Introdução à Análise de dados em FAE **(Data: 08/12/2020)**

AULA 8: Cinemática das Colisões

Professores: Sandro Fonseca, Sheila Mara da Silva, Eliza Melo *Name:* Ana Maria Garcia Trzeciak

Os arquivos usados com a descrição completa do código estão no meu github: https://github.com/AnaTrzeciak/Curso-FAE.git

Em todos as resoluções irei usar unidades naturais de medida ($c = \hbar = 1$).
Exercícios referente à aula de Cinemática das Colisões em Altas Energias

Problema 0:

Quando um píon decai em dois fótons, qual a energia do fóton.

O processo de decaimento do píon é mostrado na figura 1.

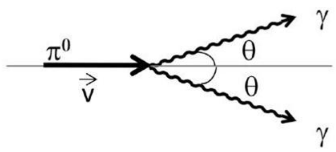

Figura 1: Decaimento do π^0 em dois fótons.

Os 4-momento do píon e dos fótons são dados por, respectivamente:

$$P^{\mu}_{\pi} = (E_{\pi}, \vec{p}_{\pi}) = (E_{\pi}, 0, 0, p_{\pi}) \tag{0.1}$$

$$P^{\mu}_{\gamma} = (E_{\gamma}, \vec{p}_{\gamma}) \tag{0.2}$$

Para cada fóton temos:

$$P^{\mu}_{\gamma_1} = (E_1, 0, p_{\gamma_1} \sin\theta_1, p_{\gamma_1} \cos\theta_1) \tag{0.3}$$

$$P^{\mu}_{\gamma_2} = (E_2, 0, p_{\gamma_2} \sin\theta_2, p_{\gamma_2} \cos\theta_2) \tag{0.4}$$

Podemos usar a conservação de 4-momento para calcular a energia final do fóton no referencial do laboratório.

$$P^{\mu}_{\pi} = P^{\mu}_{\gamma_1} + P^{\mu}_{\gamma_2} \longrightarrow (P^{\mu}_{\gamma_2})^2 = (P^{\mu}_{\pi} - P^{\mu}_{\gamma_1})^2 \tag{0.5}$$

Usando $P^{\mu}P_{\mu} = m^2$, temos:

$$0 = m^2_{\pi} - 2(E_{\pi}E_{\gamma_1} - p_{\pi}p_{\gamma_1}\cos\theta_1) \tag{0.6}$$

O momento do fóton pode ser escrito como $p_{\gamma_1} = E_{\gamma_1}$, assim:

$$m^2_{\pi} = 2E_{\gamma_1}(E_{\pi} - p_{\pi}\cos\theta_1) \tag{0.7}$$

Colocando E_{π} em evidência e usando $\beta = \vec{p}/E$ temos:

$$m_\pi^2 = 2E_{\gamma_1}E_\pi(1-\beta\cos\theta_1) \tag{0.8}$$

Também podemos usar $\gamma = E/m$, que é o fator de Lorentz relativístico, sendo assim podemos escrever o resultado final para a energia do fóton como:

$$E_{\gamma_1} = \frac{m_\pi}{2\gamma(1-\beta\cos\theta_1)} \tag{0.9}$$

Essa equação relaciona a energia e o ângulo de emissão do primeiro fóton.

Problema 1: Energia total da colisão no sistema do laboratório (LAB)

Prove a equação abaixo:

$$E_T = \sqrt{s} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1^{lab}m_2}$$

Vamos considerar o referencial do laboratório, onde a partícula incidente esta em movimento em direção ao alvo, em repouso. O esquema do processo é mostrado na figura 2.

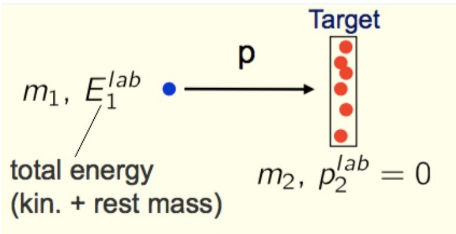

Figura 2: Espalhamento de dois corpos no referencial do laboratório.

Os 4-momentum das partículas são:

$$P_1^\mu = (E_1^{lab}, \vec{p}_1) = (E_{lab}, 0, 0, p_1) \tag{0.10}$$

$$P_2^\mu = (E_2, \vec{p}_\gamma) = (m_2, 0, 0, 0) \tag{0.11}$$

A energia total é dada por:

$$E_T = (P_1^\mu + P_2^\mu)^2 = (P_1^\mu)^2 + (P_2^\mu)^2 + 2P_1^\mu \cdot P_2^\mu \tag{0.12}$$

$$E_T = m_1^2 + m_2^2 + 2(E_1^{lab}m_2 - \vec{p_1}\cdot\vec{p_2}) \tag{0.13}$$

Como o alvo está em repouso $\vec{p_1}\cdot\vec{p_2} = 0$, sendo assim temos, a energia total da colisão no referencial do laboratório:

$$E_T = \sqrt{s} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1^{lab}m_2} \tag{0.14}$$

Onde s é a variável de Mandelstam dada por $s = (P_A^\mu + P_B^\mu)^2$.

Problema 2:

Considerando $E_1^{lab} \gg m_1 m_2$, mostre $E_T \approx \sqrt{s} \approx \sqrt{2E_1^{lab} m_2}$.

Usando esta aproximação na equação (0.14), temos que os termos m_1^2 e m_2^2 sao desprezíveis dentro da raiz, sendo assim temos:

$$E_T \approx \sqrt{s} \approx \sqrt{2E_1^{lab} m_2} \tag{0.15}$$

Problema 3: Energia total da colisão no sistema de centro de massa.

Prove a equação abaixo:

$$E_T = \sqrt{s} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2(1 - \beta_1\beta_2 \cos\theta)}$$

Vamos considerar o referencial do centro de massa, onde as duas partículas incidentes estão em movimento. O esquema do processo é mostrado na figura 3.

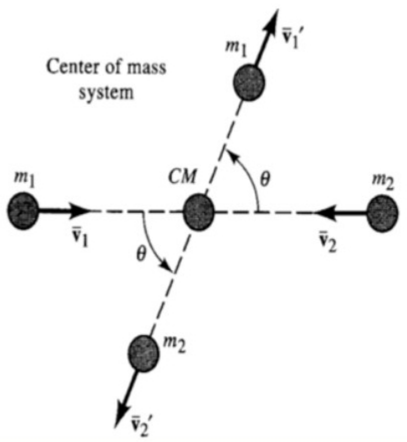

Figura 3: Espalhamento de dois corpos no referencial do centro de massa.

Os 4-momentum das partículas incidentes são dados por:

$$P_1^\mu = (E_1, \vec{p}_1) = (E_{lab}, 0, 0, p_1) \tag{0.16}$$
$$P_2^\mu = (E_2, \vec{p}_2) = (m_2, 0, 0, p_2) \tag{0.17}$$

Sendo assim temos:

$$s = (P_1^\mu)^2 + (P_2^\mu)^2 + 2P_1^\mu \cdot P_2^\mu \tag{0.18}$$

$$s = m_1^2 + m_2^2 + 2(E_1E_2 - \vec{p_1} \cdot \vec{p_2}) \tag{0.19}$$

$$s = m_1^2 + m_2^2 + 2(E_1E_2 - \vec{p_1}\vec{p_2}\cos\theta) \tag{0.20}$$

onde θ e o ângulo entre as partículas incidentes. Colocando E_1E_2 em evidência e usando $\beta = \vec{p}/E$ temos a energia total da colisão no centro de massa:

$$E_T = \sqrt{s} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2(1 - \beta_1\beta_2\cos\theta)} \tag{0.21}$$

Problema 4:

Considerando $\vec{p_1} = -\vec{p_2}$ e $m_1 = m_2$, mostre $E_T = \sqrt{2E_1}$.

Se fizermos essa aproximação temos uma restrição do tipo *on mass-shell*, onde $E_1 = E_2$. Substituindo essas condições na equação (0.21) temos:

$$E_T = \sqrt{s} = \sqrt{2m_1^2 + 2E_1^2\left(1 + \frac{\vec{p_1}^{\,2}}{E_1^2}\right)} \tag{0.22}$$

onde foi usado $\cos\theta = 1$.

$$E_T = \sqrt{s} = \sqrt{2m_1^2 + 2p_1^2 + 2E_1^2} = \sqrt{4E_1^2} \tag{0.23}$$

Portando, como queríamos demonstrar:

$$E_T = \sqrt{s} = 2E_1 \tag{0.24}$$

Problema 5

Um feixe de prótons com momentum de 100 GeV atinge um alvo fixo de hidrogênio.
(a) Qual é a energia do centro de massa para essa reação?

Como é um experimento de alvo fixo, vamos usar a equação (0.15).O alvo é composto por prótons, então vamos usar a massa do próton $m_p = 938.27$ MeV, substituindo esses valores temos:

$$\sqrt{s} = \sqrt{2 * 100 \times 10^9 * 938.27 \times 10^6} = 1.370 \times 10^{10} \tag{0.25}$$

Portanto:

$$\sqrt{s} \simeq 13.70\text{GeV} \tag{0.26}$$

(b) Qual seria a energia do feixe necessária para atingir a mesma energia do LHC?

O LHC é um colisor de próton-próton. Para atingir a mesma energia dada na equação (0.26), o feixe precisar ter aproximadamente 7.0 GeV de energia.

Problema 5a:

Encontre a energia de centro de massa para o experimento de alvo fixo e um colisor de partículas cujo feixe de prótons tem um energia de 3.5 TeV.

- Alvo Fixo

Utilizando a equação (0.15), temos:

$$\sqrt{s} \simeq \sqrt{2E_1^{lab} m_2} \simeq \sqrt{2 * 3.5 \times 10^{12} * 938.27 \times 10^6} \simeq 8.10 \times 10^{10} \tag{0.27}$$

$$\therefore \sqrt{s} \simeq 81.10 \text{GeV} \tag{0.28}$$

- Colisor de feixes

Vamos utilizar a equação (0.24):

$$\sqrt{s} = 2E_1 = 2 * 3.5 \times 10^{12} \therefore \sqrt{s} = 7 \text{TeV} \tag{0.29}$$

Problema 6: Variáveis de Mandelstam

Em espalhamento elástico do tipo $A + A \longrightarrow A + A$, quais as variáveis de Mandelstam?

Vou nomear a reação como $1 + 2 \longrightarrow 3 + 4$.

Vamos considerar o referencial do centro de massa, onde $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$. As partículas dos estados iniciais e finais são idênticas, e portanto possui mesma massa m. Inicialmente temos a condição $E_1 = E_2 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$.

- s-chanel: $s = (P_1^\mu + P_2^2)^2$

$$s = 2m^2 + 2(E_1^2 + \vec{p}_1^2) = 2m^2 + 2\vec{p}_1^2 + 2m^2 + 2\vec{p}_1^2 \tag{0.30}$$

Portanto, eliminando os subíndices temos:

$$s = 4(\vec{p}^2 + m^2) \tag{0.31}$$

- t-chanel: $t = (P_1^\mu - P_3^2)^2$

$$t = 2m^2 - 2(E_1 E_3 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_3) = 2m^2 - 2E_1^2 - 2p^2 \cos\theta \tag{0.32}$$

Onde usamos o fato de que a energia E_1 e E_3 são iguais, sendo assim temos:

$$t = 2\vec{p}^2 - 2p^2 \cos\theta \longrightarrow t = -2\vec{p}^2(1 - \cos\theta) \tag{0.33}$$

- u-chanel: $t = (P_1^\mu - P_4^2)^2$

$$u = 2m^2 - 2(E_1 E_4 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_4) = 2m^2 - 2E_1^2 + 2p^2 \cos\theta \tag{0.34}$$

Portanto:

$$u = -2\vec{p}^2(1 + \cos\theta) \tag{0.35}$$

Problema 7:

Prove a relação $s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + M_1^2 + M_2^2$

$$s + t + u = (P_1^\mu + P_2^2)^2 + (P_1^\mu - P_3^2)^2 + (P_1^\mu - P_4^2)^2 \tag{0.36}$$

$$s + t + u = P_1^2 + P_2^2 + 2P_1 \cdot P_2 + P_1^2 + P_3^2 - 2P_1 \cdot P_3 + P_1^2 + P_4^2 - 2P_1 \cdot P_4 \tag{0.37}$$

As massas das partículas 3 e 4 são, respectivamente M_1 e M_2, sendo assim temos:

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + M_1^2 + M_2^2 + 2P_1 \cdot (P_1 + P_2 - P_3 - P_4) \tag{0.38}$$

Da conservação de energia-momento $P_1 + P_2 - P_3 - P_4 = 0$, temos o resultado final:

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + M_1^2 + M_2^2 \tag{0.39}$$

Problema 8b:

Mostre em detalhes que o decaimento em dois corpos pode ser escrito por:

$$E_1 = \frac{M^2 - m_2^2 + m_1^2}{2M}, \quad |\vec{p}_1| = |\vec{p}_2|$$

O esquema das variáveis do processo é mostrado na figura 4.

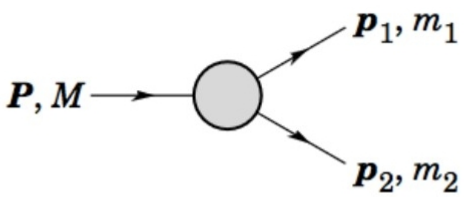

Figura 4: Definições de variáveis para decaimento em dois corpos.

Vamos utilizar a conservação de 4-momentum.

$$P_M^\mu = P_1^\mu + P_2^\mu \longrightarrow P_2^\mu = P_M^\mu - P_1^\mu \tag{0.40}$$

Elevando ao quadrado de ambos os lados:

$$(P_2^\mu)^2 = (P_M^\mu)^2 + (P_1^\mu)^2 - 2P_M^\mu \cdot P_1^\mu \tag{0.41}$$

Resolvendo:

$$m_2^2 = M^2 + m_1^2 - 2(E_M E_1 - \vec{p} \cdot \vec{p}_1) \tag{0.42}$$

A partícula inicial esta em repouso, então $\vec{p} = 0$, e logo $E_M = M$, portando o resultado final é:

$$E_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M} \tag{0.43}$$

Vamos encontrar agora uma relação para os momentos das particulas 1 e 2.

$$\vec{p}_1^2 = E_1^2 - m_1^2 = \left(\frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M}\right)^2 - m_1^2 \tag{0.44}$$

Podemos escrever como:

$$\vec{p}_1^2 = \frac{(M^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 - 4M^2 m_1^2}{4M^2} \tag{0.45}$$

Reorganizando os termos, temos:

$$\vec{p}_1^2 = \frac{M^4 + m_1^4 + m_2^4 + 2M^2 m_1^2 - 2M^2 m_2^2 - 2m_1^2 m_2^2 - 4M m_1^2}{4M^2} \tag{0.46}$$

Sendo assim temos:

$$|\vec{p}_1| = \frac{1}{2M}\sqrt{M^4 + m_1^4 + m_2^4 + 2M^2 m_1^2 - 2M^2 m_2^2 - 2m_1^2 m_2^2 - 4M m_1^2} \tag{0.47}$$

E se fizermos o mesmo procedimento para a partícula 2 vamos obter o mesmo resultado, sendo assim $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2|$.

Problema 9:

Determine a energia e momentum para o seguinte decaimento de dois corpos: $\pi^+ \longrightarrow \mu^+ \nu_\mu$.

- $m_\pi = 139.57$ MeV
- $m_\mu = 105.66$ MeV
- O neutrino não possui massa para este exercício.

Vamos utilizar o resultado encontrado na questão anterior. Da equação (0.43):

$$E_\mu = \frac{(139,57)^2 + (105.66)^2}{2 * 139.57} = 109.8\text{MeV} \tag{0.48}$$

E o momento do múon pode ser calculado pela seguinte relação:

$$\vec{p}_\mu = E_\mu^2 - m_\mu^2 \simeq 892.01\text{MeV} \tag{0.49}$$

Problema 11: Massa Invariante

Prove a relação abaixo. Onde M, é a massa invariante.

$$M = \sqrt{\left(\sum E_i\right)^2 - \left(\sum \vec{p}_i\right)^2}$$

A palavra "massa"na maioria das vezes é usada para se referir à quantidade que é proporcional à inércia da partícula quando ela está em repouso. Quando uma partícula decai e, portanto, da origem a outras particulas, sua massa antes do decaimento pode ser calculada a partir das energias e momentos dos produtos do decaimento. O valor inferido da massa é independente do referencial em que as energias e os momentos são medidos, de forma que a massa é denominada "invariante". O conceito é frequentemente generalizado, de modo que para qualquer conjunto de partículas (por exemplo, dois léptons emergindo de uma colisão), pode-se aplicar as mesmas fórmulas para obter uma "massa invariante"(também chamada de "massa efetiva") do sistema.

A massa invariante de uma partícula é dada pela equação:

$$m^2 = E^2 - ||\vec{p}||^2 \tag{0.50}$$

Esta massa é invariante para qualquer referencial. Uma vez que a massa invariante é determinada a partir de quantidades que são conservadas durante um decaimento, a massa invariante calculada usando a energia e o momento dos produtos de decaimento de uma única partícula é igual à massa da partícula que decaiu. A massa de um sistema de partículas pode ser calculada a partir da fórmula geral:

$$M = \sqrt{\left(\sum E_i\right)^2 - \left(\sum \vec{p}_i\right)^2} \tag{0.51}$$