Introdução à Análise de dados em FAE **(Data: 20/10/2020)**

Estatística Básica 1

Professores: Sandro Fonseca, Sheila Mara da Silva, Eliza Melo *Name:* Ana Maria Garcia Trzeciak

Exercícios de Estatística Basica - 1

Exercício 1: Propagação de erros para diferentes funções

Seja u uma função de duas variáveis, no caso geral: $u = f(x, y)$. Ela pode ser linearizada por uma aproximação de primeira ordem pela expansão em Série de Taylor.

$$u \cong f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_i - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y_i - y_0) \tag{0.1}$$

Para a propagação de erros, o primeiro termo não contribui já que é uma constante. Sendo assim temos:

$$\sigma_u^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_i - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y_i - y_0) \right)^2 \tag{0.2}$$

$$\sigma_u^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_0)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_0)^2 + 2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_0)(y_i - y_0) \tag{0.3}$$

Portanto:

$$\sigma_u^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + 2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\sigma_{xy} \tag{0.4}$$

onde identificamos:

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - x_0)^2}{n} \tag{0.5}$$

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - y_0)^2}{n} \tag{0.6}$$

Podemos usar $\sigma_{\bar{x}} = \sigma_x/\sqrt{n}$ e escrever:

$$\sigma_{\bar{u}}^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 |_{(\bar{x},\bar{y})}\sigma_{\bar{x}}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 |_{(\bar{x},\bar{y})}\sigma_{\bar{y}}^2 + \frac{2}{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)|_{(\bar{x},\bar{y})}\sigma_{xy} \tag{0.7}$$

Exercício 2: Propagação de erros para diferentes funções

(i) Caso Adição/Subtração: $u = x \pm y$

Podemos utilizar o resultado mostrado na equação (0.7) para calcular a propagação de erros.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 1 \tag{0.8}$$

E podemos usar o coeficiente de correlação r.

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \longrightarrow \sigma_{xy} = r\sigma_x\sigma_y = nr\sigma_{\bar{x}}\sigma_{\bar{y}} \tag{0.9}$$

Portanto:

$$\sigma_{\bar{u}}^2 = \sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2 + 2r\sigma_{\bar{x}}\sigma_{\bar{y}} \tag{0.10}$$

(ii) Caso multiplicação/divisão: $u = xy$ **ou** $u = x/y$

Vou demonstrar o caso multiplicativo, a razão entre as grandezas segue a mesma linha de raciocínio.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x \tag{0.11}$$

Sendo assim, temos:

$$\sigma_{\bar{u}}^2 = y^2\sigma_{\bar{x}}^2 + x^2\sigma_{\bar{y}}^2 + 2rxy\sigma_{\bar{x}}\sigma_{\bar{y}} \tag{0.12}$$

Multiplicando e divindo pelo módulo da função temos:

$$\frac{\sigma_{\bar{u}}^2}{|u|} = \left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{y}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{x}\right)^2 + 2r\frac{\sigma_{\bar{x}}}{x}\frac{\sigma_{\bar{y}}}{y} \tag{0.13}$$

Para o caso do quociente, a equação fica:

$$\frac{\sigma_{\bar{u}}^2}{|u|} = \left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{y}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{x}\right)^2 - 2r\frac{\sigma_{\bar{x}}}{x}\frac{\sigma_{\bar{y}}}{y} \tag{0.14}$$

Exercício 4: Combinação de massa de partículas

OBS: não fiz este exercício por que não entendi o propósito. No PDG mostra apenas um valor de massa para cada partícula, como vou combinar os resultados da massa se só tenho um valor? Realmente não entendi, e depois ficou tarde para tirar a dúvida.

Exercício 6: Ajuste de Função

Método dos Mínimos Quadrados: Como determinar a reta de ajuste, $y = ax + b$, caracterizada pelos parâmetros a e b, que melhor se ajuste a conjunto de medidas (x_i, y_i) obtidas em N medições das grandezas x e y.

O método dos mínimos quadrados consiste em minimizar o resíduo médio quadrático das medidas da grandeza y em relação a reta a estimar. Por esse procedimento se determinam os parâmetros a e b que melhor estimam a função de ajuste.

Vamos supor que queremos determinar os parâmetros a e b da uma reta geral dada por $y = ax + b$. Devemos estudar a condição de mínimo da função de duas variáveis:

$$R(a,b) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}[y_k - f(x_k; a, b)]^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}[y_k - (ax_k + b)]^2 \tag{0.15}$$

As condições para que se tenha um mínimo para R para determinados valores dos parâmetros a e b são:

$$\frac{\partial R}{\partial a} = 0; \quad \frac{\partial R}{\partial b} = 0 \tag{0.16}$$

e

$$\frac{\partial^2 R}{\partial a^2}\frac{\partial^2 R}{\partial b^2} - \left[\frac{\partial^2 R}{\partial a \partial b}\right]^2 \neq 0; \quad \frac{\partial^2 R}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial b^2} > \sqrt{\left[\frac{\partial^2 R}{\partial a^2} - \frac{\partial^2 R}{\partial b^2}\right]^2 + 4\left[\frac{\partial^2 R}{\partial a \partial b}\right]^2} > 0 \tag{0.17}$$

Do primeiro par de condições (0.16) temos:

$$\frac{\partial R}{\partial a} = -\frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k(y_k - ax_k - b) = 0 \tag{0.18}$$

$$\frac{\partial R}{\partial b} = -\frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N}(y_k - ax_k - b) = 0 \tag{0.19}$$

De (0.18):

$$\overline{xy} - a\overline{x^2} - b\overline{x} = 0 \longrightarrow a\overline{x^2} + b\overline{x} = \overline{xy} \tag{0.20}$$

De (0.19):

$$\overline{y} - a\overline{x} - b = 0 \longrightarrow a\overline{x} + b = \overline{y} \tag{0.21}$$

As equações (0.20) e (0.21) formam um sistema de equações que pode ser facilmente resolvido para obter:

$$a = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \quad e \quad b = \overline{y} - a\overline{x} \tag{0.22}$$

Note que podemos simplificar a forma de a. Seja a variância dada por $\sigma_x^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2$ e a covariância dada por $\sigma_{xy} = \overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}$, temos:

$$a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \tag{0.23}$$

Podemos utilizar o coeficiente de correlação r dado em (0.9) e escrever a forma final de a em termos dos parâmetros de dispersão:

$$a = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} \tag{0.24}$$

O outro par de condições dado pelas equações (0.17) confirma que o par (a,b) dado por (0.22) se trata de mínimo para a função $R(a,b)$.

Podemos calcular agora a incerteza nos parâmetros a e b. A incerteza na medida de y é dada por:

$$\varepsilon_y = \sqrt{\frac{1}{N-2}\sum_{k=1}^{N}(y_k - ax_k - b)^2} \tag{0.25}$$

A incerteza no parâmetro a é dada por:

$$\sigma_a^2 = \sum_i \left(\frac{\partial a}{\partial y_i}\right)^2 \sigma_{y_i}^2 \tag{0.26}$$

$$\sigma_a^2 = \sum_i \left(\frac{1}{\sigma_x^2 N}(x_i - \overline{x})\right)^2 \varepsilon_y^2 = \frac{\varepsilon_y^2}{(\sigma_x^2 N)^2}\sum_i (x_i - \overline{x})^2 \tag{0.27}$$

$$\sigma_a^2 = \frac{\varepsilon_y^2}{(\sigma_x^2)^2 N}\sigma_x^2 \longrightarrow \sigma_a = \frac{1}{\sigma_x}\frac{\varepsilon_y}{\sqrt{N}} \tag{0.28}$$

A incerteza no parâmetro b é dada por:

$$\sigma_b^2 = \sum_i \left(\frac{\partial b}{\partial y_i}\right)^2 \sigma_{y_i}^2 + \left(\frac{\partial b}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 \tag{0.29}$$

$$\sigma_b^2 = \sum_i \left(\frac{1}{N}\right)^2 \varepsilon_y^2 + (\overline{x})^2\sigma_a^2 = \frac{1}{N}(\sigma_x\sqrt{N}\sigma_a)^2 + (\overline{x})^2\sigma_a^2 \tag{0.30}$$

$$\sigma_b^2 = \sigma_a^2(\sigma_x^2 + (\overline{x})^2) = \overline{x^2}\sigma_a^2 \tag{0.31}$$

$$\therefore \sigma_b = \sigma_a\sqrt{\overline{x^2}} \tag{0.32}$$