет плотности на множестве D.

36. Что можно утверждать о зарядке, имеющем нулевую плотность?

Рассмотрим заряд ν, определенный на алгебре жордановых подмножеств $A \subseteq D$ жорданова множества D и такой, что из $\mu(A) = 0$ следует $\nu(A) = 0$.

Теорема. Пусть $\rho(a) = 0$ для всех точек $a \in D$. Тогда $\nu(A) = 0$ для любого жорданова $A \subseteq D$.

37. Сформулируйте теорему о выражении меры через её плотность.

Теорема 0.2. *Пусть мера ν такова, что $\exists$ плотность $\rho(x)$ и функция ρ непрерывна на D.*
Пусть также $\mu(X) = 0 \Rightarrow \nu(X) = 0$.
Тогда для любого жорданова множества $A \subseteq D$ верно:

$$\nu(A) = \int\limits_A \rho(x)\, dx$$

38. Сформулируйте и докажите теорему о мере декартова произведения жордановых множеств.

Теорема 0.3 (О мере декартова произведения жордановых множеств)**.** *$E \subset \mathbb{R}^k$, $F \subset \mathbb{R}^l$ — простые множества ($E = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} Q_i$, $F = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} P_j$).*
Рассмотрим декартово произведение $E \times F = \bigsqcup\limits_{i,j} (Q_i \times P_j)$.
Для меры декартова произведения множеств верно:

$$\mu(Q_i \times P_j) = \mu(Q_i) \cdot \mu(P_j) \implies \mu(E \times F) = \mu(E) \cdot \mu(F)$$

Доказательство. Из определения меры: $\mu(E) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(Q_i)$, $\mu(F) = \sum\limits_{j=1}^{m} \mu(P_j)$.

$E \times F = \bigsqcup\limits_{i,j} (Q_i \times P_j) \implies \mu(E \times F) = \sum\limits_{i,j} \mu\left(Q_i \times P_j\right) =$

$= \sum\limits_{i,j} \mu(Q_i) \cdot \mu(P_j) = \sum\limits_{i} \mu(Q_i) \cdot \sum\limits_{j} \mu(P_j) = \mu(E) \cdot \mu(F).$ ■

39. Сформулируйте теорему (Фубини) о сведении интеграла по декартову произведению жордановых множеств к повторному интегралу.

Теорема 0.4 (Фубини)**.** *$f : G \times H \to \mathbb{R}$ ($G \subset \mathbb{R}^k$, $H \subset \mathbb{R}^l$) — ограничена и интегрируема.*
Её интегральная сумма: $\sum\limits_{i,j} f(\xi_i, \eta_j) \cdot \mu(G_i \times H_j) \implies$ $(\xi_i \in G_i,\, \eta_j \in H_j)$

$\underset{\Delta\to 0}{\Longrightarrow} \int\limits_{G\times H} f(w)\, dw = \iint\limits_{G\times H} f(x,y)\, dxdy \qquad (w = (x,y), x \in G, y \in H)$

Пусть $f(x,y)$ интегрируема по x $\forall y \in H$. Положим $g(y) = \int\limits_{G} f(x,y)\, dx$.

Тогда g интегрируема на H и

$$\iint\limits_{G\times H} f(x,y)\, dxdy = \int\limits_{H} g(y)\, dy = \int\limits_{H} dy \left(\int\limits_{G} f(x,y)\, dx \right)$$

40.

41.

42. Как определяется диффеоморфизм в $\mathbb{R}^m$? Покажите, что отображение обратное к диффеоморфизму, само является диффеоморфизмом

Определение. Пусть U, X $\subseteq \mathbb{R}^m$ и $\varphi : U \to X$ – биекция

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(u_1, \dots, u_m) \\ \dots \\ x_m = \varphi_m(u_1, \dots, u_m) \end{cases}$$

Вводим следующие обозначения

$$u = (u_1, \dots, u_m),\, x = (x_1, \dots, x_m)$$

Пусть φ непрерывный диффиренцируема на U и якобиан(определитель матрицы Якоби)

$$J_\varphi(u) = det \frac{\partial x}{\partial u}$$

сохраняет знак в U и $\neq 0$
Такое отображение φ называется **диффеоморфизмом**.

Теорема 0.5. *Отображение обратное к диффеоморфизму само является диффеоморфизмом.*

Доказательство. Перемножением матриц Якоби этих функций, должна быть единичная матрица. Значит $j_{\varphi^1} \neq 0$ тоже сохраняет знак φ^{-1} непрерывно диффиренцируема т.к. φ непрерывно диффиренцируема. ■

43. Что такое криволинейные координаты в области $X \subseteq \mathbb{R}^m$ Как определяется координатная линия и единичный координатный вектор

Определение. При этом числа $(u_1, \dots, u_m)$ называются **криволинейными координатами** точки $(x_1, \dots, x_m)$

Определение.
$u^0 = (u_1^0, \ldots, u_m^0)$
$x^0 = \varphi(u^0)$
Кривая $x = \varphi(u_1, u_2^0, \ldots, u_m^0)$ называется **координатной линией** u_1 на множестве X

Определение. Касательный вектор(координатный вектор) к координатной линии u_1

$$\frac{\partial x}{\partial u_1} = (\frac{\partial x_1}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial x_m}{\partial u_1}) \neq 0$$

Единичный касательный вектор(единичный координатный вектор)

$$e_1 = \frac{\frac{\partial x}{\partial u_1}}{|\frac{\partial x}{\partial u_1}|}$$

44. Дайте определение полярных координат (формулы, область задания, координатные линии, матрица Якоби перехода, якобиан)

Полярные координаты (r, φ) в пространстве $\mathbb{R}^2$. Точка соединяется с началом координат(длина этого отрезка – r). φ – угол, который отсчитывается от положительной оси против часовой стрелки до линии.

Для точки (0, 0) неоднозначно определено φ, поэтому мы ее выкалываем.

$\mathrm{X} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
$\mathrm{U} = (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

Матрица Якоби перехода:

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

Координатные линии r лучи, выходящие из начала координат. Координатные линии φ окружности с центром в начале координат.

45. Дайте определение цилиндрических координат (формулы, область задания, координатные линии, матрица Якоби перехода, якобиан)

Цилиндрические координаты (r, φ, z) в пространстве (x, y, z) вводятся формулами

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

$$z = z$$

При этом $U = (0; +\infty) \times [0; 2\pi) \times \mathbb{R}$ и $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) | z \in \mathbb{R}\}$ Выколотая ось z при этом называется полярной осью. Угол φ называется азимутом или азимутальным углом.
Координатные линии r – лучи, выходящие из точки на полярной оси перпендикулярно полярной оси. Координатные линии φ – окружности с центром на полярной оси, расположенные в плоскостях, перпендикулярных полярной оси. Координатные линии z – прямые, параллельные полярной оси.
Матрица Якоби перехода имеет вид:
$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Якобиан равен r.

46. Дайте определение сферических координат (формулы, область задания, координатные линии, матрица Якоби перехода, якобиан)

Сферические координаты (r, θ, φ) в пространстве (x, y, z) вводятся формулами

$$x = r \sin\theta \cos\varphi$$

$$y = r \sin\theta \sin\varphi$$

$$z = r \cos\theta$$

При этом $U = (0; +\infty) \times (0; \pi) \times [0; 2\pi)$ и $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) | z \in \mathbb{R}\}$ Выколотая ось z при этом называется полярной осью. Угол θ называется полярным углом, а угол φ называется азимутальным углом.
Координатные линии r – лучи, выходящие из начала координат. Координатные линии θ – полуокружности с центром в начале координат, и концами, расположенными на полярной оси. Координатные линии φ – окружности с центром на полярной оси, расположенные в плоскостях, перпендикулярных полярной оси.
Матрица Якоби перехода имеет вид:
$$\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$
Якобиан равен $r^2 \sin\theta$.

47. Что можно утверждать о внутренних, предельных, граничных точках множества при диффеоморфном отображении?

Пусть $\varphi : U \to X$ — диффеоморфизм.
Если $B = \varphi(A)$, A — множество в U, то:

1. внутренняя точка множества A переходит во внутреннюю точку множества B.
2. предельная точка множества A переходит во предельную точку множества B.
3. граничная точка множества A переходит во граничную точку множества B.

48. Докажите, что образ жорданова множества при диффеоморфизме является жордановым множеством.

Если A — открытое множество, то и $B = \varphi(A)$ открыто.
Если A — замкнутое множество, то и $B = \varphi(A)$ замкнуто.

Теорема. Если A — жорданово множество, то и $B = \varphi(A)$ — жорданово множество.

Доказательство. Что такое жорданово множество? Это множество, множество граничных точек которого имеет сколь угодно малую внешнюю жорданову меру (имеет жорданову меру нуль). То есть, можно найти простое множество сколь угодно малой меры, которое покрывает границу множества A. Множество A жорданово $\iff$ его граница покрывается простым множеством сколь угодно малой меры.
Как мы знаем, граница переходит в границу, то есть граница множества B — образ границы множества A при отображении φ. Поскольку отображение φ непрерывно, а граница любого множества является замкнутым множеством, на границе множества A функция φ будет равномерно непрерывной, следовательно, различие в образах при отображении φ будет меньше ε если только различие между их прообразами меньше δ.
Для любого ε я смогу указать такое δ, что если расстояние между точками границы множества A меньше δ, то и расстояние между соответствующими точками границы множества B будет меньше ε, следовательно, если граница множества A покрыта полуинтервалами длины меньше δ, то граница множества B покрывается полуинтервалами длины меньше ε — это следствие равномерной непрерывности отображения φ.

А если граница множества B покрывается интервалами длины меньше ε, то всё множество B будет покрываться конечным числом полуинтервалов длины меньше ε, то есть будет иметь сколь угодно малую меру. Тем самым, граница множества B имеет сколь угодно малую внешнюю меру Жордана, то есть меру Жордана, равную нулю. Это и означает, что множество B — множество, измеримое по Жордану, или жорданово.

■

49. Докажите, что композиция диффеоморфизма и меры Жордана является мерой. Чему равна её плотность?

Расмотрим функцию множества: $\nu = \mu \circ \varphi$, то есть $\nu(A) = \mu(\varphi(A))$.

Теорема. Функция ν является мерой на кольце жордановых подмножеств множества U.

Доказательство. Просто проверим определение меры.

1. Понятно, что $\varphi(\varnothing) = \varnothing \implies \nu(\varnothing) = \mu(\varnothing) = 0$. (вроде этого нет в определениях меры, но Маевский зачем-то сказал на лекции)

2. Понятно, что $\nu \geqslant 0$, так как $\mu \geqslant 0$.

3. Проверим свойство аддитивности. Пусть $A_1, A_2 \subseteq U$ — дизъюнктные жордановы множества. Тогда $B_1 = \varphi(A_1)$, $B_2 = \varphi(A_2)$ дизъюнктны (так как φ — биекция) и жордановы (по прошлой теореме). Тогда:

$$\nu(A_1 \sqcup A_2) = \mu(B_1 \sqcup B_2) = \mu(B_1) + \mu(B_2) = \nu(A_1) + \nu(A_2)$$

Значит, ν — мера. ■

Пусть $U, X \subset \mathbb{R}^m$, $\varphi : U \to X$ — диффеоморфизм. Пусть A — жорданово, $A \subseteq U$. Рассмотрим меру $\nu(A) = \mu(\varphi(A))$.

Утверждение. ν имеет плотность, равную $|J_\varphi|$.

Доказательство. Воспользуемся тем, что φ непрерывно дифференцируемо, то есть имеет непрерывные частные производные и напишем разложение по формуле Тейлора (первого порядка) в окрестности любой точки u^0:

$$x - x^0 = \left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_{u^0} \cdot (u - u^0) + o(|du|), \qquad du = u - u^0,\ x^0 = \varphi(u^0),\ x = \varphi(u)$$

Посмотрим, как действует линейное отображение (предполагаем, что $o(|du|)$ мало) на простые множества — объединения дизъюнктных параллелепипедов. Пусть P — прямоугольный параллелепипед $\subset U$ и $P = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_m$. Под действием преобразования $U \mapsto \left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_{u^0} \cdot (u - u^0)$ P перейдёт в (необязательно прямоугольный) параллелепипед объёма (пользуемся геометрическим смыслом определителя):

$$\left|\det \left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_{u^0}\right| \cdot p_1 \cdot \dots \cdot p_m = \left|J_\varphi(u^0)\right| \cdot \mu(P)$$

Теперь разберёмся с $o(|du|)$. По определению:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |o(|du|) \leqslant \varepsilon \cdot |du| \text{ если только } |u - u^0| < \delta$$

Если P находится в δ-окрестности точки u^0, то

$$(1 - \varepsilon)^m \cdot |J_\varphi(u^0)| \cdot \mu(P) \leqslant \nu(P) \leqslant (1 + \varepsilon)^m \cdot |J_\varphi(u^0)| \cdot \mu(P)$$

Простое множество — это $\sqcup P_i = F \subset \delta$-окрестности точки u^0.

$$(1 - \varepsilon)^m \cdot |J_\varphi(u^0)| \cdot \mu(P_i) \leqslant \nu(P_i) \leqslant (1 + \varepsilon)^m \cdot |J_\varphi(u^0)| \cdot \mu(P_i) \qquad \Bigg|\sum_i$$

$$(1 - \varepsilon)^m \cdot |J_\varphi(u^0)| \cdot \mu(F) \leqslant \nu(F) \leqslant (1 + \varepsilon)^m \cdot |J_\varphi(u^0)| \cdot \mu(F)$$

Измеримое множество $G \subset \delta$-окрестности точки u^0 сколь угодно точно приближается простыми, то есть

$$\exists F : (1-\varepsilon)\cdot\mu(F) \leqslant \mu(G) \leqslant (1+\varepsilon)\cdot\mu(F) \implies$$
$$\implies (1-\varepsilon)^{m+1}\cdot|J_\varphi(u^0)|\cdot\mu(G) \leqslant \nu(G) \leqslant (1+\varepsilon)^{m+1}\cdot|J_\varphi(u^0)|\cdot\mu(G)$$

Поэтому, если измеримое множество A стягивается к точке u^0, то

$$\frac{\nu(A)}{\mu(A)} \to |J_\varphi(u^0)|$$

■

50. Выведите формулу для меры жорданова множества в криволинейных координатах

Утверждение. Так как плотность меры ν, равная $|J_\varphi(u)|$, непрерывна, то

$$\nu(A) = \int\limits_A |J_\varphi(u)|du$$

Доказательство. Рассмотрим разбиение множества $G = \bigsqcup G_i$, $D_i = \varphi(G_i)$, $D = \bigsqcup D_i$.

$$\mu(D_i) = \mu(\varphi(G_i)) = \nu(G_i) = \int\limits_{G_i} |J_\varphi(u)|du$$

■

51. Сформулируйте и докажите теорему о замене переменных в кратном интеграле

Теорема (о замене переменных в кратном интеграле)**.** Пусть функция f ограничена и интегрируема на замкнутом связном жордановом множестве D; φ — диффеоморфизм, $\varphi : G \to D$, $\varphi(G) = D$. Тогда $f(\varphi(u))\cdot|J_\varphi(u)|$ интегрируема на G, причём

$$\int\limits_D f(x)dx = \int\limits_G f(\varphi(u))\cdot|J_\varphi(u)|\cdot du$$

Доказательство. Рассмотрим разбиение множества $G = \bigsqcup G_i$, $D_i = \varphi(G_i)$, $D = \bigsqcup D_i$.
По теореме о среднем:

$$\exists \eta_i \in \overline{G_i} : \nu(G_i) = |J_\varphi(\eta_i)|\cdot\mu(G_i)$$

Обозначим $\xi_i = \varphi(\eta_i) \in \overline{D_i}$.

$$\sum f(\xi_i)\cdot\mu(D_i) = \sum f(\xi_i)\cdot|J_\varphi(\eta_i)|\cdot\mu(G_i) = \sum f(\varphi(\eta_i))\cdot|J_\varphi(\eta_i)|\cdot\mu(G_i).$$

Так как $f \in \mathcal{R}(D)$, то

$$\sum f(\xi_i)\cdot\mu(D_i) \to \int\limits_D f(x)dx$$

$\sum f(\varphi(\eta_i))\cdot|J_\varphi(\eta_i)|\cdot\mu(G_i)$ — в точности интегральная сумма для функции $f(\varphi(u))\cdot|J_\varphi(u)|$, следовательно

$$\sum f(\varphi(\eta_i))\cdot|J_\varphi(\eta_i)|\cdot\mu(G_i) \to \int\limits_G f(\varphi(u))\cdot|J_\varphi(u)|du$$

Но $\sum f(\xi_i)\cdot\mu(D_i) = \sum f(\varphi(\eta_i))\cdot|J_\varphi(\eta_i)|\cdot\mu(G_i)$, а значит,

$$\int\limits_D f(x)dx = \int\limits_G f(\varphi(u))\cdot|J_\varphi(u)|du$$

■

52. Что понимается под элементом объёма? Как следует понимать произведение дифференциалов в элементе объёма?

Поскольку

$$\int\limits_D dx = \mu(D),$$

то дифференциал $dx = dx_1 dx_2 \dots dx_m$ называют **элементом объёма**.

Обсудим вопрос, в каком смысле следует понимать произведение дифференциалов $dx_1 dx_2 \dots dx_m$ в элементе объёма под знаком кратного интеграла

$$\int\limits_D f(x)dx = \int\limits_D \cdots \int f(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_1 dx_2 \dots dx_m$$

Рассмотрим двумерный случай, для m-мерного аналогично.

Пусть $G, D \subset \mathbb{R}^2$ и у нас есть интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

Мы хотим сделать замену координат, отображающую некое $G \subset \mathbb{R}^2$ в наше D:

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases}$$

Тогда знаем, что

$$dx = \varphi'_u du + \varphi'_v dv,$$
$$dy = \psi'_u du + \psi'_v dv$$

Если мы просто перемножим эти две формулы, то не получим правильной замены переменных. Как быть? Ответ: использовать внешнее произведение дифференциалов. (здесь рекомендую прочитать 53-й вопрос, после него будет проще)

Перемножим дифференциалы dx и dy внешним образом:

$$dx \wedge dy = (\varphi'_u du + \varphi'_v dv) \wedge (\psi'_u du + \psi'_v dv) = \begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \psi'_u & \psi'_v \end{vmatrix} \cdot du \wedge dv = J \cdot du \wedge dv$$

Почему нет модуля? Это из-за того, что мы пока рассматриваем ориентированный интеграл (ориентированное пространство), и у нас $dxdy = -dydx$. Но обычно мы рассматриваем неориентированный интеграл, и тогда

$$dxdy = |dx \wedge dy| = |J| \cdot |du \wedge dv|.$$

Для m-мерного случая:

$$dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m = J_\varphi(u) \cdot du_1 \wedge \dots \wedge du_m.$$

53. Что такое внешнее произведение векторов? Как определяется линейная дифференциальная форма?

Внешнее произведение векторов — это некая абстрактная (то есть, "пощупать" её мы не можем) линейная кососимметричная операция ($\wedge$).

- Линейность:

$$(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) \wedge \vec{c} = \alpha \cdot \vec{a} \wedge \vec{c} + \beta \cdot \vec{b} \wedge \vec{c}$$

- Кососимметричность:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a} (\implies \vec{a} \wedge \vec{a} = 0)$$

Линейная дифференциальная форма от переменных u, v — формальная линейная комбинация их дифференциалов.
Например,

$$dx = d\varphi(u, v) = \varphi'_u du + \varphi'_v dv$$

— линейная дифференциальная форма от du, dv.
Можем заметить, что дифференциал какой-то функции является линейной дифференциальной формой, но обратное неверно.

Пример. Перемножим две линейные дифференциальные формы и посмотрим, что получится.

$$(\alpha du + \beta dv) \wedge (\gamma du + \delta dv) = \alpha\gamma \underbrace{du \wedge du}_{0} + \alpha\delta du \wedge dv + \beta\gamma dv \wedge du + \beta\delta \underbrace{dv \wedge dv}_{0} = (\alpha\delta - \beta\gamma) \cdot du \wedge dv = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \cdot du \wedge dv$$

54. Выведите формулу, выражающую внешнее произведение дифференциалов зависимых переменных через внешнее произведение дифференциалов независимых переменных.

Мы хотим сделать замену координат, отображающую некое $G \subset \mathbb{R}^2$ в наше D:

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases}$$

Тогда знаем, что

$$dx = \varphi'_u du + \varphi'_v dv,$$
$$dy = \psi'_u du + \psi'_v dv$$

Если мы просто перемножим эти две формулы, то не получим правильной замены переменных. Как быть? Ответ: использовать внешнее произведение дифференциалов. (здесь рекомендую прочитать 53-й вопрос, после него будет проще)
Перемножим дифференциалы dx и dy внешним образом:

$$dx \wedge dy = (\varphi'_u du + \varphi'_v dv) \wedge (\psi'_u du + \psi'_v dv) = \begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \psi'_u & \psi'_v \end{vmatrix} \cdot du \wedge dv = J \cdot du \wedge dv$$

Почему нет модуля? Это из-за того, что мы пока рассматриваем ориентированный интеграл (ориентированное пространство), и у нас $dxdy = -dydx$. Но обычно мы рассматриваем неориентированный интеграл, и тогда

$$dxdy = |dx \wedge dy| = |J| \cdot |du \wedge dv|.$$

Для m-мерного случая:

$$dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m = J_\varphi(u) \cdot du_1 \wedge \dots \wedge du_m.$$

55. Что такое подграфик функции $f : D \to [0, +\infty]$? Сформулируйте теорему о связи интегрируемости функции и измеримости по Жордану ее подграфика

Пусть $D \subset \mathbb{R}^m$ – жорданово множество, $f : D \to [0, +\infty]$ – ограниченная функция
$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{m+1} | x \in D, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ подграфик функции f

Теорема. Множество G жорданово $\Longleftrightarrow$ f интегрируема на множестве D, причем

$$\nu(G) = \int\limits_D f(x)dx$$

56. Дайте определение понятиям: гладкая k-мерная поверхность в $\mathbb{R}^m$, параметризация поверхности, координатные линии на поверхности

Определение 5. Пусть $G \subset \mathbb{R}^k$ — замкнутое связное жорданово множество, $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^m$ — непрерывно дифференцируемое отображение, $\varphi(G) = S \subset \mathbb{R}^m$. Также, $\varphi\colon G \to S$ — биекция, и соответствующая ей матрица Якоби

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial(x_1, \ldots, x_m)}{\partial(u_1, \ldots, u_k)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial x_1}{\partial u_k} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial x_m}{\partial u_1} & \frac{\partial x_m}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial x_m}{\partial u_m} \end{pmatrix},$$

где $\varphi(u) = x$, то есть координата u_i принадлежит пространству $\mathbb{R}^k$, а координата x_j принадлежит пространству $\mathbb{R}^m$. Обратим внимание, что матрица Якоби не квадратная, поскольку мы считаем $k < m$. Поскольку φ непрерывно дифференцируема, то матрица Якоби составлена из непрерывных функций. Пусть $\operatorname{rk}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) = k$, тогда S называется *гладкой k-мерной поверхностью в* $\mathbb{R}^m$.

Определение 6. Функция φ из прошлого определения называется *параметризацией* поверхности S.

Определение 7. Вектор $u = (u_1, \ldots, u_k)$ называется *координатами на поверхности* S.

57. Что представляет собой гладкая k-мерная поверхность при $k = 1$, $k = 2$, $k = m - 1$

$k = 1 \implies$ поверхность является кривой;

$k = 2 \implies$ на лекции не было, но это просто поверхность второго порядка (параболоиды, эллипсоиды, etc);

$k = m - 1 \implies$ такая поверхность называется гиперповерхностью.

58. Перечислите 3 требования, которым должно удовлетворять понятие площади поверхности

1. Площадь малого участка поверхности, соответствующая малому изменению параметров $[u_1, u_1 + \mathrm{d}u_1], \ldots, [u_k, u_k + \mathrm{d}u_k]$ должна быть практически равна площади паралелограмма на векторах $\frac{\partial x}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_k}$;
2. Площадь должна быть аддитивна;
3. Площадь поверхности не должна зависеть от параметризации.

59. Что такое матрица Грама системы k векторов пространства $\mathbb{R}^m$ и как она выражается через матрицу, составленную из координат векторов? Почему определитель Грама неотрицателен? Каков геометрический смысл определителя Грама?

Пусть у нас зафиксировано пространство $\mathbb{R}^m$, и у нас есть k-мерный параллелограмм S, построенный на векторах $l_1, \ldots, l_k$, тогда

$$\mu^2(S) = \begin{vmatrix} \langle l_1, l_1 \rangle & \langle l_1, l_2 \rangle & \ldots & \langle l_1, l_k \rangle \\ \langle l_2, l_1 \rangle & \langle l_2, l_2 \rangle & \ldots & \langle l_2, l_k \rangle \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \langle l_k, l_1 \rangle & \ldots & \ldots & \langle l_k, l_k \rangle \end{vmatrix} = \det G(l_1, \ldots, l_k),$$

где $G(l_1, \ldots, l_k)$ — матрица Грама системы векторов $\{l_1, \ldots, l_k\}$. Пусть векторы $l_1, \ldots, l_k$ записаны в столбцы матрицы L, тогда

$$L = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \ldots & l_k \end{pmatrix} \implies G = L^T \times L.$$

Неотрицательность определителя Грама Если система $\{l_1, \ldots, l_k\}$ линейно зависима, то определитель равен нулю. Иначе, мы можем применить процесс ортогонализации $\{l_1, \ldots, l_k\} \rightsquigarrow \{w_1, \ldots, w_k\}$, где $\langle w_i, w_j\rangle = 0$, если $i \neq j$. Но тогда $\det G(l_1, \ldots, l_k) = \det G(w_1, \ldots, w_k) = \|w_1\|^2 \cdot \|w_2\|^2 \cdot \ldots \cdot \|w_k\|^2 > 0$.

Геометрический смысл Определитель Грама системы векторов $\{l_i\}$ равен объему k-мерного параллелепипеда, порожденного системой векторов $\{l_i\}$.

60. Выведите выражение для площади бесконечно малого координатного параллелограмма в плоскости, касательной к поверхности в данной точке, через матрицу Якоби параметризации поверхности

Найдем площадь $\mu(P)$ параллелограмма P, построенного в касательной плоскости к поверхности S в точке $u^0 = (u_1^0, \ldots, u_k^0)$, $x^0 = \varphi(u^0)$ на векторах: $\dfrac{\partial x}{\partial u_1} \cdot \mathrm{d}u_1, \ldots, \dfrac{\partial x}{\partial u_k} \cdot \mathrm{d}u_k$. Запись $\dfrac{\partial x}{\partial u_i} \cdot \mathrm{d}u_i$ означает, что мы берем касательный вектор соответствующей координатной линии u_i в точке u^0, который мы умножили на $\mathrm{d}u_i$, то есть берем его (вектор) длины $\|\dfrac{\partial x}{\partial u_i}\| \cdot \mathrm{d}u_i$:

$$\mu(P)^2 = \begin{vmatrix} \langle \frac{\partial x}{\partial u_1} \cdot \mathrm{d}u_1, \frac{\partial x}{\partial u_1} \cdot \mathrm{d}u_1\rangle & \ldots & \langle \frac{\partial x}{\partial u_1} \cdot \mathrm{d}u_1, \frac{\partial x}{\partial u_k} \cdot \mathrm{d}u_k\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \frac{\partial x}{\partial u_k} \cdot \mathrm{d}u_k, \frac{\partial x}{\partial u_1} \cdot \mathrm{d}u_1\rangle & \ldots & \langle \frac{\partial x}{\partial u_k} \cdot \mathrm{d}u_k, \frac{\partial x}{\partial u_k} \cdot \mathrm{d}u_k\rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_1\langle \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_1}\rangle & \ldots & \mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_k\langle \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_k}\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{d}u_k\mathrm{d}u_1\langle \frac{\partial x}{\partial u_k}, \frac{\partial x}{\partial u_1}\rangle & \ldots & \mathrm{d}u_k\mathrm{d}u_k\langle \frac{\partial x}{\partial u_k}, \frac{\partial x}{\partial u_k}\rangle \end{vmatrix},$$

заметим, что $\mathrm{d}u_i$ встречается в каждом элементе i-ой строки и в каждом элементе i-ого столбца, поэтому мы можем вынести $(\mathrm{d}u_i)^2$ за определитель:

$$\mu(P)^2 = (\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\ldots\mathrm{d}u_k)^2 \begin{vmatrix} \langle \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_1}\rangle & \ldots & \langle \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_k}\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \frac{\partial x}{\partial u_k}, \frac{\partial x}{\partial u_1}\rangle & \ldots & \langle \frac{\partial x}{\partial u_k}, \frac{\partial x}{\partial u_k}\rangle \end{vmatrix} = (\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\ldots\mathrm{d}u_k)^2 \cdot \det G\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_k}\right).$$

Заметим, что матрица $\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x}{\partial u_2} & \ldots & \dfrac{\partial x}{\partial u_k} \end{pmatrix}$ является матрицей Якоби системы векторов $\left\{\dfrac{\partial x}{\partial u_i}\right\}$, поэтому

$$\mu(P)^2 = (\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\ldots\mathrm{d}u_k)^2 \cdot \det G\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_k}\right) = (\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\ldots\mathrm{d}u_k)^2 \cdot \det\left(\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^T \times \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right).$$

Отсюда,

$$\mu(P) = \mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\ldots\mathrm{d}u_k \cdot \sqrt{\det\left(\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^T \times \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right)}.$$

61. Напишите определение площади гладкой k-мерной поверхности

Площадь поверхности S вводится следующей формулой:

$$\mu(S) = \int\limits_G \sqrt{\det\left(\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^T \times \frac{\partial x}{\partial u}\right)} \cdot \mathrm{d}u.$$

Такое определение удовлетворяет первым двум свойствам, которые мы от него хотели, а именно:

1. Площадь малого элемента поверхности совпадает с площадью соответствующего касательного параллелограмма;
2. Из аддитивности интеграла следует аддитивность площади.

62. Докажите, что площадь гладкой k-мерной поверхности не зависит от ее параметризации

Пусть задана альтернативная параметризация поверхности S $\psi\colon H \to S$, $H \subset \mathbb{R}^k$, $v = (v_1, \ldots, v_k) \in H$, $x = \psi(v)$. При этом ψ биективно, непрерывно дифференцируемо, и соответствующая ему матрица Якоби имеет ранг k. Рассмотрим отображение $\chi = \varphi^{-1} \circ \psi\colon H \to G$; $u = \chi(v)$. Заметим, во-первых, что χ биективно как композиция двух биекций. Во-вторых, ранги матриц Якоби для φ и ψ равны k, поэтому в матрице Якоби для φ мы можем вычленить соответствующий базисный $k \times k$ минор такой, что его определитель не равен нулю. Рассматривая соответствующие координаты вектора x, мы можем выразить координаты $u = \chi(v)$, и на этом пути у нас получится, что χ имеет непрерывные частные производные, потому что мы сможем представить

$$\frac{\partial u}{\partial v} = \left(\frac{\partial(x_{i1}, \ldots, x_{ik})}{\partial(u_1, \ldots, u_k)}\right)^{-1} \times \left(\frac{\partial(x_{i1}, \ldots, x_{ik})}{\partial(v_1, \ldots, v_k)}\right).$$

В силу невырожденности обратной матрицы, и того факта, что ранг матрицы Якоби равен k мы получим, что матрица Якоби для χ невырождена. Следовательно, χ — диффеоморфизм. Это означает, что мы можем сделать замену переменной, а именно

$$\mu(S) = \int\limits_G \sqrt{\det\left(\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^T \times \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right)} \cdot \mathrm{d}u = \int\limits_H \sqrt{\det\left(\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^T \times \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right)} \cdot \left|\det\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)\right| \mathrm{d}v.$$

Сделаем замену в матрице Якоби:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^T \times \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial u}\right)^T \times \left(\frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial u}\right) = \left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)^T \times \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^T \times \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right) \times \left(\frac{\partial v}{\partial u}\right).$$

Найдем определитель:

$$\det\left(\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^T \times \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right) = \det\left(\left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)^T \times \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^T \times \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right) \times \left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)\right) = \left(\det\left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)\right)^2 \cdot \det\left(\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^T \times \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)\right).$$

Подставим это в выражение $\mu(S)$:

$$\mu(S) = \int\limits_H \sqrt{\det\left(\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^T \times \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right)} \cdot \left|\det\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)\right| \mathrm{d}v =$$

$$= \int\limits_H \sqrt{\det\left(\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^T \times \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right)} \cdot \underbrace{\left|\det\left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)\right| \cdot \left|\det\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)\right|}_{=1} \mathrm{d}v =$$

$$= \int\limits_H \sqrt{\det\left(\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^T \times \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right)} \mathrm{d}v.$$

Произведение определителей равно 1, поскольку это произведение определителей двух взаимно обратных матриц. Таким образом, утверждение доказано.

63. Рассмотрите частные случаи определения площади гладкой k-мерной поверхности при $k = 1$ и $k = 2$

$k = 1$: В этом случае у нас есть только один параметр u, тогда

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} \\ \vdots \\ \frac{\partial x_m}{\partial u} \end{pmatrix}.$$

Матрица Грама записывается следующим образом:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^T \times \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) = \langle \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial u} \rangle = \|\frac{\partial x}{\partial u}\|^2.$$

Ее определитель

$$\det G = \|\frac{\partial x}{\partial u}\|^2.$$

А корень из определителя

$$\sqrt{\det G} = \|\frac{\partial x}{\partial u}\|.$$

Таким образом, мы можем найти длину кривой S:

$$\mu(S) = \int\limits_a^b \|\frac{\partial x}{\partial u}\| \,\mathrm{d}u = \int\limits_a^b \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial x_m}{\partial u}\right)^2} \mathrm{d}u.$$

$k = 2$: У нас есть некоторые параметры $(u, v) \in G \subset \mathbb{R}^2$, тогда матрица Грама будет выглядеть так:

$$\begin{pmatrix} \langle \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial u} \rangle & \langle \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v} \rangle \\ \langle \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial u} \rangle & \langle \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial v} \rangle \end{pmatrix}.$$

Ее определитель

$$\det(\ldots) = \|\frac{\partial x}{\partial u}\|^2 \cdot \|\frac{\partial x}{\partial v}\|^2 - \left\langle \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v} \right\rangle^2.$$

Ну и тогда площадь поверхности

$$\mu(S) = \iint\limits_G \sqrt{\|\frac{\partial x}{\partial u}\|^2 \cdot \|\frac{\partial x}{\partial v}\|^2 - \left\langle \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v} \right\rangle^2} \mathrm{d}u \mathrm{d}v.$$

64. Выведите формулу для площади гладкой поверхности в $\mathbb{R}^3$, заданной уравнением $z = f(x, y)$, f – непрерывно дифференцируемая функция.

Простейший способ задать поверхность D – это задать её как график функции $f(x, y)$. Параметризацией такой поверхности будет

$$z = f(x, y),\ (x, y) \in G$$

Получим формулу для её площади. Вычислислим матрицу Якоби:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f'_x & f'_y \end{pmatrix}$$

Найдём матрицу Грама:

$$\left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x, y)}\right)^T \cdot \left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x, y)}\right) = \begin{pmatrix} (f'_x)^2 + 1 & f'_x f'_y \\ f'_x f'_y & (f'_y)^2 + 1 \end{pmatrix}$$

и её определитель:

$$((f'_x)^2 + 1)((f'_y)^2 + 1) - (f'_x f'_y)^2 = (f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1$$

Получаем площадь графика функции $z = f(x, y)$

$$\mu(D) = \iint\limits_G \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1}\ dxdy$$

65. Выведите формулу для площади гладкой поверхности вращения в $\mathbb{R}^3$, заданной в цилиндрических координатах (r, φ, z) уравнением $z = \rho(z)$, где ρ – непрерывно дифференцируемая функция.

Поверхность D называется поверхностью вращения, если она может быть задана в цилиндрических координатах уравнением

$$r = \rho(z)$$

Параметризация поверхности вращения имеет вид

$$x = \rho(z)\cos\varphi,\ y = \rho(z)\sin\varphi,\ z \in [a; b],\ \varphi \in [0; 2\pi)$$

Получим формулу для площади поверхности вращения. Вычислислим матрицу Якоби:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(z, \varphi)} = \begin{pmatrix} \rho'(z)\cos\varphi & -\rho(z)\sin\varphi \\ \rho'(z)\sin\varphi & \rho(z)\cos\varphi \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдём матрицу Грама:

$$\left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(z, \varphi)}\right)^T \cdot \left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(z, \varphi)}\right) = \begin{pmatrix} (\rho'(z))^2 + 1 & 0 \\ 0 & \rho^2(z) \end{pmatrix}$$

и её определитель:

$$((\rho'(z))^2 + 1)\rho^2(z)$$

Получаем площадь поверхности вращения

$$\mu(D) = \iint\limits_G \sqrt{(\rho'(z))^2 + 1}\,\rho(z)\ dzd\varphi = \int\limits_a^b d\varphi \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{(\rho'(z))^2 + 1}\,\rho(z)\ dz = 2\pi \int\limits_a^b \sqrt{(\rho'(z))^2 + 1}\,\rho(z)\ dz$$

66. Что такое исчерпание $\{D_n\}$ множества $D \subseteq \mathbb{R}^m$? Что можно утверждать в случае, когда D – жорданово множество?

Пусть множество $D \subseteq R^m$ таково, что существует последовательность жордановых множеств $D_n \subseteq D$ такая, что

$$D_1 \subseteq D_2 \subseteq \dots,\ \text{а также}\ D_1 \cup D_2 \cup \dots = D$$

Тогда последовательность $\{D_n\}$ называется *исчерпанием* множества D, а само множество D называется *пределом* возрастающей последовательности $\{D_n\}$.

Теорема. Если D – жорданово, то $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu(D_n) = \mu(D)$

Доказательство. Последовательность жордановых множеств $A_n = D \setminus D_n$ убывает и сходится к пустому множеству. ■

67. Дайте определение исчерпания множества D, допустимого для функции $f : D \to \mathbb{R}$

Пусть $f : D \to \mathbb{R}$

Исчерпанием $\{D_n\}$ называется допустимым для функции f, если $\forall$n f ограничена и интегрируема на D_n.

То есть может f не будет ограничена и ингерируема на всем D, но на каждом отдельном D_n она будет ограничена и интегрируема

68. Дайте определения понятиям: несобственный интеграл от функции f по множеству D; сходящийся несобственный интеграл; расходящийся несобственный интеграл; функция, интегрируемая на D в несобственном смысле.

Пусть $f : D \to \mathbb{R}$. Исчерпание $\{D_n\}$ множества D называем допустимым для функции f, если $\forall n$ f ограничена и интегрируема на D_n. Рассмотрим последовательность $\int\limits_{D_n} f(x)dx$. Если эта последовательность сходится и её предел не зависит от выбора допустимого исчерпания, то несобственный интеграл $\int\limits_{D} dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{D_n} f(x)dx \in \mathbb{R}$ называется сходящимся, а функцию f называем интегрируемой на D в несобственном смысле. Если предел бесконечен или для различных допустимых исчерпаний получаются разные значения предела, то несобственный интеграл называется расходящимся.

69. Что можно утверждать о несобственном интеграле по множеству D от функции, ограниченной и интегрируемой на D в обычном (собственном) смысле?

Если f - ограничена и интегрируема на жордановом множестве D, то $\int\limits_{D} f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{D_n} f(x)dx$.

70. Каким основным свойством обладает несобственный интеграл от неотрицательной функции?

Если $f : D \to [0; +\infty)$, т.е. $f \geqslant 0$, то предел $\lim \int\limits_{D_n} f(x)dx$ - существует на $[0; +\infty]$ и не зависит от выбора исчерпания. Следовательно, несобственный интеграл $\int\limits_{D} f(x)dx$ существует.

71. Что можно утверждать о несобственном интеграле от функции, если известно, что несобственный интеграл от ее модуля расходится?

Если для некоторого исчерпания множества D, допустимого для f, $\int\limits_{D_n} |f(x)|dx \to \infty$, то несобственный интеграл $\int\limits_{D} f(x)dx$ не может быть сходящимся.

72. Каково основное различие между общей теорией несобственного (кратного) интеграла и соответствующей теорией, принятой в одномерном случае? В чем причина этого различия?

Важнейшим отличием данного понятия несобственного интеграла от его простейшего одномерного аналога состоит в том, что несобственный интеграл, определяемый через исчерпания множества, не может оказаться сходящимся условно.

Пусть при некотором допустимом исчерпании $\{D_n\}$

$$\int\limits_{D_n} |f(x)|dx \to \infty.$$

Покажем, что

$$\int\limits_{D} f(x)dx$$

не может быть сходящимся.

Введём положительную и отрицательную части функции f

$$f^+(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x)) \geqslant 0,\ f^-(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x)) \geqslant 0$$

Тогда

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x),\ |f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$$

73. Сформулируйте мажорантный признак сравнения для несобственного кратного интеграла.

Пусть $g : D \to [0; +\infty)$ - такая, что для любое исчерпание множества D, допустимое для f, будет допустимым для g и $|f(x)| \leqslant g(x) \forall x \in D$. Тогда из сходимости $\int\limits_D g(x)dx \implies$ сходимость $\int\limits_D |f(x)|dx$ и $\int\limits_D f(x)dx$.

74. При каких значениях параметра p > 0 сходятся несобственные интегралы $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^p}$, $\iint\limits_{x^2+y^2\geqslant 1} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^p}$

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^p}$$

Перейдем к полярным координатам (см. вопрос 44)

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r \cdot \frac{dr}{r^{2p}} = 2\pi \cdot \int\limits_0^1 \frac{dr}{r^{2p-1}}$$

сходится при p < 1 к значению $\frac{\pi}{1-p}$

$$\iint\limits_{x^2+y^2\geqslant 1} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^p}$$

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_1^{+\infty} r \cdot \frac{dr}{r^{2p}} = 2\pi \cdot \int\limits_1^{+\infty} \frac{dr}{r^{2p-1}}$$

сходится при p > 1 к значению $\frac{\pi}{p-1}$

75.