Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciência

Faculdade de Engenharia

Ana Waldila de Queiroz Ramiro Reis

Modelagem Numérica de Seções de Concreto Armado

Rio de Janeiro

2017

Ana Waldila de Queiroz Ramiro Reis

Modelagem Numérica de Seções de Concreto Armado

Trabalho de conclusão de curso apresentado como requisito para obtenção do título de Engenheiro Civil, ao Programa de graduação em Engenharia Civil, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Estruturas.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Bird Burgos

Rio de Janeiro

2017

CATALOGAÇÃO NA FONTE

UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

R375 Reis, Ana Waldila de Queiroz Ramiro.
Modelagem numérica de seções de concreto armado / Ana Waldila de Queiroz Ramiro Reis – 2017.
169f.

Orientador: Rodrigo Bird Burgos.
Projeto final (Graduação) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia.

1. Engenharia Civil. 2. Concreto armado. 3. Análise numérica. 4. Concreto - Resistencia a compressão. 5. Resistência à tração. I. Burgos, Rodrigo Bird. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. III. Título.

CDU 624

Ana Waldila de Queiroz Ramiro Reis

Modelagem Numérica de Seções de Concreto Armado

Trabalho de conclusão de curso apresentado como requisito para obtenção do título de Engenheiro Civil, ao Programa de graduação em Engenharia Civil, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Estruturas.

Aprovado em 23 de março de 2017.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Rodrigo Bird Burgos (Orientador)

Faculdade de Engenharia – UERJ

Profa. Dra. Maria Elizabeth da Nóbrega Tavares

Faculdade de Engenharia – UERJ

Profa. Dra. Maria Fernanda Figueiredo de Oliveira

Faculdade de Engenharia – UERJ

Rio de Janeiro

2017

AGRADECIMENTOS

Ao Senhor Deus por me conceder inteligência e sabedoria para prosseguir a cada dia nessa estrada que chamamos de vida, passando e ultrapassando pelas dificuldades.

Aos meus pais, Nilson e Márcia por estarem sempre ao meu lado, me amparando e me auxiliando em todos os momentos, com palavras de carinho e conforto.

Ao meu padrinho, José Luiz, pelo apoio nessa jornada e pela colaboração em material didático para meu aprendizado.

Ao meu namorado, Fabricio Santoro, que sempre me apoiou, em todas as circunstâncias, me abraçava e me dizia palavras de fé, incentivo e esperança quando eu precisava.

Ao meu amigo Agnaldo Primo, por estar sempre presente, me ouvindo e me dando boas palavras, além de toda a sua ajuda quanto as minhas dúvidas de programação.

Aos meus amigos da faculdade, Augusto Cezar, Mateus Moreira e Fernanda Mattos. Sempre presentes e dispostos a sentarem comigo para conversas e esclarecimentos de vida e da faculdade. Também à minha amiga Lillian Nascimento, que desde o meu primeiro período da UERJ esteve ao meu lado, me apoiando, sendo sempre amiga em todos os momentos.

Aos meus orientadores, Margareth Magalhães e Rodrigo Burgos, pela paciência e ensinamentos, por estarem sempre dispostos a ouvirem o que tenho a dizer, pelas orientações, pelos conhecimentos que me passaram e pelas oportunidades que me concederam quanto ao meu desenvolvimento profissional.

À UERJ, por todo conhecimento e maturidade para eu me tornar uma pessoa melhor e uma profissional capacitada.

Elevo os meus olhos para os montes. Donde há de vir o meu socorro?

O meu socorro vem do Senhor, que fez o céu e a terra.

Salmos 121.1-2

RESUMO

REIS, Ana Waldila de Queiroz Ramiro. *Modelagem numérica de seções de concreto armado*. 2017. 169f. Projeto final (Graduação em Engenharia Civil) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

Estudos acerca do concreto armado avançam com o objetivo de usar tal material de forma mais eficiente e econômica em grandes construções. No dimensionamento de estruturas considera-se um fator de segurança exatamente para evitar possíveis colapsos dos elementos estruturais devido às incertezas nas solicitações e parâmetros de resistência. O concreto, por si só, possui a característica de maior resistência aos esforços de compressão do que de tração; desta forma, no dimensionamento muitas das vezes a região tracionada é desconsiderada. Por consequência, são obtidas estruturas mais robustas do que o necessário, levando a um maior gasto dos materiais. O presente trabalho tem por objetivo analisar matematicamente seções de concreto armado considerando a resistência total do concreto armado, ou seja, a contribuição dos esforços de tração e compressão deste material em todos os estádios de deformação. Além disso, com base nessas análises, é desenvolvido um *software* que apresenta a variação do comportamento de uma viga de concreto, apresentado suas deformações, altura de linha neutra, momento gerado e deflexão.

Palavras-chave: Análise numérica. Concreto Armado. Seções de Concreto Armado. Resistencia à Compressão. Resistencia à Tração.

ABSTRACT

REIS, Ana Waldila de Queiroz Ramiro. *Numerical modeling of reinforced concrete sections*. 2017. 169f. Undergraduate Project (Civil Engineering) - Faculty of Engineering, State University of Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

Recent studies on reinforced concrete advance with the objective of using such material more efficiently and economically in large constructions. In structural design, a safety factor is usually considered to avoid possible collapses of the structural elements due to the uncertainties in the load and resistance parameters. Concrete presents greater compressive strength than tensile strength; in this way, many times the region under tension is disregarded. As a consequence, the structures obtained are more robust than necessary, leading to unnecessary use of materials. The present work aims to analyze mathematically sections of reinforced concrete taking into account considering the total strength of the reinforced concrete, that is, the contribution of tensile and compression strengths of this material in all the stages of strain. Together, it presents a software developed to mathematically analyze the equilibrium stages of the cross section of the beam, providing the user with a table with all the information along the behavior of the beam, i. e. strains of concrete and steel, variation of the neutral line, resisting moment as well as deflection. In addition, the software is capable of generating Strain vs. Bending Moment and Deflection vs. Bending Moment curves.

Keywords: Numerical Analysis. Reinforced Concrete. Reinforced Concrete Sections. Compressive strength. Tensile strength.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

Simbologia Minúscula

a Constante auxiliar de cálculo

arctg Arco tangente

$\mathrm{a_{est.2}}$ Coeficiente utilizado para a fórmula de Bhaskara, no estádio 2 do concreto

$\mathrm{a_{est.3}}$ Coeficiente utilizado para a fórmula de Bhaskara, no estádio 3 do concreto

b Constante auxiliar de cálculo

$\mathrm{b_{est.2}}$ Coeficiente utilizado para fórmula de Bhaskara, no estádio 2 do concreto

$\mathrm{b_{est.3}}$ Coeficiente utilizado para a fórmula de Bhaskara, no estádio 3 do concreto

c Constante auxiliar de cálculo

$\mathrm{c_{est.2}}$ Coeficiente utilizado para a fórmula de Bhaskara, no estádio 2 do concreto

$\mathrm{c_{est.3}}$ Coeficiente utilizado para a fórmula de Bhaskara, no estádio 3 do concreto

d Altura útil

$\mathrm{d_a}$ Tamanho do agregado

$\mathrm{d_j}$ Altura com relação ao aço de compressão (j = 1) ou o de tração (j = 2)

$\mathrm{d'}$ Cobrimento

$\mathrm{f_{cd}}$ Resistência nominal de compressão do concreto

$\mathrm{f_{ck}}$ Resistência característica de compressão do concreto

$\mathrm{f_{tk}}$ Resistência característica de tração do concreto

$\mathrm{f_{yk}}$ Resistência característica de escoamento do aço

h Comprimento lateral da malha quadrada para análise de energia de fratura

$\mathrm{h_{ct}}$ Altura de concreto tracionado colaborante

i Número de intervalos para o cálculo do somatório do método de Simpson

$\mathrm{k_d}$ Linha neutra

$\mathrm{k_1}$ Constante de regularização para obter a resultante de compressão no concreto

$\mathrm{k_2}$ Fração da altura da linha neutra onde localiza-se a resultante de compressão do concreto

$\mathrm{k_3}$ Constante de regularização para obter a resultante de tração no concreto

$\mathrm{k_4}$ Fração da altura onde localiza-se a resultante de tração do concreto

m Subíndice referente às constantes k_1, k_2, k_3 e k_4

$\ln$ Logarítimo neperiano

n Variável dependente da resistência à compressão do concreto

q Constante auxiliar de cálculo

u Constante auxiliar de cálculo

x Constante auxiliar de cálculo, relacionado ao eixo x

y Constante auxiliar de cálculo, relacionada ao eixo y

z Constante auxiliar de cálculo, relacionada ao eixo z (tridimensional)

$\mathrm{w_c}$ Largura da zona de processo de fissura

Simbologia Maiúscula

A Constante auxiliar de cálculo

$\mathrm{A_{cm}}$ Área de concreto de compressão

$\mathrm{A_{sc}}$ Área de aço de compressão

$\mathrm{A_{sj}}$ Área de aço de compressão ou tração

$\mathrm{A_{st}}$ Área de aço de tração

$\mathrm{A_{tm}}$ Área de concreto de tração

ABNT Associação Brasileira de Normas Técnicas

B Constante auxiliar de cálculo

$\mathrm{B_b}$ Largura da seção de viga

$[\mathrm{C}]$ Matriz constitutiva em função das deformações triaxiais

C Constante auxiliar de cálculo

C_f Inclinação (tangente) da curva $\sigma_z - \varepsilon_f$

C_{ij} Coeficientes da matriz de rigidez

$C.G$ Centro de Gravidade

E_c Módulo de Young do concreto

E'_c Módulo de elasticidade do concreto corrigido pelo efeito de Poisson

E_{cs} Módulo secante do concreto

E_s Módulo de elasticidade do aço

E_t Módulo tangente do concreto

E'_t Módulo de elasticidade tangente do concreto corrigido pelo efeito de Poisson

F_{cm} Força do concreto de compressão

F_{sc} Força do aço de compressão

F_{sj} Força do aço de compressão (j = 1) ou tração (j = 2)

F_{st} Força do aço de tração

F_{tm} Força do concreto de tração

H Altura da seção de viga

L Vão correspondente da viga

M Momento fletor

M_s Momento estático

M_k Momento fletor característico da seção

$\overline{M}$ Distribuição de momento de flexão correspondente à uma carga unitária no sentido da máxima deflexão

NBR Norma Brasileira

P Força aplicada na seção

S Área abaixo da curva de tensão - deformação

W Trabalho realizado

Simbologia Grega

ΔE Variação de energia

ΔM_k Momento característico referente à resistência da armadura comprimida

Δx Comprimento dos intervalos de cálculo para o método de Simpson

B Ângulo correspondente ao módulo tangente do concreto

Δ Deflexão

$[\varepsilon]$ Matriz de deformação

ε_c Deformação variável atuante no concreto

ε_{CEN} Deformação do concreto na altura do centroide da área abaixo da curva

ε_{cm} Deformação de compressão do concreto (variável)

ε_{cp} Deformação máxima de compressão do concreto

ε_{c2} Deformação específica de encurtamento do concreto no início do patamar plástico (NBR 6118: 2014)

ε_{cu} Deformação específica de encurtamento do concreto na ruptura (NBR 6118: 2014)

ε_f Deformação adicional causada pela microfissuração

ε_{sj} Deformação do aço de compressão (j = 1) ou de tração (j = 2)

ε_{sc} Deformação do aço de compressão

ε_{st} Deformação do aço de tração

ε_{tf} Deformação final de tração do concreto, correspondente à tensão de tração zero

ε_{tm} Deformação de tração do concreto

ε_{tp} Deformação máxima de tração do concreto

ε_x Deformação do concreto no eixo x

ε_y Deformação do concreto no eixo y

ε_z Deformação do concreto no eixo z

Θ Constante auxiliar de cálculo

μ Parâmetro de fissuração

μ_k Coeficiente de cálculo do momento resistente característico

$[\sigma]$	Matriz de tensões
σ_c	Tensão atuante no concreto
σ_{cm}	Tensão de compressão atuante no concreto
σ_N	Tensão máxima nominal de flexão da área líquida
σ_{sc}	Tensão de compressão atuante no aço
σ_{sj}	Tensão no aço de compressão (j = 1) ou no de tração (j = 2)
σ_{st}	Tensão de tração atuante no aço
σ_{tm}	Tensão de tração atuante no concreto
σ_x	Tensão atuante no concreto no eixo x
σ_y	Tensão atuante no concreto no eixo y
σ_z	Tensão atuante no concreto no eixo z
N	Coeficiente de Poisson
$\mathcal{G}_f$	Energia consumida na formação das fissuras
δ	Deflexão
ς	Coeficiente adimensional
ω	Taxa de armadura
η	Relação entre módulo de elasticidade do aço e módulo de elasticidade do concreto

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

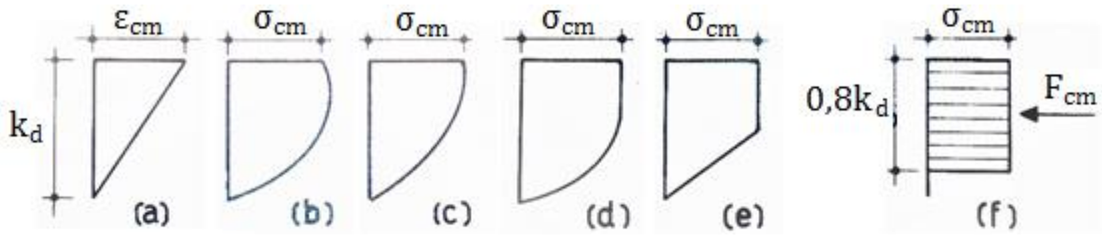
SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Segundo PFEIL (1969), o dimensionamento comumente de estruturas de concreto armado se dá quando determinadas condições são obedecidas. Concreto corresponde à um material frágil, onde considera-se que sua resistência é nula em regiões tracionadas. Tais regiões são determinadas a partir de uma linha, chamada neutra, onde suas deformações são efetivamente nulas. Na região comprimida, em solicitações de flexo-compressão, o concreto atinge a deformação máxima de 3,5‰. Com relação ao aço, defina-se o dimensionamento de forma que a tensão atuante na armadura seja menor que o escoamento real do material.

De acordo com BAZANT(1984), o comportamento das tensões do concreto corresponde a um diagrama na região de compressão da peça estrutural. Tal diagrama corresponde à variação de tensões conforme as deformações. Vários métodos foram desenvolvidos para modelagem do diagrama, onde este varia com o tipo de concreto e o tipo de carga aplicada, conforme afirma PFEIL (1969). Essas variações podem ser observadas na Figura 01 a seguir:

Figura 01 – Diagramas de tensão – deformação do concreto na compressão

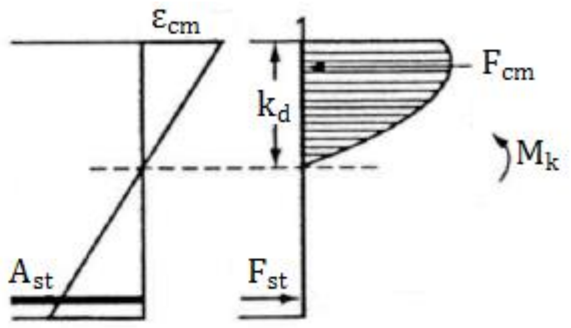


Fonte: PFEIL (1969) – Adaptado

A Figura 01 representa a variação das condições estruturais utilizadas para avaliar o comportamento do diagrama tensão – deformação do concreto de compressão. Para tais casos, observa-se altura da linha neutra (*x*) em relação à deformação do concreto de compressão (a), passando pelas variações curvas apresentadas pelo diagrama (b) e (c). Segue-se pelo diagrama parábola retângulo, utilizado pela NBR 6118: 2014, (d), seguindo pela redução à diagrama trapezoidal (e) até finalmente chegar no que é adotado atualmente pela teoria, diagrama retangular de tensões de compressão (f).

O que usualmente realiza-se em projetos é a desconsideração das tensões de tração do concreto, dimensionando a estrutura de acordo com as tensões de compressão, como afirma CHUST (2007) na Figura 02, e já apresentado por PFEIL (1969).

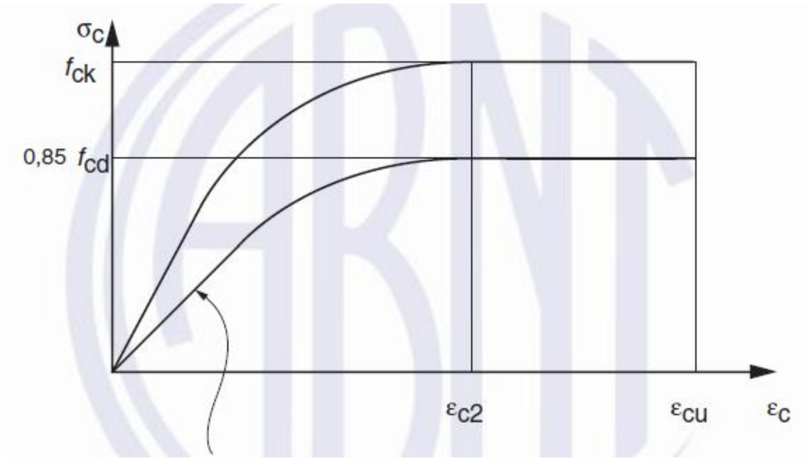
Figura 02 – Diagrama de tensões do concreto



Fonte: CHUST (2007) - Adaptado

O diagrama também é citado pela NBR 6118: 2014 em seu item 8.2.10.1, indicando a equação de tensão à compressão do concreto:

Figura 03 – Diagrama tensão-deformação parábola – retângulo do concreto



Fonte: NBR 6118: 2014

Onde a equação é dada por:

$$\sigma_c = 0{,}85 f_{cd}\left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}}\right)^n\right] \quad (1)$$

$$para\begin{cases} f_{ck} \leq 50\ MPa, onde\ n = 2 \\ f_{ck} > 50\ MPa, onde\ n = 1{,}4 + 23{,}4[(90 - f_{ck})/100]^4 \end{cases}$$

E as deformações de compressão do concreto, apresentadas pela Figura 03 são:

$$para\ concreto\ classe\ até\ C50 \begin{cases} \varepsilon_{c2} = 2‰ \\ \varepsilon_{cu} = 3{,}5‰ \end{cases}$$

$$para\ concreto\ classe\ C55\ até\ C90 \begin{cases} \varepsilon_{c2} = 2‰ + 0{,}085‰ \,.\, (f_{ck} - 50)^{0{,}53} \\ \varepsilon_{cu} = 2{,}6‰ + 35‰ \,.\, [(90 - f_{ck}\ ) \ /\ 100]^{4} \end{cases}$$

Para o caso em particular deste trabalho, é válido ressaltar que os concretos utilizados são de $f_{ck} \leq 50\ \mathrm{MPa}$, desta forma, como afirma a NBR 6118: 2014, item 8.2.10.1, $\varepsilon_{c2} = 2‰$ e $\varepsilon_{cu} = 3{,}5‰$

Observa-se nestas teorias que a desconsideração da região tracionada do concreto deve-se à sua baixa resistência a tal solicitação. Contudo, corresponde à uma resistência não nula.

Entretanto, analisando a região tracionada, como feito por BAZANT (1984), o diagrama de tensões mesmo é representado pelo crescimento linear das tensões até um ponto de pico, f_{tk}, onde ocorre o início do decréscimo das tensões. Ou seja, caracteriza-se de um material frágil que apresenta uma queda de tensão brusca em conjunto com a sua deformação. Caracteriza-se por um rompimento rápido, sem percepção de gradativa deformação.

Este rompimento é qualificado pelo aparecimento de fissuras ao longo do banzo tracionado da estrutura, que no caso deste trabalho é analisado para uma viga de seção retangular. À medida que o carregamento aumenta, as fissuras tendem a aumentar de forma a diminuir a área de concreto comprimido, ou seja, elevar a altura da linha neutra.

Neste fenômeno de propagação de fissuras, é conceituada com base na mecânica da fratura, onde estuda o comportamento de colapso da estrutura. Com base nisso, três parâmetros essenciais são considerados: energia de fratura, limite de força uniaxial e largura da zona de fissura. O primeiro corresponde à geração de um trabalho W na estrutura, manifestada em forma de carga pontual aplicada no meio do vão da viga. Este trabalho W ocasiona variação de energia, que gera o fluxo de energia necessário para a propagação das fissuras nas diversas seções solicitadas.

O limite de força uniaxial corresponde essencialmente à matriz de conformidade do concreto, cuja qual é diretamente dependente das deformações de

Poisson geradas nos 3 eixos cartesianos. Contudo, para o caso em específico desta análise, é considerado que a propagação das fissuras é perpendicular ao eixo *z*, com sua abertura no eixo *x*. Ou seja, tensões aplicadas ao eixo *y* são consideradas nulas.

Finalmente, a largura da zona de fratura corresponde a largura efetiva $\mathrm{w_c}$, onde as fissuras tendem a se propagar no concreto de forma uniforme. Esta largura $\mathrm{w_c}$, de acordo com pesquisas experimentais, depende essencialmente do tamanho do agregado graúdo utilizado na confecção do concreto.

No processo de aplicação de uma carga pontual, tensões são geradas nas seções solicitadas. Em um ensaio de flexo – compressão de uma viga de concreto armado, é possível obter a curvatura do comportamento de tensão – deformação da mesma. Dentre vários modelos numéricos sugeridos para determinar a equação de tal curva, o modelo de SAENZ (1969) é um dos mais conhecidos da literatura, apresentando uma relação linear por um polinômio do 2° como forma de descrever o comportamento da variação de tensões pelas suas deformações na região comprimida do concreto. O modelo de SAENZ (1969) torna-se adequado pela sua eficiência na aproximação à realidade da curva.

Com base nas equações de diagrama de tensão – deformação apresentadas por SAENZ (1969) para o concreto comprimido e o diagrama bilinear de concreto tracionado apresentado por BAZANT (1984), é possível determinar as equações de equilíbrio da seção, podendo-se encontrar a variação da linha neutra da seção e o momento máximo da mesma com base na variação da deformação de concreto comprimido. Para tais variações supracitadas, estão diretamente relacionadas aos estádios de fissuração do concreto.

A partir destes conceitos, a inspiração deste trabalho consiste em avaliar a contribuição do concreto de tração e desenvolver um *software* que, com base nos modelos matemáticos neste trabalho apresentados, apresentar a variação das deformações do concreto e do aço, altura da linha neutra, momento resistente gerado e a deflexão causada pela solicitação da carga pontual. Para que todas estas sejam devidamente calculadas, não utilizou os coeficientes de minoração de resistência dos materiais e majoração das solicitações, como preconiza a NBR 6118: 2014.

É válido ressaltar que na modelagem matemática e na programação do *software* foram utilizadas as premissas de aplicação de uma carga pontual no meio do vão de uma viga bi apoiada, sem balanços, gerando um diagrama de momento triangular. Deformações e solicitações como o peso próprio da estrutura são desconsiderados, já que deseja-se determinar o momento solicitante máximo da estrutura. Fenômenos como tensões cisalhantes são desconsideradas neste trabalho.

Ao fim, são geradas no *software* curvas de momento (kN.m) x deflexão (cm) referentes às vigas devidamente dimensionadas, comparando, portanto, os resultados apresentados pelo programa com o que a teoria apresenta.

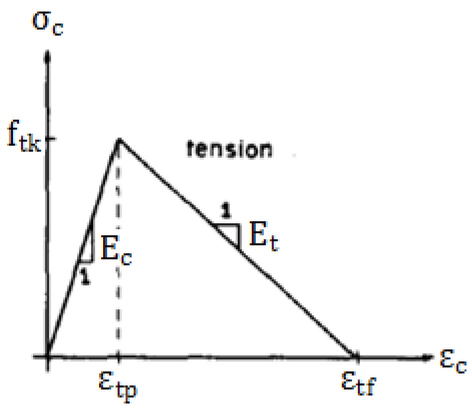
1. TENSÃO – DEFORMAÇÃO DO CONCRETO

1.1. Equações de tensão – deformação do concreto

Para a equação (1) apresentada, a NBR 6118:2014 indica que, para concretos de até 50 MPa, a equação da curva tensão – deformação pode ser aproximada por uma parábola retângulo. Em concretos de alto desempenho ($f_{ck} > 50\ \mathrm{MPa}$), a análise da variação da tensão conforme a deformação é diferente, levando-se em conta nos cálculos da determinação da equação da curva o f_{ck} previsto para o concreto confeccionado.

BAZANT (1984) determinou para um modelo de viga biapoiada com carga centrada, o máximo momento que esta pode resistir considerando os efeitos da tração no concreto. Nesse modelo adotou-se o diagrama bilinear para a resistência do concreto à tração, como apresentado na Figura 04.

Figura 04 – Diagrama de resistência do concreto quanto à tração



Fonte: BAZANT (1984) - Adaptado

O efeito da resistência de tração está diretamente relacionado com a compressão do concreto. Desta forma, determinar equações matemáticas com base no diagrama bilinear de tensão do concreto (Figura 04) possibilita automaticamente determinar a variação da altura da linha neutra e, juntamente com o diagrama tensão – deformação do concreto de compressão, calcular o momento máximo resistente pela viga.

Os cálculos de determinação da resistência máxima do concreto quanto ao momento são para análises de ensaios laboratoriais, ou seja, tempo de execução de ensaio é muito menor que o período que uma estrutura está exposta ao meio.

Para análises de longo prazo, os cálculos de resistências são parecidos, sendo que alguns detalhes devem ser considerados, como variação do Módulo de Young do concreto, retração e fluência do concreto, além da relaxação do aço. Todas essas variáveis são referentes às perdas lentas do sistema estrutural e dependem do tempo de submissão às cargas aplicadas. (VITTORIO, 2011)

Neste presente trabalho, a análise realizada é de somente aplicação contínua e breve de carga pontual no meio do vão, ou seja, verificações de perda de resistência ao longo do tempo são desconsideradas.

Para definir a resistência do concreto quanto à tração, a Figura 04 foi analisada primeiramente por SCANLON (1971), também utilizada por BAZANT (1984), subdividindo o diagrama em 3 regiões distintas:

- Para $\varepsilon_c \leq \varepsilon_{tp} \rightarrow \sigma_c = E_c\varepsilon_c$ (2)

Esta região corresponde ao intervalo de deformação do concreto (ε_c) de zero (sem deformações) até ε_{tp} (deformação máxima de tração).

Neste caso, como possui-se referência a uma equação da reta, dispõe-se de duas coordenadas para determiná-la: (0;0) e ($\varepsilon_{tp}; f_{tk}$). Nisso, tem-se que a equação corresponde à:

$$\sigma_c(\varepsilon_c) = \frac{f_{tk}}{\varepsilon_{tp}}\varepsilon_c$$

Pode-se escrever:

$$\sigma_c = E_c\varepsilon_c$$

- Para $\varepsilon_{tp} < \varepsilon_c < \varepsilon_{tf} \rightarrow \sigma_c = f_{tk} - \left(\varepsilon_c - \varepsilon_{tp}\right)(-E_t)$ (3)

Para deformações de concreto entre ε_{tp} e ε_{tf}, tem-se as coordenadas para a equação da reta correspondente ($\varepsilon_{tp}; f_{tk}$) e ($\varepsilon_{tf}; 0$).

Esta segunda região corresponde à queda linear de tensão resistente no concreto. Esta queda se inicia na tensão máxima de tração (f_{tk}), com sua deformação correspondente, até a tensão zero e sua máxima deformação (ε_{tf})

Considerando que a equação da reta é regida pela equação geral $y = ax + b$, e substituindo as coordenadas na equação citada, obtêm-se o sistema:

$$\begin{cases} a.\varepsilon_{tp} + b = f_{tk} \\ a.\varepsilon_{tf} + b = 0 \end{cases}$$

Onde determina-se que os coeficientes angular e linear valem, respectivamente:

$$a = \frac{f_{tk}}{\varepsilon_{tp} - \varepsilon_{tf}} \quad e \quad b = -\frac{\varepsilon_{tf} \cdot f_{tk}}{\varepsilon_{tp} - \varepsilon_{tf}}$$

Desta forma, tem-se:

$$y = \frac{f_{tk}}{\varepsilon_{tp} - \varepsilon_{tf}} x + \left(-\frac{\varepsilon_{tf} \cdot f_{tk}}{\varepsilon_{tp} - \varepsilon_{tf}} \right)$$

Ou ainda, sendo ε_c a coordenada *x* e σ_c a coordenada *y*, tem-se:

$$\sigma_c(\varepsilon_c) = \frac{f_{tk}}{\varepsilon_{tp} - \varepsilon_{tf}} \left(\varepsilon_c - \varepsilon_{tf}\right) \tag{4}$$

Com relação à E_t, pode-se determinar:

$$\frac{f_{tk}}{\varepsilon_{tp} - \varepsilon_{tf}} = E_t$$

Logo,

$$\sigma_c(\varepsilon_c) = E_t\left(\varepsilon_c - \varepsilon_{tf}\right)$$

Analisando o diagrama tensão – deformação de tração do concreto (Figura 04), pode-se afirmar que:

$$f_{tk} = E_t\left(\varepsilon_{tp} - \varepsilon_{tf}\right)$$

Desta forma:

$$f_{tk} = E_t.\varepsilon_{tp} - E_t.\varepsilon_{tf}$$

$$\varepsilon_{tf} = \varepsilon_{tp} - \frac{f_{tk}}{E_t}$$

Substituindo a expressão acima na equação (4), encontra-se:

$$\sigma_c(\varepsilon_c) = E_t \left[\varepsilon_c - \left(\varepsilon_{tp} - \frac{f_{tk}}{E_t} \right) \right]$$

$$\sigma_c(\varepsilon_c) = E_t\varepsilon_c - E_t\varepsilon_{tp} + f_{tk}$$

$$\sigma_c(\varepsilon_c) = f_{tk} - (\varepsilon_c - \varepsilon_{tp})(-E_t)$$

- Para $\varepsilon_{tf} < \varepsilon_c \rightarrow \sigma_c = 0$ (5)

De acordo com o diagrama apresentado na Figura 04, o concreto encontra-se totalmente fissurado a partir da deformação ε_{tf}. Desta forma, na parte da seção transversal onde as deformações ε_c são maiores que ε_{tf} as tensões são nulas.

Pela comprovação experimental de que o concreto é mais eficiente em compressão do que em tração, o dimensionamento de estruturas de concreto armado é comumente baseado somente em tensões de compressão no concreto. De acordo com a teoria, o método mais comum é a adoção do diagrama retangular de tensões, apresentados por PFEIL (1969), na Figura 01 (f).

BAZANT(1984) apresenta o comportamento de uma seção de concreto armado quando submetida a uma flexão simples, apresentado as equações de tensões – deformações e, atreladas, sua ruptura diretamente relacionada com a energia mecânica aplicada na estrutura.

Baseado nisto, verificou-se que a partir das equações (2) à (5) juntamente com a energia mecânica aplicada, é possível descrever uma relação entre o módulo de elasticidade do concreto (E_c) e o módulo tangente do concreto (E_t). Esta relação é diretamente referenciada ao tamanho do agregado graúdo utilizado na confecção do concreto.

1.2. Efeito de micro fissuração, micro deformação e fraturas no concreto

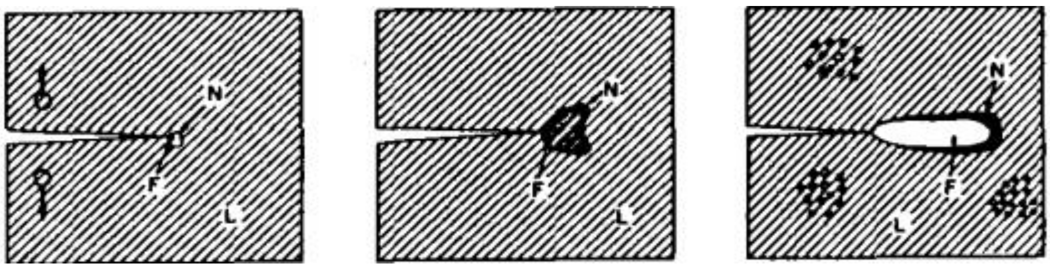
BAZANT (1983) descreveu essa relação entre E_c e E_t com base na teoria mecânica da fratura, aplicada à um material heterogêneo que possui um descontinuidade de tensões atuantes na seção, provenientes das deformações ocasionadas por micro fissuração. Desta forma, é possível realizar uma modelagem da estrutura na faixa de área fissurada, a partir da relação triaxial de tensões, utilizando-se a matriz de conformidade do material.

Na mecânica da fratura, sendo este sistema um material frágil (caso do concreto), o colapso se dá quando a tensão de tração do material é atingida, ocorrendo uma súbita queda de tensões no local. Esse processo de fraturamento só pode ser analisado minuciosamente quando a energia ali é calculada. Desta forma, a mecânica da fratura averigua o colapso da estrutura mediante a propagação de fissuras. (BORGES, 2002)

Para que esta análise seja realizada, são utilizadas essencialmente três parâmetros característicos dos materiais: energia de fratura, limite de força uniaxial, e largura da zona de fissura (zona de processo de fratura). Esses fatores foram determinados e reajustados a partir de ensaios testes realizados por BAZANT (1983), considerando 3 diferentes tamanhos de agregados graúdos, atendendo como aceitável para a aproximação à um material homogêneo na modelagem.

Esta zona de processo de fratura consiste em uma região (nódulo) formada à frente da propagação da fissura, onde inicia-se o processo das fendas, como observa-se na Figura 05 a seguir. Este efeito existe em materiais que possuem um alto grau de heterogeneidade, como é o caso em particular do concreto. Além disso, a formação de tais nódulos ocasiona uma redução considerável da rigidez de toda a estrutura. Isso resulta em uma descontinuidade das tensões no elemento estrutural. (BAZANT, 1982; KWAK *et al*, 1990)

Figura 05 – Zona do processo de fratura gerada no concreto



Fonte: BAZANT (1982)

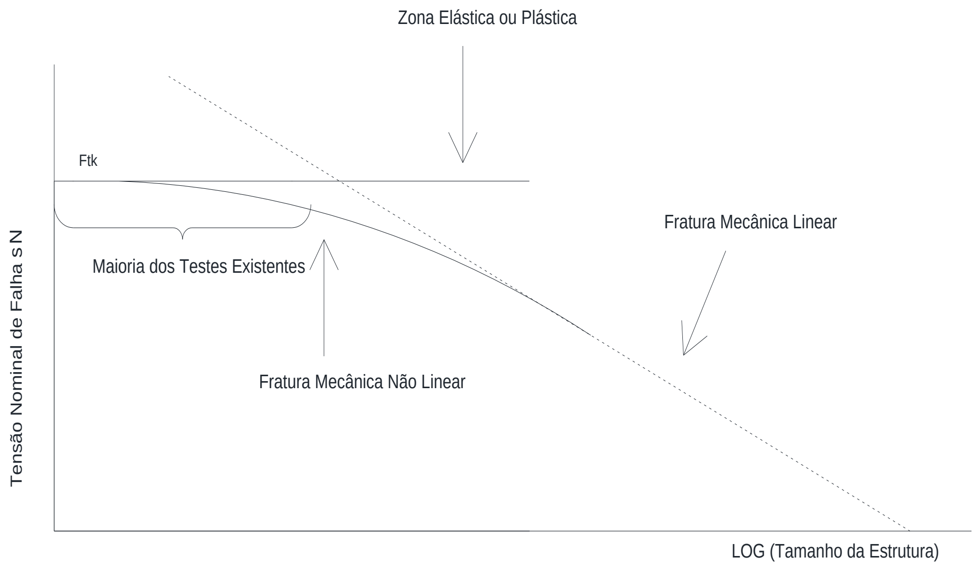
Contudo, essas considerações devem ser feitas separadamente para cada estrutura, conforme estudos realizados por WALSH (1979), onde determinou-se a seguinte proporcionalidade, com base na mecânica clássica:

$$\sigma_N \propto tamanho\ da\ estrutura^{-\frac{1}{2}}$$

Onde σ_N corresponde à tensão máxima nominal de flexão da área líquida. Ao realizar a plotagem da tensão σ_N com o logaritmo do tamanho da estrutura, encontra-se uma reta de declive igual a -1/2. Nas estruturas analisadas em laboratório, as retas provenientes da fratura mecânica e da deformação elástica se distinguem bem, apresentando uma transição clara de fratura não linear, de acordo com a Figura 06 a seguir. Contudo, extrapolando para estruturas de grande porte, a taxa de inclinação da reta na transição é menor, promovendo uma inclinação menor para a fratura linear mecânica (BAZANT, 1983; WALSH, 1979).

Ou seja, o tamanho da estrutura é o problema central na previsão das fissuras, pois o comportamento da propagação das fissuras em pequenas vigas é diferente quando comparados em estruturas maiores. Apesar disso, métodos foram desenvolvidos para se poder realizar a migração entre os resultados sem que ocorra erros matemáticos e físicos no sistema estrutural e nas previsões matemáticas, como por exemplo o Efeito Tamanho de Estruturas. (BAZANT, 1983; WALSH, 1979).

Figura 06 – Gráfico do efeito de falha de uma estrutura



Fonte: BAZANT (1983) - Adaptado

Observa-se na Figura 06 que existe uma transição entre a região de ruptura elástica (ou plástica, dependerá do material) para a fratura mecânica linear. A fratura mecânica não linear ocorre devido a heterogeneidade do material, fazendo que ocorra essa transição de forma longa na região adjacente à fissura. Esta zona é manifesta por conta da microfissuração progressiva do material, através do “amaciamento” das tensões, além de ser influenciada por conta do tamanho do agregado, já que as microfissuras percorrem as regiões de menores tensões (que se localiza nas proximidades do contato pasta de cimento - agregado), unindo-se e criando um nódulo, como foi apresentada na Figura 05. Além disso, este estado de microfissuração ocasiona uma expansão volumétrica nos estágios próximo à ruptura (BAZANT, 1983; PROENÇA, 1988).

Com isso, deve-se compreender que a análise de estruturas de grande porte é muito mais complexa que as de pequeno porte, já que se for plotado um gráfico tensão normal N pelo logaritmo neperiano do tamanho da estrutura, conforme apresentado na Figura 05, observa-se uma variação suave da mecânica linear para a não linear. Assim, estruturas menores, cujas são ensaiadas em laboratórios, fornecem valores mais consistentes e uma variação mais nítida.

Nesta propagação da fissura, utiliza-se o conceito de energia de fratura na fissura, onde considera-se um decaimento das tensões à medida que a microfissuração se propaga, ao contrário de pressupor que as tensões caem a zero no momento da fissura (BAZANT, 1983).

Para a realização da análise quanto à resistência do concreto armado, considera-se um material homogêneo, onde é realizada de forma clara a distinção entre microtensões, microdeformações e microfissurações. Isso é feito simplesmente para facilitar a análise, já que na teoria dos materiais não homogêneos, as tensões e deformações contínuas são calculadas a partir da média de micro tensões e micro deformações.

É válido ressaltar que vários fatores acabam influenciando o desenvolvimento das microfissuras na seção, já que as diferentes características dos agregados e da pasta de cimento, textura dos agregados, índice de vazios, relação água – aglomerante influenciam na mecânica global da estrutura, além de definir a baixa resistência à tração do concreto (PROENÇA, 1988).

A propagação da fissura dentro do concreto depende fundamentalmente do fluxo de energia ao qual está submetida, sendo este fluxo uma característica global da estrutura. Contudo, esta só ocorre quando uma fissura é inicializada (BAZANT, 1983; BAZANT *el al* 1983).

Todavia, deve-se ter conhecimento que a propagação da fissura na massa de concreto puro é diferente de sua propagação no concreto armado. Isso porque o fenômeno da aderência entre a pasta de cimento e o aço faz com que o concreto entre fissura ainda tenha capacidade de absorver a energia proveniente da solicitação imposta na estrutura (PROENÇA, 1988).

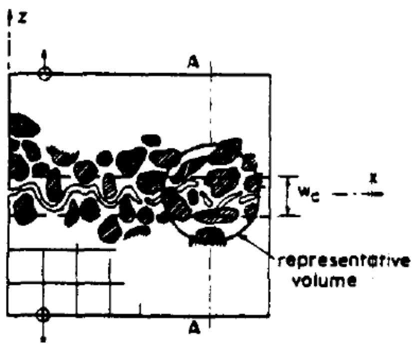
Para verificar o processo de fissuração, considera-se o concreto como um material elástico e isotrópico caracterizado pelo módulo de elasticidade $\mathrm{E_c}$ (ou módulo de Young) e o coeficiente de Poisson ν, além de pressupor um sistema que constitui os materiais do concreto denso e uniformemente distribuídos. Não tão apenas, a análise é realizada com base nas três direções vetoriais principais (x, y, z), onde baseia-se no princípio da deformação dos materiais, ou seja, quando um infinitesimal da estrutura sofre alguma solicitação, a direção principal que atuante a solicitação corresponderá a tais princípios, enquanto as outras direções atuarão os princípios da conservação do volume, de acordo com Poisson (BAZANT, 1983).

De forma complementar, é considerado que as microfissuras são uniformemente distribuídas com relação ao eixo *z*, desenvolvendo-se no material enquanto a tensão é mantida constante, ocasionando um aumento de tensões de σ_z, enquanto a variação pelo efeito de deformações em σ_x e σ_y é nulo (BAZANT, 1983). Aqui, trabalha-se com os três eixos cartesianos principais (x, y, z), assumindo que $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ correspondem as tensões principais e $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$ as deformações principais. Como afirmado por BAZANT (1982), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} = \frac{1}{E_c} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_f \end{bmatrix} \qquad (6)$$

Onde ε_f corresponde à deformação adicional devida à abertura de fissuras. Para uma deflexão total aplicada δ, existe uma largura de região fissurada w_c, conforme apresentada na Figura 07 a seguir:

Figura 07 – Região de largura w_c fissurada

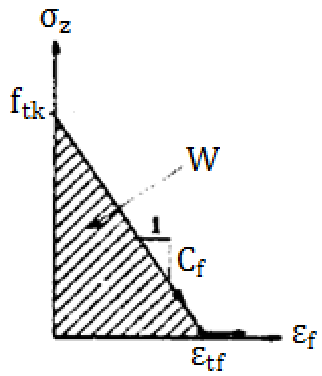


Fonte: BAZANT (1983)

Esta relação da matriz de conformidade com a região de abertura de fissura possibilita determinar uma relação direta entre o módulo de elasticidade e o módulo tangente do concreto, que é de suma importância para a determinação do momento máximo resistente de uma viga de concreto armado.

Observa-se a seguir, na Figura 08, parte do diagrama correspondente à tração do concreto:

Figura 08 – Região de descendência da reta de tensão de tração do concreto



Fonte: BAZANT (1983) - Adaptado

Para o diagrama em questão, a equação da reta é composta pelas coordenadas conhecidas: $(0; f_{tk})$ e $(\varepsilon_{tf}; 0)$.

Substituindo estas coordenadas na equação geral da reta $y = ax + b$, encontra-se como coeficientes angular e linear, respectivamente:

$$a = -\frac{f_{tk}}{\varepsilon_{tf}} \quad e \quad b = f_{tk}$$

Nisso, é possível escrever uma relação entre a tensão e a deformação, de acordo com o diagrama:

$$\sigma_z(\varepsilon_f) = -\frac{f_{tk}}{\varepsilon_{tf}}\,\varepsilon_f + f_{tk}$$

$$\sigma_z(\varepsilon_f) = f_{tk}\left(\frac{-\varepsilon_f + \varepsilon_{tf}}{\varepsilon_{tf}}\right) \qquad (7)$$

Considerando que $C_f = \frac{f_{tk}}{\varepsilon_{tf}}$, logo:

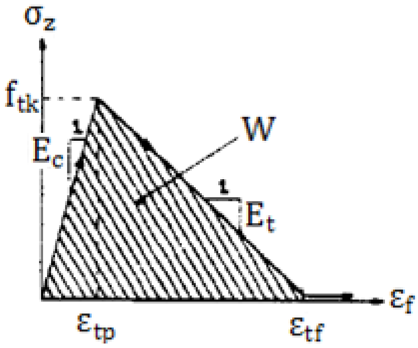
$$\sigma_z(\varepsilon_f) = -C_f.\varepsilon_f + f_{tk}$$

$$C_f.\varepsilon_f = f_{tk} - \sigma_z$$

$$\varepsilon_f = \frac{1}{C_f}(f_{tk} - \sigma_z) \qquad (8)$$

De acordo com o diagrama de tração a seguir (Figura 09), determina-se o coeficiente angular de ambas as retas, que corresponde à Lei de Hooke aplicada.

Figura 09 – Diagrama de tensão de tração do concreto



Fonte: BAZANT (1983) - Adaptado

$$E_c = \frac{f_{tk}}{\varepsilon_{tp}} \tag{9}$$

$$E_t = \frac{f_{tk}}{-\varepsilon_{tf} + \varepsilon_{tp}} \tag{10}$$

Onde ε_{tf}, apresentada anteriormente na Figura 09, representa a deformação correspondente à tensão nula, ou seja, à tensão final de "amolecimento", onde as microfissuras em uma fenda contínua, na qual σ_z torna-se zero.

Observando que existe um termo em comum as equações (9) e (10), que é a tensão de tração, pode-se determinar uma relação entre essas duas equações:

$$E_c\varepsilon_{tp} = E_t(-\varepsilon_{tf} + \varepsilon_{tp})$$

$$E_c\varepsilon_{tp} - E_t\varepsilon_{tp} = -E_t\varepsilon_{tf}$$

$$\varepsilon_{tp}(E_c - E_t) = -E_t\varepsilon_{tf}$$

$$\varepsilon_{tp} = \frac{E_t\varepsilon_{tf}}{E_t - E_c} \tag{11}$$

Sabendo que $f_{tk} = \varepsilon_{tp}.E_c$, aplicando na equação (8), tem-se:

$$\varepsilon_f = \frac{1}{C_f}\left(\varepsilon_{tp}.E_c - \sigma_z\right) \tag{12}$$

Desta forma, pela equação (7) e aplicando na equação (12) tem-se:

$$\varepsilon_f = \frac{1}{C_f}\left[\varepsilon_{tp}.E_c - f_{tk}\left(\frac{-\varepsilon_f + \varepsilon_{tf}}{\varepsilon_{tf}}\right)\right]$$

$$\varepsilon_f = \frac{1}{C_f}\left[\varepsilon_{tp}.E_c - \varepsilon_{tp}.E_c\left(\frac{-\varepsilon_f + \varepsilon_{tf}}{\varepsilon_{tf}}\right)\right]$$

$$\varepsilon_f = \frac{\varepsilon_{tp}.E_c}{C_f}\left[1 - \left(\frac{-\varepsilon_f + \varepsilon_{tf}}{\varepsilon_{tf}}\right)\right]$$

$$\varepsilon_f = \frac{\varepsilon_{tp}.E_c.\varepsilon_f}{C_f.\varepsilon_{tf}}$$

$$1 = \frac{\varepsilon_{tp}.E_c}{C_f.\varepsilon_{tf}} \tag{13}$$

Aplicando a equação (11) em (13), obtêm-se:

$$\frac{1}{E_c} = \frac{1}{C_f}.\frac{\frac{E_t\varepsilon_{tf}}{E_t - E_c}}{\varepsilon_{tf}}$$

$$\frac{1}{E_c} = \frac{1}{C_f}.\frac{E_t}{E_t - E_c}$$

$$\frac{E_t - E_c}{E_c.E_t} = \frac{1}{C_f}$$

$$\frac{E_t}{E_c.E_t} - \frac{E}{E_c.E_t} = \frac{1}{C_f}$$

$$\frac{1}{E_c} - \frac{1}{E_t} = \frac{1}{C_f}$$

$$\frac{1}{E_t} = \frac{1}{E_c} - \frac{1}{C_f} \tag{14}$$

Com isso, desenvolvendo a equação (6) e utilizando a expressão (11) e (14) tem-se:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_c^{-1} & -\nu E_c^{-1} & -\nu E_c^{-1}\\ -\nu E_c^{-1} & E_c^{-1} & -\nu E_c^{-1}\\ -\nu E_c^{-1} & -\nu E_c^{-1} & E_c^{-1}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\ \varepsilon_f\end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_c^{-1} & -\nu E_c^{-1} & -\nu E_c^{-1}\\ -\nu E_c^{-1} & E_c^{-1} & -\nu E_c^{-1}\\ -\nu E_c^{-1} & -\nu E_c^{-1} & E_t^{-1} + C_f^{-1}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\ C_f^{-1}(f_{tk} - \sigma_z)\end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_c^{-1} & -\nu E_c^{-1} & -\nu E_c^{-1}\\ -\nu E_c^{-1} & E_c^{-1} & -\nu E_c^{-1}\\ -\nu E_c^{-1} & -\nu E_c^{-1} & E_t^{-1} + C_f^{-1} - C_f^{-1}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\ C_f^{-1}f_{tk}\end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_c^{-1} & -\nu E_c^{-1} & -\nu E_c^{-1}\\ -\nu E_c^{-1} & E_c^{-1} & -\nu E_c^{-1}\\ -\nu E_c^{-1} & -\nu E_c^{-1} & E_t^{-1}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\ \varepsilon_{tf}\end{bmatrix} \tag{15}$$

É interessante notar na equação (15) a independência das microfissurações com relação ao efeito do coeficiente de Poisson ao se analisar os elementos fora da diagonal principal da matriz de conformidade. (BAZANT, 1983)

Desta forma, determinou-se a relação entre o módulo de Young e o módulo de elasticidade tangente do concreto, ambos no eixo principal *z*.

Caso uma análise seja feita para um plano de tensões nos eixos *x* e *z*, o sistema reduz-se a:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_c^{-1} & -\nu E_c^{-1} \\ -\nu E_c^{-1} & E_t^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon_{tf} \end{bmatrix} \tag{16}$$

Como é necessário encontrar uma relação da tensão em função da deformação, da equação (16) pode-se escrever:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \end{Bmatrix} = E_c \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z - \varepsilon_{tf} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\nu \\ -\nu & E_c . E_t^{-1} \end{bmatrix}^{-1}$$

Resolvendo a inversa da matriz indicada acima, tem-se a seguinte expressão:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \end{Bmatrix} = E_c \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z - \varepsilon_{tf} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{E_c}{E_c - \nu^2 E_t} & \dfrac{\nu E_t}{E_c - \nu^2 E_t} \\ \dfrac{\nu E_t}{E_c - \nu^2 E_t} & \dfrac{E_t}{E_c - \nu^2 E_t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \end{Bmatrix} = \frac{E_c}{E_c - \nu^2 E_t} \begin{bmatrix} E_c & \nu E_t \\ \nu E_t & E_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z - \varepsilon_{tf} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \end{Bmatrix} = \frac{E_c . E_t}{E_c - \nu^2 E_t} \begin{bmatrix} {E_c}/{E_t} & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z - \varepsilon_{tf} \end{Bmatrix} \tag{17}$$

Considera-se a seguinte expressão:

$$E'_t = \frac{E_c . E_t}{E_c - \nu^2 E_t} \tag{18}$$

Desenvolvendo a equação (18) tem-se:

$$\frac{1}{E'_t} = \frac{E_c - \nu^2 E_t}{E_c . E_t}$$

$$\frac{1}{E'_t} = \frac{E_c}{E_c . E_t} - \frac{\nu^2 E_t}{E_c . E_t}$$

$$\frac{1}{E'_t} = \frac{1}{E_t} - \frac{\nu^2}{E_c} \tag{19}$$

Substituindo a equação (14) na expressão acima:

$$\frac{1}{E'_t} = \left(\frac{1}{E_c} - \frac{1}{C_f}\right) - \frac{\nu^2}{E_c}$$

$$\frac{1}{E'_t} = \frac{C_f - E_c}{E_c C_f} - \frac{\nu^2}{E_c}$$

$$\frac{1}{E'_t} = \frac{C_f - E_c - \nu^2 C_f}{E_c C_f}$$

$$\frac{1}{E'_t} = \frac{C_f(1-\nu^2) - E_c}{E_c C_f}$$

$$\frac{1}{E'_t} = \frac{C_f(1-\nu^2)}{E_c C_f} - \frac{E_c}{E_c C_f}$$

$$\frac{1}{E'_t} = \frac{(1-\nu^2)}{E_c} - \frac{1}{C_f}$$

Considerando-se a expressão:

$$\frac{1}{E'_c} = \frac{(1-\nu^2)}{E_c}$$

$$E'_c = \frac{E_c}{(1-\nu^2)} \tag{20}$$

Substituindo a equação (19) utilizada por BAZANT (1983) na expressão acima (20), determina-se:

$$\frac{1}{E'_t} = \frac{1}{E'_c} - \frac{1}{C_f} \tag{21}$$

As expressões (18), (20) e (21) são abordadas por BAZANT (1983) para desenvolver a equação (17). Com isso:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \end{Bmatrix} = E'_t \begin{bmatrix} E_c/E_t & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z - \varepsilon_{tf} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_c E'_t/E_t & \nu E'_t \\ \nu E'_t & E'_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z - \varepsilon_{tf} \end{Bmatrix} \tag{22}$$

Com base na equação (19), a expressão $\mathrm{E_c E'_t}/\mathrm{E_t}$ pode ser escrita como:

$$\frac{E_c E'_t}{E_t} = E_c E'_t \left(\frac{1}{E'_t} + \frac{\nu^2}{E_c}\right)$$

$$\frac{E_c E'_t}{E_t} = \frac{E_c E'_t}{E'_t} + \frac{E_c E'_t \nu^2}{E_c}$$

$$\frac{E_c E'_t}{E_t} = E_c + E'_t \nu^2$$

Desta forma, com a expressão encontrada acima, substituindo na equação (22) tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_c + E'_t \nu^2 & \nu E'_t \\ \nu E'_t & E'_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z - \varepsilon_{tf} \end{Bmatrix} \tag{23}$$

As expressões (6) e (23) correspondem ao concreto como um material homogêneo e uniformemente distribuído, onde as tensões aplicadas são as mesmas nas três direções principais, no caso da equação (6) e um plano de tensões com relação à equação (23).

Contudo, a análise com relação a um material elástico anisotrópico deve ser realizada.

Para este caso, o concreto sem fissuras é caracterizado pela relação $[\varepsilon] = [\mathrm{C}] \times [\sigma]$, que corresponde à matriz constitutiva do material, ou seja, uma formulação da matriz de rigidez. Com isso, como as tensões principais e as direções das mesmas coincidam, a expressão geral para o concreto ainda não fissurado é:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{13} & C_{33}\mu^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix} \tag{24}$$

Onde a matriz $[\mathrm{C}]$ corresponde a uma conformidade do concreto antes da fissuração e μ a um parâmetro de fissura que depende da tensão e da deformação do concreto, podendo variar $0 < \mu < 1$. Quando $\mu = 1$, simboliza que o concreto não está fissurado. O outro valor extremo significa que a seção está completamente fissurada. (BAZANT, 1982)

Para que as equações (15) e (24) sejam equivalentes, desenvolvendo as expressões, é necessário que:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{11}\sigma_x + C_{12}\sigma_y + C_{13}\sigma_z \\ C_{21}\sigma_x + C_{22}\sigma_y + C_{23}\sigma_z \\ C_{31}\sigma_x + C_{13}\sigma_y + C_{33}\mu^{-1}\sigma_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E_c^{-1}\sigma_x - \nu E_c^{-1}\sigma_y - \nu E_c^{-1}\sigma_z \\ -\nu E_c^{-1}\sigma_x + E_c^{-1}\sigma_y - \nu E_c^{-1}\sigma_z \\ -\nu E_c^{-1}\sigma_x - \nu E_c^{-1}\sigma_y + E_t^{-1}\sigma_z + \varepsilon_{tf} \end{Bmatrix}$$

Ou seja, além dos coeficientes C_{ij} da equação (15) serem os da equação (24), a coordenada (3;1) de ambas as matrizes devem ser equivalentes. Para isso, tem-se:

$$C_{31}\sigma_x + C_{13}\sigma_y + C_{33}\mu^{-1}\sigma_z = -\nu E_c^{-1}\sigma_x - \nu E_c^{-1}\sigma_y + E_t^{-1}\sigma_z + \varepsilon_{tf}$$

$$\varepsilon_z = C_{33}\mu^{-1}\sigma_z = E_t^{-1}\sigma_z + \varepsilon_{tf} \tag{25}$$

Sendo a expressão (25) a determinada por BAZANT (1983) e ainda fazendo a consideração de $\mathrm{C}_{33} = \mathrm{E}_c^{-1}$, tem-se:

$$E_c^{-1}\mu^{-1}\sigma_z = E_t^{-1}\sigma_z + \varepsilon_{tf}$$

$$E_c^{-1}\mu^{-1} = E_t^{-1} + \frac{\varepsilon_{tf}}{\sigma_z}$$

$$\frac{1}{\mu} = E_c\left(E_t^{-1} + \frac{\varepsilon_{tf}}{\sigma_z}\right) \tag{26}$$

De acordo com a equação (25), tem-se:

$$\varepsilon_z = E_t^{-1}\sigma_z + \varepsilon_{tf}$$

$$\sigma_z = E_t(\varepsilon_z - \varepsilon_{tf}) \tag{27}$$

Substituindo a equação (27) na (26), tem-se:

$$\frac{1}{\mu} = E_c\left(E_t^{-1} + \frac{\varepsilon_{tf}}{E_t(\varepsilon_z - \varepsilon_{tf})}\right)$$

$$\frac{1}{\mu} = E_c\left(\frac{\varepsilon_{tf} + (\varepsilon_z - \varepsilon_{tf})}{E_t(\varepsilon_z - \varepsilon_{tf})}\right)$$

$$\frac{1}{\mu} = E_c\left(\frac{\varepsilon_z}{E_t(\varepsilon_z - \varepsilon_{tf})}\right)$$

$$\frac{1}{\mu} = -\frac{E_c}{E_t}.\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_{tf} - \varepsilon_z}$$

Com isso, pode-se afirmar que:

$$\frac{1}{\mu} = E_c\left(E_t^{-1} + \frac{\varepsilon_{tf}}{\sigma_z}\right) = -\frac{E_c}{E_t}.\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_{tf} - \varepsilon_z} \tag{28}$$

Neste caso, considerando-se as equações (8) e (14) aplicadas na expressão (28), é possível determinar o valor de μ para quando o material concreto não possui nenhuma fissura. Desta forma, tem-se:

$$\varepsilon_f = \frac{1}{C_f}(f_{tk} - \sigma_z)$$

Para $\sigma_z = 0 \leftrightarrow \varepsilon_f = \varepsilon_{tf}$, desta forma, pode-se escrever a expressão como sendo:

$$\sigma_z = f_{tk} = \varepsilon_{tf} C_f$$

Com isso, para um material sem fissuras, tem-se o valor de μ como:

$$\frac{1}{\mu} = E_c\left(E_t^{-1} + \frac{\varepsilon_{tf}}{\sigma_z}\right)$$

$$\frac{1}{\mu} = E_c\left(E_t^{-1} + \frac{\varepsilon_{tf}}{\varepsilon_{tf} C_f}\right)$$

$$\frac{1}{\mu} = E_c\left(E_t^{-1} + \frac{1}{C_f}\right)$$

$$\mu = 1$$

Ou seja, μ esta compreendido entre 0 e 1, onde 0 corresponde a um material totalmente fissurado e 1 ao material sem fissuras.

As análises aqui realizadas possuem a influência do parâmetro μ, que representa a taxa na qual a peça está fissurada. Este parâmetro, como se pode observar na equação (24), está relacionado somente ao termo C_{33}, o qual está diretamente relacionado somente com σ_z, sob a hipótese de que as fissuras dão-se somente na região normal ao eixo z.

Esse tratamento é feito por causa da redução da rigidez da peça, que provoca a propagação das fissuras. Além disso, foi considerado que o concreto corresponde a um material anisotrópico. (BAZANT, 1982; BAZANT 1983)

$$[C] = \frac{1}{E_c}\begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & \mu^{-1} \end{bmatrix} \tag{29}$$

Ou seja, a matriz $[C]$ representando a conformidade inicial do concreto, antes da fissuração, apresentada na equação (24) assemelhando-se à matriz (15) de conformidade do concreto. Contudo, para esta matriz $[C]$ é analisada a abertura da fissura ao longo do eixo cartesiano *z*.

Com isso, para se determinar a matriz conformidade do concreto para quando a seção se encontra totalmente fissurada, baseando-se na expressão (29) e substituindo na equação (24), pode-se escrever:

$$[\varepsilon] = [C].[\sigma]$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} = \frac{1}{E_c} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & \mu^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix} \qquad (30)$$

A atuação do parâmetro μ só é considerável para a relação entre σ_z e ε_z. Já para σ_x e σ_y a influência é tão pequena que torna-se insignificante. Desta forma, como considerou-se que a abertura da fissura e suas tensões são geradas ao longo do eixo z, gera uma correção do parâmetro C_{33} da matriz constitutiva, onde só neste está presente o coeficiente μ.

Para análise de cargas, é necessária uma relação de tensão – deformação incremental, ou seja, a curva do diagrama é verificada de forma linear por partes, através do método da diferenciação, apresentado nas equações (15) e (23). Para o caso deste trabalho em específico, a verificação compreende somente o comportamento de flexão da viga e modo I de fratura, desconsiderando qualquer efeito de cisalhamento. (BAZANT 1983).

Vale ressaltar que quando a aplicação da carga não se torna proporcional pode ocasionar surgimento de outros tipos de fissuras localizadas em regiões entre fissuras primárias. Com isso, as dimensões da matriz de conformidade ampliam para 6x6. (BAZANT, 1982; BAZANT 1983)

1.3. Energia de fissuração do concreto

A aplicação da carga sobre o sistema estrutural gera trabalho. Sabendo que, de acordo com o teorema do trabalho:

$$W = \Delta E$$

Ou seja, o trabalho W gera variação de energia ΔE. A energia que ocasiona as fissuras é chamada de *energia de fratura*, e esta é consumida durante a formação das fissuras por unidade de área (*x, y*), conforme analisado por BAZANT (1982):

$$\mathcal{G}_f = w_c \int_{\sigma_z = f_{tk}}^{0} \sigma_z \, d\varepsilon_f \tag{31}$$

Retomando à Figura 07, é válido ressaltar que a energia de fratura aqui calculada está considerando que as fissuras que se encontram na largura efetiva w_c estão disposta uniformemente, onde este parâmetro é determinado experimentalmente (BAZANT, 1982; BAZANT, 1985).

Com isso, de acordo com a equação (8) e sabendo que $C_f = \frac{\sigma_z}{\varepsilon_{tf}}$, tem-se:

$$\sigma_z = C_f \varepsilon_{tf}$$
$$\varepsilon_f = \frac{1}{C_f}(f_{tk} - C_f \varepsilon_{tf})$$
$$d\varepsilon_f = -d\varepsilon_{tf}$$

Desta forma, substituindo na equação (31), tem-se:

$$\mathcal{G}_f = -w_c \int_{\sigma_z = f_{tk}}^{0} \sigma_z \, d\varepsilon_{tf}$$

$$\mathcal{G}_f = w_c \int_{0}^{\sigma_z = f_{tk}} C_f \varepsilon_{tf} \, d\varepsilon_{ft}$$

$$\mathcal{G}_f = -w_c \left(\frac{C_f {\varepsilon_{tf}}^2}{2} \right) \Bigg|_0^{\sigma_z = f_{tk}}$$

$$\mathcal{G}_f = w_c \frac{{f_{tk}}^2}{2C_f} \tag{32}$$

Sendo $C_f = \frac{f_{tk}}{\varepsilon_{tf}}$, substituindo na equação (32), tem-se:

$$\mathcal{G}_f = w_c \frac{{f_{tk}}^2}{2\left(\frac{f_{tk}}{\varepsilon_{tf}}\right)}$$

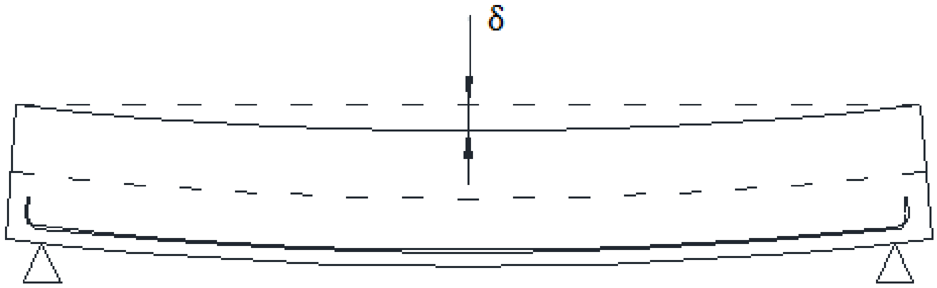
$$\mathcal{G}_f = w_c \frac{C_f \varepsilon_{tf}}{2 f_{tk}} \tag{33}$$

Onde w_c corresponde à largura efetiva da zona do processo de fissura.

O que pode ser comprovado é que a zona de fissura é o resultado da materialização da energia gerada pela aplicação de uma força na estrutura, força esta que gera o *trabalho W*.

Para este *trabalho W*, é necessário que seja aplicado uma quantidade de carga e que esta gere um deslocamento δ, ou seja:

Figura 10 – Esquema de deflexão em viga isostática de concreto armado



Fonte: O autor

Além disso, a equação (32) pode ser escrita em função da área abaixo do diagrama da Figura 08, ou seja, o *trabalho* necessário para iniciar o processo de fissuras corresponde à integral da função tensão aplicada na seção da peça estrutural.

Vinculando a equação (14) com a (32), pode-se determinar uma expressão que relaciona diretamente os módulos de elasticidade e de tangente do concreto com a energia de fissuração:

$$\frac{1}{E_t} = \frac{1}{E_c} - \frac{1}{w_c \frac{f_{tk}^2}{2\mathcal{G}_f}}$$

$$\frac{2\mathcal{G}_f}{w_c f_{tk}^2} = \frac{1}{E_c} - \frac{1}{E_t}$$

$$\mathcal{G}_f = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{E_c} - \frac{1}{E_t}\right) w_c f_{tk}^2 \qquad (34)$$

Utilizando a equação (25), é necessário determinar o máximo *trabalho*, ou a máxima energia necessária para a viga atingir a sua máxima tensão de tração, de acordo com o diagrama da Figura 09. Com isso, aplicando na equação (25) a seguinte consideração e com a consideração $\sigma_z = f_{tk}$, pode-se determinar, então, a energia necessária para a formação das fissuras:

$$\varepsilon_z = E_t^{-1}\sigma_z + \varepsilon_{tf}$$

$$\varepsilon_z = E_t^{-1} f_{tk} + \varepsilon_{tf} \qquad (35)$$

Substituindo a equação (35) na (34), tem-se:

$$\mathcal{G}_f = \frac{1}{2}\left[\frac{f_{tk}^2}{E_c} + f_{tk}\left(\varepsilon_{tf} - \varepsilon_z\right)\right] w_c \tag{36}$$

A equação acima descrita ainda pode ser desenvolvida. Sabendo-se que o princípio da equação (14) ainda é conservado para todas as aplicações e que $C_f = \frac{\sigma_f}{\varepsilon_{tf}}$, é possível determinar a área sob a curva descrita na Figura 09. Assim, tem-se:

$$\frac{\varepsilon_z - \varepsilon_{tf}}{f_{tk}} = \frac{1}{E_c} - \frac{1}{C_f}$$

$$\frac{\varepsilon_z - \varepsilon_{tf}}{f_{tk}} = \frac{1}{E_c} - \frac{\varepsilon_{tf}}{f_{tk}}$$

$$\frac{1}{E_c} = \frac{\varepsilon_z}{f_{tk}}$$

Com isso, aplicando a expressão acima na equação (36), determina-se a energia $\mathcal{G}_f$ consumida na formação das fissuras:

$$\mathcal{G}_f = \frac{1}{2}\left[f_{tk}^2 \frac{\varepsilon_z}{f_{tk}} + f_{tk}\left(\varepsilon_{tf} - \varepsilon_z\right)\right] w_c$$

$$\mathcal{G}_f = \frac{1}{2}\left[f_{tk}\, \varepsilon_z + f_{tk}\left(\varepsilon_{tf} - \varepsilon_z\right)\right] w_c \tag{37}$$

Onde:

$$W = \int \sigma_z \, d\varepsilon_z = \frac{1}{2}\left(f_{tk}\, \varepsilon_z + f_{tk}\left(\varepsilon_{tf} - \varepsilon_z\right)\right) \tag{38}$$

Contudo, esta conclusão só poderá ser assumida como verdade se, e somente se, a propagação das fissuras não for acompanhada com uma deformação plástica, isto é, como o concreto é um material frágil, a deformação deve ser considerada elástica.

Assim sendo, a largura da região fissurada, conforme apresentado por BAZANT (1985), baseando-se nas equações (14) e (32), vale:

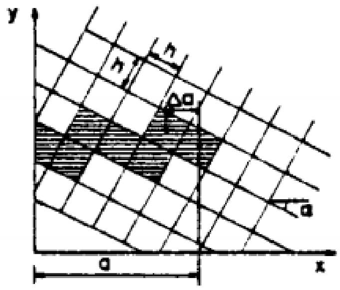
$$w_c = \frac{2C_f\, \mathcal{G}_f}{f_{tk}^2}$$

$$w_c = \frac{2\, \mathcal{G}_f}{f_{tk}^2}\left(\frac{1}{E_c} - \frac{1}{E_t}\right)^{-1} \tag{39}$$

Nota-se que os módulos de elasticidade de Young e tangente do concreto estão diretamente relacionados com a energia de propagação de fissura do mesmo. Esta energia ocasiona uma região de abertura de fissura w_c. Todas estas relações são dependentes da resistência à tração do concreto.

Em casos gerais, onde ocorre a modelagem da propagação da fissura utiliza-se como base a malha apresentada na Figura 11 a seguir:

Figura 11 – Malha utilizada na propagação da fissura



Fonte: BAZANT (1983)

O modelo aqui apresentado contém dois elementos importantes: a energia de fratura e a tensão limite f_{tk} .Vale ressaltar que, paralelamente à tensão limite, tem-se a deformação limite ε_z, a qual é definida como o deslocamento relativo global de $\varepsilon_z\, w_c$ ao longo da abertura w_c. Isso determina o trabalho da estrutura circundante no processo de fratura, onde não importa a precisão do valor de w_c, desde que a energia da fratura seja preservada.

$$\mathcal{G}_f = h\frac{f_{tk}^2}{2C_f}$$

$$C_f = h\frac{f_{tk}^2}{2\mathcal{G}_f} \qquad (40)$$

$$\mathcal{G}_f = w_c\frac{C_f\varepsilon_{tf}}{2f_{tk}}$$

$$\varepsilon_{tf} = \frac{2\mathcal{G}_f f_{tk}}{h\, C_f} \qquad (41)$$

De acordo com os estudos de BAZANT (1983), algumas pesquisas foram realizadas com relação a resistência do concreto, comparando as teorias não linear com a linear. Vários tipos de concretos foram ensaiados pressupondo parâmetros como $\mathcal{G}_f$, f_{tk} e w_c. Valores testados como geometria da seção, condições de carga e tamanhos de agregados foram considerados e ensaiados. Para este último, considerados nos ajustes, tamanhos de agregados variados ($\mathrm{d_a}$) levaram a uma relação de $\mathrm{w_c}$ entre 1,5 a 4 para vários tipos de concretos ensaiados, levando a conclusão, experimentalmente de que, uma relação ótima entre a abertura de fissura e o diâmetro do agregado seria (BAZANT, 1983; BAZANT, 1985):

$$w_c = 3d_a \tag{42}$$

Os resultados obtidos foram considerados sob deformação uniforme e a distribuição uniforme de microfissuras, sob a suposição de distribuição uniforme de tensões. A largura real $\mathrm{w_c}$ da zona de microfissura será um pouco diferente da encontrada analiticamente, já que a densidade da microfissura varia ao longo da mesma zona. No caso de concreto de alta resistência, por exemplo, os materiais devem estar dispostos homogeneamente no espaço, desta forma, a relação $\mathrm{w_c}/\ \mathrm{d_a}$ tende a diminuir, o oposto também deve acontecer. (BAZANT, 1983)

A seguir apresenta-se a tabela com algumas séries desenvolvidas por pesquisadores:

Tabela 01 – Dados sobre testes de diferentes tipos de concreto

Test Series	f'_t (psi)	E_c (ksi)	$\mathcal{G}_f$ (lb./in.)	d_a (in.)	w_c (in.)	$\mathcal{G}_f^{lin}$ (lb./in.)	c_f	$\tilde{\mathcal{G}}_f$ (lb./in.)
1. Naus-No. 1	460 *	4,450 *	0.205 *	0.375	1.125 *	0.430 *	7.664 *	0.224 *
2. Naus-No. 2	360 *	4,500 *	0.099 *	0.375	1.125 *	0.249 *	6.111 *	0.113 *
3. Walsh-No. 1	347 *	3,299 *	0.174 *	0.50	1.50 *	0.188 *	6.356 *	0.185 *
4. Walsh-No. 2	430 *	4,083 *	0.188 *	0.50	1.50 *	0.173 *	5.535 *	0.270 *
5. Walsh-No. 3	273 *	2,593 *	0.126 *	0.50	1.50 *	0.158 *	5.845 *	0.123 *
6. Walsh-No. 4	286 *	2,716 *	0.133 *	0.50	1.50 *	0.162 *	5.888 *	0.133 *
7. Walsh-No. 5	495 *	4,697 *	0.224 *	0.50	1.50 *	0.173 *	5.725 *	0.348 *
8. Walsh-No. 6	414 *	3,928 *	0.193 *	0.50	1.50 *	0.176 *	5.897 *	0.253 *
9. Mindess, Lawrence, Kesler	370 *	6,260	0.088 *	0.375	1.125 *	0.170 *	7.154 *	0.087 *
10. Shah, McGarry	300 *	3,000 *	0.108 *	0.375	1.125 *	0.047 *	6.400 *	0.103 *
11. Gjørv, Sørensen, Arnesen	300 *	3,000 *	0.108 *	0.375	1.125 *	0.047 *	6.400 *	0.103 *
12. Kaplan	300 *	4,190	0.101	0.50	1.50 *	0.177 *	6.269 *	0.098 *
13. Huang-No. 1	360 *	3,122 *	0.225 *	0.50	1.50 *	0.337 *	7.227 *	0.217 *
14. Huang-No. 2	360 *	3,122 *	0.225 *	0.50	1.50 *	0.245 *	7.227 *	0.217 *
15. Carpinteri-No. 1	313 *	2,700 *	0.207 *	0.375	1.125 *	0.147 *	10.14 *	0.128 *
16. Carpinteri-No. 2	356 *	3,130 *	0.280 *	0.752	2.256 *	0.201 *	6.130 *	0.315 *
17. Hillerborg, Modéer, Petersson	400 *	3,300 *	0.100 *	0.157	0.471 *	0.118 *	8.758 *	0.086 *
18. Sok, Baron, François	740 *	3,000 *	2.800 *	0.472	1.416 *	2.910 *	21.66 *	1.600 *
19. Brown	690 *	2,200 *	0.182 *	0.047	0.141 *	0.185 *	11.93 *	0.178 *
20. Wecharatana, Shah	740 *	3,000 *	0.855 *	0.250	0.750 *	0.860 *	12.49 *	0.848 *
21. Entov, Yagust-No. 1	450 *	3,000 *	0.746 *	0.787	2.360 *	0.755 *	9.366 *	0.657 *
22. Entov, Yagust-No. 2	440 *	3,000 *	0.640 *	0.787	2.360 *	0.630 *	8.405 *	0.617 *

Note: psi = 6 895N/m^2, lb./in. = 175.1 N/m, in. = 25.4 mm, ksi = 1 000 psi.
* asterisk indicates numbers estimated by calculations; without asterisk-as reported.

Fonte: BAZANT (1983)

De acordo com o conjunto de dados pertencentes à tabela acima, pode-se afirmar que o espaço amostral utilizado por BAZANT (1983) para os cálculos da relação $\mathrm{f_{tk}}$ com $\mathrm{C_f}$ é dado por:

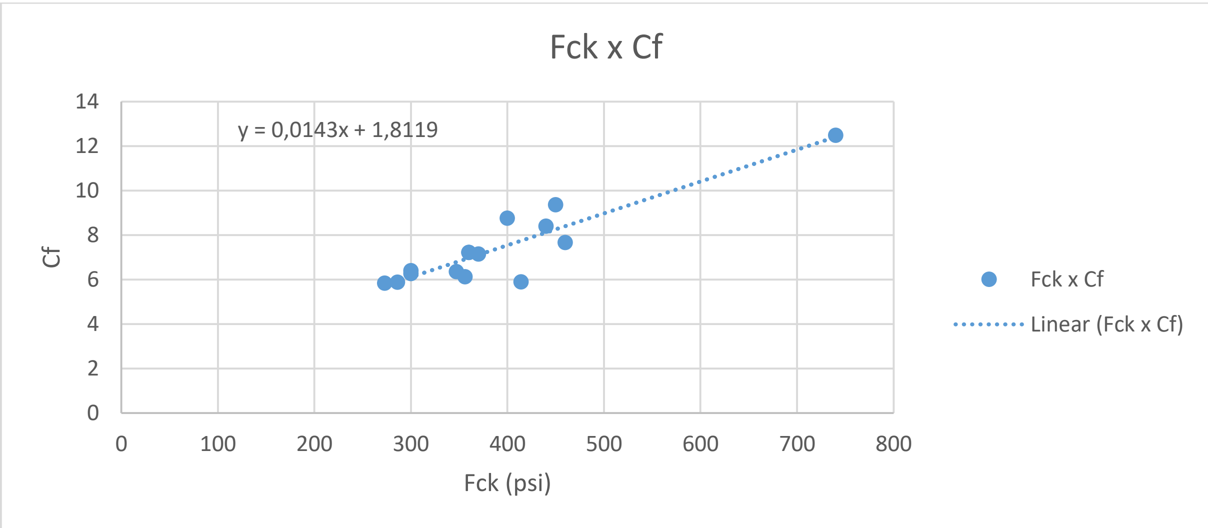
Tabela 02 – Valores a serem considerados na plotagem do gráfico

f_{tk} (psi)	C_f	f_{tk} (psi)	C_f
273	5,845	370	7,154
286	5,888	400	8,758
300	6,4	414	5,897
300	6,269	440	8,405
347	6,356	450	9,366
356	6,13	460	7,664
360	7,227	740	12,49
360	7,227		

Fonte: O autor

Com estes dados extraídos da tabela, é possível determinar a equação da reta que mais se aproxima da amostragem:

Gráfico 01 – Reta gerada a partir dos dados na literatura, com base na resistência e energia de fissuração do concreto



Fonte: O autor

Ou seja,

$$C_f = 1{,}811 + 0{,}0143 f_{tk} \qquad (43)$$

Desta forma, é possível determinar uma relação entre o módulo de elasticidade tangente e a tensão aplicada, com base na equação (43) determinada pela Tabela 02 e das equações (14), (39) e (42), pode-se determinar:

$$w_c = \frac{2\,\mathcal{G}_f}{f_{tk}^2}\left(\frac{1}{E_c} - \frac{1}{E_t}\right)^{-1}$$

$$\mathcal{G}_f = \frac{w_c\, f_{tk}^2}{2}\left(\frac{1}{E_c} - \frac{1}{E_t}\right) \tag{44}$$

Dada a relação (42) encontrada com base em análise experimental, tem-se:

$$\mathcal{G}_f = \frac{3d_a\, f_{tk}^2}{2}\left(\frac{1}{E_c} - \frac{1}{E_t}\right)$$

$$\mathcal{G}_f = 1{,}5d_a\, f_{tk}^2\left(\frac{1}{E_c} - \frac{1}{E_t}\right) \tag{45}$$

Com base na equação (14), tem-se que:

$$\frac{1}{E_c} - \frac{1}{E_t} = \frac{E_t - E_c}{E_c.E_t} = \frac{E_t}{E_c.E_t} - \frac{E_c}{E_c.E_t}$$

$$\frac{E_t}{E_c.E_t} - \frac{E_c}{E_c.E_t} = \frac{1}{E_c}\left(\frac{E_t}{E_t} - \frac{E_c}{E_t}\right)$$

$$\frac{1}{E_c} - \frac{1}{E_t} = \frac{1}{E_c}\left(1 - \frac{E_c}{E_t}\right) = \frac{1}{E_c}C_f \tag{46}$$

Aplicando a expressão encontrada em (46) na equação (45), tem-se:

$$\mathcal{G}_f = 1{,}5d_a\; f_{tk}^2\; \frac{1}{E_c}C_f \tag{47}$$

De acordo com a equação da reta encontrada em (43), aplicando em (47) tem-se:

$$\mathcal{G}_f = 1{,}5d_a\; f_{tk}^2\; \frac{1}{E_c}(1{,}811 + 0{,}0143f_{tk})$$

$$\mathcal{G}_f = (2{,}7165 + 0{,}02145f_{tk}).\, f_{tk}^2\,\frac{d_a}{E_c} \tag{48}$$

A equação (48) determina uma relação direta entre a energia de deformação e as dimensões do agregado.

Além disso, pode-se determinar a equação que relaciona o módulo de elasticidade tangente com a tensão de tração do concreto, igualando as equações (43) e (46):

$$1{,}811 + 0{,}0143f_{tk} = 1 - \frac{E_c}{E_t}$$

$$\frac{E_c}{E_t} = -0{,}811 - 0{,}0143f_{tk}$$

$$\frac{E_c}{E_t} = -0{,}0143(56{,}7 + f_{tk})$$
$$E_t = -\frac{E_c}{0{,}0143\left(56{,}7 + f_{tk}\right)}$$
$$E_t = \frac{-69{,}9E_c}{56{,}7 + f_{tk}} \quad (49)$$

Com isso, verifica-se que a partir da análise da energia de fratura e a região de abertura de fissura foi passível determinar uma relação direta entre o módulo de Young e o módulo tangente do concreto, com base na resistência à tração.

Desta forma, observa-se que a obtenção da equação (49) teve por base a fratura de um material heterogêneo, tal como o concreto, ocorre sob forma de micro fissuração progressiva caracterizada por uma relação tensão – deformação que apresenta o “amolecimento” das tensões. A consideração foi realizada de que as fissuras se propagassem normalmente em relação ao eixo z. Desta forma, o termo da matriz de conformidade que estivesse diretamente relacionado com tal eixo (C_{33}, para o caso de matriz 3x3), deveria ser ajustada a partir de um parâmetro de fissuração μ.

A energia de fratura está diretamente relacionada ao módulo tangente da tensão do concreto, seu f_{tk} e a largura da zona de processo de fratura. Este último, de acordo com experimentos realizados por diversos autores, foi encontrado um valor ótimo, que corresponde ao representativo utilizado na teoria estatística para meios heterogêneos, $w_c = 3d_a$.

1.4. A equação de tensão – deformação do concreto

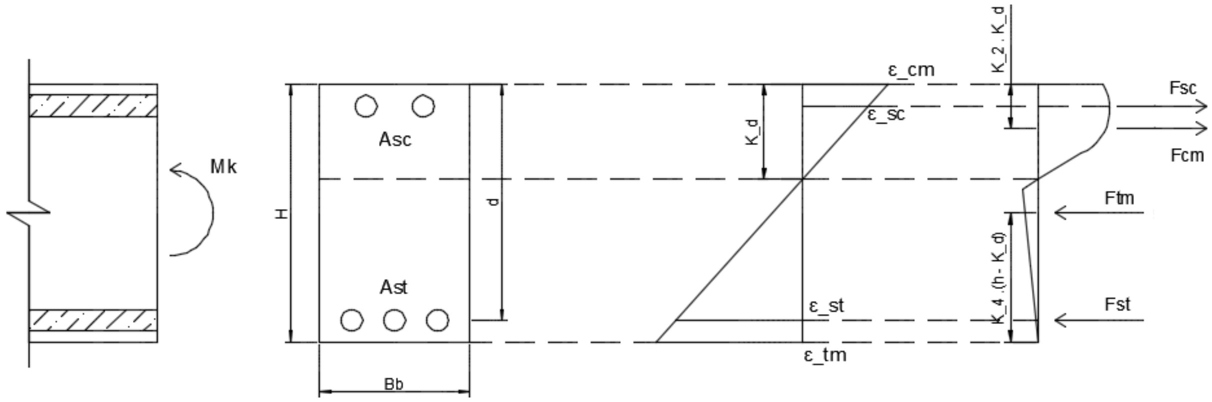
A hipótese de Bernoulli – Navier, usualmente adotada, é que as seções transversais continuam planas e ortogonais ao eixo principal mesmo depois de serem carregadas (BAZANT, 1984).

De acordo com a Figura 03, observa-se que o diagrama de tensão do concreto é dado por uma curva na região de compressão. Já a região de tração do mesmo, caracterizada pela Figura 04, é dada por um aumento linear até a tensão máxima de tração, que depois desencadeia em um decréscimo também linear, onde corresponde a sua deformação máxima.

A Figura 12 a seguir faz uma representação de uma seção transversal de concreto armado, com os aços de tração e compressão (a), o diagrama de deformação dos materiais (b), bem como o diagrama de tensão atuante em (c):

Figura 12 – (a) Seção de concreto armado; (b) Diagrama de deformação; (c) Diagrama de tensão

(a) (b) (c)



Fonte: O autor

Com base na Figura 12 (b), pode-se escrever a proporcionalidade das relações de deformações sofridas pelos materiais:

$$\frac{\varepsilon_{cm}}{k_d} = \frac{\varepsilon_{st}}{d - k_d} = \frac{\varepsilon_{sj}}{d_j - k_d} \tag{50}$$

Onde, no caso, j = 1,2 (considerando o cobrimento do mesmo para as armaduras de compressão e altura útil para a armadura de tração).

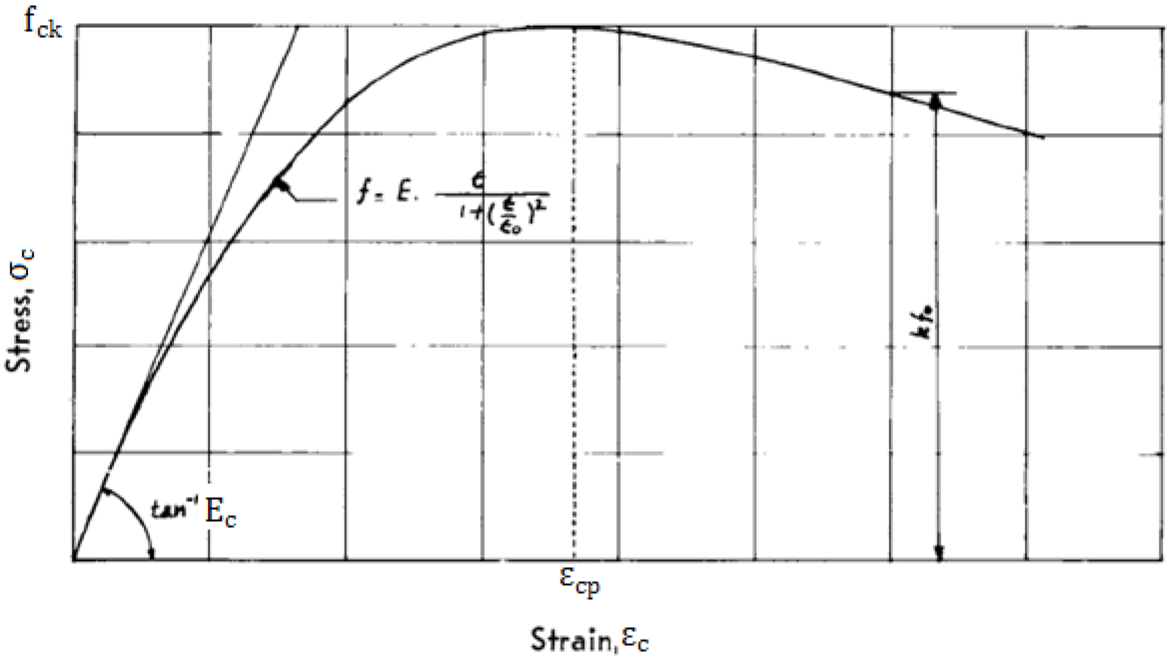
Com isso, pode-se criar uma relação entre a deformação do concreto e a deformação do aço:

$$\varepsilon_{sj} = \varepsilon_{cm} \frac{d_j - k_d}{k_d} \tag{51}$$

De acordo com a Figura 12 (c), para que as forças $\mathrm{F_{cm}}$ e $\mathrm{F_{tm}}$ possam ser determinadas, de acordo com a tensão do concreto e sua deformação, é necessário definir, portanto, a equação de compressão da curva do concreto. Para isso, SAENZ (1964) sugeriu uma equação geral para a curva do concreto (Figura 13):

$$y = \frac{x}{A + Bx + Cx^2} \tag{52}$$

Figura 13 – Diagrama da curva de compressão do concreto



Fonte: SAENS (1964) - Adaptado

Observando a proposta de equação geral (52) apresentada por SAENZ (1964), deve-se saber que para cada concreto a forma da sua curva de tensão – deformação varia conforme seu $\mathrm{f_{ck}}$. A equação, a partir disso, deve contemplar e se adaptar a essa condição mutável. Com isso, para que se tenha tamanha flexibilidade dificilmente é admitida uma equação simples (KABAILA, 1961).

Para a nomenclatura deste trabalho, adota-se $\mathrm{y} = \sigma_c$ e $\mathrm{x} = \varepsilon_c$.

De acordo com a Figura 13 apresentada, é possível concluir algumas características matemáticas que a mesma possui, para enfim poder deduzir a formula sugerida:

- É conhecida a coordenada: $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \left(\varepsilon_{cp}, \mathrm{f_{ck}}\right)$

$$f_{ck} = \frac{\varepsilon_{cp}}{A + B\varepsilon_{cp} + C\varepsilon_{cp}^2}$$

$$A + B\varepsilon_{cp} + C\varepsilon_{cp}^2 = \frac{\varepsilon_{cp}}{f_{ck}} \tag{53}$$

- É conhecida a tangente na coordenada $(0,0)$: $\sigma'_c(0) = \mathrm{E_c}$

$$\frac{1.(A + B\varepsilon_c + C\varepsilon_c^2) - \varepsilon_c(2C\varepsilon_c + B)}{(A + B\varepsilon_c + C\varepsilon_c^2)^2} = \sigma'_c(\varepsilon_c)$$

$$\frac{1.(A + B.0 + C.0^2) - 0.(2.0.C + B)}{(A + B.0 + C.0)^2} = \sigma'_c(0)$$

$$\frac{A}{A^2} = E_c \Longrightarrow A = \frac{1}{E_c} \tag{54}$$

- É conhecida a tangente na coordenada (ε_0, f_0): $\sigma'_c(\varepsilon_{cp}) = 0$

$$\frac{1.(A + B\varepsilon_c + C\varepsilon_c^2) - \varepsilon_c(2C\varepsilon_c + B)}{(A + B\varepsilon_c + C\varepsilon_c^2)^2} = \sigma'_c(\varepsilon_{cp})$$

$$\frac{1.\left(A + B\varepsilon_{cp} + C\varepsilon_{cp}^2\right) - \varepsilon_{cp}(2C\varepsilon_{cp} + B)}{(A + B\varepsilon_{cp} + C\varepsilon_{cp}^2)^2} = 0$$

$$A + B\varepsilon_{cp} + C\varepsilon_{cp}^2 - 2C\varepsilon_{cp}^2 - B\varepsilon_{cp} = 0$$

$$C = \frac{1}{E_c \, . \, \varepsilon_{cp}^2} \tag{55}$$

Aplicando as equações (54) e (55) na equação (53) podemos obter o coeficiente B:

$$\frac{1}{E_c} + B\varepsilon_{cp} + \varepsilon_{cp}^2 . \frac{1}{E_c \, . \, \varepsilon_{cp}^2} = \frac{\varepsilon_{cp}}{f_{ck}}$$

$$B = \frac{1}{f_{ck}} - \frac{2}{E_c \, . \, \varepsilon_{cp}} \tag{56}$$

Uma consideração importante feita por SAENZ (1964) é que o módulo de elasticidade do concreto corresponde ao dobro do ponto de inflexão de tangente máxima, ou seja:

$$E_c = 2\frac{f_{ck}}{\varepsilon_{cp}}$$

Com base na equação acima e com os coeficientes determinados (equações (54), (55) e (56)), é possível escrever a equação da curva de compressão do concreto proposta por SAENZ (1964), apresentada na equação (52):

$$\sigma_c = \frac{\varepsilon_c}{\frac{1}{E_c} + \varepsilon_c\left(\frac{1}{f_{ck}} - \frac{2}{E_c \, . \, \varepsilon_{cp}}\right) + \varepsilon_c^2\left(\frac{1}{E_t \, . \, \varepsilon_{cp}^2}\right)}$$

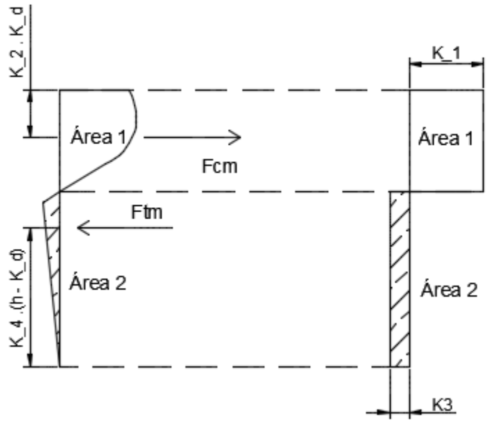
$$\sigma_c = \frac{\varepsilon_c}{\frac{1}{E_c} + \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cp}}\left(\frac{E_c\,.\,\varepsilon_{cp} - 2f_{ck}}{f_{ck}}.\frac{1}{E_c}\right) + \frac{\varepsilon_c^2}{\varepsilon_{cp}^2}.\frac{1}{E_c}}$$

$$\sigma_c = \frac{E_c\,.\,\varepsilon_c}{1 + \left(\frac{E_c.\varepsilon_{cp}}{f_{ck}} - 2\right)\left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cp}}\right) + \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cp}}\right)^2} \tag{57}$$

1.5. Coeficientes de tensões médias

Os coeficientes de tensões médias são empregados para a determinação da área equivalente das distribuições de tensão do concreto, nas quais atuam as forças de reação dos materiais, como pode-se observar na Figura 14 a seguir:

Figura 14 – Coeficientes de tensões



Fonte: O autor

De acordo com CARLIN (1998) as constantes k_1 e k_2 são definidas como:

$$\int_0^{\varepsilon_{cm}} \sigma_c(\varepsilon_c)\; d\varepsilon_c = k_1\, f_{ck}\, \varepsilon_c$$

Com isso,

$$k_1 = \frac{\int_0^{\varepsilon_{cm}} \sigma_c(\varepsilon_c)\; d\varepsilon_c}{f_{ck}\, \varepsilon_c} \tag{58}$$

Neste caso, o coeficiente k_1 corresponde à altura relativa de um retângulo equivalente, ou seja, com a mesma área do diagrama gerado pelo gráfico de tensões e deformações do concreto. Neste caso em particular, aplicado à curva tensão – deformação da região comprimida da seção de concreto.

Para a demonstração do coeficiente k_2, temos o momento estático dado por:

$$M_s = s.\varepsilon_{CEN} \tag{59}$$

Onde ε_{CEN} pode ser escrito como:

$$\varepsilon_{CEN} = (1 - k_2)\varepsilon_{cm} \tag{60}$$

Substituindo (60) em (59) tem-se:

$$M_s = s.(1 - k_2)\varepsilon_{cm}$$

$$M_s = \left(\int \sigma_c d\varepsilon_c\right)(1 - k_2)\varepsilon_{cm} \tag{61}$$

Como o momento também pode ser definido como:

$$M_s = \int \sigma_c \,.\, \varepsilon_c \, d\varepsilon_c \tag{62}$$

Assim, igualando as expressões (61) e (62) tem-se:

$$\int \sigma_c \,.\, \varepsilon_c \, d\varepsilon_c = \left(\int \sigma_c \, d\varepsilon_c\right)(1 - k_2)\varepsilon_{cm}$$

$$(1 - k_2) = \frac{\int \sigma_c \,.\, \varepsilon_c \, d\varepsilon_c}{\varepsilon_{cm} \int \sigma_c \, d\varepsilon_c}$$

$$k_2 = 1 - \frac{\int \sigma_c \,.\, \varepsilon_c \, d\varepsilon_c}{\varepsilon_{cm} \int \sigma_c \, d\varepsilon_c} \tag{63}$$

O coeficiente k_2 representa o braço de alavanca resultante correspondente à resultante de distribuição equivalente de tensões provocadas na região comprimida da seção.

As constantes k_3 e k_4 são definidas da mesma forma que k_1 e k_4, respectivamente, contudo, aplicadas a casos de tração, ou seja:

$$k_3 = \frac{\int_0^{\varepsilon_{tm}} \sigma_c(\varepsilon_c) \, d\varepsilon_c}{f_{ck} \, \varepsilon_c} \tag{64}$$

$$k_4 = 1 - \frac{\int_0^{\varepsilon_{tm}} \sigma_c.\varepsilon_c \, d\varepsilon_c}{\varepsilon_{cm} \int_0^{\varepsilon_{tm}} \sigma_c \, d\varepsilon_c} \tag{65}$$

Da mesma forma que k_1, o coeficiente k_3 também está relacionado à altura de um retângulo equivalente com mesma área da curva de tensão – deformação do concreto, contudo de sua região tracionada.

O coeficiente k_4 possui o mesmo significado teórico que o coeficiente k_2, conduto aplicado à região tracionada da seção de concreto.

1.5.1. Coeficientes para $\varepsilon_c \leq \varepsilon_{tp}$

Com isso, pode-se determinar os valores de k_m, $m = 1,2,3,4$ para uma deformação $\varepsilon_c \leq \varepsilon_{tp}$, conforme apresentado na Figura 04.

1.5.1.1. Coeficiente k_1

Substituindo a equação (57) em (58), temos:

$$k_1 = \frac{1}{f_{tk} \cdot \varepsilon_{cm}} \int_0^{\varepsilon_{cm}} \frac{E_c \cdot \varepsilon_c}{1 + \left(\frac{E_c \cdot \varepsilon_{cp}}{\sigma_{cp}} - 2\right)\left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cp}}\right) + \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cp}}\right)^2} \, d\varepsilon_c \tag{66}$$

Considera-se:

$$A = \frac{1}{\varepsilon_{cp}}\left(\frac{E_c \cdot \varepsilon_{cp}}{\sigma_{cp}} - 2\right) \quad , \quad B = \left(\frac{1}{\varepsilon_{cp}}\right)^2 \quad e \quad q = 4B - A^2 \tag{67}$$

Onde A e B são constantes.

Com isso, substituindo as expressões de (67) na equação (66), tem-se:

$$k_1 = \frac{1}{f_{tk} \cdot \varepsilon_{cm}} \int_0^{\varepsilon_{cm}} \frac{E_c \cdot \varepsilon_c}{1 + A\varepsilon_c + B{\varepsilon_c}^2} \, d\varepsilon_c \tag{68}$$

Observa-se que a integral apresentada na equação (68) é similar à integral geral a segui:

$$\int \frac{x}{ax^2 + bx + c} \, dx \tag{69}$$

Desta forma, resolvendo a integral (68), torna-se possível resolver a expressão apresentada em (67). Com isso, a integral (68) é resolvida inicialmente por partes:

$$\int \frac{x}{ax^2+bx+c}\,dx = \int \frac{2ax+b}{2a\,(ax^2+bx+c)} - \frac{b}{2a(ax^2+bx+c)}\,dx$$

Onde:

$$\int \frac{2ax+b}{2a\,(ax^2+bx+c)}\,dx \tag{70}$$

$$\int \frac{b}{2a(ax^2+bx+c)}\,dx \tag{71}$$

Para a integral (70), por substituição, pode-se escrever:

$$u = ax^2+bx+c \;\Longrightarrow du = (2ax+b)dx \;\Longrightarrow dx = \frac{du}{2ax+b} \tag{72}$$

$$\int \frac{2ax+b}{2au}\,.\frac{du}{2ax+b} = \int \frac{1}{2a}\,.\frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2a}\,\ln(u)$$

Assim, sabendo que $u = ax^2+bx+c$, o valor da integral (70) é:

$$\int \frac{2ax+b}{2a\,(ax^2+bx+c)}dx = \frac{1}{2a}\ln(ax^2+bx+c\,) \tag{73}$$

No caso da integral (71), esta pode ser reescrita como:

$$\frac{b}{2a}\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$$

Onde:

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{1}{\left(\sqrt{a}\,x + {}^{b}\!/_{2\sqrt{a}}\right)^2 + c - {}^{d^2}\!/_{4a}}dx \tag{74}$$

Por substituição:

$$u = \sqrt{a}\, x + {}^{b}\!/_{2\sqrt{a}} \Rightarrow du = \sqrt{a}\, dx \tag{75}$$

Tem-se, da expressão (74):

$$\int \frac{1}{\left(\sqrt{a}\, x + {}^{b}\!/_{2\sqrt{a}}\right)^2 + c - {}^{d^2}\!/_{4a}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{1}{u^2 + \dfrac{4ac - b^2}{4a}}\, du \tag{76}$$

Realizando o procedimento de substituição, temos:

$$u = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2\sqrt{a}} \,.\, tg\,\theta \Rightarrow \mathrm{du} = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2\sqrt{a}} \,.\, sec^2\theta \,.\, d\theta \tag{77}$$

Com isso, a expressão (76) é reescrita como:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{1}{\dfrac{4ac - b^2}{4a} \,.\, tg^2\,\theta + \dfrac{4ac - b^2}{4a}} \,.\, \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2\sqrt{a}} \,.\, sec^2\theta \,.\, d\theta$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{1}{\dfrac{4ac - b^2}{4a} \,.\, (1 + tg^2\,\theta)} \,.\, \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2\sqrt{a}} \,.\, sec^2\theta \,.\, d\theta \tag{78}$$

Pela identidade trigonométrica:

$$1 + tg^2\theta = sec^2\theta \tag{79}$$

Assim, a solução da integral (74) é dada por:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{1}{\dfrac{4ac - b^2}{4a} \,.\, sec^2\theta} \,.\, \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2\sqrt{a}} \,.\, sec^2\theta \,.\, d\theta$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{4a}{4ac - b^2} \,.\, \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2\sqrt{a}} \,.\, d\theta$$

$$\int \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \,.\, d\theta = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}}\, \theta \tag{80}$$

Substituindo as variáveis apresentadas em (75) e (79), tem-se:

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \, . \, arctg \left(\frac{2u\sqrt{a}}{\sqrt{4ac - b^2}} \right)$$

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \, . \, arctg \left[\frac{2\sqrt{a}\left(\sqrt{a}\, x + {}^{b}/_{2\sqrt{a}}\right)}{\sqrt{4ac - b^2}} \right]$$

Com isso:

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \, . \, \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \, . \, arctg \left[\frac{2\sqrt{a}\left(\sqrt{a}\, x + {}^{b}/_{2\sqrt{a}}\right)}{\sqrt{4ac - b^2}} \right]$$

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \, . \, arctg \left(\frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} \right) \tag{81}$$

Desta forma, o resultado da integral apresentada em (78) corresponde à soma das expressões encontradas em (73) e (81), ou seja:

$$\int \frac{x}{ax^2 + bx + c} \, dx = \left[\begin{array}{c} \frac{1}{2a} \ln(ax^2 + bx + c\,) - \\ \frac{b}{2a} . \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \, . \, arctg \left(\frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} \right) \end{array} \right] \tag{82}$$

Entretanto, como a expressão original é a apresentada em (68), assim o resultado da mesma é dado por:

$$\int_0^{\varepsilon_{cm}} \frac{E_c \, . \, \varepsilon_c}{1 + A\varepsilon_c + B{\varepsilon_c}^2} \, d\varepsilon_c = E_c \left[\begin{array}{c} \frac{1}{2B} \ln(Bx^2 + Ax + c\,) - \\ - \frac{A}{2B} . \frac{2}{\sqrt{4Bc - A^2}} \, . \, arctg \left(\frac{2Bx + A}{\sqrt{4Bc - A^2}} \right) \end{array} \right] \Bigg|_0^{\varepsilon_{cm}}$$

$$\int_{0}^{\varepsilon_{cm}} \frac{E_c\,.\ \varepsilon_c}{1 + A\varepsilon_c + B{\varepsilon_c}^2}\, d\varepsilon_c = E_c \left[\begin{array}{c} \frac{1}{2B}\ln(B{\varepsilon_{cm}}^2 + A\varepsilon_{cm}x + 1\,) + \\ + \frac{A}{2B}.\frac{2}{\sqrt{4B - A^2}}\,. \\ .\left(arctg\left(\frac{A}{\sqrt{q}}\right) - arctg\left(\frac{2B\varepsilon_{cm} + A}{\sqrt{q}}\right)\right) \end{array} \right] \tag{83}$$

Assim, o valor de k_1 apresentada na expressão (68) é:

$$k_1 = \frac{E_c}{f_{tk}\,.\,\varepsilon_{cm}} \left[\begin{array}{c} \frac{1}{2B}\ln(B{\varepsilon_{cm}}^2 + A\varepsilon_{cm} + 1\,) + \\ + \frac{A}{2B}.\frac{2}{\sqrt{4B - A^2}}\,.\left(arctg\left(\frac{A}{\sqrt{q}}\right) - arctg\left(\frac{2B\varepsilon_{cm} + A}{\sqrt{q}}\right)\right) \end{array} \right] \tag{84}$$

1.5.1.2. Coeficiente k_2

Para k_2 temos:

$$k_2 = 1 - \frac{\int_0^{\varepsilon_{cm}} \varepsilon_c\,.\,\sigma_c\, d\varepsilon_c}{\varepsilon_{cm}\int_0^{\varepsilon_{cm}} \sigma_c\, d\varepsilon_c} \tag{85}$$

O resultado da integral $\int_0^{\varepsilon_{cm}} \sigma_c\, d\varepsilon_c$ está apresentado na expressão (63), basta, portanto, conhecer o resultado de $\int_0^{\varepsilon_{cm}} \varepsilon_c\,.\,\sigma_c\, d\varepsilon_c$.

Da mesma forma, as considerações feitas em (68) permanecerão para os cálculos de k_2. Desta forma, tem-se a seguinte expressão:

$$\int_{0}^{\varepsilon_{cm}} \varepsilon_c\,.\,\sigma_c\, d\varepsilon_c = \int_{0}^{\varepsilon_{cm}} \frac{E_c\,.\ \varepsilon_c^2}{1 + A\varepsilon_c + B{\varepsilon_c}^2}\, d\varepsilon_c \tag{86}$$

A integral apresentada em (86) é semelhante a apresentada a seguir:

$$\int \frac{x^2}{ax^2 + bx + c}\,dx \tag{87}$$

Resolvendo a integral (87), tem-se:

$$\int \frac{x^2}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{1}{a} - \frac{bx+c}{a(ax^2+bx+c)}dx$$

$$\int \frac{x^2}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{1}{a}\,dx - \int \frac{b}{a}\,.\,\frac{x}{ax^2+bx+c}dx - \int \frac{c}{a}\,.\,\frac{1}{ax^2+bx+c}dx$$

Todas as integrais já foram determinadas anteriormente, a saber equações (81) e (82).

$$\int \frac{x^2}{ax^2+bx+c}dx$$

$$= \left[\begin{array}{c} \frac{x}{a} - \\ \frac{b}{a}\left[\frac{1}{2a}\ln(ax^2+bx+c\,) - \frac{b}{2a}.\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\,.\,arctg\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)\right] \\ -\frac{c}{a}\left[\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\,.\,arctg\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)\right] \end{array}\right] \quad (88)$$

Aplicando o intervalo de integração apresentado em (86) e as condições impostas em (68), tem-se:

$$\int_0^{\varepsilon_{cm}} \varepsilon_c\,.\sigma_c\,d\varepsilon_c = \int_0^{\varepsilon_{cm}} \frac{E_c\,.\,\varepsilon_c^2}{1+A\varepsilon_c+B{\varepsilon_c}^2}\,d\varepsilon_c =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \frac{x}{a} - \frac{b}{a}\left[\frac{1}{2a}\ln(ax^2+bx+c\,) - \frac{b}{2a}.\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\,.\,arctg\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)\right] \\ -\frac{c}{a}\left[\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\,.\,arctg\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)\right] \end{array}\right]\Bigg|_0^{\varepsilon_{cm}}$$

$$\int_0^{\varepsilon_{cm}} \varepsilon_c\,.\sigma_c\,d\varepsilon_c = \frac{\varepsilon_c}{B} - \frac{2}{B\sqrt{q}}\,.arctg\left(\frac{2B\varepsilon_c+A}{\sqrt{q}}\right) + \frac{A^2}{B^2\sqrt{q}}\,.arctg\left(\frac{2B\varepsilon_c+A}{\sqrt{q}}\right)$$

$$-\frac{A}{2B^2}\,ln(B\,\varepsilon_c^2 + A\varepsilon_c + 1)$$

$$\int_{0}^{\varepsilon_{cm}} \varepsilon_c \,.\sigma_c \, d\varepsilon_c = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_{cm}}{B} + \left(\frac{A^2 - 2B}{B^2\sqrt{q}}\right).arctg\left(\frac{2B\varepsilon_{cm} + A}{\sqrt{q}}\right) - \\ \frac{A}{2B^2}\ln(B\varepsilon_{cm}^2 + A\varepsilon_{cm} + 1) - \\ \left(\frac{A^2 - 2B}{B^2\sqrt{q}}\right).arctg\frac{A}{\sqrt{q}} \end{bmatrix} \tag{89}$$

Com isso, o resultado de k_2 é:

$$k_2 = 1 - \frac{\begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_{cm}}{B} + \left(\frac{A^2 - 2B}{B^2\sqrt{q}}\right).arctg\left(\frac{2B\varepsilon_{cm} + A}{\sqrt{q}}\right) - \\ \frac{A}{2B^2}\ln(B\varepsilon_{cm}^2 + A\varepsilon_{cm} + 1) - \left(\frac{A^2 - 2B}{B^2\sqrt{q}}\right).arctg\frac{A}{\sqrt{q}} \end{bmatrix}}{\varepsilon_{cm}\begin{bmatrix} \frac{1}{2B}\ln(B{\varepsilon_{cm}}^2 + A\varepsilon_{cm} + 1) + \\ + \frac{A}{2B}.\frac{2}{\sqrt{4B - A^2}}.\left(arctg\left(\frac{A}{\sqrt{q}}\right) - arctg\left(\frac{2B\varepsilon_{cm} + A}{\sqrt{q}}\right)\right) \end{bmatrix}} \tag{90}$$

1.5.1.3. Coeficiente k_3

Para o caso de k_3, a constante apresentada na equação (64), com base no principio da mecânica linear anteriormente mencionada na equação (2). Assim:

$$\int_0^{\varepsilon_{tm}} \sigma_c(\varepsilon_c)\ d\varepsilon_c = \int_0^{\varepsilon_{tm}} E_c\ \varepsilon_c\ d\varepsilon_c$$

$$\int_0^{\varepsilon_{tm}} E_c\ \varepsilon_c\ d\varepsilon_c = \left.\frac{E_c\,.\varepsilon_c^2}{2}\right|_0^{\varepsilon_{tm}} = \frac{E_c\,.\varepsilon_{tm}^2}{2} \tag{91}$$

Desta forma, k_3 é determinado por:

$$k_3 = \frac{\frac{E_c\,.\varepsilon_{tm}^2}{2}}{f_{tk}\ \varepsilon_c} \Longrightarrow k_3 = \frac{E_c\,.\ \varepsilon_{tm}}{2f_{tk}} \tag{92}$$

1.5.1.4. Coeficiente k_4

Aplicando o mesmo raciocínio para k_4, apresentado na equação (65), pode-se escrever:

$$\int_0^{\varepsilon_{tm}} \sigma_c \,.\, \varepsilon_c \, d\varepsilon_c = \int_0^{\varepsilon_{tm}} E_c \, \varepsilon_c \, \varepsilon_c \, d\varepsilon_c = \int_0^{\varepsilon_{tm}} E_c \, \varepsilon_c^2 d\varepsilon_c$$

$$\int_0^{\varepsilon_{tm}} E_c \, \varepsilon_c^2 d\varepsilon_c = \left. \frac{\varepsilon_c^3 \, E_c}{3} \right|_0^{\varepsilon_{tm}} = \frac{\varepsilon_{tm}^3 \, E_c}{3} \tag{93}$$

Com isso, a partir dos resultados apresentados em (91) e (93), k_4 pode ser determinado :

$$k_4 = 1 - \frac{\frac{\varepsilon_{tm}^3 \, E_c}{3}}{\varepsilon_{tm} \frac{E_c \,.\, \varepsilon_{tm}^2}{2}} \Rightarrow k_4 = \frac{1}{3} \tag{94}$$

1.5.2. Coeficientes para $\varepsilon_{tp} < \varepsilon_{tm} < \varepsilon_{tf}$

Para este caso, não há necessidade de calcular normalmente os coeficientes k_1 e k_2, pois ambos dependem exclusivamente da variação de tensão e deformação do concreto comprimido, enquanto os coeficientes k_3 e k_4 estão relacionados com as tensões – deformações do concreto tracionado.

1.5.2.1. Coeficiente k_3

Para o caso aplicado a deformações no intervalo $\varepsilon_{tp} < \varepsilon_{tm} < \varepsilon_{tf}$, as constates k_3, k_4 determinadas conforme as verificações realizadas em (2) e (3). Isso é feito porque a deformação é acumulativa ao longo do diagrama apresentado na Figura 04.

Assim, para o valor de k_3 deve-se calcular:

$$k_3 = \frac{\int_0^{\varepsilon_{tm}} \sigma_c\,(\varepsilon_c)\ d\varepsilon_c}{f_{tk}\ \varepsilon_{tm}}$$

$$\int_0^{\varepsilon_{tm}} \sigma_c\,(\varepsilon_c)\ d\varepsilon_c = \int_0^{\varepsilon_{tp}} \frac{f_{tk}}{\varepsilon_{tp}}\ \varepsilon_c d\varepsilon_c + \int_{\varepsilon_{tp}}^{\varepsilon_{tm}} f_{tk} - \ (\varepsilon_c - \varepsilon_{tp})| - E_t|\ d\varepsilon_c \qquad (95)$$

$$\int_0^{\varepsilon_{tm}} \sigma_c\,(\varepsilon_c)\ d\varepsilon_c = \left[\frac{f_{tk}}{\varepsilon_{tp}} .\ \frac{\varepsilon_c^2}{2}\right]\Bigg|_0^{\varepsilon_{tp}} + \left[f_{tk}\,.\ \varepsilon_c - \frac{\varepsilon_c^2\ .\ |E_t|}{2} + \varepsilon_{tp}.|E_t|\varepsilon_c\right]\Bigg|_{\varepsilon_{tp}}^{\varepsilon_{tm}}$$

$$\int_0^{\varepsilon_{tm}} \sigma_c\,(\varepsilon_c)\ d\varepsilon_c = \begin{bmatrix} \dfrac{f_{tk}\ .\varepsilon_{tp}}{2} + f_{tk}.\ \varepsilon_{tm} - \dfrac{\varepsilon_{tm}^2\ .\ |E_t|}{2} + \varepsilon_{tp}.|E_t|\varepsilon_{tm} \\ - f_{tk}.\ \varepsilon_{tp} + \dfrac{\varepsilon_{tp}^2\ .\ |E_t|}{2} - \ \varepsilon_{tp}^2\ .\ |E_t| \end{bmatrix}$$

$$\int_0^{\varepsilon_{tm}} \sigma_c\,(\varepsilon_c)\ d\varepsilon_c = \left(f_{tk} + \varepsilon_{tp}.|E_t|\right)\varepsilon_{tm} - \frac{\varepsilon_{tm}^2\ .\ |E_t|}{2} - \frac{f_{tk}\ .\varepsilon_{tp}}{2} - \frac{\varepsilon_{tp}^2\ .\ |E_t|}{2} \qquad (96)$$

Aplicando a equação (95) em k_3:

$$k_3 = \frac{1}{f_{tk}\ \varepsilon_{tm}}\left[\left(f_{tk} + \varepsilon_{tp}.|E_t|\right)\varepsilon_{tm} - \frac{\varepsilon_{tm}^2\ .\ |E_t|}{2} - \frac{f_{tk}\ .\varepsilon_{tp}}{2} - \frac{\varepsilon_{tp}^2\ .\ |E_t|}{2}\right] \qquad (97)$$

1.5.2.2. Coeficiente k_4

Para k_4, os cálculos são mais longos, já que o intervalo de integração muda, devido à mudança de equação do diagrama:

$$\int_0^{\varepsilon_{tm}} \sigma_c\ .\varepsilon_c\, d\varepsilon_c = \int_0^{\varepsilon_{tp}} \varepsilon_c^2 \frac{f_{tk}}{\varepsilon_{tp}}\ d\varepsilon_c + \int_{\varepsilon_{tp}}^{\varepsilon_{tm}} \varepsilon_c f_{tk} - \ \varepsilon_c(\varepsilon_c - \varepsilon_{tp})| - E_t|\ d\varepsilon_c$$

$$\int_0^{\varepsilon_{tm}} \sigma_c\ .\varepsilon_c\, d\varepsilon_c = \left[\frac{f_{tk}}{\varepsilon_{tp}} .\ \frac{\varepsilon_c^3}{3}\right]\Bigg|_0^{\varepsilon_{tp}} + \left[\frac{f_{tk}.\ \varepsilon_c^2}{2} - \frac{\varepsilon_c^3\ .\ |E_t|}{3} + \frac{\varepsilon_c^2.|E_t|\varepsilon_{tp}}{2}\right]\Bigg|_{\varepsilon_{tp}}^{\varepsilon_{tm}}$$

$$\int_0^{\varepsilon_{tm}} \sigma_c \ . \varepsilon_c \, d\varepsilon_c = \begin{bmatrix} \dfrac{f_{tk} \ . \varepsilon_{tp}^2}{3} + \dfrac{f_{tk} \ . \varepsilon_{tm}^2}{2} - \dfrac{|E_t| \ . \varepsilon_{tm}^3}{3} + \dfrac{|E_t| \ . \varepsilon_{tm}^2 \ . \ \varepsilon_{tp}}{2} - \\ \dfrac{f_{tk} . \ \varepsilon_{tp}^2}{2} - \dfrac{\varepsilon_{tp}^3 \ . \ |E_t|}{3} - \dfrac{\varepsilon_{tp}^3 \ . \ |E_t|}{2} \end{bmatrix}$$

$$\int_0^{\varepsilon_{tm}} \sigma_c \ . \varepsilon_c \, d\varepsilon_c = -\frac{f_{tk} \ . \varepsilon_{tp}^2}{6} + \left(\frac{f_{tk}}{2} + \frac{|E_t| . \varepsilon_{tp}}{2}\right)\varepsilon_{tm}^2 - \frac{|E_t| \ . \varepsilon_{tm}^3}{3} - \frac{\varepsilon_{tp}^3 \ . \ |E_t|}{6} \quad (98)$$

Assim, conforme os resultados apresentados em (96) e (9 8), o valor de k_4 é:

$$k_4 = 1 - \frac{-\dfrac{f_{tk} \ . \varepsilon_{tp}^2}{6} + \left(\dfrac{f_{tk}}{2} + \dfrac{|E_t| . \varepsilon_{tp}}{2}\right)\varepsilon_{tm}^2 - \dfrac{|E_t| \ . \varepsilon_{tm}^3}{3} - \dfrac{\varepsilon_{tp}^3 \ . \ |E_t|}{6}}{\varepsilon_{tm}\left[\left(f_{tk} + \varepsilon_{tp} . |E_t|\right)\varepsilon_{tm} - \dfrac{\varepsilon_{tm}^2 \ . \ |E_t|}{2} - \dfrac{f_{tk} \ . \varepsilon_{tp}}{2} - \dfrac{\varepsilon_{tp}^2 \ . \ |E_t|}{2}\right]} \quad (99)$$

1.5.3. Coeficientes $\boldsymbol{\varepsilon_{tf} < \varepsilon_{cm}}$

Para deformações que estão em $\varepsilon_{\mathrm{tf}} < \varepsilon_{\mathrm{cm}}$, conforme apresentado na Figura 04, a integral sob a curva do diagrama é escrita como:

$$\int_0^{\varepsilon_{tm}} \sigma_c \left(\varepsilon_c\right) \, d\varepsilon_c = \int_0^{\varepsilon_{tp}} \frac{f_{tk}}{\varepsilon_{tp}} \varepsilon_c \, d\varepsilon_c + \int_{\varepsilon_{tp}}^{\varepsilon_{tf}} f_{tk} - \ \left(\varepsilon_c - \varepsilon_{tp}\right)| - E_t| \ d\varepsilon_c + \int_{\varepsilon_{tf}}^{\varepsilon_{tm}} 0 d\varepsilon_c \ (100)$$

Ou seja, após o limite estabelecido na curva por ε_{tf}, a equação da mesma torna-se constante no valor zero. Com isso:

$$\int_{\varepsilon_{tf}}^{\varepsilon_{tm}} 0 d\varepsilon_c \ = \ 0$$

Para este caso repete-se a explicação dada anteriormente, ou seja, não há necessidade de calcular normalmente os coeficientes k_1 e k_2, pois ambos dependem exclusivamente da variação de tensão e deformação do concreto comprimido, enquanto os coeficientes k_3 e k_4 estão relacionados com as tensões – deformações do concreto tracionado.

1.5.3.1. Coeficiente k_3

Desta forma, a partir do mesmo procedimento de cálculo utilizada para determinar a equação (94), tem-se para a equação (100):

$$\int_0^{\varepsilon_{tm}} \sigma_c\ (\varepsilon_c)\ d\varepsilon_c = \left[\frac{f_{tk}}{\varepsilon_{tp}}.\ \frac{\varepsilon_c^2}{2}\right]\Bigg|_0^{\varepsilon_{tp}} + \left[f_{tk}.\ \varepsilon_c - \frac{\varepsilon_c^2\ .\ |E_t|}{2} + \varepsilon_{tp}.|E_t|\varepsilon_c\right]\Bigg|_{\varepsilon_{tp}}^{\varepsilon_{tf}}$$

$$\int_0^{\varepsilon_{tm}} \sigma_c\ (\varepsilon_c)\ d\varepsilon_c = \left(f_{tk} + \varepsilon_{tp}.|E_t|\right)\varepsilon_{tf} - \frac{\varepsilon_{tf}^2\ .\ |E_t|}{2} - \frac{f_{tk}\ .\varepsilon_{tp}}{2} - \frac{\varepsilon_{tp}^2\ .\ |E_t|}{2}$$

$$k_3 = \frac{1}{f_{tk}\ \varepsilon_{tm}}\left[\left(f_{tk} + \varepsilon_{tp}.|E_t|\right)\varepsilon_{tf} - \frac{\varepsilon_{tf}^2\ .\ |E_t|}{2} - \frac{f_{tk}.\varepsilon_{tp}}{2} - \frac{\varepsilon_{tp}^2\ .\ |E_t|}{2}\right] \qquad (101)$$

1.5.3.2. Coeficiente k_4

Da mesma forma, para se determinar k_4, :

$$\int_0^{\varepsilon_{tm}} \varepsilon_c\ \sigma_c(\varepsilon_c)\ d\varepsilon_c$$

$$= \int_0^{\varepsilon_{tp}} \frac{f_{tk}}{\varepsilon_{tp}}\varepsilon_c^2\ d\varepsilon_c + \int_{\varepsilon_{tp}}^{\varepsilon_{tf}} \varepsilon_c f_{tk} - \ \varepsilon_c\left(\varepsilon_c - \varepsilon_{tp}\right)(-E_t)\ d\varepsilon_c + \int_{\varepsilon_{tf}}^{\varepsilon_{tm}} 0.\varepsilon_c\ d\varepsilon_c \qquad (102)$$

$$\int_0^{\varepsilon_{tm}} \varepsilon_c\ \sigma_c(\varepsilon_c)\ d\varepsilon_c = \left[\frac{f_{tk}}{\varepsilon_{tp}}.\ \frac{\varepsilon_c^3}{3}\right]\Bigg|_0^{\varepsilon_{tp}} + \left[f_{tk}.\frac{\varepsilon_c^2}{2} - \frac{\varepsilon_c^2\ .\ |E_t|}{2} + \varepsilon_{tp}.|E_t|\ \frac{\varepsilon_c^2}{2}\right]\Bigg|_{\varepsilon_{tp}}^{\varepsilon_{tf}}$$

$$\int_0^{\varepsilon_{tm}} \varepsilon_c\ \sigma_c(\varepsilon_c\ )\ d\varepsilon_c = \left[\begin{array}{c} \dfrac{f_{tk}\ .\varepsilon_{tp}^2}{3} + f_{tk}.\dfrac{\varepsilon_{tf}^2}{3} - \dfrac{\varepsilon_{tf}^3\ .\ |E_t|}{3} + \dfrac{\varepsilon_{tp}.|E_t|\ .\varepsilon_{tf}^2}{2} - \\ f_{tk}.\dfrac{\varepsilon_{tp}^2}{2} + \dfrac{\varepsilon_{tp}^3\ .\ |E_t|}{3} - |E_t|\ \dfrac{\varepsilon_{tp}^3}{2} \end{array}\right]$$

$$\int_0^{\varepsilon_{tm}} \varepsilon_c\ .\sigma_c(\varepsilon_c)\ d\varepsilon_c = \left[\begin{array}{c} -\dfrac{1}{6}f_{tk}\ .\varepsilon_{tp}^2 + \left(\dfrac{1}{2}f_{tk} + \dfrac{\varepsilon_{tp}.|E_t|}{2}\right)\dfrac{\varepsilon_{tf}^2}{3} - \\ \dfrac{\varepsilon_{tf}^3\ .\ |E_t|}{3} - |E_t|\ \dfrac{\varepsilon_{tp}^3}{6} \end{array}\right] \qquad (103)$$

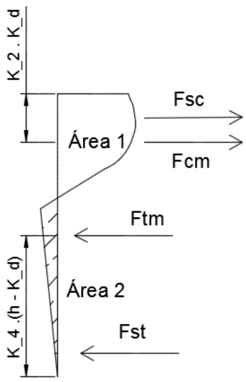
Assim:

$$k_4 = 1 - \frac{-\frac{1}{6} f_{tk} \,.\, \varepsilon_{tp}^2 + \left(\frac{1}{2} f_{tk} + \frac{\varepsilon_{tp}.|E_t|}{2}\right) \frac{\varepsilon_{tf}^2}{3} - \frac{\varepsilon_{tf}^3 \,.\, |E_t|}{3} - |E_t| \frac{\varepsilon_{tp}^3}{6}}{\varepsilon_{tm} \left[\left(f_{tk} + \varepsilon_{tp}.|E_t|\right)\varepsilon_{tf} - \frac{\varepsilon_{tf}^2 \,.\, |E_t|}{2} - \frac{f_{tk} \,.\, \varepsilon_{tp}}{2} - \frac{\varepsilon_{tp}^2 \,.\, |E_t|}{2} \right]} \tag{104}$$

1.6. Momento de Equilíbrio

A partir do que foi determinado anteriormente, pode-se calcular os valores de carga e do momento da viga:

Figura 15 – Diagrama de tensão do concreto



Fonte: O autor

Considerando que a referência é o Centróide (C.G), o equilíbrio de forças é dado por:

$$P = F_{sc} + F_{cm} - F_{tm} - F_{st}$$

$$P = F_{cm} - F_{tm} + \sum_{j=1}^{2} F_{sj} \tag{105}$$

Contudo, as forças $\mathrm{F_{cm}}$ e$\mathrm{F_{tm}}$ são definidas por:

$$F_{cm} = k_1 . f_{ck} . B_b . k_d \tag{106}$$

$$F_{tm} = k_3 . f_{tk} . B_b . (H - k_d) \tag{107}$$

Com isso, aplicando as equações (106) e (107) em (105), pode-se determinar a carga normal da viga:

$$P = k_1.f_{ck}.B_b.k_d - k_3.f_{tk}.B_b.(H - k_d) + \sum_{j=1}^{2} \sigma_{sj}.A_{sj} \qquad (108)$$

Quando nenhuma carga está sendo aplicada ($P = 0$), pode-se afirmar que o valor da altura da linha neutra é:

$$0 = k_1.f_{ck}.B_b.k_d - k_3.f_{tk}.B_b.(H - k_d) + \sum_{j=1}^{2} \sigma_{sj}.A_{sj}$$

$$k_d\,(k_1.f_{ck}.B_b + k_3.f_{tk}.B_b) = k_3.f_{tk}.H - \sum_{j=1}^{2} \sigma_{sj}.A_{sj}$$

$$k_d = \frac{k_3.f_{tk}.H - \sum_{j=1}^{2} \sigma_{sj}.A_{sj}}{B_b(k_1.f_{ck} + k_3.f_{tk})} \qquad (109)$$

No caso do momento, baseado na mesma referência C.G:

$$M = \left[\begin{array}{c} k_1.f_{ck}.B_b.k_d\left(\frac{H}{2} - k_2 k_d\right) + \left(\sum_{j=1}^{2} \sigma_{sj}.A_{sj}\right)\left(\frac{H}{2} - d_j\right) - \\ k_3.f_{tk}.B_b.(H - k_d)\left(\frac{H}{2} - k_4(H - k_d)\right) \end{array}\right] \qquad (110)$$

1.7. Deflexão da Viga

Finalmente, pode-se avaliar a deflexão de uma viga de concreto armado como sendo:

$$\delta = \int_0^L \frac{\varepsilon_{cm}}{k_d}\,.\bar{M}\,dx \qquad (111)$$

A integral dada por (111) é resolvida numericamente, usou-se o procedimento de Simpson par determinar o deslocamento sofrido pela viga de acordo com uma carga pontual aplicada no meio do vão. Desta forma, tem-se:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}\begin{bmatrix} f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \\ \dots + \\ 2f(x_{i-2}) + 4f(x_{i-1}) + f(x_i) \end{bmatrix} \tag{112}$$

Sendo

$$\Delta x = \frac{b-a}{i}$$

Onde i corresponde ao numero de intervalos determinados para o cálculo do somatório. Já *a* e *b* correspondem ao início e final, respectivamente, do eixo de referencia de contagem do comprimento da viga.

Valendo-se que $i = 4$ intervalos, tem-se:

$$\Delta x = \frac{\frac{L}{2} - 0}{4} = \frac{L}{8}$$

Com isso, a deflexão da viga é dada por:

$$2\int_0^{L/2} \frac{x}{2}.k(x)dx \cong 2\frac{L}{24}\left[0 + 4\frac{L}{16}.k\left(\frac{L}{8}\right) + 2\frac{L}{8}.k\left(\frac{L}{4}\right) + 4\frac{3L}{16}.k\left(\frac{3L}{8}\right) + \frac{L}{4}.k\left(\frac{L}{2}\right)\right]$$

Onde *x* corresponde ao trecho que de viga correspondente.

$$\delta = 2\int_0^{L/2} \frac{x}{2}.k(x)dx \cong \frac{L^2}{48}\left[k\left(\frac{L}{8}\right) + k\left(\frac{L}{4}\right) + 3k\left(\frac{3L}{8}\right) + k\left(\frac{L}{2}\right)\right] \tag{113}$$

Considerando um caso mais geral, aplicado a vigas isostáticas subdivididas em i partes, tem-se, de acordo com a definição do Método de Simpson apresentada em (122), tem-se:

$$\Delta x = \frac{\frac{L}{2} - 0}{i} = \frac{L}{2i}$$

Logo, a expressão geral para a equação de Simpson é:

$$\delta = 2\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{x}{2}.k(x)dx \cong 2.\left(\frac{L}{2n}.\frac{1}{3}\right)\begin{bmatrix} f(x_0) + f(x_i) + \\ 4\sum_{i=1}^{L/2} \frac{1}{2}\left(\frac{L/2}{i}\right)(2i-1).k\left[\left(\frac{L/2}{i}\right)(2i-1)\right] + \\ 2\sum_{i=1}^{\frac{L}{2}-i} \frac{1}{2}\left(\frac{L/2}{i}\right)(2i).k\left[\left(\frac{L/2}{i}\right)(2i)\right] \end{bmatrix}$$

2. DOMÍNIOS E ESTÁDIOS DO CONCRETO E SUAS RELAÇÕES NUMERICAS

2.1. Domínios de deformação

A ruptura das estruturas de concreto armado é dada primeiramente pela ruptura do concreto, tendo a armadura escoado ou não. Quando o colapso acontece, é definido que a estrutura atingiu o estado limite último de ruptura. Contudo, constatou-se que deve-se limitar o alongamento da armadura tracionada, já que esta acarreta em fissuras agravantes, sem que tenha ocorrido a ruptura do concreto por compressão. (FUSCO, 1981)

Desta forma, as análises posteriores contemplam que o esgotamento da capacidade resistente da estrutura, podendo ocorrer tanto pela ruptura do concreto comprimido, quanto na pela deformação excessiva da armadura tracionada. (FUSCO, 1981)

Conforme estudos e ensaios realizados, constatou-se que a ruptura de compressão do concreto ocorre em 2‰, para quando a peça estrutural está submetida à compressão pura, e à 3,5‰ quando o sistema está em flexão. Para o caso de flexão, tem-se conhecimento que a linha neutra está variando ao longo da altura da seção transversal. (JR e SILVA, 2010)

Da mesma forma, o alongamento último referente ao aço é de 10‰. Este valor, contudo, é arbitrário, pois considera-se que o concreto não está sofrendo nenhum esforço de tração. Pesquisas realizadas por SUSSEKIND (1985) comprovaram que a relação concreto e aço submetidos à flexão, no banzo tracionado, o aço escoa à no máximo 7‰ . (JR e SILVA, 2010)

2.1.1. Domínio 1

Caracteriza-se pela ruina da estrutura através de tração completa da seção transversal. O aço de tração está completamente escoado, deformado a 10‰, enquanto o concreto está também tracionado, com linha neutra variando de 0 a $-\infty$. (JR e SILVA, 2010)

Observa-se esse comportamento na Figura 16, domínio 1.

2.1.2. Domínio 2

A linha neutra encontra-se dentro da seção transversal, com a deformação do aço de tração fixa em 10‰ e a deformação de compressão do concreto variando entre 0 e 3,5‰ (Figura 16, domínio 2). Caso a seção possua armadura de compressão, esta varia desde a tração, onde a linha neutra localiza-se entre altura 0 (zero) e o C.G da armadura de compressão, até sua compressão completa, cuja linha neutra localiza-se no C.G da armadura até o limite definido pelo domínio 2. A armadura de tração da peça ocorre na ruína plástica excessiva, podendo ocorrer também ruína na compressão do concreto. (JR e SILVA, 2010)

2.1.3. Domínio 3

Caracterizada também pela linha neutra dentro dos limites da seção transversal. O concreto está na iminência da ruptura, enquanto a deformação do aço varia do limite do escoamento plástico (que varia para cada tipo de aço) até 10‰. Caso tenha aço de compressão, ao contrário do domínio 2, este caracteriza-se por estar completamente submetido à esforços de compressão. (Figura 16, domínio 3).

2.1.4. Domínio 4 e 4a

A estrutura está submetida à flexão, com a altura da linha neutra ainda dentro da seção. Observa-se que o aço de tração, nessas condições, está sendo mal aproveitado, já que sua capacidade de escoamento à tração é muito maior que o concreto, porém está submetido ainda ao regime elástico neste domínio, enquanto o concreto está na iminência da ruptura à 3,5‰. (Figura 16, domínio 4)

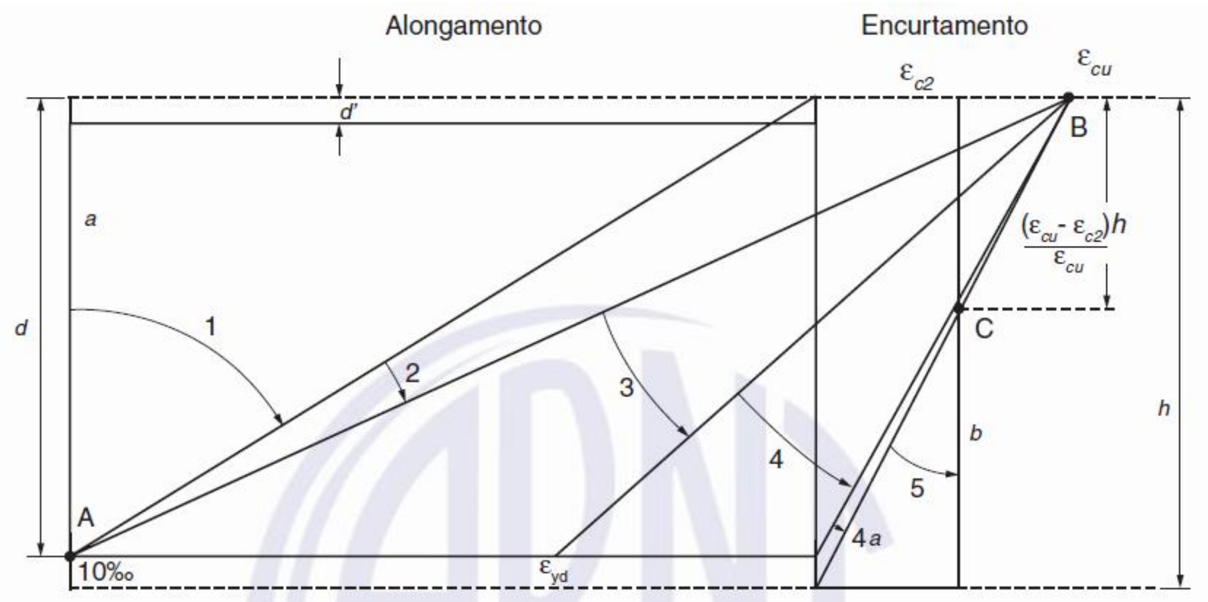
Este domínio caracteriza-se pela ruptura brusca, sem aviso prévio a partir das deformações. São características de seções superarmadas.

2.1.5. Domínio 5

Linha neutra localiza-se fora da seção transversal, variando de 0 a ∞. A seção está submetida completamente à compressão, levando o concreto à ruptura com deformação de 2‰, como pode-se observar na Figura 16, domínio 5. (JR e SILVA, 2010)

Todos os domínios acima mencionados podem ser observados na Figura 16 a seguir, extraída da NBR 6118: 2014.

Figura 16 – Domínios do Estado Limite Último de uma seção transversal



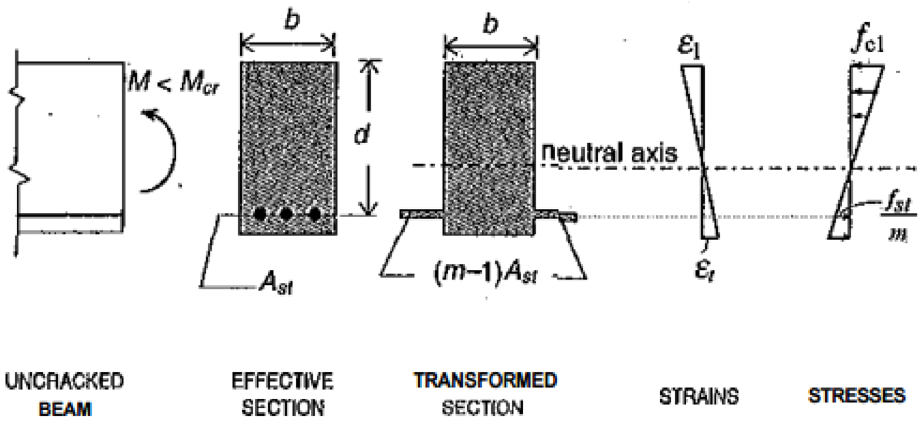
Fonte: NBR 6118: 2014

2.2. Estádios de Fissuração

2.2.1. Estádio 1

O Estádio 1 é caracterizado pela seção transversal, que está sendo analisada, não ter fissuras. Isso significa que o momento solicitante é menor que o momento de fissuração da peça e as tensões de tração geradas são menores que o f_{tk} do concreto. A distribuição de tensões para este Estádio torna-se linear, conforme na Figura 17 a seguir. (PILLAI & MENON, 2005)

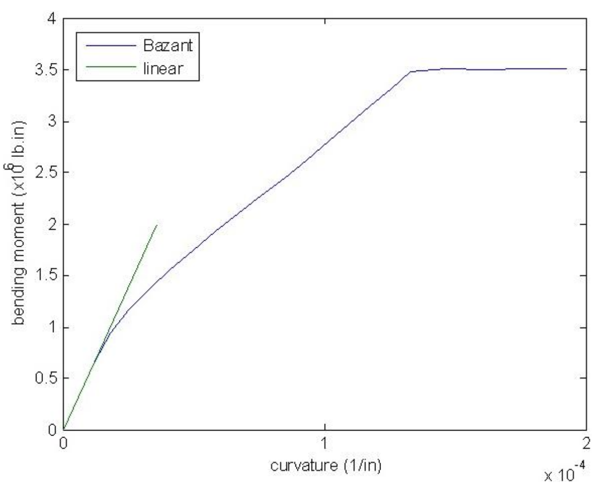
Figura 17 – Distribuição de tensões (Stresses) em seção no Estádio 1



Fonte: PILLAI & MENON (2005)

Apesar de considerar que todos os cálculos realizados para o estádio 1 estão em função da deformação de compressão do concreto (ε_{cm}), ambos os materiais (concreto e aço) estão submetidos ao estádio linear de tensão, ou seja, ao regime elástico. Desta forma, é possível substituir os cálculos realizados por cálculos de regime linear, onde a diferença é mínima, como se pode observar na imagem a seguir:

Figura 18 – Momento curvatura de uma seção de concreto armado



Fonte: O autor

Apesar da complexidade das equações de BAZANT (1983), pode-se determinar uma equação polinomial para o cálculo da linha neutra da seção. Esta, por sua vez, é dependente somente da geometria da seção, módulo de elasticidade dos materiais e as áreas de aço de tração e compressão (se houver).

2.2.2. Linha Neutra

A altura da linha neutra de uma seção transversal, quando a seção está localizada nas condições de Estádio 1, pode ser determinada conforme a proporcionalidade dos materiais. Considerando a Figura 11 (a) e (b), tem-se a igualdade das deformações:

$$\frac{\varepsilon_{cm}}{k_d} = \frac{\varepsilon_{tm}}{H - k_d} = \frac{\varepsilon_{sc}}{k_d - (H - d)} = \frac{\varepsilon_{st}}{d - k_d} \tag{114}$$

Determina-se também a equação de equilíbrio da seção:

$$F_{cm} + F_{sc} = F_{tm} + F_{st}$$

$$\frac{\sigma_{cm}\,.A_{cm}}{2} + \sigma_{sc}.A_{sc} = \frac{\sigma_{tm}\,.A_{tm}}{2} + \sigma_{st}.A_{st}$$

$$\sigma_{cm}\,.A_{cm} - \sigma_{tm}\,.A_{tm} = 2(\sigma_{st}.A_{st} - \sigma_{sc}.A_{sc})$$

$$\varepsilon_{cm}.E_c\,.A_{cm} - \varepsilon_{tm}.E_c\,.A_{tm} = 2(\varepsilon_{st}.E_s.A_{st} - \varepsilon_{sc}.E_s.A_{sc}) \tag{115}$$

Aplicando a equação (114) na equação (115) temos:

$$\varepsilon_{cm}.E_c\,.A_{cm} - \frac{H - k_d}{k_d}.\varepsilon_{cm}.E_c\,.A_{tm} = 2\begin{bmatrix} \dfrac{d - k_d}{k_d}.\varepsilon_{cm}.E_s.A_{st} - \\ \dfrac{k_d - (H - k_d)}{k_d}.\varepsilon_{cm}.E_s.A_{sc} \end{bmatrix}$$

Considerando que $\eta = \frac{E_s}{E_c}$, temos:

$$A_{cm} - \frac{H - k_d}{k_d}\,.A_{tm} = 2\left(\frac{d - k_d}{k_d}.\eta.A_{st} - \frac{k_d - (H - k_d)}{k_d}.\eta.A_{sc}\right)$$

$$B_b.k_d.k_d - (H - k_d).(H - k_d).A_{tm} = \begin{bmatrix} 2.d.\eta(A_{st} - A_{sc}) + 2.H.\eta.A_{sc} - \\ k_d(2.\eta.A_{st} + 2.\eta.A_{sc}) \end{bmatrix}$$

$$k_d = \frac{2.\eta.[d.(A_{st} - A_{sc}) + H.A_{sc}] + B_b.H^2}{2(H.B_b + \eta.A_{st} + \eta.A_{sc})} \tag{116}$$

Nota-se que para a determinação da altura da linha neutra, em um sistema de deformação elástica, foi necessário utilizar apenas a relação de semelhança das deformações dos materiais e o equilíbrio da seção. Ao final, a linha neutra, representada pela equação (116), é dada por uma equação polinomial do 1° grau.

Com a linha neutra determinada, é possível calcular as deformações do(s) aço(s) e de tração do concreto, para então finalmente poder resolver e definir o valor do momento atuante.

As deformações dos materiais no instante da aplicação do momento de fissuração são determinadas a partir da deformação de fissuração de tração do concreto, ou seja:

$$\varepsilon_{tp} = \frac{f_{tk}}{E_c} \qquad (117)$$

Como o concreto chegou ao estado de fissuração, pode-se afirmar que $\varepsilon_{tp} = \varepsilon_{tm}$. Assim, as deformações de compressão do concreto, tração e compressão (se houver) do(s) aço(s) podem ser definidas a partir das equações (114) e (117) como:

$$\frac{\varepsilon_{cm}}{k_d} = \frac{\varepsilon_{sc}}{k_d - (H-d)} = \frac{\varepsilon_{st}}{d - k_d} = \frac{f_{tk}}{E_c(H - k_d)} \qquad (118)$$

Com isso, é possível determinar os valores de k_1, k_2, k_3 e k_4 ,equações (84), (90), (92) e (104) respectivamente e aplicar na equação do momento (110) para determinação do momento de fissuração.

2.3. Estádio 2

O estádio 2 caracteriza-se pela propagação da fissura ao longo da seção de concreto. A resistência à tração do concreto torna-se ineficaz para suportar a carga solicitante e então a tensão dantes resistido pelo concreto é transferido para o aço, o que ocasiona em qualquer aumento, somente o aço de tração torna-se capaz de absorver a energia proveniente da carga. A partir de então, inicia-se o processo de fissuração da seção. (PILLAI & MENON, 2005)

Esse processo de resistência às tensões prossegue até se atingir o escoamento do aço, ou seja, a armadura de tração alonga significativamente sem ocorrer aumento de suas tensões. Desta forma, a linha neutra tende a deslocar para cima, diminuindo a área de concreto comprimido. Consequentemente, como a tensão do aço tende a permanecer constante, as tensões no concreto buscam aumentar, para manter o sistema em equilíbrio. Por conta disso, gera-se um aumento do momento resultante já que o braço de alavanca se torna maior. (PILLAI & MENON, 2005)

Sendo a maior parte da solicitação de tração resistida pelo aço, maior a curvatura da seção fissurada, automaticamente uma elevação da linha neutra. Logo, a resistência total da estrutura tende a aumentar a medida que o posicionamento das barras sejam as mais distantes possíveis do eixo neutro, desde que se obedeça às condições de cobrimento mínimo e espaçamento entre barras, estabelecidos pela NBR 6118: 2014. (PILLAI & MENON, 2005)

É importante ressaltar que o aumento do momento de resistência entre os Estádio 1 e 3 é dado exclusivamente pelo aumento do braço alavanca. (PILLAI & MENON, 2005)

A medida que a solicitação aumenta, a curva de compressão do concreto sai da região de regime elástico e entram na faixa não linear, como pode-se ver na Figura 13. Contudo, tal comportamento depende diretamente da quantidade de aço utilizada. (PILLAI & MENON, 2005)

2.3.1. Linha Neutra

Da mesma forma, será determinado a altura da linha neutra ao longo da variação da deformação de compressão do concreto. Para isso, é utilizado a equação (108) em estado de equilíbrio, ou seja, a aplicação da força normal P deve ser igual ao equilíbrio da seção. Com isso, pode-se afirmar que:

$$P = 0 = k_1.f_{ck}.B_b.k_d - k_3.f_{tk}.B_b.(H - k_d) + \sum_{j=1}^{2} \sigma_{sj}.A_{sj}$$

Associa-se a isso a equação (97) à (108), determinando a equação então da linha neutra.

$$k_1.f_{ck}.B_b.k_d - \frac{f_{tk}.B_b.(H - k_d)}{f_{ck}\,\varepsilon_{cm}}\left[\left(f_{tk} + \varepsilon_{tp}.|E_t|\right)\varepsilon_{tm} - \frac{\varepsilon_{tm}^2\,.\,|E_t|}{2} - \frac{f_{tk}.\varepsilon_{tp}}{2} - \frac{\varepsilon_{tp}^2\,.\,|E_t|}{2}\right] - \varepsilon_{st}.E_s.A_{st} + \varepsilon_{sc}.E_s.A_{sc} = 0$$

Com base na equação de deformação (114), temos:

$$k_1.f_{ck}.B_b.k_d - \frac{B_b.(H-k_d)}{\frac{H-\ k_d}{k_d}\varepsilon_{cm}}\left(\begin{array}{c}\left(f_{tk}+\varepsilon_{tp}.|E_t|\right)\frac{H-\ k_d}{k_d}\varepsilon_{cm}-\left(\frac{H-\ k_d}{k_d}\varepsilon_{cm}\right)^2.\frac{|E_t|}{2}\\ -\frac{f_{tk}\ .\varepsilon_{tp}}{2}-\frac{\varepsilon_{tp}^2\ .\ |E_t|}{2}\end{array}\right)$$
$$-\ \frac{d-k_d}{k_d}\varepsilon_{cm}.E_s.A_{st}+\frac{k_d-(H-d)}{k_d}\varepsilon_{cm}.E_s.A_{sc}=0$$

$$k_1.f_{ck}.B_b.k_d+\varepsilon_{cm}.E_s.A_{sc}-\frac{(H-d)}{k_d}\varepsilon_{cm}.E_s.A_{sc}-\frac{d}{k_d}\varepsilon_{cm}.E_s.A_{st}+\frac{k_d}{k_d}\varepsilon_{cm}.E_s.A_{st}$$
$$-\frac{B_b.k_d}{\varepsilon_{cm}}\left(\left(f_{tk}+\varepsilon_{tp}.|E_t|\right)\frac{H}{k_d}\varepsilon_{cm}-\left(f_{tk}+\varepsilon_{tp}.|E_t|\right)\varepsilon_{cm}-\frac{f_{tk}\ .\varepsilon_{tp}}{2}\right.$$
$$\left.-\frac{\varepsilon_{tp}^2\ .\ |E_t|}{2}-\frac{|E_t|}{2}.\varepsilon_{cm}^2.\frac{H^2-2.H.k_d+k_d^2}{k_d^2}\right)=0$$

$$k_d^2\left(k_1.f_{ck}.B_b+B_b.\left(f_{tk}+\varepsilon_{tp}.|E_t|\right)-\frac{B_b}{\varepsilon_{cm}}\left(-\frac{f_{tk}\ .\varepsilon_{tp}}{2}-\frac{\varepsilon_{tp}^2\ .\ |E_t|}{2}\right)+\frac{1}{2}.|E_t|.B_b.\varepsilon_{cm}\right)$$
$$+k_d\left(\varepsilon_{cm}.E_s.(A_{sc}-A_{st})-B_b.H.\left(f_{tk}+\varepsilon_{tp}.|E_t|\right)-|E_t|.B_b.\varepsilon_{cm}.H\right)$$
$$-\left(\varepsilon_{cm}.E_s.\left((H-d)A_{sc}+d.A_{st}\right)-\frac{H^2}{2}|E_t|.B_b.\varepsilon_{cm}\right)=0 \qquad (119)$$

Nota-se que a equação (119) corresponde a um polinômio do 2°, podendo ser resolvido a partir da equação de Bhaskara. Nisso, fazendo as seguintes considerações, encontra-se o valor da linha neutra à medida que varia a deformação de compressão do concreto:

$$a_{est.2}=\left[\begin{array}{c}k_1.f_{ck}.B_b+B_b.\left(f_{tk}+\varepsilon_{tp}.|E_t|\right)-\\ \frac{B_b}{\varepsilon_{cm}}\left(-\frac{f_{tk}\ .\varepsilon_{tp}}{2}-\frac{\varepsilon_{tp}^2\ .\ |E_t|}{2}\right)+\frac{1}{2}.|E_t|.B_b.\varepsilon_{cm}\end{array}\right] \qquad (120)$$

$$b_{est.2}=\varepsilon_{cm}.E_s.(A_{sc}-A_{st})-B_b.H.\left(f_{tk}+\varepsilon_{tp}.|E_t|\right)-|E_t|.B_b.\varepsilon_{cm}.H \qquad (121)$$

$$c_{est.2}=-\left(\varepsilon_{cm}.E_s.\left((H-d)A_{sc}+d.A_{st}\right)-\frac{H^2}{2}|E_t|.B_b.\varepsilon_{cm}\right) \qquad (122)$$

Assim, a altura da linha neutra, considerando as igualdades (120), (121) e (122), tem-se:

$$k_d = \frac{-b_{est.2} + \sqrt{b_{est.2}^2 - 4.a_{est.2}.c_{est.2}}}{2.a_{est.2}} \tag{123}$$

O sinal de positivo na raiz quadrada simboliza o maior resultado entre as duas raízes possíveis na equação (119).

Para a determinação do momento ao longo da variação da linha neutra do estádio 2, necessita-se determinar também a variável k_4, correspondente à equação (99). Para esta variável estar em função da deformação de compressão do concreto, é necessário que sejam aplicadas as equações (114) e (117). Após isso, já é possível determinar o valor do momento (110) durante o estádio 2 a cada incremento de ε_{cm}. Ou seja, o processo de cálculo adotado baseia-se no incremento da deformação de compressão do concreto, este adotado como variável principal da modelagem. A cada incremento de ε_{cm} é possível determinar todas as outras informações referentes à seção. Isto é adotado para se evitar de ter processos numéricos longos, como Newton Raphson, para se determinar o momento resistente, por exemplo.

Neste caso, a cada incremental da deformação de compressão do concreto é possível determinar a altura da linha neutra. Contudo, tal deformação em questão possui um limite, limite este que é estabelecido quando a tensão de tração atuante na seção cai à zero, levando à deformação de tração máxima ε_{tf} , como pode ser observado na Figura 04. Tal deformação de compressão limite do estádio 2 pode ser determinada com base na equação (3):

$$f_{tk} - \left(\varepsilon_{tm} - \varepsilon_{tp}\right)(-E_t) = 0$$

$$f_{tk} - \left(\varepsilon_{tf} - \varepsilon_{tp}\right)(-E_t) = 0$$

$$\varepsilon_{tm} = \varepsilon_{tp} - \frac{f_{tk}}{E_t} \tag{124}$$

Onde ε_{tp} pode ser encontrada em (117).

2.4. Estádio 3

Caracterizado pelo prosseguimento do processo de escoamento do aço (sem aumento de tensões no mesmo) e elevação da altura da linha neutra, diminuindo a área de concreto comprimido. Neste curso, as deformações do concreto elevam-se até alcançar a tensão de compressão final do concreto (Estádio 3), resultando em um aumento das tensões de tração e um colapso por esmagamento na parte comprimida. (PILLAI & MENON, 2005)

A lógica usada para o estádio 2 aplica-se ao estádio 3. A diferença é que a equação da força normal P (110) usa-se o coeficiente k_3 da equação (101). No cálculo do momento, o coeficiente k_4 refere-se à equação (104).

Contudo é importante verificar que no Estádio 3 não somente o concreto está na iminência da ruptura, mas como também os aços de tração e/ou compressão.

Com isso, é necessário calcular a(s) deformação(ões) do(s) aço(s) em função da linha neutra, juntamente com o módulo de elasticidade do mesmo, e comparar com a tensão de escoamento do aço, pois para cada resultado encontrado, a formula da linha neutra torna-se diferente.

Para isto, é necessário avaliar as deformações apresentadas pelos aços. As tensões presentes nos aços são então comparadas com a tensão de escoamento do mesmo, sendo adotado o menor dos valores.

2.4.1. Linha Neutra para $\boldsymbol{\varepsilon_{sc} . E_s < f_y}$ e $\boldsymbol{\varepsilon_{st} . E_s < f_y}$

$$P = 0 = k_1.f_{ck}.B_b.k_d - k_3.f_{tk}.B_b.(H - k_d) + \sum_{j=1}^{2} \sigma_{sj}.A_{sj}$$

$$k_1.f_{ck}.B_b.k_d - k_3.f_{tk}.B_b.(H - k_d) + \sum_{j=1}^{2} \sigma_{sj}.A_{sj} = 0$$

$$k_1.f_{ck}.B_b.k_d - \frac{d-k_d}{k_d}\varepsilon_{cm}.E_s.A_{st} + \frac{k_d-(H-d)}{k_d}\varepsilon_{cm}.E_s.A_{sc}$$
$$-\frac{f_{tk}.B_b.(H-k_d)}{f_{tk}\ \varepsilon_{tm}}\left[\left(f_{tk}+\varepsilon_{tp}.|E_t|\right)\varepsilon_{tf} - \frac{\varepsilon_{tf}^2\ .\ |E_t|}{2} - \frac{f_{tk}\ .\varepsilon_{tp}}{2} - \frac{\varepsilon_{tp}^2\ .\ |E_t|}{2}\right]$$
$$= 0$$

$$k_1.f_{ck}.B_b.k_d + \varepsilon_{cm}.E_s.A_{sc} - \frac{(H-d)}{k_d}\varepsilon_{cm}.E_s.A_{sc} - \frac{d}{k_d}\varepsilon_{cm}.E_s.A_{st} + \varepsilon_{cm}.E_s.A_{st}$$
$$-\frac{B_b.(H-k_d)}{\varepsilon_{tm}}\left[\left(f_{tk}+\varepsilon_{tp}.|E_t|\right)\varepsilon_{tf} - \frac{\varepsilon_{tf}^2\ .\ |E_t|}{2} - \frac{f_{tk}\ .\varepsilon_{tp}}{2} - \frac{\varepsilon_{tp}^2\ .\ |E_t|}{2}\right] = 0$$

$$k_d^2\left[k_1.f_{ck}.B_b - \frac{B_b}{\varepsilon_{cm}}\left(\left(f_{tk}+\varepsilon_{tp}.|E_t|\right)\varepsilon_{tf} - \frac{\varepsilon_{tf}^2\ .\ |E_t|}{2} - \frac{f_{tk}\ .\varepsilon_{tp}}{2} - \frac{\varepsilon_{tp}^2\ .\ |E_t|}{2}\right)\right]$$
$$+k_d[\varepsilon_{cm}.E_s.A_{sc} + \varepsilon_{cm}.E_s.A_{st}] + [-(H-d)\varepsilon_{cm}.E_s.A_{sc} - d.\varepsilon_{cm}.E_s.A_{st}] = 0 \qquad (125)$$

Da mesma forma, a equação acima (125) pode ser resolvida a partir da formula de Bhaskara. Pode-se definir os coeficientes e determinar o valor da altura da linha neutra a medida que a deformação de compressão do concreto é incrementada.

$$a_{est.3} = k_1.f_{ck}.B_b.k_d - \frac{B_b}{\varepsilon_{cm}}\left(\left(f_{tk}+\varepsilon_{tp}.|E_t|\right)\varepsilon_{tf} - \frac{\varepsilon_{tf}^2\ .\ |E_t|}{2} - \frac{f_{tk}\ .\varepsilon_{tp}}{2} - \frac{\varepsilon_{tp}^2\ .\ |E_t|}{2}\right) \qquad (126)$$

$$b_{est.3} = \varepsilon_{cm}.E_s.A_{sc} + \varepsilon_{cm}.E_s.A_{st} \qquad (127)$$

$$c_{est.3} = -(H-d)\varepsilon_{cm}.E_s.A_{sc} - d.\varepsilon_{cm}.E_s.A_{st} \qquad (128)$$

Assim, a altura da linha neutra, considerando as igualdades (126), (127) e (128), tem-se:

$$k_d = \frac{-b_{est.3} + \sqrt{b_{est.3}^2 - 4.a_{est.3}.c_{est.3}}}{2.a_{est.3}} \qquad (129)$$

O sinal de positivo na raiz quadrada simboliza o maior resultado entre as duas raízes possíveis na equação (125).

Desta forma, é possível calcular o momento máximo atuante na seção em função da linha neutra e das deformações dos aços de compressão e tração. Com base na equação (110), na altura da linha neutra e nas deformações apresentadas pelos aços, tem-se o momento dado por:

$$M = \begin{bmatrix} k_1.f_{ck}.B_b.k_d\left(\frac{H}{2} - k_2 k_d\right) + \\ \left(-\frac{d-k_d}{k_d}\varepsilon_{cm}.E_s.A_{st} + \frac{k_d-(H-d)}{k_d}\varepsilon_{cm}.E_s.A_{sc}\right)\left(d - \frac{H}{2}\right) - \\ k_3.f_{tk}.B_b.(H-k_d)\left(\frac{H}{2} - k_d(H-k_d)\right) \end{bmatrix} \quad (130)$$

2.4.2. Linha Neutra para $\boldsymbol{\varepsilon_{cs}\,.E_s < f_y}$ *e* $\boldsymbol{\varepsilon_{st}\,.E_s > f_y}$

Neste caso, foi verificado as deformações no aço de compresso e contata-se que são maiores que a tensão de escoamento $\mathrm{f_y}$ do material. Com isso, adota-se a tensão $\mathrm{f_y}$ para o aco de tração e no caso do aço de compressão, como permanecem no regime elástico, a Lei de Hooke continua sendo verdadeira.

Desta forma:

$$P = 0 = k_1.f_{ck}.B_b.k_d - k_3.f_{tk}.B_b.(H-k_d) + \sum_{j=1}^{2}\sigma_{sj}.A_{sj}$$

$$k_1.f_{ck}.B_b.k_d - k_3.f_{tk}.B_b.(H-k_d) + \sum_{j=1}^{2}\sigma_{sj}.A_{sj} = 0$$

$$k_1.f_{ck}.B_b.k_d - f_y.A_{st} + \frac{k_d-(H-d)}{k_d}\varepsilon_{cm}.E_s.A_{sc}$$
$$- \frac{f_{tk}.B_b.(H-k_d)}{f_{tk}\varepsilon_{tm}}\left[\left(f_{tk} + \varepsilon_{tp}.|E_t|\right)\varepsilon_{tf} - \frac{\varepsilon_{tf}^2\,.\,|E_t|}{2} - \frac{f_{tk}.\varepsilon_{tp}}{2} - \frac{\varepsilon_{tp}^2\,.\,|E_t|}{2}\right]$$
$$= 0$$

$$k_1.f_{ck}.B_b.k_d + \varepsilon_{cm}.E_s.A_{sc} - \frac{(H-d)}{k_d}\varepsilon_{cm}.E_s.A_{sc} - f_y.A_{st}$$
$$- \frac{B_b}{\varepsilon_{cm}}\left[\left(f_{tk} + \varepsilon_{tp}.|E_t|\right)\varepsilon_{tf} - \frac{\varepsilon_{tf}^2\,.\,|E_t|}{2} - \frac{f_{tk}\,.\varepsilon_{tp}}{2} - \frac{\varepsilon_{tp}^2\,.\,|E_t|}{2}\right] = 0$$

$$k_d^2\left[k_1.f_{cK}.B_b - \frac{B_b}{\varepsilon_{cm}}\left(\left(f_{tk} + \varepsilon_{tp}.|E_t|\right)\varepsilon_{tf} - \frac{\varepsilon_{tf}^2\,.\,|E_t|}{2} - \frac{f_{tk}\,.\varepsilon_{tp}}{2} - \frac{\varepsilon_{tp}^2\,.\,|E_t|}{2}\right)\right]$$
$$+ k_d\left[\varepsilon_{cm}.E_s.A_{sc} - f_y.A_{st}\right] + \left[-(H-d)\varepsilon_{cm}.E_s.A_{sc}\right] = 0 \quad (131)$$

Da mesma forma, a equação acima (131) pode ser resolvida a partir da formula de Bhaskara, conforme apresentado na equação (129). Pode-se definir os coeficientes e determinar o valor da altura da linha neutra a medida que a deformação de compressão do concreto é incrementada.

$$a_{est.3} = k_1.f_{ck}.B_b.k_d - \frac{B_b}{\varepsilon_{cm}}\left[\left(f_{tk} + \varepsilon_{tp}.|E_t|\right)\varepsilon_{tf} - \frac{\varepsilon_{tf}^2\ .\ |E_t|}{2} - \frac{f_{tk}\ .\varepsilon_{tp}}{2} - \frac{\varepsilon_{tp}^2\ .\ |E_t|}{2}\right] \quad (132)$$

$$b_{est.3} = \varepsilon_{cm}.E_s.A_{sc} \quad (133)$$

$$c_{est.3} = -(H-d)\varepsilon_{cm}.E_s.A_{sc} - f_y.A_{st} \quad (134)$$

Desta forma, é possível calcular o momento máximo atuante na seção em função da linha neutra e das deformações dos aços de compressão e tração. Com base na equação (110), na altura da linha neutra e nas deformações apresentadas pelos aços, tem-se o momento dado por:

$$M = \left[\begin{array}{c} k_1.f_{ck}.B_b.k_d\left(\frac{H}{2} - k_2k_d\right) + \\ \left(-f_y.A_{st} + \frac{k_d - (H-d)}{k_d}\varepsilon_{cm}.E_s.A_{sc}\right)\left(d - \frac{H}{2}\right) - \\ k_3.f_{tk}.B_b.(H-k_d)\left(\frac{H}{2} - k_d(H-k_d)\right) \end{array}\right] \quad (135)$$

2.4.3. Linha Neutra para $\boldsymbol{\varepsilon_{sc}\ .E_s > f_y}$ *e* $\boldsymbol{\varepsilon_{st}\ .E_s > f_y}$

Para o caso em que ambas as áreas de aço estão em uma tensão acima da de escoamento, adota-se f_y para o cálculo da altura da linha neutra:

$$P = 0 = k_1.f_{ck}.B_b.k_d - k_3.f_{tk}.B_b.(H-k_d) + \sum_{j=1}^{2}\sigma_{sj}.A_{sj}$$

$$k_1.f_{ck}.B_b.k_d - k_3.f_{tk}.B_b.(H-k_d) + \sum_{j=1}^{2}\sigma_{sj}.A_{sj} = 0$$

$$k_1.f_{ck}.B_b.k_d - f_y.A_{st} + f_y.A_{sc} - \frac{f_{tk}.B_b.(H-k_d)}{f_{tk}\ \varepsilon_{tm}}\left[\left(f_{tk} + \varepsilon_{tp}.|E_t|\right)\varepsilon_{tf} - \frac{\varepsilon_{tf}^2\ .\ |E_t|}{2} - \frac{f_{tk}.\varepsilon_{tp}}{2} - \frac{\varepsilon_{tp}^2\ .\ |E_t|}{2}\right] = 0$$

$$k_1.f_{ck}.B_b.k_d - f_y.A_{st} + f_y.A_{sc} - \frac{B_b}{\varepsilon_{cm}}\left[\left(f_{tk} + \varepsilon_{tp}.|E_t|\right)\varepsilon_{tf} - \frac{\varepsilon_{tf}^2.|E_t|}{2} - \frac{f_{tk}\,.\varepsilon_{tp}}{2} - \frac{\varepsilon_{tp}^2\,.\;|E_t|}{2}\right] = 0$$

$$k_d = \frac{-f_y.A_{st} + f_y.A_{sc}}{k_1.f_{ck}.B_b - \frac{B_b}{\varepsilon_{cm}}\left(\left(f_{tk} + \varepsilon_{tp}.|E_t|\right)\varepsilon_{tf} - \frac{\varepsilon_{tf}^2\,.\;|E_t|}{2} - \frac{f_{tk}\,.\varepsilon_{tp}}{2} - \frac{\varepsilon_{tp}^2\,.\;|E_t|}{2}\right)} \qquad (136)$$

Desta forma, é possível calcular o momento máximo atuante na seção em função da linha neutra e das deformações dos aços de compressão e tração. Com base na equação (110), na altura da linha neutra e nas deformações apresentadas pelos aços, tem-se o momento dado por:

$$M = \begin{bmatrix} k_1.f_{ck}.B_b.k_d\left(\frac{H}{2} - k_2k_d\right) + \left(-f_y.A_{st} + f_y.A_{sc}\right)\left(d - \frac{H}{2}\right) - \\ k_3.f_{tk}.B_b.(H - k_d)\left(\frac{H}{2} - k_d(H - k_d)\right) \end{bmatrix} \qquad (137)$$

Vale ressaltar que para a determinação do momento ao longo da variação da linha neutra do estádio 3 (em todas as situações acima expostas referentes ao estádio 3), necessita-se determinar também a variável k_4, correspondente à equação (104).

Para esta variável estar em função da deformação de compressão do concreto, é necessário que sejam aplicadas as equações (114) e (117). Após isso, já é possível determinar o valor do momento (110) durante o estádio 2 a cada incremento de $\varepsilon_{\mathrm{cm}}$.

3. SOBRE O SOFTWARE ALFAMCV

Após a análise do artigo BAZANT (1984) e suas referências, decidiu-se desenvolver um *software* que pudesse gerar os dados do comportamento de uma viga de concreto armado quando submetida à uma carga pontual no meio do vão. O *software* simula, de forma matemática, um ensaio de laboratório, onde averigua as seguintes variações: o regime pertencido (estádios 1, 2 ou 3), linha neutra, deformação de compressão do concreto, deformações de compressão e tração do aço, momento gerado e deflexão da viga. Todos estes resultados são provenientes da seção mais solicitada, que corresponde ao meio do vão.

O *software* AlfaMCV (Momento Curvatura em Vigas de Concreto Armado) é um programa simples, desenvolvido na linguagem Visual Basic, versão 2013, que a partir da geometria da viga e dados dos materiais, fornece como resultado a variação do comportamento das deformações, linha neutra e momento.

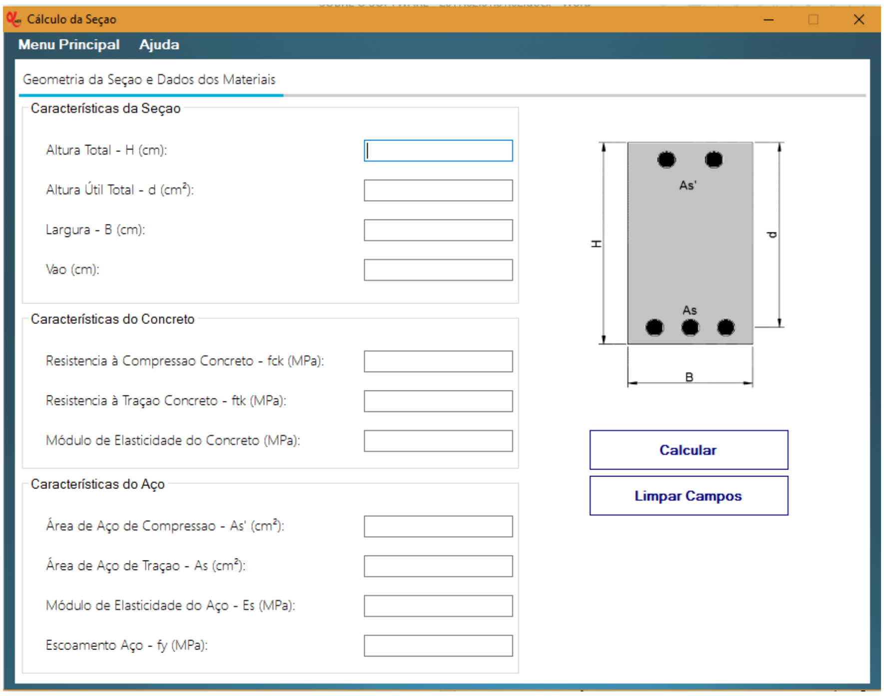
Inicia-se com um Menu Principal, conforme a Figura 19 apresentada abaixo, com 3 botões principais e 1 de sair do programa.

Figura 19 – Menu Principal de AlfaMCV

Fonte: O autor

Com relação ao botão principal, “Cálculos”, este abre uma janela (Figura 20) com todos os dados de entrada que o usuário tem que fornecer a respeito a viga de concreto armado.

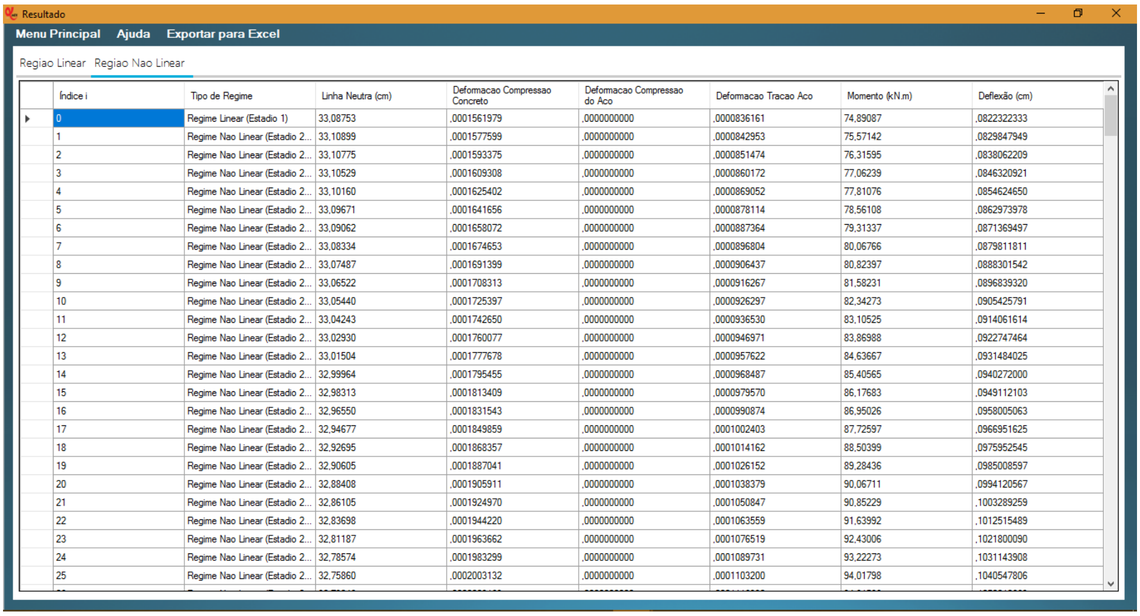
Figura 20 – Janela de introdução de dados



Fonte: O autor

Após isso, com todas as informações inseridas corretamente, a tabela é então gerada, apresentando os valores de variação de comportamento da viga, conforme a Figura 21 a seguir.

Figura 21 – Janela de resultados



Índice i	Tipo de Regime	Linha Neutra (cm)	Deformacao Compressao Concreto	Deformacao Compressao do Aco	Deformacao Tracao Aco	Momento (kN.m)	Deflexão (cm)
0	Regime Linear (Estadio 1)	33,08753	,0001561979	,0000000000	,0000836161	74,89087	,0822322333
1	Regime Nao Linear (Estadio 2...	33,10899	,0001577599	,0000000000	,0000842953	75,57142	,0829847949
2	Regime Nao Linear (Estadio 2...	33,10775	,0001593375	,0000000000	,0000851474	76,31595	,0838062209
3	Regime Nao Linear (Estadio 2...	33,10529	,0001609308	,0000000000	,0000860172	77,06239	,0846320921
4	Regime Nao Linear (Estadio 2...	33,10160	,0001625402	,0000000000	,0000869052	77,81076	,0854624650
5	Regime Nao Linear (Estadio 2...	33,09671	,0001641656	,0000000000	,0000878114	78,56108	,0862973978
6	Regime Nao Linear (Estadio 2...	33,09062	,0001658072	,0000000000	,0000887364	79,31337	,0871369497
7	Regime Nao Linear (Estadio 2...	33,08334	,0001674653	,0000000000	,0000896804	80,06766	,0879811811
8	Regime Nao Linear (Estadio 2...	33,07487	,0001691399	,0000000000	,0000906437	80,82397	,0888301542
9	Regime Nao Linear (Estadio 2...	33,06522	,0001708313	,0000000000	,0000916267	81,58231	,0896839320
10	Regime Nao Linear (Estadio 2...	33,05440	,0001725397	,0000000000	,0000926297	82,34273	,0905425791
11	Regime Nao Linear (Estadio 2...	33,04243	,0001742650	,0000000000	,0000936530	83,10525	,0914061614
12	Regime Nao Linear (Estadio 2...	33,02930	,0001760077	,0000000000	,0000946971	83,86988	,0922747464
13	Regime Nao Linear (Estadio 2...	33,01504	,0001777678	,0000000000	,0000957622	84,63667	,0931484025
14	Regime Nao Linear (Estadio 2...	32,99964	,0001795455	,0000000000	,0000968487	85,40565	,0940272000
15	Regime Nao Linear (Estadio 2...	32,98313	,0001813409	,0000000000	,0000979570	86,17683	,0949112103
16	Regime Nao Linear (Estadio 2...	32,96550	,0001831543	,0000000000	,0000990874	86,95026	,0958005063
17	Regime Nao Linear (Estadio 2...	32,94677	,0001849859	,0000000000	,0001002403	87,72597	,0966951625
18	Regime Nao Linear (Estadio 2...	32,92695	,0001868357	,0000000000	,0001014162	88,50399	,0975952545
19	Regime Nao Linear (Estadio 2...	32,90605	,0001887041	,0000000000	,0001026152	89,28436	,0985008597
20	Regime Nao Linear (Estadio 2...	32,88408	,0001905911	,0000000000	,0001038379	90,06711	,0994120567
21	Regime Nao Linear (Estadio 2...	32,86105	,0001924970	,0000000000	,0001050847	90,85229	,1003289259
22	Regime Nao Linear (Estadio 2...	32,83698	,0001944220	,0000000000	,0001063559	91,63992	,1012515489
23	Regime Nao Linear (Estadio 2...	32,81187	,0001963662	,0000000000	,0001076519	92,43006	,1021800090
24	Regime Nao Linear (Estadio 2...	32,78574	,0001983299	,0000000000	,0001089731	93,22273	,1031143908
25	Regime Nao Linear (Estadio 2...	32,75860	,0002003132	,0000000000	,0001103200	94,01798	,1040547806

Fonte: O autor

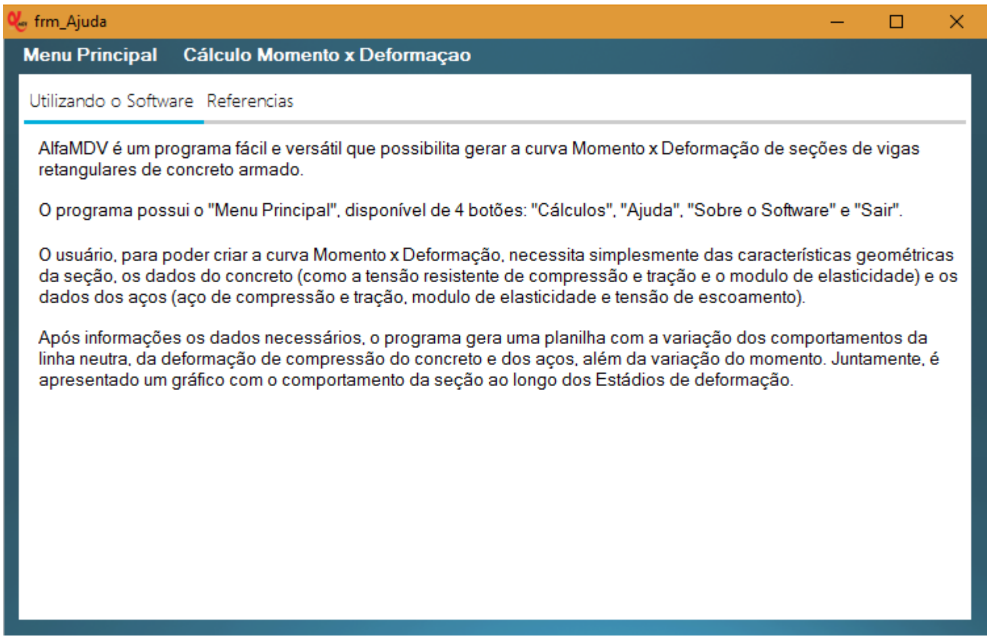
Esta tabela por completo pode ser exportada para o Excel, desde que o usuário tenha tal programa instalado em seu computador.

É importante ressaltar que no desenvolvimento do *software* AlfaMCV, a coluna de deflexão é calculada considerando que o diagrama de momento da viga é triangular. Ou seja, considera-se uma carga pontual aplicada no meio do vão da mesma, desconsiderando o peso próprio.

Esta decisão de não incluir o peso próprio da viga no código, já que é proveniente de uma simulação de ensaio laboratorial, onde deixa-se a viga assentar primeiro, fazendo com que todas as deformações provenientes do peso próprio ocorram.

O botão “Ajuda” (Figura 22) encaminha para uma janela com uma breve explanação sobre o programa, seu objetivo e resultados fornecidos.

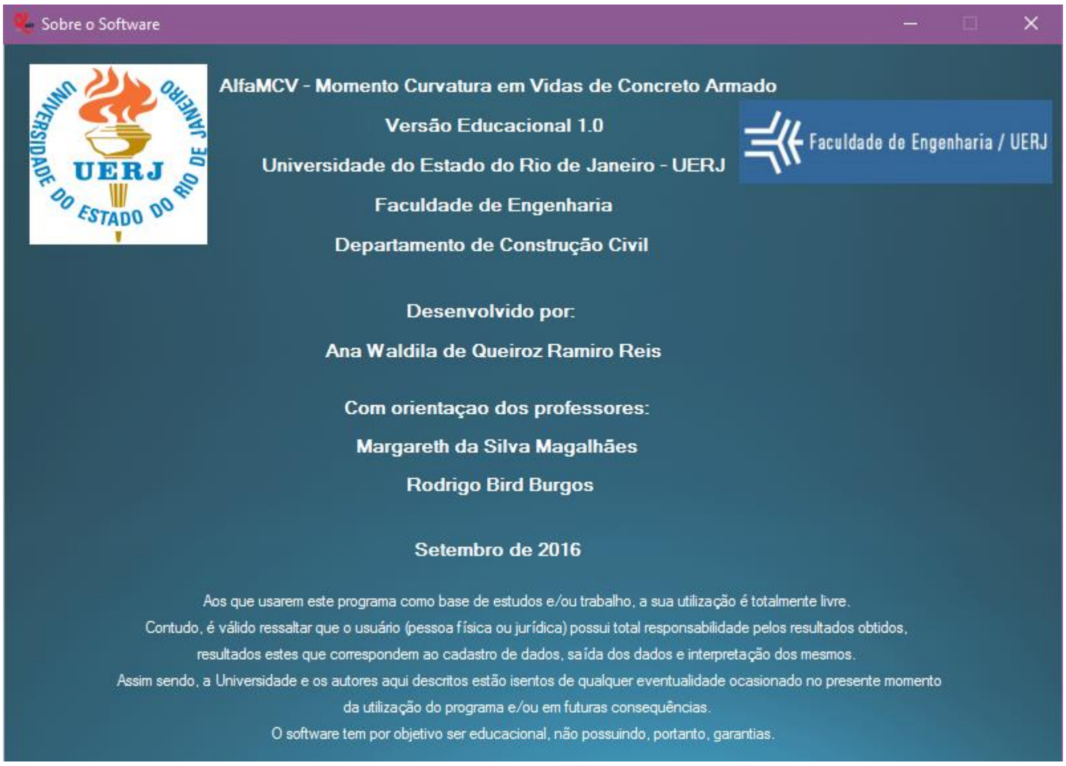
Figura 22 – Janela de Ajuda



Fonte: O autor

Finalmente, o último botão corresponde à “Sobre o Software”, onde é apresentado a instituição de apoio e seu desenvolvedor e orientadores, Figura 23.

Figura 23 – Autores do *Software* AlfaMCV



Fonte: O autor

O *software* AlfaMCV pode ser baixado gratuitamente através do link: http://www.labbas.eng.uerj.br/pgeciv/nova/index.php?menu=downloads

4. ANÁLISE DE RESULTADOS: DIMENSIONAMENTO DE VIGAS SUBARMADA, NORMALMENTE ARMADA, SUPERARMADA, ARMADURA DUPLA E SEM ARMADURA

Para esta etapa, é realizado o dimensionamento de 4 tipos de vigas: subarmada, normalmente armada, superarmada e armadura dupla. Estes têm por objetivo analisar e confirmar que o momento máximo solicitante e a flecha da região elástica de solicitação concorrem com os resultados apresentados pelo *software*.

Vale ressaltar que para este desenvolvimento não são consideradas os fatores de majoração das solicitações e minoração das resistências, visto que o objetivo é a reprodução de ensaios reais.

Desta forma, considera-se uma viga de concreto armado com as seguintes características comuns a todos os casos:

Tabela 03 – Dados padronizados utilizados

Características	Valores
Altura Total (H)	60 cm
Altura Útil (d)	55 cm
Largura (Bb)	25 cm
Vão da Viga (L)	200 cm
Resistência à Compressão do Concreto (fck)	30 MPa
Resistência à Tração do Concreto (ftk)	2,8964 MPa
Módulo de Elasticidade do Concreto (Ec)	27.605,21 MPa
Tensão de Escoamento do Aço (fy)	500 MPa
Módulo de Elasticidade do Aço (Es)	200.000 MPa

Fonte: O autor

O cálculo da resistência à tração do concreto foi baseado de acordo com o item 8.2.5 da NBR 6118/ 2014, como pode ser observado a seguir:

$$f_{ct,m} = 0{,}3 f_{ck}^{2/3}$$

$$f_{ct,m} = 0{,}3\ x 30^{2/3}$$

$$f_{ct,m} = 2{,}8964\ MPa$$

Com relação ao cálculo do módulo de elasticidade, E_c, baseia-se no item 8.2.8 da NBR 6118/ 2014, conforme a seguir:

$$E_{ci} = \alpha_E\ .5600\sqrt{f_{ck}}$$

Considerando que o agregado graúdo usado é calcário, tem-se:

$$E_{ci} = 0{,}9 \, . \, 5600\sqrt{30}$$

$$E_{ci} = 27.605{,}21 \; MPa$$

Consideraremos, portanto, a condição de dimensionamento para os limites 2, 3 e 4, utilizando como base a tabela apresentada no ANEXO E.

Além disso, todos os dimensionamentos a seguir estão sendo baseados conforme as Notas de Aula de TAVARES(2005).

4.1. Subarmadas

Segundo PFEIL (1969), o conceito de vigas subarmadas é dada quando a armadura de tração escoa antes da ruptura do sistema estrutural. Nesses casos, a altura útil é superior à mínima necessária para com armadura simples (ROCHA, 1985; PILLAI & MENON, 2005).

Neste primeiro caso, o dimensionamento é realizado conforme o limite inferior do domínio 2, ou seja, valor este que apresenta uma baixa taxa de armadura, que corresponde à $\omega = 0{,}015$.

Desta forma, a armadura para a viga com as condições estabelecidas na Tabela 1 é dada por:

$$A_{st} = \omega \frac{d \, . B_b \, . \, f_{ck}}{f_{yk}} \tag{138}$$

$$A_{st} = 0{,}015 \; x \; \frac{55 \, . \, 25 \, . \; 30}{500}$$

$$A_{st} = 1{,}2375 \; cm^2 \tag{139}$$

Teoricamente, o momento máximo resistido pela viga é dado por:

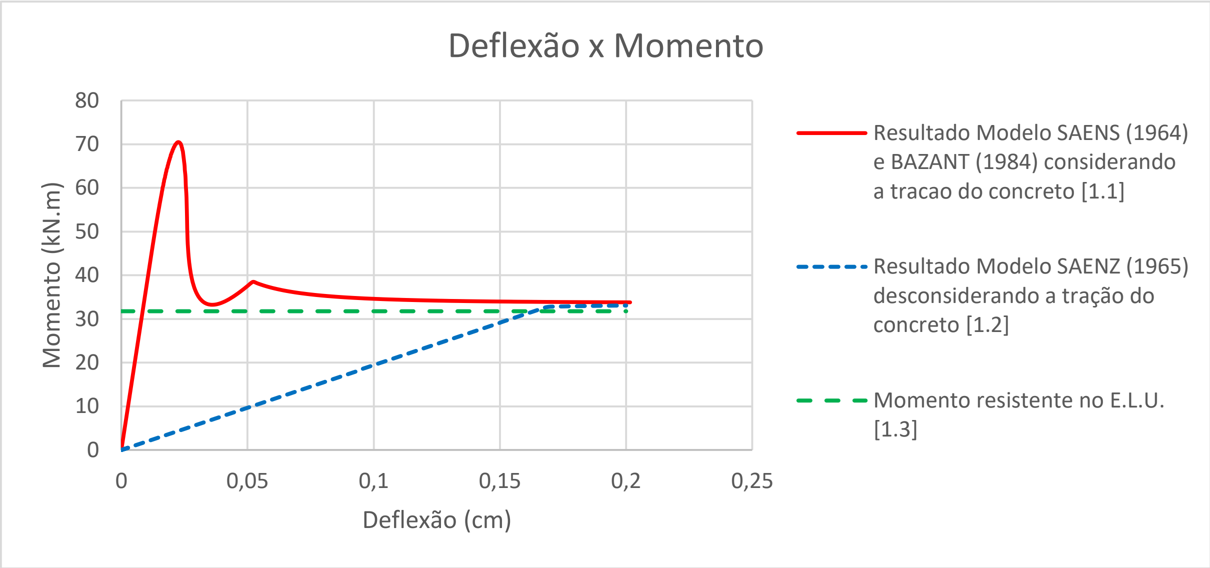
$$\mu_k = \frac{M_k}{b \, . \, d^2 \, . \, f_{ck}} \tag{140}$$

$$0{,}159 = \frac{M_k}{0{,}25 \, . \, 0{,}55^2 \, . \, 30000}$$

$$M_k = 31{,}7625 \; kN.m \tag{141}$$

Com base nesses parâmetros, o gráfico apresentado é:

Gráfico 02 – Momento x Deflexão de vigas sub armadas



Fonte: O autor

O Gráfico 02 apresenta um conjunto de resultados com base nas características da Tabela 03, porém com considerações distintas. A curva [1.1] (“Resultado Modelo SAENZ(1964) e BAZANT(1984)”) é caracterizada pela consideração da tração no concreto, com base nos modelos de compressão de SAENZ (1964) e no modelo apresentado por BAZANT (1984), correspondente ao diagrama bilinear de tração. Para este, introduziu-se todas as informações da referida Tabela 03 no *software* AlfaMCV.

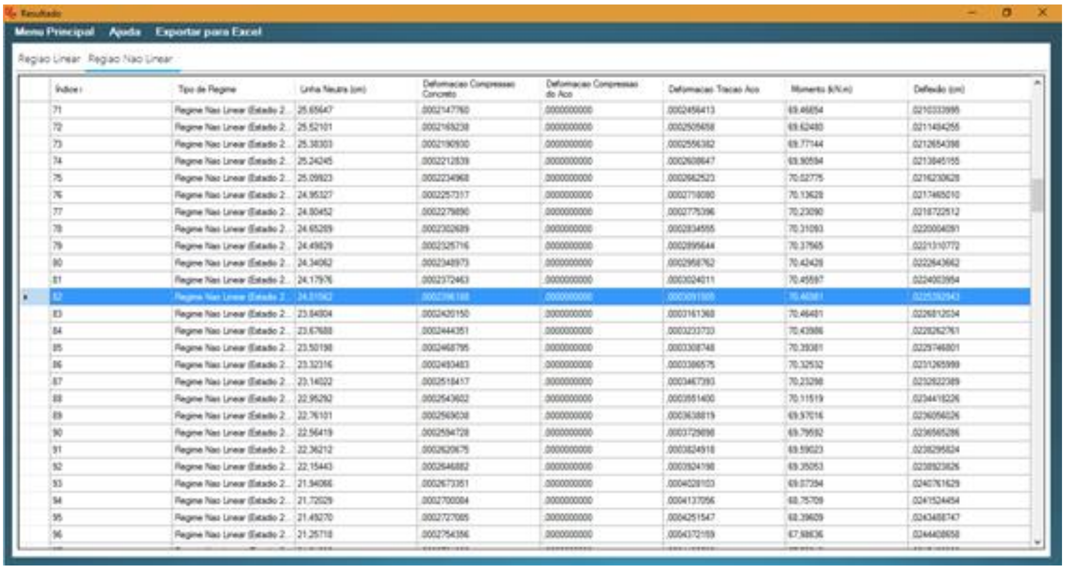
A curva [1.2] (“Resultado Modelo SAENZ(1965)”)corresponde à não colaboração do concreto de tração na resistência à solicitação. Esta curva é calculada também considerando o modelo de diagrama tensão – deformação do concreto de compressão, apresentada por SAENZ (1964), porém a entrada de dado da tensão de tração do concreto (f_{tk}) no *software* é nula.

Já a curva [1.3] (“Momento resistente no E.L.U”), apenas é uma apresentação do resultado do momento último da viga, com base na NBR 6118. Para esta última é válido ressaltar que não se está apresentando a deflexão com base no momento último. Esta curva é apenas demonstrativa para comparar o modelo de resolução apresentado pela Norma com os modelos utilizados por SAENZ (1964) e BAZANT (1984).

Vale ressaltar que o *software* não possui lacuna onde o se possa introduzir o coeficiente de ponderação desejado, contudo, o usuário pode entrar com os dados já multiplicados por tais coeficientes.

Já a tabela apresentada pelo *software* afirma que o momento máximo da seção corresponde à 70,46981 kN.m, conforme a Figura 24 apresentada abaixo:

Figura 24 – Tabela de resultado de viga sub armada: momento máximo



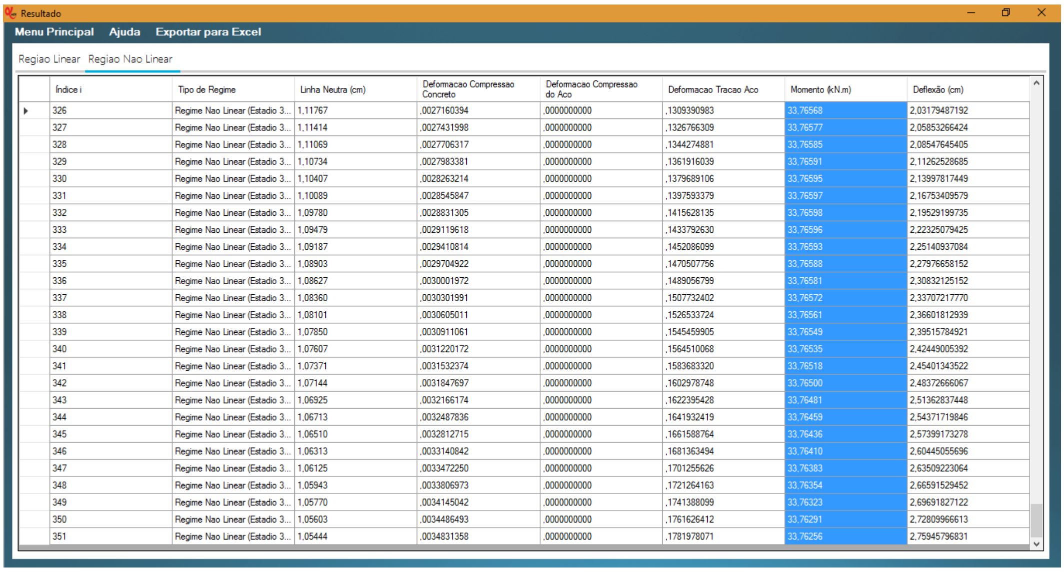
Fonte: O autor

Apesar da discrepância de resultados, é interessante notar que o momento de 70 kN.m corresponde ao máximo resistido pela peça. Contudo, o momento último da estrutura é de aproximadamente 33,76 kN.m (Figura 24), o que não está muito distante do resultado encontrado em (141). Nota-se que neste caso o momento final apresentado pelo *software* já corresponde a toda a seção fissurada, não suportando absorver mais energia.

Este gráfico caracteriza a capacidade do concreto de suportar a solicitação até o seu ponto de inflexão máximo (70,46 kN.m). Após isso, com a propagação das fissuras pela seção, a estrutura perde resistência progressivamente, identificando assim um aumento da altura da linha neutra (diminuição do braço de alavanca) e uma maior solicitação da região comprimida do concreto. Assim, a região de momento último (33,76 kN.m), representa uma região tracionada de concreto totalmente fissurada, sem capacidade de absorver energia da carga aplicada, o aço de tração escoado, além de uma região de concreto comprimido, Figura 25.

Com relação à curva [1.2], nesta é desconsiderada a tração do concreto. Para vigas subarmadas, é possível notar que sua dependência quanto à resistência à tração do concreto é maior, visto que enquanto a curva [1.2] segue uma trajetória quase linear até atingir o momento último, a curva [1.1] (caracterizada pela colaboração do concreto) cresce até um momento de pico de aproximadamente 70 kN.m para depois perder resistência e atingir o momento último.

Figura 25 – Momento final de uma viga subarmada



Resultado

Menu Principal Ajuda Exportar para Excel

Regiao Linear Regiao Nao Linear

Índice i	Tipo de Regime	Linha Neutra (cm)	Deformacao Compressao Concreto	Deformacao Compressao do Aco	Deformacao Tracao Aco	Momento (kN.m)	Deflexão (cm)
326	Regime Nao Linear (Estadio 3...	1,11767	,0027160394	,0000000000	,1309390983	33,76568	2,03179487192
327	Regime Nao Linear (Estadio 3...	1,11414	,0027431998	,0000000000	,1326766309	33,76577	2,05853266424
328	Regime Nao Linear (Estadio 3...	1,11069	,0027706317	,0000000000	,1344274881	33,76585	2,08547645405
329	Regime Nao Linear (Estadio 3...	1,10734	,0027983381	,0000000000	,1361916039	33,76591	2,11262528685
330	Regime Nao Linear (Estadio 3...	1,10407	,0028263214	,0000000000	,1379689106	33,76595	2,13997817449
331	Regime Nao Linear (Estadio 3...	1,10089	,0028545847	,0000000000	,1397593379	33,76597	2,16753409579
332	Regime Nao Linear (Estadio 3...	1,09780	,0028831305	,0000000000	,1415628135	33,76598	2,19529199735
333	Regime Nao Linear (Estadio 3...	1,09479	,0029119618	,0000000000	,1433792630	33,76596	2,22325079425
334	Regime Nao Linear (Estadio 3...	1,09187	,0029410814	,0000000000	,1452086099	33,76593	2,25140937084
335	Regime Nao Linear (Estadio 3...	1,08903	,0029704922	,0000000000	,1470507756	33,76588	2,27976658152
336	Regime Nao Linear (Estadio 3...	1,08627	,0030001972	,0000000000	,1489056799	33,76581	2,30832125152
337	Regime Nao Linear (Estadio 3...	1,08360	,0030301991	,0000000000	,1507732402	33,76572	2,33707217770
338	Regime Nao Linear (Estadio 3...	1,08101	,0030605011	,0000000000	,1526533724	33,76561	2,36601812939
339	Regime Nao Linear (Estadio 3...	1,07850	,0030911061	,0000000000	,1545459905	33,76549	2,39515784921
340	Regime Nao Linear (Estadio 3...	1,07607	,0031220172	,0000000000	,1564510068	33,76535	2,42449005392
341	Regime Nao Linear (Estadio 3...	1,07371	,0031532374	,0000000000	,1583683320	33,76518	2,45401343522
342	Regime Nao Linear (Estadio 3...	1,07144	,0031847697	,0000000000	,1602978748	33,76500	2,48372666067
343	Regime Nao Linear (Estadio 3...	1,06925	,0032166174	,0000000000	,1622395428	33,76481	2,51362837448
344	Regime Nao Linear (Estadio 3...	1,06713	,0032487836	,0000000000	,1641932419	33,76459	2,54371719846
345	Regime Nao Linear (Estadio 3...	1,06510	,0032812715	,0000000000	,1661588764	33,76436	2,57399173278
346	Regime Nao Linear (Estadio 3...	1,06313	,0033140842	,0000000000	,1681363494	33,76410	2,60445055696
347	Regime Nao Linear (Estadio 3...	1,06125	,0033472250	,0000000000	,1701255626	33,76383	2,63509223064
348	Regime Nao Linear (Estadio 3...	1,05943	,0033806973	,0000000000	,1721264163	33,76354	2,66591529452
349	Regime Nao Linear (Estadio 3...	1,05770	,0034145042	,0000000000	,1741388099	33,76323	2,69691827122
350	Regime Nao Linear (Estadio 3...	1,05603	,0034486493	,0000000000	,1761626412	33,76291	2,72809966613
351	Regime Nao Linear (Estadio 3...	1,05444	,0034831358	,0000000000	,1781978071	33,76256	2,75945796831

Fonte: O autor

A análise da deflexão da viga foi feita para o regime elástico. A formulação utilizada pela literatura está apresentada na equação (142) a seguir:

$$\delta = \frac{1}{48}\frac{Pl^3}{EI}, onde\ I = \frac{B_b H^3}{12} \tag{142}$$

Para este caso em particular, tem-se que *I* = 450.000 cm^4.

Sabendo que o momento de fissuração, de acordo com o *software*, para este caso foi de 44,1713 kN.m e que a carga aplicada é uma carga pontual no meio do vão (caracterizando um diagrama triangular), tem-se que a carga P pontual aplicada vale:

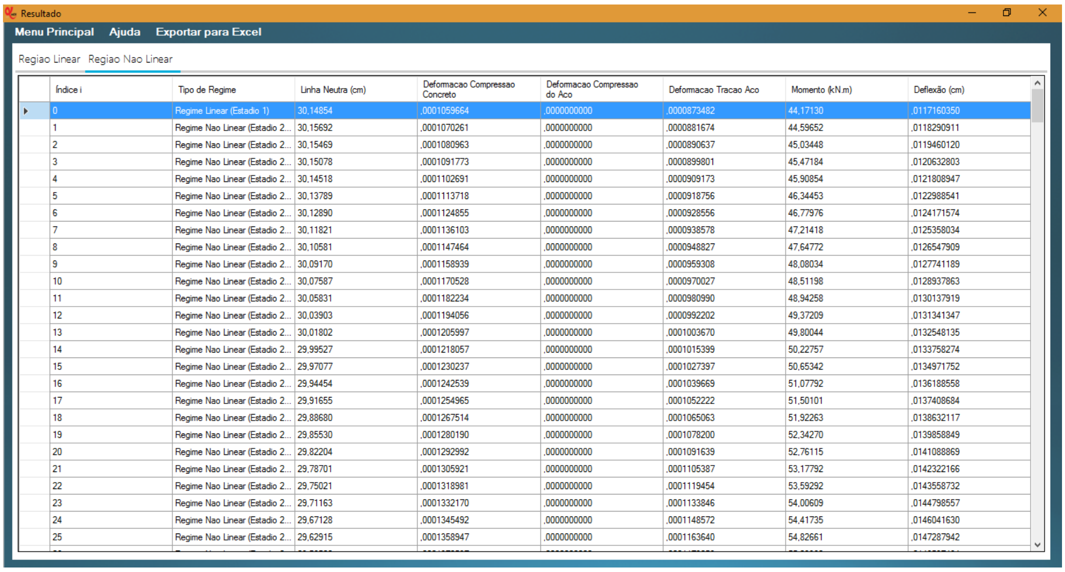
$$P = 88{,}3426\ kN$$

Assim, a deflexão da região elástica, conforme a fórmula (142) é de:

$$\delta = 0{,}0118\ cm$$

Já o *software* apresenta o seguinte resultado:

Figura 26 – Deflexão encontrada para região elástica de vigas sub armadas



Índice i	Tipo de Regime	Linha Neutra (cm)	Deformacao Compressao Concreto	Deformacao Compressao do Aco	Deformacao Tracao Aco	Momento (kN.m)	Deflexão (cm)
0	Regime Linear (Estadio 1)	30,14854	,0001059664	,0000000000	,0000873482	44,17130	,0117160350
1	Regime Nao Linear (Estadio 2...	30,15692	,0001070261	,0000000000	,0000881674	44,59652	,0118290911
2	Regime Nao Linear (Estadio 2...	30,15469	,0001080963	,0000000000	,0000890637	45,03448	,0119460120
3	Regime Nao Linear (Estadio 2...	30,15078	,0001091773	,0000000000	,0000899801	45,47184	,0120632803
4	Regime Nao Linear (Estadio 2...	30,14518	,0001102691	,0000000000	,0000909173	45,90854	,0121808947
5	Regime Nao Linear (Estadio 2...	30,13789	,0001113718	,0000000000	,0000918756	46,34453	,0122988541
6	Regime Nao Linear (Estadio 2...	30,12890	,0001124855	,0000000000	,0000928556	46,77976	,0124171574
7	Regime Nao Linear (Estadio 2...	30,11821	,0001136103	,0000000000	,0000938578	47,21418	,0125358034
8	Regime Nao Linear (Estadio 2...	30,10581	,0001147464	,0000000000	,0000948827	47,64772	,0126547909
9	Regime Nao Linear (Estadio 2...	30,09170	,0001158939	,0000000000	,0000959308	48,08034	,0127741189
10	Regime Nao Linear (Estadio 2...	30,07587	,0001170528	,0000000000	,0000970027	48,51198	,0128937863
11	Regime Nao Linear (Estadio 2...	30,05831	,0001182234	,0000000000	,0000980990	48,94258	,0130137919
12	Regime Nao Linear (Estadio 2...	30,03903	,0001194056	,0000000000	,0000992202	49,37209	,0131341347
13	Regime Nao Linear (Estadio 2...	30,01802	,0001205997	,0000000000	,0001003670	49,80044	,0132548135
14	Regime Nao Linear (Estadio 2...	29,99527	,0001218057	,0000000000	,0001015399	50,22757	,0133758274
15	Regime Nao Linear (Estadio 2...	29,97077	,0001230237	,0000000000	,0001027397	50,65342	,0134971752
16	Regime Nao Linear (Estadio 2...	29,94454	,0001242539	,0000000000	,0001039669	51,07792	,0136188558
17	Regime Nao Linear (Estadio 2...	29,91655	,0001254965	,0000000000	,0001052222	51,50101	,0137408684
18	Regime Nao Linear (Estadio 2...	29,88680	,0001267514	,0000000000	,0001065063	51,92263	,0138632117
19	Regime Nao Linear (Estadio 2...	29,85530	,0001280190	,0000000000	,0001078200	52,34270	,0139858849
20	Regime Nao Linear (Estadio 2...	29,82204	,0001292992	,0000000000	,0001091639	52,76115	,0141088869
21	Regime Nao Linear (Estadio 2...	29,78701	,0001305921	,0000000000	,0001105387	53,17792	,0142322166
22	Regime Nao Linear (Estadio 2...	29,75021	,0001318981	,0000000000	,0001119454	53,59292	,0143558732
23	Regime Nao Linear (Estadio 2...	29,71163	,0001332170	,0000000000	,0001133846	54,00609	,0144798557
24	Regime Nao Linear (Estadio 2...	29,67128	,0001345492	,0000000000	,0001148572	54,41735	,0146041630
25	Regime Nao Linear (Estadio 2...	29,62915	,0001358947	,0000000000	,0001163640	54,82661	,0147287942

Fonte: O autor

Comparando com o resultado apresentado pelo *software*, que foi de 0,01171 cm, obteve-se um valor bastante aproximado com relação à teoria (0,0118 cm). A discrepância foi de aproximadamente 0,768%.

4.2. Normalmente Armada

Vigas normalmente armadas correspondem àquelas onde as deformações tanto do aço quanto do concreto atingem o ápice simultaneamente. (PILLAI & MENON, 2005)

Para este caso, o dimensionamento é dado pelo limite entre os domínios 2 e 3. Desta forma, será considerado uma taxa de armadura de $\omega = 0{,}178$.

Com base na equação (128), tem-se:

$$A_{st} = 0{,}178\, x\, \frac{55\,.\,25\,.\,30}{500}$$

$$A_{st} = 14{,}685\ cm^2 \tag{143}$$

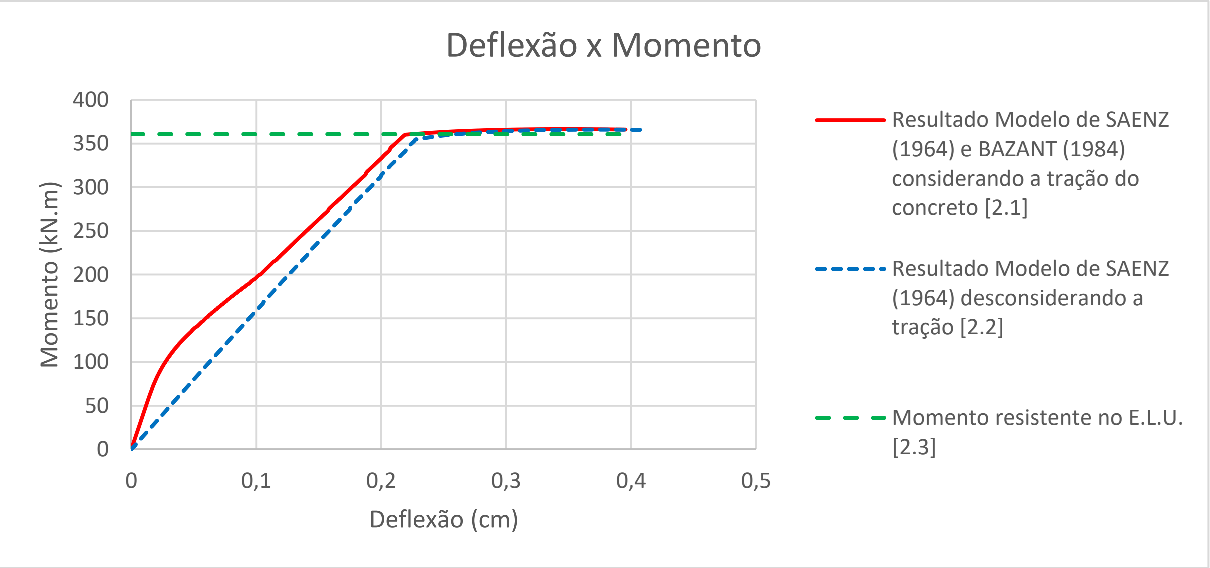
Conforme apresentado na equação (140), o momento característico da armadura calculada em (143) vale:

$$0{,}159 = \frac{M_k}{0{,}25\,.\,0{,}55^2\,.\,30000}$$

$$M_k = 360{,}73\ kN.m \tag{144}$$

Utilizando esses parâmetros como dados de entrada do *software* AlfaMCV e exportando os resultados para o Excel, temos o seguinte gráfico:

Gráfico 03 – Momento x Deflexão de vigas normalmente armadas



Fonte: O autor

No Gráfico 03 acima, observa-se o comportamento da viga considerando a área de concreto tracionado (curva [2.1]) e a consideração de f_{tk} zero (curva [2.2]).

Este gráfico apresenta a contribuição do concreto de tração nos estágios iniciais de solicitação. Após o início da fissuração, a região tracionada possui menos área de contribuição, automaticamente menor influência no momento resistente total. Isso pode ser observado no gráfico acima onde as curvas [2.1] e [2.2] tendem a se aproximarem à medida que o momento solicitante aumenta. O concreto comprimido torna-se mais solicitado e o aço, devido à queda de contribuição do concreto de tração, torna-se mais solicitado também.

A diferença entre os momentos últimos apresentados pelo *software* e pela teoria é referente à aproximação de cálculos considerada (vide Gráfico 03). Para o programa, o diagrama utilizado corresponde ao apresentado por SAENZ (1964), equação (57). Já a teoria sugere a aproximação do diagrama parábola retângulo para retangular.

Paralelamente a estas duas curvas, é apresentada a reta referente ao momento último calculado com base na NBR 6118:2014 ("Momento resistente no E.L.U", curva [2.3]), entretanto, sem as condições de inserção dos coeficientes de segurança, já que o objetivo corresponde à uma representação de um comportamento de viga próximo à realidade. Além disso, a curva é somente representativa com relação ao momento último calculado, ou seja, não está sendo considerado a evolução da flecha gerada pela flexão.

De acordo com o Gráfico 03 e com o resultado da tabela do programa (ver Figura 27 a seguir), o momento máximo resistido pela viga corresponde à 366,48 kN.m.

Figura 27 - Tabela de resultado de viga normalmente armadas

Índice i	Tipo de Regime	Linha Neutra (cm)	Deformacao Compressao Concreto	Deformacao Compressao do Aco	Deformacao Tracao Aco	Momento (kN.m)	Deflexão (cm)
312	Regime Nao Linear (Estadio 3)...	13,43646	,0026129100	,0000000000	,0080826224	366,36351	,3253164719
313	Regime Nao Linear (Estadio 3)...	13,39028	,0026390391	,0000000000	,0082006992	366,38697	,3275014099
314	Regime Nao Linear (Estadio 3)...	13,34521	,0026654294	,0000000000	,0083196792	366,40786	,3297039924
315	Regime Nao Linear (Estadio 3)...	13,30124	,0026920837	,0000000000	,0084395554	366,42616	,3319241504
316	Regime Nao Linear (Estadio 3)...	13,25835	,0027190046	,0000000000	,0085603202	366,44189	,3341618123
317	Regime Nao Linear (Estadio 3)...	13,21654	,0027461946	,0000000000	,0086819661	366,45504	,3364169029
318	Regime Nao Linear (Estadio 3)...	13,17579	,0027736566	,0000000000	,0088044853	366,46561	,3386893445
319	Regime Nao Linear (Estadio 3)...	13,13609	,0028013931	,0000000000	,0089278698	366,47359	,3409790563
320	Regime Nao Linear (Estadio 3)...	13,09743	,0028294071	,0000000000	,0090521111	366,47899	,3432859548
321	Regime Nao Linear (Estadio 3)...	13,05981	,0028577011	,0000000000	,0091772010	366,48181	,3456099535
322	Regime Nao Linear (Estadio 3)...	13,02322	,0028862781	,0000000000	,0093031306	366,48205	,3479509635
323	Regime Nao Linear (Estadio 3)...	12,98763	,0029151409	,0000000000	,0094298912	366,47970	,3503088929
324	Regime Nao Linear (Estadio 3)...	12,95306	,0029442923	,0000000000	,0095574736	366,47477	,3526836476
325	Regime Nao Linear (Estadio 3)...	12,91948	,0029737353	,0000000000	,0096858685	366,46726	,3550751307
326	Regime Nao Linear (Estadio 3)...	12,88688	,0030034726	,0000000000	,0098150666	366,45717	,3574832429
327	Regime Nao Linear (Estadio 3)...	12,85527	,0030335073	,0000000000	,0099450581	366,44449	,3599078826
328	Regime Nao Linear (Estadio 3)...	12,82462	,0030638424	,0000000000	,0100758332	366,42924	,3623489458
329	Regime Nao Linear (Estadio 3)...	12,79493	,0030944808	,0000000000	,0102073819	366,41140	,3648063264
330	Regime Nao Linear (Estadio 3)...	12,76620	,0031254256	,0000000000	,0103396940	366,39099	,3672799159
331	Regime Nao Linear (Estadio 3)...	12,73841	,0031566799	,0000000000	,0104727591	366,36799	,3697696039
332	Regime Nao Linear (Estadio 3)...	12,71156	,0031882467	,0000000000	,0106065668	366,34242	,3722752778
333	Regime Nao Linear (Estadio 3)...	12,68563	,0032201292	,0000000000	,0107411064	366,31427	,3747968233
334	Regime Nao Linear (Estadio 3)...	12,66063	,0032523305	,0000000000	,0108763669	366,28354	,3773341240
335	Regime Nao Linear (Estadio 3)...	12,63653	,0032848538	,0000000000	,0110123375	366,25024	,3798870616
336	Regime Nao Linear (Estadio 3)...	12,61335	,0033177023	,0000000000	,0111490070	366,21436	,3824555164
337	Regime Nao Linear (Estadio 3)...	12,59106	,0033508793	,0000000000	,0112863641	366,17591	,3850393667

Fonte: O autor

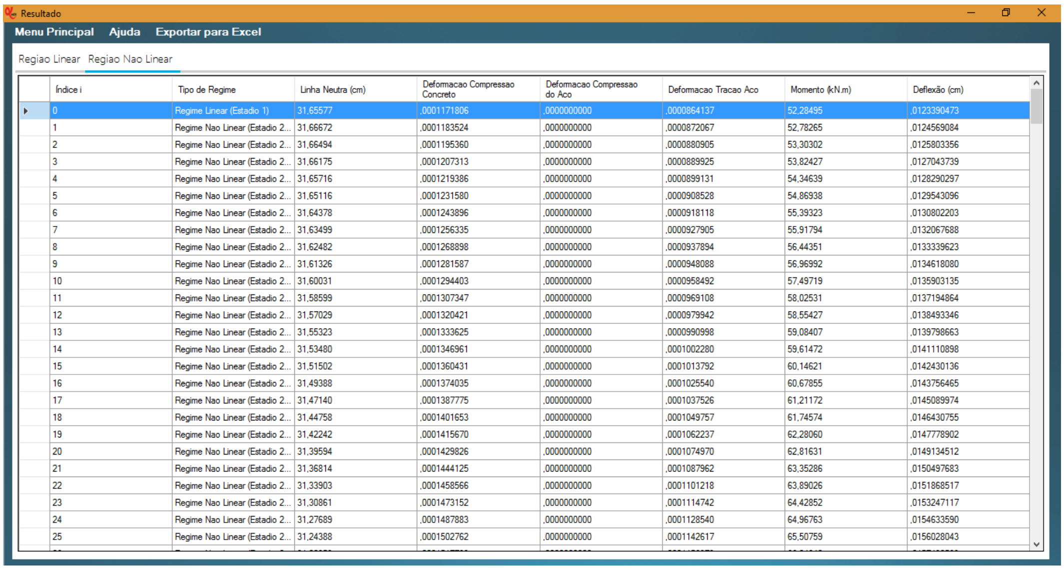
Sabendo que o momento de fissuração, de acordo com o *software*, para este caso foi de 52,28 kN.m (Figura 28), tem-se que a carga P aplicada vale:

$$P = 104{,}5699\ kN$$

Assim, a deflexão máxima com base em (142) é de:

$$\delta = 0{,}01402\ cm$$

Figura 28 - Deflexão encontrada para região elástica de vigas normalmente armadas



Índice i	Tipo de Regime	Linha Neutra (cm)	Deformacao Compressao Concreto	Deformacao Compressao do Aco	Deformacao Tracao Aco	Momento (kN.m)	Deflexão (cm)
0	Regime Linear (Estadio 1)	31,65577	,0001171806	,0000000000	,0000864137	52,28495	,0123390473
1	Regime Nao Linear (Estadio 2...	31,66672	,0001183524	,0000000000	,0000872067	52,78265	,0124569084
2	Regime Nao Linear (Estadio 2...	31,66494	,0001195360	,0000000000	,0000880905	53,30302	,0125803356
3	Regime Nao Linear (Estadio 2...	31,66175	,0001207313	,0000000000	,0000889925	53,82427	,0127043739
4	Regime Nao Linear (Estadio 2...	31,65716	,0001219386	,0000000000	,0000899131	54,34639	,0128290297
5	Regime Nao Linear (Estadio 2...	31,65116	,0001231580	,0000000000	,0000908528	54,86938	,0129543096
6	Regime Nao Linear (Estadio 2...	31,64378	,0001243896	,0000000000	,0000918118	55,39323	,0130802203
7	Regime Nao Linear (Estadio 2...	31,63499	,0001256335	,0000000000	,0000927905	55,91794	,0132067688
8	Regime Nao Linear (Estadio 2...	31,62482	,0001268898	,0000000000	,0000937894	56,44351	,0133339623
9	Regime Nao Linear (Estadio 2...	31,61326	,0001281587	,0000000000	,0000948088	56,96992	,0134618080
10	Regime Nao Linear (Estadio 2...	31,60031	,0001294403	,0000000000	,0000958492	57,49719	,0135903135
11	Regime Nao Linear (Estadio 2...	31,58599	,0001307347	,0000000000	,0000969108	58,02531	,0137194864
12	Regime Nao Linear (Estadio 2...	31,57029	,0001320421	,0000000000	,0000979942	58,55427	,0138493346
13	Regime Nao Linear (Estadio 2...	31,55323	,0001333625	,0000000000	,0000990998	59,08407	,0139798663
14	Regime Nao Linear (Estadio 2...	31,53480	,0001346961	,0000000000	,0001002280	59,61472	,0141110898
15	Regime Nao Linear (Estadio 2...	31,51502	,0001360431	,0000000000	,0001013792	60,14621	,0142430136
16	Regime Nao Linear (Estadio 2...	31,49388	,0001374035	,0000000000	,0001025540	60,67855	,0143756465
17	Regime Nao Linear (Estadio 2...	31,47140	,0001387775	,0000000000	,0001037526	61,21172	,0145089974
18	Regime Nao Linear (Estadio 2...	31,44758	,0001401653	,0000000000	,0001049757	61,74574	,0146430755
19	Regime Nao Linear (Estadio 2...	31,42242	,0001415670	,0000000000	,0001062237	62,28060	,0147778902
20	Regime Nao Linear (Estadio 2...	31,39594	,0001429826	,0000000000	,0001074970	62,81631	,0149134512
21	Regime Nao Linear (Estadio 2...	31,36814	,0001444125	,0000000000	,0001087962	63,35286	,0150497683
22	Regime Nao Linear (Estadio 2...	31,33903	,0001458566	,0000000000	,0001101218	63,89026	,0151868517
23	Regime Nao Linear (Estadio 2...	31,30861	,0001473152	,0000000000	,0001114742	64,42852	,0153247117
24	Regime Nao Linear (Estadio 2...	31,27689	,0001487883	,0000000000	,0001128540	64,96763	,0154633590
25	Regime Nao Linear (Estadio 2...	31,24388	,0001502762	,0000000000	,0001142617	65,50759	,0156028043

Fonte: O autor

Analisando o resultado emitido por AlfaMCV, obteve-se uma deflexão de 0,012339 cm quando comparados com 0,01402 cm da teoria. Esta discrepância corresponde à 14,55%.

4.3. Superarmada

Neste contexto, a viga é caracterizada por possuir armadura em excesso, fazendo com que o concreto atinja primeiro sua deformação máxima, ocasionando o colapso por compressão, enquanto o aço não escoa (PILLAI & MENON, 2005). Com isso, considera-se que a estrutura está entre os limites 3 e 4. Assim, com base na tabela apresentada no ANEXO E e na equação (138), a armadura de tração vale:

$$A_{st} = 0{,}433\ x\ \frac{55\,.\,25\,.\ 30}{500}$$

$$A_{st} = 35{,}72\ cm^2 \tag{145}$$

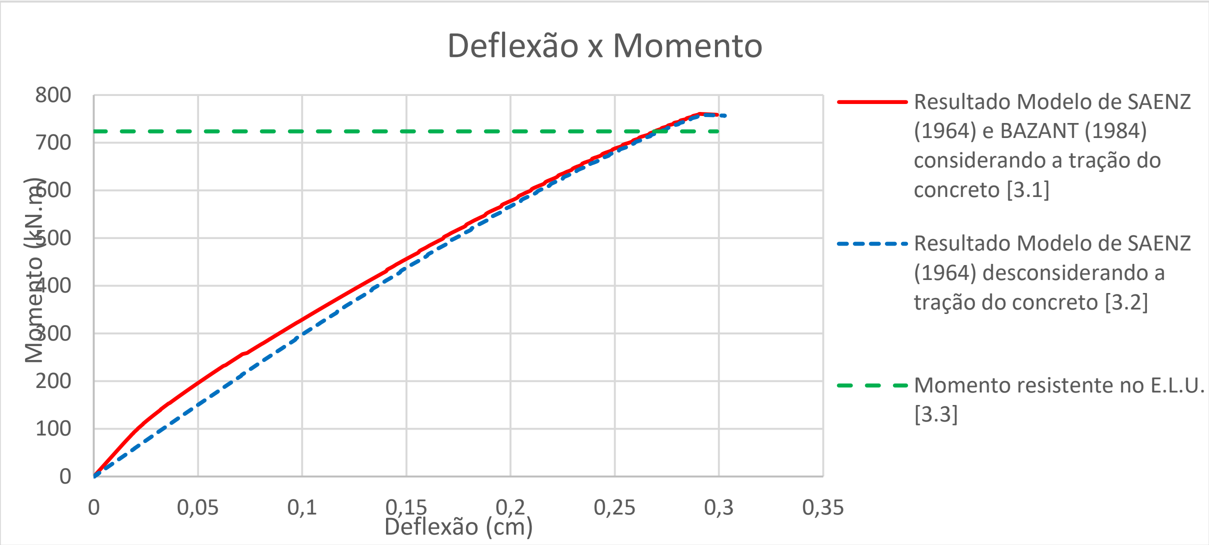
Já o momento, de acordo com a equação (140), tem-se:

$$0{,}319 = \frac{M_k}{0{,}25\,.\,0{,}55^2\,.\,30000}$$

$$M_k = 723{,}73\ kN.m \tag{146}$$

Tem-se o seguinte gráfico resultante destes parâmetros:

Gráfico 04 – Momento x Deflexão de vigas superarmadas



Fonte: O autor

Nota-se no Gráfico 04 que estruturas superarmadas não possuem uma transição visível do estádio 2 para 3. Ou seja, a derivada da curva não tende à zero.

Além disso, nota-se que as curvas [3.1] ("Resultado Modelo de SAENZ(1964) e BAZANT(1984) considerando a tração do concreto") e [3.2] ("Resultado Modelo de SAENZ(1964) desconsiderando a tração do concreto") se aproximam mais em comparação com os gráficos apresentados em vigas subarmadas e normalmente armadas. Isto ocorre por conta da alta taxa de armadura na seção, ainda com o auxílio da região de compressão do concreto, como pode ser analisado na equação (110). Estes dois fatores são numericamente muito maiores que a resistência à tração do concreto, ocasionando uma pequena diferença entre as duas curvas apresentadas no Gráfico 04.

De acordo com o resultado fornecido pelo *software*, o momento resultante apresentado em (146) está razoavelmente próximo com o programa, que foi de 760 kN.m.

Este valor de momento possui pouca influência da resistência à tração do concreto, já que no estádio final apenas 27 cm² de concreto tracionado está colaborando na resistência à solicitação. Esse valor de área tracionada foi obtido a partir da distribuição de deformações na seção, observando-se o valor correspondente à deformação máxima de tração do concreto.

Como esperado, o resultado obtido analiticamente é menor que o apresentado pelo *software* (Figura 29), já que o programa utiliza cálculos numéricos precisos para determinação da resistência máxima da estrutura, como no caso o uso da equação (57) no cálculo do momento. Em contrapartida, a teoria simplificada apresenta a condensação para o diagrama retangular de tensões, fazendo com que a viga esteja a favor da segurança.

Figura 29- Tabela de resultado de viga super armadas

Resultado

Menu Principal Ajuda Exportar para Excel

Regiao Linear Regiao Nao Linear

Índice i	Tipo de Regime	Linha Neutra (cm)	Deformacao Compressao Concreto	Deformacao Compressao do Aco	Deformacao Tracao Aco	Momento (kN.m)	Deflexão (cm)
302	Regime Nao Linear (Estadio 3...	29,73803	,0027101391	,0000000000	,0023022190	717,07873	,2648745466
303	Regime Nao Linear (Estadio 3...	29,80139	,0027372405	,0000000000	,0023144775	719,96283	,2669261536
304	Regime Nao Linear (Estadio 3...	29,86544	,0027646129	,0000000000	,0023266797	722,81171	,2688447581
305	Regime Nao Linear (Estadio 3...	29,93018	,0027922591	,0000000000	,0023388239	725,62472	,2699001998
306	Regime Nao Linear (Estadio 3...	29,99561	,0028201817	,0000000000	,0023509085	728,40120	,2718339194
307	Regime Nao Linear (Estadio 3...	30,06172	,0028483835	,0000000000	,0023629317	731,14048	,2727518555
308	Regime Nao Linear (Estadio 3...	30,12852	,0028768673	,0000000000	,0023748917	733,84193	,2748487940
309	Regime Nao Linear (Estadio 3...	30,19600	,0029056360	,0000000000	,0023867869	736,50490	,2757757159
310	Regime Nao Linear (Estadio 3...	30,26416	,0029346923	,0000000000	,0023986156	739,12878	,2778895687
311	Regime Nao Linear (Estadio 3...	30,33300	,0029640393	,0000000000	,0024103761	741,71293	,2785124080
312	Regime Nao Linear (Estadio 3...	30,40253	,0029936797	,0000000000	,0024220666	744,25674	,2809565049
313	Regime Nao Linear (Estadio 3...	30,47273	,0030236165	,0000000000	,0024336857	746,75961	,2815861385
314	Regime Nao Linear (Estadio 3...	30,54361	,0030538526	,0000000000	,0024452315	749,22094	,2838966689
315	Regime Nao Linear (Estadio 3...	30,61517	,0030843911	,0000000000	,0024567024	751,64014	,2846862480
316	Regime Nao Linear (Estadio 3...	30,68740	,0031152351	,0000000000	,0024680969	754,01665	,2866967657
317	Regime Nao Linear (Estadio 3...	30,76030	,0031463874	,0000000000	,0024794132	756,34988	,2876581534
318	Regime Nao Linear (Estadio 3...	30,83387	,0031778513	,0000000000	,0024906499	758,63929	,2898390742
319	Regime Nao Linear (Estadio 3...	30,88580	,0032096298	,0000000000	,0025059292	760,49567	,2905520715
320	Regime Nao Linear (Estadio 3...	30,82423	,0032417261	,0000000000	,0025425196	760,31878	,2915927800
321	Regime Nao Linear (Estadio 3...	30,76489	,0032741434	,0000000000	,0025792143	760,12663	,2926399312
322	Regime Nao Linear (Estadio 3...	30,70775	,0033068848	,0000000000	,0026160069	759,91924	,2936934762
323	Regime Nao Linear (Estadio 3...	30,65280	,0033399536	,0000000000	,0026528907	759,69661	,2947533653
324	Regime Nao Linear (Estadio 3...	30,60002	,0033733532	,0000000000	,0026898592	759,45875	,2958195480
325	Regime Nao Linear (Estadio 3...	30,54940	,0034070867	,0000000000	,0027269058	759,20565	,2968919733
326	Regime Nao Linear (Estadio 3...	30,50091	,0034411576	,0000000000	,0027640236	758,93733	,2979705895
327	Regime Nao Linear (Estadio 3...	30,45454	,0034755691	,0000000000	,0028012058	758,65379	,2990553445

Fonte: O autor

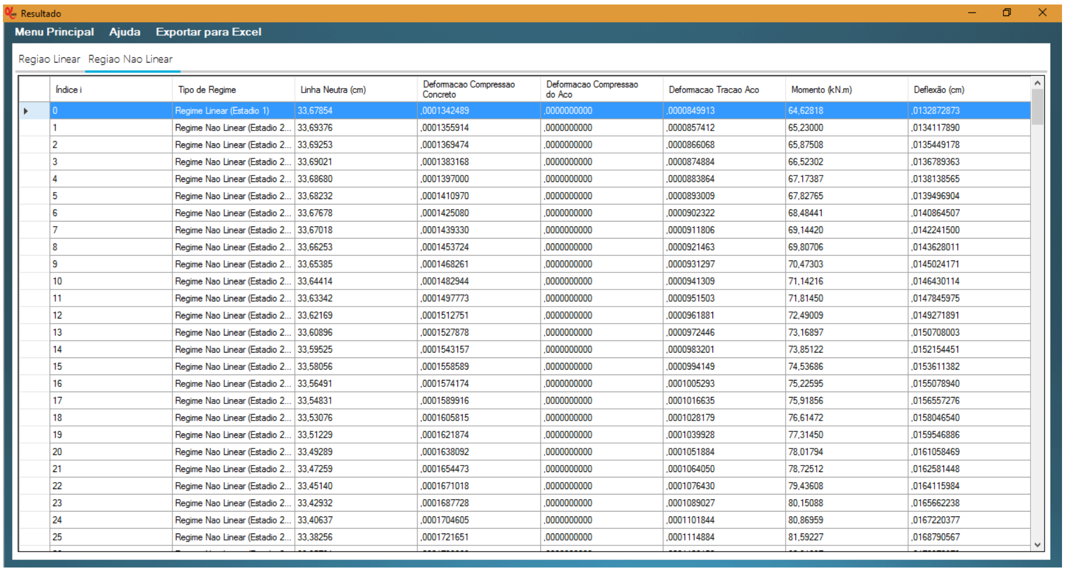
Sabendo que o momento de fissuração, de acordo com o *software*, para este caso foi de 64,62818 kN.m (Figura 30), tem-se que a carga P aplicada vale:

$$P = 129{,}25\ kN$$

Assim, a deflexão máxima (Equação 142) é de:

$$\delta = 0{,}01734\ cm$$

Figura 30 - Deflexão encontrada para região elástica de vigas super armadas


Resultado
Menu Principal Ajuda Exportar para Excel
Regiao Linear Regiao Nao Linear

Índice i	Tipo de Regime	Linha Neutra (cm)	Deformacao Compressao Concreto	Deformacao Compressao do Aco	Deformacao Tracao Aco	Momento (kN.m)	Deflexão (cm)
0	Regime Linear (Estadio 1)	33,67854	,0001342489	,0000000000	,0000849913	64,62818	,0132872873
1	Regime Nao Linear (Estadio 2...	33,69376	,0001355914	,0000000000	,0000857412	65,23000	,0134117890
2	Regime Nao Linear (Estadio 2...	33,69253	,0001369474	,0000000000	,0000866068	65,87508	,0135449178
3	Regime Nao Linear (Estadio 2...	33,69021	,0001383168	,0000000000	,0000874884	66,52302	,0136789363
4	Regime Nao Linear (Estadio 2...	33,68680	,0001397000	,0000000000	,0000883864	67,17387	,0138138565
5	Regime Nao Linear (Estadio 2...	33,68232	,0001410970	,0000000000	,0000893009	67,82765	,0139496904
6	Regime Nao Linear (Estadio 2...	33,67678	,0001425080	,0000000000	,0000902322	68,48441	,0140864507
7	Regime Nao Linear (Estadio 2...	33,67018	,0001439330	,0000000000	,0000911806	69,14420	,0142241500
8	Regime Nao Linear (Estadio 2...	33,66253	,0001453724	,0000000000	,0000921463	69,80706	,0143628011
9	Regime Nao Linear (Estadio 2...	33,65385	,0001468261	,0000000000	,0000931297	70,47303	,0145024171
10	Regime Nao Linear (Estadio 2...	33,64414	,0001482944	,0000000000	,0000941309	71,14216	,0146430114
11	Regime Nao Linear (Estadio 2...	33,63342	,0001497773	,0000000000	,0000951503	71,81450	,0147845975
12	Regime Nao Linear (Estadio 2...	33,62169	,0001512751	,0000000000	,0000961881	72,49009	,0149271891
13	Regime Nao Linear (Estadio 2...	33,60896	,0001527878	,0000000000	,0000972446	73,16897	,0150708003
14	Regime Nao Linear (Estadio 2...	33,59525	,0001543157	,0000000000	,0000983201	73,85122	,0152154451
15	Regime Nao Linear (Estadio 2...	33,58056	,0001558589	,0000000000	,0000994149	74,53686	,0153611382
16	Regime Nao Linear (Estadio 2...	33,56491	,0001574174	,0000000000	,0001005293	75,22595	,0155078940
17	Regime Nao Linear (Estadio 2...	33,54831	,0001589916	,0000000000	,0001016635	75,91856	,0156557276
18	Regime Nao Linear (Estadio 2...	33,53076	,0001605815	,0000000000	,0001028179	76,61472	,0158046540
19	Regime Nao Linear (Estadio 2...	33,51229	,0001621874	,0000000000	,0001039928	77,31450	,0159546886
20	Regime Nao Linear (Estadio 2...	33,49289	,0001638092	,0000000000	,0001051884	78,01794	,0161058469
21	Regime Nao Linear (Estadio 2...	33,47259	,0001654473	,0000000000	,0001064050	78,72512	,0162581448
22	Regime Nao Linear (Estadio 2...	33,45140	,0001671018	,0000000000	,0001076430	79,43608	,0164115984
23	Regime Nao Linear (Estadio 2...	33,42932	,0001687728	,0000000000	,0001089027	80,15088	,0165662238
24	Regime Nao Linear (Estadio 2...	33,40637	,0001704605	,0000000000	,0001101844	80,86959	,0167220377
25	Regime Nao Linear (Estadio 2...	33,38256	,0001721651	,0000000000	,0001114884	81,59227	,0168790567

Fonte: O autor

De acordo com o *software* AlfaMCV, a deflexão para o momento de fissuração de vigas super armadas é de 0,01328 cm quando comparado com a literatura, 0,01734 cm. Esta discrepância corresponde à 30,58%. Imagina-se que essa diferença se deve ao fato de que a flecha teórica não leva em conta a contribuição da armadura no seu cálculo, sendo que neste caso tal contribuição é de extrema relevância.

4.4. Vigas com Armadura Dupla

A quarta situação corresponde à análise de vigas com armadura dupla. Para este caso considerou como base um momento característico de 1.000 kN.m. Primeiro, confirma-se que a estrutura apresentada na Tabela 03 submetida ao momento solicitante característica de 1.000 kN.m está localizada no domínio 4, conforme especifica a tabela no ANEXO E. Desta forma:

$$\mu_k = \frac{100.000}{25\ x\ 55^2\ x\ 3{,}0}$$

$$\mu_k = 0{,}3526\ (domínio\ 4)$$

Com isso, com base nas equações (138) e (140), os momentos referentes às armaduras de tração e compressão, respectivamente, valem:

$$M_{k,lim} = 0{,}319\ x\ 25\ x\ 55^2\ x\ 3{,}0$$

$$M_{k,lim} = 723{,}73\ kN.m \tag{147}$$

$$\Delta M = M_k - M_{k,lim}$$

$$\Delta M = 1.000 - 723{,}73$$

$$\Delta M = 276{,}27\ kN.m \tag{148}$$

Para o cálculo da tensão da armadura de compressão, é necessário averiguar o coeficiente adimensional μ_k referente à tal armadura, juntamente com a relação $\frac{d'}{d}$. Com isso:

$$\frac{d'}{d} = \frac{5}{55} \cong 0{,}1$$

$$\mu_k = \frac{276{,}27}{25\ x\ 55^2\ x\ 3{,}0} = 0{,}121$$

Com base nestes dois valores e na Tabela apresentada no ANEXO E, tem-se para a tensão da armadura de compressão:

$$\sigma_{sc} = 287\ MPa$$

Como a tabela apresenta as tensões já com o coeficiente de minoração da tensão do aço, é necessário determinar a real tensão neste material, já que o objetivo é a caracterização de um ensaio real:

$$\sigma_{sc} = 287\ x\ 1{,}15 = 330{,}05\ MPa \tag{149}$$

Desta forma, a armadura de compressão da viga, com base em (148) e (149), é dada por:

$$A_{sc} = \frac{1}{\sigma_{sc}} \cdot \frac{\Delta M}{d - d'}$$

$$A_{sc} = \frac{1}{33{,}005} \cdot \frac{27627}{55 - 5}$$

$$A_{sc} = 16{,}74\ cm^2 \tag{150}$$

Já a armadura de tração é determinada por:

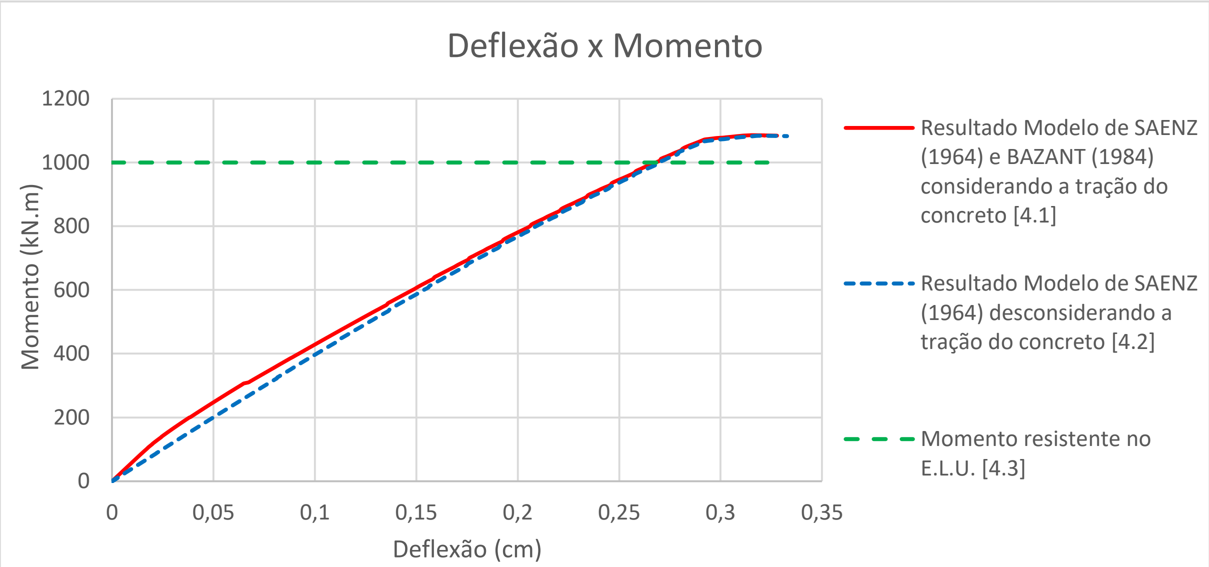
$$A_{st} = \frac{1}{\sigma_{st}}\left(\frac{M_{k,lim}}{\varsigma\,.\,d} + \frac{\Delta M}{d - d'}\right)$$

$$A_{st} = \frac{1}{50}\left(\frac{72373}{0{,}739\,.\,55} + \frac{27627}{55 - 5}\right)$$

$$A_{st} = 46{,}66\;cm^2 \tag{151}$$

Aplicando estes valores e exportando para o Excel, o gráfico gerado corresponde ao Gráfico 05 a seguir:

Gráfico 05 – Momento x Deflexão de vigas duplamente armadas



Fonte: O autor

Conforme apresentado no gráfico acima, o momento máximo resistido pela viga corresponde a 1.085,89 kN.m (vide Figura 31). O momento obtido pela teoria simplificada corresponde à curva [4.3], onde seu valor máximo corresponde a 1.000 kN.m.

Da mesma maneira que a viga superarmada, as curvas tendem a se aproximarem a medida que a taxa de armadura aumenta, já que o aço e o concreto de compressão tornam-se numericamente maior que a influência do concreto de tração, baseando-se na equação (110).

Além disso, os momentos últimos referentes à simulação de viga considerando tração do concreto, da curva [4.1], ("Resultado Modelo de

SAENZ(1964) e BAZANT(1984) considerando a tração do concreto") e desconsiderando a tração, da curva [4.2], ("Resultado Modelo de SAENZ(1964) desconsiderando a tração do concreto") estão próximos ao momento último calculado com base na Norma, porém sem o uso dos coeficientes de segurança ("Momento resistente no E.L.U", curva [4.3]), possuindo valores de 1.085,89 kN.m (Figura 31), 1.082,83 kN.m e 1.000 kN.m, respectivamente. Notoriamente, a colaboração do concreto de tração na resistência da estrutura vai diminuindo a medida que a solicitação aumenta, já que a linha neutra eleva sua altura, aumentando o braço de alavanca. Isto ocasiona uma propagação das fissuras e uma maior solicitação da região comprimida.

Figura 31 - Tabela de resultado de viga duplamente armada

Resultado

Menu Principal Ajuda Exportar para Excel

Regiao Linear Regiao Nao Linear

Índice i	Tipo de Regime	Linha Neutra (cm)	Deformacao Compressao Concreto	Deformacao Compressao do Aco	Deformacao Tracao Aco	Momento (kN.m)	Deflexão (cm)
308	Regime Nao Linear (Estadio 3...	28,60680	,0027049477	,0022321671	,0024956390	1069,99790	,2911384676
309	Regime Nao Linear (Estadio 3...	28,46819	,0027319972	,0022521639	,0025461689	1072,54416	,2923139130
310	Regime Nao Linear (Estadio 3...	28,26483	,0027593172	,0022711987	,0026099864	1073,67305	,2938664553
311	Regime Nao Linear (Estadio 3...	28,06359	,0027869104	,0022903754	,0026749738	1074,79161	,2952691914
312	Regime Nao Linear (Estadio 3...	27,86443	,0028147795	,0023096947	,0027411527	1075,90005	,2966941620
313	Regime Nao Linear (Estadio 3...	27,66730	,0028429273	,0023291570	,0028085454	1076,99854	,2981417452
314	Regime Nao Linear (Estadio 3...	27,47217	,0028713565	,0023487628	,0028771747	1078,08726	,3010820589
315	Regime Nao Linear (Estadio 3...	27,27898	,0029000701	,0023685125	,0029470638	1079,16640	,3025760389
316	Regime Nao Linear (Estadio 3...	27,08770	,0029290708	,0023884065	,0030182368	1080,23615	,3044319819
317	Regime Nao Linear (Estadio 3...	26,89829	,0029583615	,0024084452	,0030907184	1081,29669	,3059739866
318	Regime Nao Linear (Estadio 3...	26,71069	,0029879451	,0024286288	,0031645339	1082,34819	,3075406399
319	Regime Nao Linear (Estadio 3...	26,52488	,0030178246	,0024489579	,0032397093	1083,39085	,3093058619
320	Regime Nao Linear (Estadio 3...	26,34081	,0030480028	,0024694324	,0033162714	1084,42482	,3109231394
321	Regime Nao Linear (Estadio 3...	26,15844	,0030784828	,0024900528	,0033942476	1085,45031	,3140466150
322	Regime Nao Linear (Estadio 3...	26,04079	,0031092677	,0025122682	,0034577269	1085,89693	,3154748593
323	Regime Nao Linear (Estadio 3...	25,98317	,0031403604	,0025360537	,0035070124	1085,80705	,3166927111
324	Regime Nao Linear (Estadio 3...	25,92747	,0031717640	,0025601030	,0035565068	1085,70647	,3179184378
325	Regime Nao Linear (Estadio 3...	25,87366	,0032034816	,0025844193	,0036062032	1085,59518	,3191519838
326	Regime Nao Linear (Estadio 3...	25,82174	,0032355164	,0026090063	,0036560947	1085,47320	,3203932924
327	Regime Nao Linear (Estadio 3...	25,77169	,0032678716	,0026338674	,0037061745	1085,34053	,3216423061
328	Regime Nao Linear (Estadio 3...	25,72349	,0033005503	,0026590061	,0037564353	1085,19716	,3214187668
329	Regime Nao Linear (Estadio 3...	25,67712	,0033335558	,0026844262	,0038068702	1085,04310	,3226830146
330	Regime Nao Linear (Estadio 3...	25,63257	,0033668914	,0027101311	,0038574718	1084,87837	,3239547899
331	Regime Nao Linear (Estadio 3...	25,58984	,0034005603	,0027361245	,0039082329	1084,70295	,3252340318
332	Regime Nao Linear (Estadio 3...	25,54889	,0034345659	,0027624102	,0039591460	1084,51685	,3265206788
333	Regime Nao Linear (Estadio 3...	25,50972	,0034689115	,0027889920	,0040102036	1084,32008	,3278146687

Fonte: O autor

Além disso, para averiguar se ocorre contribuição do concreto tracionado até o momento último, tomou-se a deformação de compressão do concreto e a altura da linha neutra para o momento de 1.085,89 kN.m, cujos valores são 3.109‰ e 26,04 cm, respectivamente. A partir disso, com base na relação linear apresentada na Figura 12 (c), determinou-se a área de colaboração do concreto tracionado no momento último. A deformação máxima de tração para o concreto estabelecido na Tabela 03 vale:

$$\varepsilon_{tp} = \frac{f_{tk}}{E_c} = 1,05\ x\ 10^{-4}$$

E a altura de concreto tracionado colaborante é dado por:

$$\frac{0,003109}{26,04} = \frac{0,000105}{h_{ct}}$$

$$h_{ct} = 1,2563\ cm$$

$$A_{ct} = h_{ct}\ x\ B_b = 31,408\ cm^2 \tag{151}$$

Analisando a área de concreto tracionado colaborante, apresentado em (151), é confirmado que a região tracionada de concreto não possui colaboração significativa na resistência da seção no momento solicitante final da estrutura. A diferença de resultados entre o *software* e o método teórico é negligenciável.

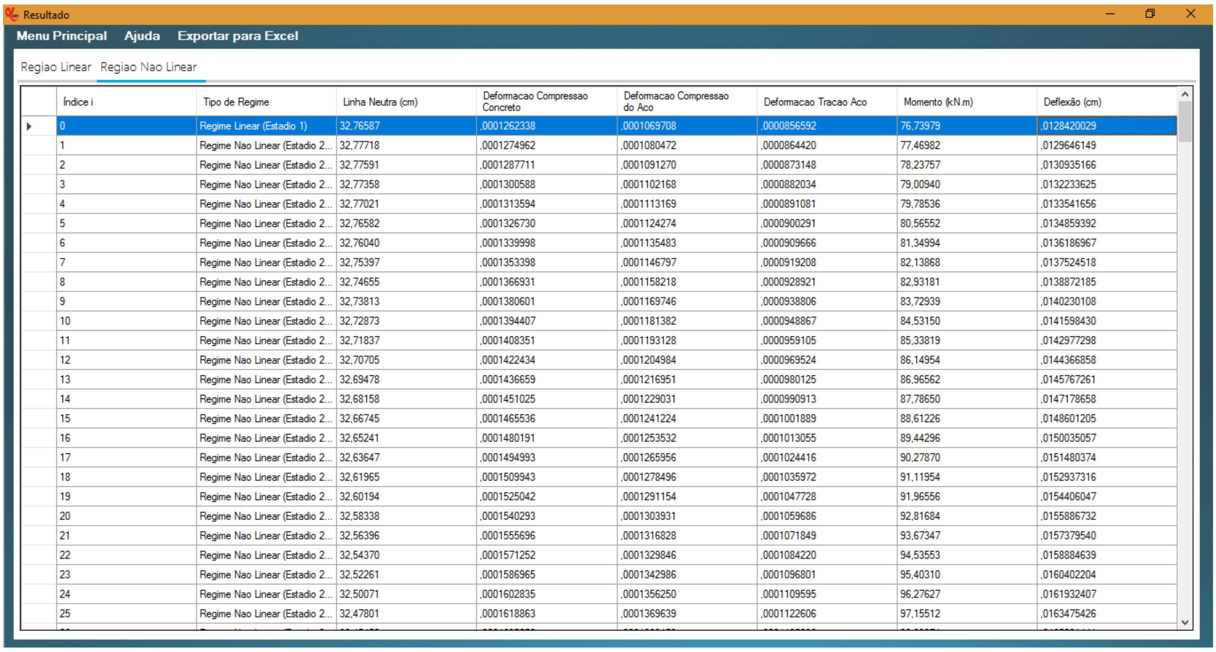
Sabendo que o momento de fissuração, de acordo com o *software*, para este caso foi de 76,73979 kN.m (Figura 32) e que a carga aplicada é uma carga pontual no meio do vão (caracterizando um diagrama triangular), tem-se que P vale:

$$P = 153,47\ kN$$

Assim, a deflexão máxima é de:

$$\delta = \frac{1}{48}\frac{153,47\ \ x\ 200^3}{2760,521 \text{ x } 450.000} = 0,02059\ cm$$

Figura 32 - Deflexão encontrada para região elástica de vigas duplamente armadas



Índice i	Tipo de Regime	Linha Neutra (cm)	Deformacao Compressao Concreto	Deformacao Compressao do Aco	Deformacao Tracao Aco	Momento (kN.m)	Deflexão (cm)
0	Regime Linear (Estadio 1)	32,76587	,0001262338	,0001069708	,0000856592	76,73979	,0128420029
1	Regime Nao Linear (Estadio 2...	32,77718	,0001274962	,0001080472	,0000864420	77,46982	,0129646149
2	Regime Nao Linear (Estadio 2...	32,77591	,0001287711	,0001091270	,0000873148	78,23757	,0130935166
3	Regime Nao Linear (Estadio 2...	32,77358	,0001300588	,0001102168	,0000882034	79,00940	,0132233625
4	Regime Nao Linear (Estadio 2...	32,77021	,0001313594	,0001113169	,0000891081	79,78536	,0133541656
5	Regime Nao Linear (Estadio 2...	32,76582	,0001326730	,0001124274	,0000900291	80,56552	,0134859392
6	Regime Nao Linear (Estadio 2...	32,76040	,0001339998	,0001135483	,0000909666	81,34994	,0136186967
7	Regime Nao Linear (Estadio 2...	32,75397	,0001353398	,0001146797	,0000919208	82,13868	,0137524518
8	Regime Nao Linear (Estadio 2...	32,74655	,0001366931	,0001158218	,0000928921	82,93181	,0138872185
9	Regime Nao Linear (Estadio 2...	32,73813	,0001380601	,0001169746	,0000938806	83,72939	,0140230108
10	Regime Nao Linear (Estadio 2...	32,72873	,0001394407	,0001181382	,0000948867	84,53150	,0141598430
11	Regime Nao Linear (Estadio 2...	32,71837	,0001408351	,0001193128	,0000959105	85,33819	,0142977298
12	Regime Nao Linear (Estadio 2...	32,70705	,0001422434	,0001204984	,0000969524	86,14954	,0144366858
13	Regime Nao Linear (Estadio 2...	32,69478	,0001436659	,0001216951	,0000980125	86,96562	,0145767261
14	Regime Nao Linear (Estadio 2...	32,68158	,0001451025	,0001229031	,0000990913	87,78650	,0147178658
15	Regime Nao Linear (Estadio 2...	32,66745	,0001465536	,0001241224	,0001001889	88,61226	,0148601205
16	Regime Nao Linear (Estadio 2...	32,65241	,0001480191	,0001253532	,0001013055	89,44296	,0150035057
17	Regime Nao Linear (Estadio 2...	32,63647	,0001494993	,0001265956	,0001024416	90,27870	,0151480374
18	Regime Nao Linear (Estadio 2...	32,61965	,0001509943	,0001278496	,0001035972	91,11954	,0152937316
19	Regime Nao Linear (Estadio 2...	32,60194	,0001525042	,0001291154	,0001047728	91,96556	,0154406047
20	Regime Nao Linear (Estadio 2...	32,58338	,0001540293	,0001303931	,0001059686	92,81684	,0155886732
21	Regime Nao Linear (Estadio 2...	32,56396	,0001555696	,0001316828	,0001071849	93,67347	,0157379540
22	Regime Nao Linear (Estadio 2...	32,54370	,0001571252	,0001329846	,0001084220	94,53553	,0158884639
23	Regime Nao Linear (Estadio 2...	32,52261	,0001586965	,0001342986	,0001096801	95,40310	,0160402204
24	Regime Nao Linear (Estadio 2...	32,50071	,0001602835	,0001356250	,0001109595	96,27627	,0161932407
25	Regime Nao Linear (Estadio 2...	32,47801	,0001618863	,0001369639	,0001122606	97,15512	,0163475426

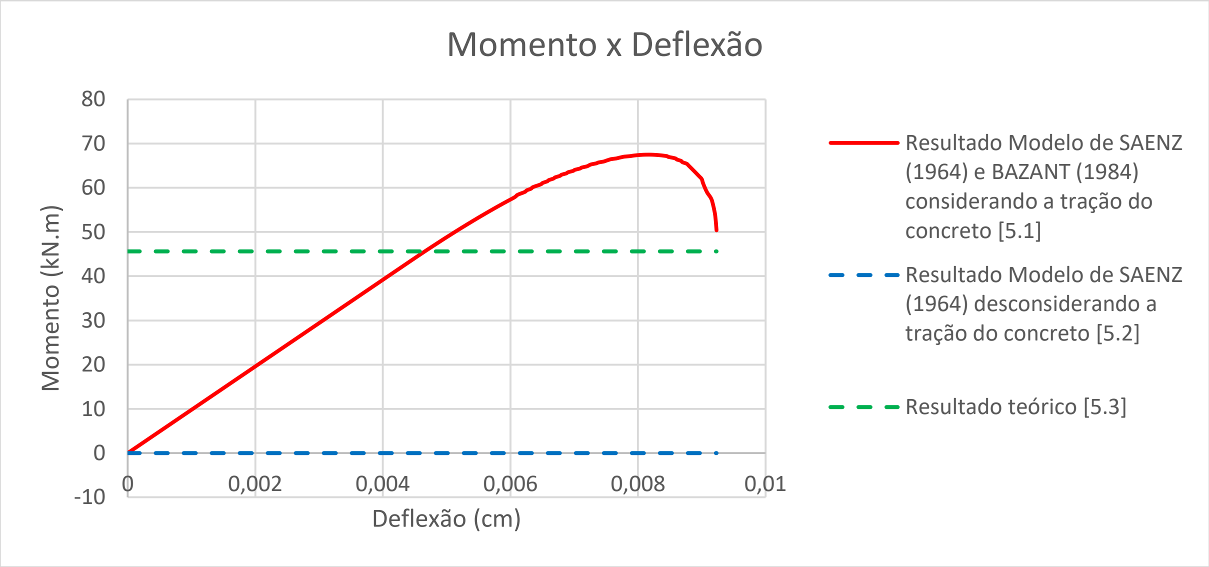
Fonte: O autor

Comparando com o que apresentado por AlfaMCV (0,0128 cm), a literatura apresenta um resultado conservador, ocasionando uma discrepância de 60,86%.

4.5. Viga de Concreto sem Armadura

Uma outra situação que pode ser apresentada corresponde à uma viga de concreto sem armadura. Seu comportamento corresponde à uma completa resistência do concreto até o momento de fissuração (50,269 kN.m), onde termina o Estádio 1, e suas fissuras se propagam, diminuindo a área de concreto comprimido. Desta forma, a viga percorre o Estádio 2 até atingir o momento máximo resistente, que é 67,47 kN.m. Este comportamento pode ser observado no Gráfico 06 a seguir:

Gráfico 06 – Momento x Deflexão de vigas sem armadura



Fonte: O autor

Observa-se no Gráfico 06 que quando se considera a resistência à tração do concreto igual a zero, no instante em que aparece a primeira fissura, é o instante que a estrutura colapsa (curva [5.2]). Já com a colaboração do concreto de tração, a viga é capaz de resistir uma solicitação um pouco maior (curva [5.1]).

Com base no item 17.3 da NBR 6118: 2014, o momento de fissuração é calculado por:

$$M_r = \frac{\alpha\, f_{ct}\, I}{y_u} \tag{152}$$

Com isso, o momento de fissuração da seção apresentada na Tabela 03 vale:

$$M_r = \frac{1{,}5\ x\ 0{,}7\ x\ 0{,}28964\ x\ 450.000}{30}$$

$$M_r = 45{,}61\ kN.m$$

Para este valor de 45,61 kN.m corresponde ao início da fissuração da estrutura.

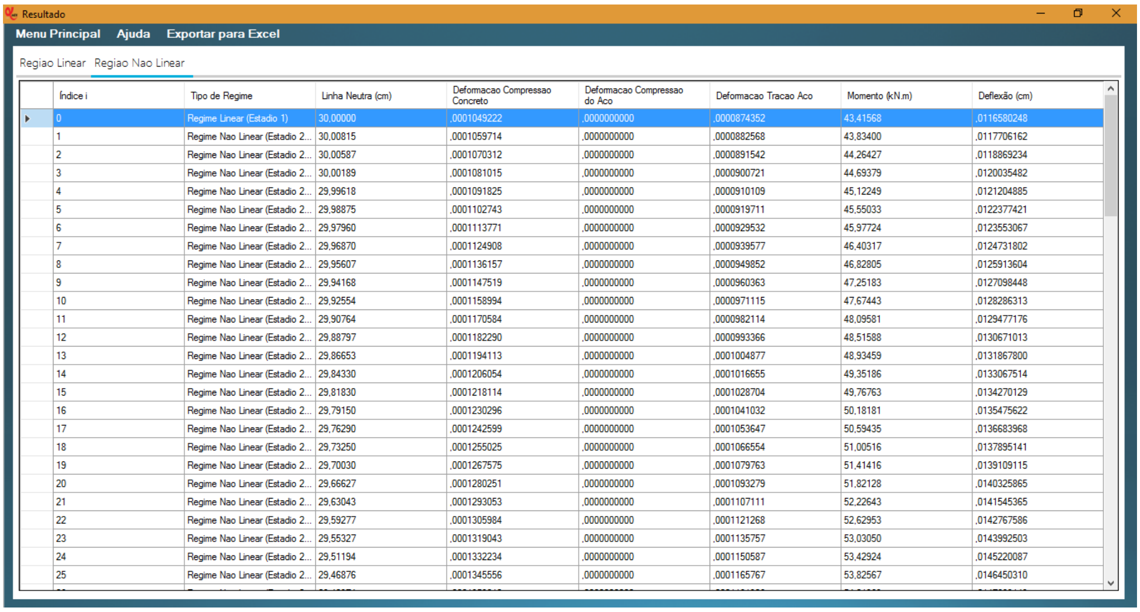
Sabendo que o momento de fissuração, de acordo com o *software*, para este caso foi de 43,4156 kN.m e que a carga aplicada é uma carga pontual no meio do vão (caracterizando um diagrama triangular), tem-se que P vale:

$$P = 86,8312\ kN$$

Assim, a deflexão máxima na fissuração é de:

$$\delta = 0,011649\ cm$$

Figura 33 - Deflexão encontrada para região elástica de vigas sem armadura



Índice i	Tipo de Regime	Linha Neutra (cm)	Deformacao Compressao Concreto	Deformacao Compressao do Aco	Deformacao Tracao Aco	Momento (kN.m)	Deflexão (cm)
0	Regime Linear (Estadio 1)	30,00000	,0001049222	,0000000000	,0000874352	43,41568	,0116580248
1	Regime Nao Linear (Estadio 2...	30,00815	,0001059714	,0000000000	,0000882568	43,83400	,0117706162
2	Regime Nao Linear (Estadio 2...	30,00587	,0001070312	,0000000000	,0000891542	44,26427	,0118869234
3	Regime Nao Linear (Estadio 2...	30,00189	,0001081015	,0000000000	,0000900721	44,69379	,0120035482
4	Regime Nao Linear (Estadio 2...	29,99618	,0001091825	,0000000000	,0000910109	45,12249	,0121204885
5	Regime Nao Linear (Estadio 2...	29,98875	,0001102743	,0000000000	,0000919711	45,55033	,0122377421
6	Regime Nao Linear (Estadio 2...	29,97960	,0001113771	,0000000000	,0000929532	45,97724	,0123553067
7	Regime Nao Linear (Estadio 2...	29,96870	,0001124908	,0000000000	,0000939577	46,40317	,0124731802
8	Regime Nao Linear (Estadio 2...	29,95607	,0001136157	,0000000000	,0000949852	46,82805	,0125913604
9	Regime Nao Linear (Estadio 2...	29,94168	,0001147519	,0000000000	,0000960363	47,25183	,0127098448
10	Regime Nao Linear (Estadio 2...	29,92554	,0001158994	,0000000000	,0000971115	47,67443	,0128286313
11	Regime Nao Linear (Estadio 2...	29,90764	,0001170584	,0000000000	,0000982114	48,09581	,0129477176
12	Regime Nao Linear (Estadio 2...	29,88797	,0001182290	,0000000000	,0000993366	48,51588	,0130671013
13	Regime Nao Linear (Estadio 2...	29,86653	,0001194113	,0000000000	,0001004877	48,93459	,0131867800
14	Regime Nao Linear (Estadio 2...	29,84330	,0001206054	,0000000000	,0001016655	49,35186	,0133067514
15	Regime Nao Linear (Estadio 2...	29,81830	,0001218114	,0000000000	,0001028704	49,76763	,0134270129
16	Regime Nao Linear (Estadio 2...	29,79150	,0001230296	,0000000000	,0001041032	50,18181	,0135475622
17	Regime Nao Linear (Estadio 2...	29,76290	,0001242599	,0000000000	,0001053647	50,59435	,0136683968
18	Regime Nao Linear (Estadio 2...	29,73250	,0001255025	,0000000000	,0001066554	51,00516	,0137895141
19	Regime Nao Linear (Estadio 2...	29,70030	,0001267575	,0000000000	,0001079763	51,41416	,0139109115
20	Regime Nao Linear (Estadio 2...	29,66627	,0001280251	,0000000000	,0001093279	51,82128	,0140325865
21	Regime Nao Linear (Estadio 2...	29,63043	,0001293053	,0000000000	,0001107111	52,22643	,0141545365
22	Regime Nao Linear (Estadio 2...	29,59277	,0001305984	,0000000000	,0001121268	52,62953	,0142767586
23	Regime Nao Linear (Estadio 2...	29,55327	,0001319043	,0000000000	,0001135757	53,03050	,0143992503
24	Regime Nao Linear (Estadio 2...	29,51194	,0001332234	,0000000000	,0001150587	53,42924	,0145220087
25	Regime Nao Linear (Estadio 2...	29,46876	,0001345556	,0000000000	,0001165767	53,82567	,0146450310

Fonte: O autor

Comparando com o *software*, que o resultado foi de 0,011658 cm, tem-se uma discrepância de 0,00858%.

4.6. Análise de Resultados

Com base nos cálculos realizados, apresentados tanto no cálculo de armaduras, momentos solicitantes e deflexões, é possível notar que todos os resultados estão próximos aos apresentados pelo *software*, o que confirma a veracidade do programa.

Em todos os casos o resultado de momento solicitante promovido pelo programa AlfaMCV é proveniente da colaboração da região tracionada de concreto nos cálculos. Além disso, a utilização da equação de SAENZ (1964), apresentada em (57) elucida a realidade do diagrama tensão – deformação, promovendo a razão entre uma função linear e um polinômio do 2° grau, o que ocasiona diferença na tensão final do concreto.

Analisando as curvas de resistência à tração zero de todas as vigas apresentadas, observa-se que a medida que a taxa de armadura aumenta, as curvas de tensão de tração igual a zero e a colaboração da tração do concreto tendem a se aproximar. Desta forma, comprova-se também que o procedimento de modelagem e criação do programa seguiu um raciocínio correto, apresentando curvas próximas à realidade estrutural.

Além disso, é apresentado em todos os casos de vigas dimensionadas, a curvatura de modelagem do comportamento da deflexão da viga pelo momento resistente quando se desconsidera a parcela de tração colaborante e a utilização dos coeficientes de segurança nas resistências dos materiais. Nota-se que as discrepâncias de resultados são baixar em comparação com a resistência total da estrutura.

Com relação às deflexões encontradas, o *software* apresenta resultados menores que a teoria elástica. Isto ocorre porque o método utilizado para o cálculo da flecha depende diretamente do momento presente nas seções consideradas na equação (113), ou seja, ocorre diretamente uma colaboração das solicitações dos materiais. Com relação aos resultados teóricos encontrados pela deflexão apresentada em (142), estes são mais conservadores em comparação com o *software* por conta da consideração da rigidez do concreto somente, desconsiderando a atuação do aço.

5. O CÓDIGO DO *SOFTWARE* ALFAMCV

5.1. Estádio 1

O estádio 1 caracteriza-se pelo regime linear de tensões, mesmo sendo aplicada à um material heterogêneo, que é o concreto armado. Desta forma, pode-se considerar que a relação Momento x Deflexão pode também ser baseada na equação da reta.

Ressalta-se que as relações apresentadas pela equação (50) são mantidas, o conceito de tração máxima apresentada na Figura 03 é conservado e para este estágio são contempladas as equações (2), (67), (84), (90), (92), (94), (113), (114), (116)

Os códigos relativos às *FUNCTIONS* usadas para cálculo estão apresentados no ANEXO A.

5.2. Estádio 2

Este estádio caracteriza-se pelo regime não linear. Tem-se as seguintes equações presentes: (2), (5), (49), (67), (84), (90), (97), (99), (110), (113), (118), (120) à (123).

Contudo, por ser um estádio de deformação não linear, o conceito de determinação da altura da linha neutra e cálculo da deflexão tornam-se um pouco diferentes.

Para a programação do *software* neste estágio, algumas considerações foram feitas e várias verificações quanto aos materiais foram realizadas.

De acordo com as equações apresentadas para o cálculo do Estádio 2, seria interessante a utilização do método de Newton – Raphson para o cálculo do momento para cada ponto encontrado de deformação do concreto. Contudo, para a confecção do programa, preferiu-se não utilizar este método, pois tornaria o código muito maior, mais trabalhoso e sobrecarregaria o tempo de execução dos cálculos e exposição do resultado. Desta forma, a forma encontrada para que o *software* pudesse realizar os cálculos sem muito código à ser compilado seria acrescentar em 1% a deformação de compressão do concreto.

Ou seja, é utilizado um bloco de *FOR/ NEXT* para que os cálculos sejam realizados. Um valor inicial de deformação de compressão de concreto é fixado, que corresponde à deformação de compressão final encontrada no Estádio 1. Assim, a cada passagem de *FOR* realizada, o valor da deformação de compressão do concreto é acrescido em 1%, onde este, deformação de compressão do concreto, é a variável chave de todo o bloco, onde todas as *FUNCTIONS* criadas dependem do valor que está salvo nesta variável.

Na entrada do bloco *FOR* do Estádio 2, todas as variáveis são preenchidas com os valores retornados das *FUNCTIONS* de cálculo, a saber: tensões de tração e compressão (se houver) do aço, deformações de tração e compressão (se houver) do aço, deformações de compressão (esta com valor já existente) e tração do concreto, linha neutra e momento gerado.

Após isso, a verificação quanto à tensão de escoamento do aço é realizada. Neste caso, a verificação consiste se o valor calculado de tensão na atual passagem do *FOR* é maior ou não que a tensão de escoamento introduzida pelo usuário. Caso seja maior, significa que o aço rompeu, o que não é característico desses Estádio. Assim, esta condição de *IF* faz com que o código saia do bloco *FOR* do Estádio 2. Em contra partida, se a tensão calculada for menor que a tensão de escoamento introduzida pelo usuário, simboliza que a estrutura ainda está em segurança, sendo então as deformações do(s) aço(s) calculadas com base nesta tensão calculada pelo código.

A seguir, após a verificação do aço ser concluída com sucesso, é realizada a verificação do concreto. Para este caso, o Estádio 2 caracteriza-se pela deformação de tração do concreto ser menor ou igual à deformação máxima de tração do mesmo. Este conceito foi tirado com base na Figura 03. Caso a condição *IF* seja verdadeira, a deflexão da viga para este Estágio é calculada.

O cálculo da deflexão da viga corresponde à parte mais delicada do código. Para este caso, com base na equação (111) e (113), deve-se determinar a deformação de compressão e a altura da linha neutra para os momentos

$\mathrm{M_i}, {}^{3}\!/_{4}\,\mathrm{M_i}, {}^{1}\!/_{2}\,\mathrm{M_i}$ e ${}^{1}\!/_{4}\,\mathrm{M_i}$, sendo $\mathrm{M_i}$ o momento referente à linha i. Para isso, resultaria em uma equação não linear ao tentar determinar o valor da deformação do concreto com base na equação (110), o que não seria trivial de resolver via Visual Basic.

Outra solução para este caso seria a utilização do método de Newton – Raphson, onde a partir do momento, determinar-se-ia as deformações. Contudo, como a equação simplificada de Simpson, utilizada por BAZANT (1984), utiliza três variáveis $\left(M_i, {}^{3}\!/_{4}\,M_i, {}^{1}\!/_{2}\,M_i \; e \; {}^{1}\!/_{4}\,M_i\right)$, para cada linha da tabela que fosse calculada a deflexão, seriam três códigos do método com um looping de passos indeterminados. Isso acarretaria em um tempo maior de processamento dos dados, além de um código maior.

Com base neste problema adotou a solução de "busca de resultado", isto é, o *DataGrid*[1] primeiramente é preenchido com os valores de linha neutra, deformações dos materiais e momento resultante. Após isso, é feita a leitura de cada Momento (kN.m) registrado na tabela. Este momento $\mathrm{M_i}$ e seus multiplicadores (${}^{3}\!/_{4}\,\mathrm{M_i}, {}^{1}\!/_{2}\,\mathrm{M_i}$ e ${}^{1}\!/_{4}\,\mathrm{M_i}$) são avaliados em qual Estádio pertencem.

Em seguida, com base neste resultado, multiplicadores que se encontram no Estádio 1, suas deformações e altura da linha neutra é calculada linearmente, ou seja, utiliza-se o conceito de equação da reta com Deflexão x Momento de compressão do concreto.

Casos em que algum dos seus multiplicadores pertençam ao Estádio 2, a solução adotada foi a de busca de resultado pelo *DataGrid*, onde é realizada a leitura de cada linha da tabela, particularmente a leitura dos Momentos já registrados, e então verifica-se se o momento na linha que está sendo analisada está entre 1,01$\mathrm{M_i}$ e 0,99$\mathrm{M_i}$. Solução esta para facilitar os cálculos e evitar de utilizar um método computacionalmente complexo do Newton – Raphson.

Esta forma de solução realiza buscas e encontram valores próximos à realidade para poder calcular a deflexão, conforme a fórmula (113).

---

[1] *DataGrid corresponde à um elemento de interface gráfica do Visual Basic (este elemento está presente com outros nomes em outras plataformas de programação) que apresenta resultados em forma de tabela.*

De forma mais simbólica, esta busca se resume da seguinte maneira:

SE $\left({}^{3}/_{4}\, M_i \leq Momento\ final\ do\ Estádio\ 1\right)$ ENTÃO

CALCULA DEFLEXÃO

ADICIONA LINHA NO *DATAGRID*

SENÃO $\begin{pmatrix} {}^{3}/_{4}\, M_i > Momento\ final\ do\ Estádio\ 1\ E \\ {}^{1}/_{2}\, M_i < Momento\ final\ do\ Estádio\ 1 \end{pmatrix}$ ENTÃO

ADICIONA LINHA NO *DATAGRID*

DE LINHA i= 0 ATÉ LINHA i – 1 PASSO 1

SE $\begin{pmatrix} Momento\ LINHA\ ATUAL \leq 1{,}01\ x\ \left({}^{3}/_{4}\, M_i\right)\ E \\ Momento\ LINHA\ ATUAL \geq 0{,}99\ x\ \left({}^{3}/_{4}\, M_i\right) \end{pmatrix}$ ENTÃO

VARIÁVEL RECEBE O VALOR DA DEFORMAÇÃO DE COMPRESSÃO DO CONCRETO DA MESMA LINHA DE *Momento LINHA ATUAL*

VARIÁVEL RECEBE O VALOR DA LINHA NEUTRA DO CONCRETO DA MESMA LINHA DE *Momento LINHA ATUAL*

CALCULA DEFLEXÃO

ADICIONA VALOR DE DEFLEXÃO NO *DATAGRID*

SAIR DO FOR

FINAL SE

PRÓXIMO

SENÃO $\begin{pmatrix} {}^{1}/_{2}\, M_i > Momento\ final\ do\ Estádio\ 1\ E \\ {}^{1}/_{4}\, M_i < Momento\ final\ do\ Estádio\ 1 \end{pmatrix}$ ENTÃO

ADICIONA LINHA NO *DATAGRID*

DE LINHA i= 0 ATÉ LINHA i – 1 PASSO 1

SE $\begin{pmatrix} Momento\ LINHA\ ATUAL \leq 1{,}01\ x\ \left({}^{3}/_{4}\, M_i\right)\ E \\ Momento\ LINHA\ ATUAL \geq 0{,}99\ x\ \left({}^{3}/_{4}\, M_i\right) \end{pmatrix}$ ENTÃO

VARIÁVEL RECEBE O VALOR DA DEFORMAÇÃO DE COMPRESSÃO DO CONCRETO DA MESMA LINHA DE *Momento LINHA ATUAL*

VARIÁVEL RECEBE O VALOR DA LINHA NEUTRA DO CONCRETO DA MESMA LINHA DE *Momento LINHA ATUAL*

SAIR DO FOR

FINAL SE

PRÓXIMO

DE LINHA i= 0 ATÉ LINHA i – 1 PASSO 1

SE $\begin{pmatrix} Momento\ LINHA\ ATUAL \leq 1{,}01\ x\ \left({}^{1}/_{2}\, M_i\right)\ E \\ Momento\ LINHA\ ATUAL \geq 0{,}99\ x\ \left({}^{1}/_{2}\, M_i\right) \end{pmatrix}$ ENTÃO

VARIÁVEL RECEBE O VALOR DA DEFORMAÇÃO DE COMPRESSÃO DO CONCRETO DA MESMA LINHA DE *Momento LINHA ATUAL*

VARIÁVEL RECEBE O VALOR DA LINHA NEUTRA DO CONCRETO DA MESMA LINHA DE *Momento LINHA ATUAL*

SAIR DO FOR

FINAL SE

PRÓXIMO

CALCULA DEFLEXÃO

ADICIONA VALOR DE DEFLEXÃO NO *DATAGRID*

SENÃO $\left({}^{1}/_{4}\, M_i > Momento\ final\ do\ Estádio\ 1\right)$ ENTÃO

ADICIONA LINHA NO *DATAGRID*

DE LINHA i= 0 ATÉ LINHA i – 1 PASSO 1

SE $\left(\begin{array}{c} Momento\ LINHA\ ATUAL \leq 1{,}01\ x\ \left({}^{3}/_{4}\, M_i\right)\ E \\ Momento\ LINHA\ ATUAL \geq 0{,}99\ x\ \left({}^{3}/_{4}\, M_i\right) \end{array}\right)$ ENTÃO

VARIÁVEL RECEBE O VALOR DA DEFORMAÇÃO DE COMPRESSÃO DO CONCRETO DA MESMA LINHA DE *Momento LINHA ATUAL*

VARIÁVEL RECEBE O VALOR DA LINHA NEUTRA DO CONCRETO DA MESMA LINHA DE *Momento LINHA ATUAL*

CALCULA DEFLEXÃO

ADICIONA VALOR DE DEFLEXÃO NO *DATAGRID*

SAIR DO FOR

FINAL SE

PRÓXIMO

DE LINHA i= 0 ATÉ LINHA i – 1 PASSO 1

SE $\left(\begin{array}{c} Momento\ LINHA\ ATUAL \leq 1{,}01\ x\ \left({}^{1}/_{2}\, M_i\right)\ E \\ Momento\ LINHA\ ATUAL \geq 0{,}99\ x\ \left({}^{1}/_{2}\, M_i\right) \end{array}\right)$ ENTÃO

VARIÁVEL RECEBE O VALOR DA DEFORMAÇÃO DE COMPRESSÃO DO CONCRETO DA MESMA LINHA DE *Momento LINHA ATUAL*

VARIÁVEL RECEBE O VALOR DA LINHA NEUTRA DO CONCRETO DA MESMA LINHA DE *Momento LINHA ATUAL*

SAIR DO FOR

FINAL SE

PRÓXIMO

DE LINHA i= 0 ATÉ LINHA i – 1 PASSO 1

SE $\left(\begin{array}{c} Momento\ LINHA\ ATUAL \leq 1{,}01\ x\ \left({}^{1}/_{4}\, M_i\right)\ E \\ Momento\ LINHA\ ATUAL \geq 0{,}99\ x\ \left({}^{1}/_{4}\, M_i\right) \end{array}\right)$ ENTÃO

VARIÁVEL RECEBE O VALOR DA DEFORMAÇÃO DE COMPRESSÃO DO CONCRETO DA MESMA LINHA DE *Momento LINHA ATUAL*

VARIÁVEL RECEBE O VALOR DA LINHA NEUTRA DO CONCRETO DA MESMA LINHA DE *Momento LINHA ATUAL*

SAIR DO FOR

FINAL SE

PRÓXIMO

CALCULA DEFLEXÃO

ADICIONA VALOR DE DEFLEXÃO NO *DATAGRID*

FIM

O cálculo da deflexão da viga varia de verificação em verificação, pois esta depende dos valores de deformação de compressão do concreto e altura da linha neutra relacionados com o momento analisado. Como observado no esquema acima, nem todos os multiplicativos do momento $\mathrm{M_i}$ são passíveis de busca, já que alguns deles encontram-se no regime elástico.

Os códigos relativos às *FUNCTIONS* usadas para cálculo estão apresentados no ANEXO B.

5.3. Estádio 3

Para este Estádio, são contempladas as seguintes equações: (67), (84), (90), (101), (104), (110), (113), (114), (126) à (129).

Neste bloco, o Estádio 3 inicia também realizando a verificação do aço tanto de tração quanto de compressão (caso tenha). Contudo, esta análise é distinta do Estádio anterior porque a seção encontra-se em sua maior parte fissurada e com o aço em alta solicitação, podendo ocorrer sua ruptura.

A análise feita é com relação à tensão presente no aço se é maior ou menor que a tensão de escoamento fornecido pelo usuário. Caso seja maior, o valor assumido é a tensão de escoamento do aço, introduzido nos dados de entrada do usuário. Caso contrário, é utilizada para os cálculos a última tensão calculada no programa.

A segunda verificação é com relação à deformação de compressão do concreto, onde a cada bloco de *FOR* que é passado, averígua-se caso a deformação do concreto seja maior que 3,5‰.

Após essas duas verificações, todo o conceito de estruturação do código é idêntico ao já apresentado no Estádio 2.

Os códigos relativos às *FUNCTIONS* usadas para cálculo do Estádio 3 estão apresentados no ANEXO C. Já todo o código relativo ao evento do botão está presente no ANEXO D.

6. CONCLUSÃO

Este trabalho teve por objetivo realizar um estudo aprofundado a respeito de seções de vigas de concreto armado, considerando a resistência à tração do concreto, baseando-se no artigo de BAZANT (1983). Após isso, desenvolver um *software* que pudesse apresentar o comportamento da seção, apresentando a variação da altura da linha neutra, deformações nos materiais, momento resistente e deflexão. Este desenvolvimento visa facilitar a análise de estruturas e obter respostas realistas sem a necessidade de realização de ensaios laboratoriais.

Neste trabalho, na apresentação dos resultados dos 5 tipos de vigas estudados, nota-se que a resistência apresentada pelo *software* sempre é maior que a apresentada pela literatura, já que é considerada a contribuição da área de concreto tracionado. Além disso, com base na evolução dos Gráficos 02 a 06, pode-se afirmar que quanto maior a taxa de armadura de uma viga, maior a diferença entre o resultado real da viga (representada por “Resultado Modelo de SAENZ(1964) e BAZANT (1984) considerando a tração do concreto”) e da calculada conforme a aproximação da parábola retângulo (“Momento resistente no E.L.U”), vide equação (10) e resultado apresentado na Figura 09. Isso porque a armadura de tração colabora com o retardo da propagação da fissura, já que a aderência entre o concreto e a armadura faz com que o primeiro seja capaz de absorver mais energia proveniente da carga aplicada da solicitação.

Além disso, nota-se que em todos os casos, as curvas “Modelo de SAENZ(1964) e BAZANT(1984)” e “Modelo de SAENZ(1964)” tendem a se aproximar a medida que o momento solicitante aumenta, chegando em um momento último resistente bastante próximos. Isso simboliza a colaboração do concreto de tração nos estádios iniciais da resistência da seção, pois a área de tal ainda é considerável. Com o aumento da solicitação, a seção torna-se mais fissurada, o concreto tracionado pouco contribui na resistência total, a altura da linha neutra é elevada, o braço de alavanca automaticamente aumenta, solicitando ainda mais o concreto de compressão e os aços de tração e compressão (se houver) presentes.

Complementando, ainda se apresentou a curvatura da modelagem da viga quando é desconsiderada a resistência à tração e incluindo os fatores de segurança nas tensões dos materiais. Vale ressaltar que o *software* não possui lacuna para que inclua tais coeficientes, já que foi programado para representar uma curvatura próxima à real com os dados inseridos. Contudo, basta que o usuário introduza as características dos materiais já com os coeficientes de segurança para que se tenha uma boa perspectiva do comportamento da viga e de seu momento último.

Conforme utilizado por BAZANT (1984), neste presente trabalho utilizou-se também do momento triangular para o cálculo da flecha. Este momento corresponde ao de uma carga pontual aplicada no meio do vão. Isso porque a intenção é reproduzir, matematicamente, um ensaio experimental, onde primeiro permite-se que a viga sofra todas as deformações provenientes do peso próprio.

O *software* AlfaMCV foi desenvolvido na linguagem Visual Basic, versão 2013. Para a facilidade de programação na modelagem matemática do cálculo da deflexão, optou-se pela aplicação de “busca de resultados”, torna-se mais fácil realizar uma busca de valores já registrados no *DataGrid*. Métodos conhecidos, como Newton – Raphson poderiam ser adotados, contudo o código seria maior e mais complexo. Métodos numéricos desse tipo são obrigatórios em caso de seções genéricas (não retangulares) para as quais não há solução analítica em termos de cargas equivalentes e braços de alavanca.

A solução de buscar resultados torna-se mais viável porque estabelece um intervalo limite em que o valor contido na célula pode estar. O programa faz a leitura de cada uma destas na coluna Momento (kN.m) e analisa se o valor contido obedece a condição. Caso positivo, uma variável criada salva o valor para, posteriormente, poder calcular a deflexão da viga. Caso contrário, o código prossegue continuando a fazer a leitura das outras células da coluna.

Com relação à viga subarmada (item 4.1), observa-se um comportamento diferente em comparação às outras vigas. Esta se caracteriza pelo aumento da resistência ao momento além do previsto pela literatura. Este aumento é justificado pela colaboração da resistência à tração do concreto juntamente com a região de compressão do mesmo e da resistência do aço, fazendo com que o momento resistente atinja 70 kN.m. Após isso, a seção está em processo de fissuração, fazendo com que a colaboração do concreto tracionado diminua, elevando a altura da linha neutra. Consequentemente, a região comprimida da seção torna-se mais solicitada, além do aço de tração também aumentar sua contribuição até atingir a plasticidade. No instante em que chega-se ao momento último, a altura da linha neutra encontra-se consolidada, o concreto comprimido está na iminência do rompimento por esmagamento e o aço de tração está no limite da plastificação.

Além disso, apresenta-se o comportamento da viga quando não considerada as tensões de tração do concreto. O momento segue um regime crescente até atingir o momento último, que corresponde ao colapso da estrutura, cujo valor é próximo ao momento registrado pela curva “Modelo de SAENZ(1964) e BAZANT(1984)”.

Ainda assim, é apresentando a curvatura do concreto quando se desconsidera colaboração da região tracionada e introdução dos coeficientes de segurança nas tensões de compressão e tração dos materiais (concreto e aço). Para este caso em específico, como consiste em uma viga com baixa taxa de armadura, o momento último desta curva se aproxima do momento último da curva de comportamento real da viga.

Vigas normalmente armadas (item 4.2) apresentam uma evolução no momento de forma regular, onde até o momento de fissuração o diagrama é linear. A partir deste, equações não lineares são aplicadas de forma que o gráfico tenha a conformidade apresentada anteriormente no Gráfico 03. O momento apresentado pelo *software* é maior que o calculado pela literatura. Este fato se deve à consideração da região tracionada como coparticipante da resistência da estrutura. Além disso, a diferença da literatura para o *software* apresenta-se no fato de que os cálculos numéricos utilizados para a confecção do programa utilizam a equação do diagrama apresentado por SAENZ (1964), expressão (57), enquanto a literatura realiza a aproximação do diagrama para um sistema retangular de mesma área.

Também para este caso, observa-se que a medida que a solicitação aumenta, o concreto de tração pouco colabora com a resistência da estrutura, ocasionando em um momento último muito próximo do momento último do comportamento real da estrutura.

No caso da viga super armada, apresentada no item 4.3, a deformação máxima no concreto foi atingida sem que houvesse ocorrido a estabilização do momento fletor. Para estes casos, a armadura de aço de tração não está em sua tensão de escoamento. Isso significa que a estrutura colapsa por compressão do concreto, indicando, portanto, um crescente aumento do momento de resistência sem a sua estabilização (que é caracterizada pelo escoamento do aço). Observa-se também que o resultado apresentado pelo *software* (Gráfico 4) e pela teoria (145) são levemente mais discrepantes em comparação com os obtidos para vigas normalmente armadas. Este caso é justificado também nas considerações numéricas realizadas pelo *software*, onde utiliza-se a expressão (57) como equação de tensão – deformação. Neste caso, estruturas com maior taxa de armadura possuem maiores contribuições nas tensões fornecidas pelo aço.

De forma complementar, é possível observar no Gráfico 04 que as curvas da modelagem do concreto considerando e desconsiderando a tração tornam-se mais próximas. Observa-se que como a seção está com alta taxa de armadura, o momento último é maior. Desta forma, a medida que ocorre o aumento do momento, a contribuição do concreto de tração torna-se mínima, acarretando na aproximação das duas curvas.

Vigas duplamente armadas são caracterizadas pela menor eficiência do aço de tração no sistema, já que este material se caracteriza por localizar-se no regime elástico. Enquanto isto, o concreto está em sua deformação máxima de compressão, na iminência da ruptura por esmagamento, fazendo com que haja necessidade de armadura para combater este fator.

Ao calcular as armaduras para a viga duplamente armada, apresentadas por (150) e (151), da mesma forma que as outras situações, o momento último gerado pelo programa é maior que o momento calculado conforme a teoria. Isto é explicado de acordo com a colaboração do concreto tracionado no início do processo de fissuração, além da propagação da fissura, gerando uma menor área de concreto comprimido e, consequentemente, um maior braço de alavanca. Também pode-se explicar de acordo com o diagrama tensão – deformação utilizado, onde não se considera a simplificação para um diagrama retangular de tensões.

Da mesma forma que as outras modelagens apresentadas anteriormente, as curvas entre a consideração e a desconsideração da tração do concreto tendem a se aproximarem. O motivo é o mesmo referente ao de viga superarmada, ou seja, solicitações altas geram propagação da fissura pela seção, acarretando em baixa colaboração do concreto tracionado.

Estruturas de concreto que não possuem armaduras, como é o caso apresentado em 4.4, são características de ruptura ao chegarem em seu momento de fissuração (como afirma a literatura). Contudo, como resistência à tração é considerada neste trabalho, averígua-se, com o auxílio do *software* AlfaMCV, que a viga consegue suportar momentos relativamente maiores que o de fissuração. Desta forma, a conformidade da curva apresenta-se de acordo com o Gráfico 05.

Em praticamente todos os casos analisados verificou-se que o momento último da estrutura é maior quando comparado com o mesmo apresentado pela literatura. Este fato é mais bem evidenciado quando a seção possui uma taxa de armadura cada vez maior. Desta forma, entende-se que a colaboração da região tracionada do concreto pode gerar estruturas mais econômicas e relativamente mais esbeltas.

Além disso, nas vigas dimensionadas é apresentada o comportamento da curvatura do momento do concreto quando este é desconsiderado colaboração da tração e incluído fatores de segurança nos materiais, fatores estes apresentados pela NBR 6118:2014. Observa-se em todos os casos que existe uma estabilidade da segurança da estrutura, ocorrendo entre 15% 26% quando compara-se o momento último real com o momento último com fatores de segurança nas tensões dos materiais.

A apresentação da deflexão de vigas está diretamente relacionada com o Estado Limite de Serviço da estrutura, onde verifica-se a flecha máxima. Este processo é uma verificação de quão aceitável a estrutura pode ser quanto a sua avaliação visual.

Observa-se nos Gráficos 02 à 05 uma aproximação das curvas referentes à desconsideração do concreto de tração com à consideração da resistência à tração. Isso ocorre devido à armadura de tração resistir à uma grande solicitação proveniente da carga pontual aplicada no meio do vão. Desta forma, observando a Equação (110), a expressão referente às armaduras retorna um valor matemático muito maior quando comparados com o resultado da contribuição do concreto de tração.

Em todos os casos de vigas apresentados anteriormente, verifica-se que a flecha encontrada pelo *software* é menor em comparação com a literatura, principalmente quanto maior a taxa de armadura da seção, maior torna-se a discrepância entre os dois resultados. Isso é justificado pelo fato de a literatura (equação 142) utilizar somente as características do material concreto (geometria da seção e módulo de elasticidade), ocorrendo, consequentemente, um aumento da flecha à medida que a carga é elevada. No cálculo utilizado por AlfaMCV, a consideração é a fórmula de Simpson, onde calcula-se, a cada transição de carga, o momento gerado em diferentes pontos da viga, gerando a sua curvatura. Essa curvatura é diretamente dependente do momento, que por consequência depende das reações dos materiais presentes na seção: concreto e aço. Desta forma, quanto maior a taxa de armadura da seção, menor é a curvatura da viga, gerando uma menor flecha.

REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118: *Projeto de estruturas de concreto - Procedimento*. Rio de Janeiro, 2014.

______.*NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento.* Rio de Janeiro, 2014.

BAZANT, Z. P. *Crack Band Model for Fracture of Geomaterials*. Proceedings of The Fourth International Conference on Numerical Methods in Geomechanics. Vol III. Edmonton, Alberta – Canada. 1982

BAZANT, Z. P. *Fracture in Concrete and Reinforced Concrete*. Capítulo 13. Ed. John Wiley & Sons Ltd, 1985

BAZANT, Z. P., OH, B. H. *Deformation of Progressively Cracking Reinforced Concrete Beams*. ACI JOURNAL, 1984. Vol 81, n° 3.

BAZANT, Z.P, MARCHERTAS, A. H., PFEIFFER, P. A. *Blunt – Crack Band Propagation in Finite – Element Analysis for Concrete Structures*. 7° International Conference on SMIRT, Chicago. 1983.

BORGES, J. U. A. *Análise do Comportamento de Vigas de Concreto de Alto Desempenho por Meio da Mecânica da Fratura*. Universidade de São Paulo, São Paulo, 2002.

CARLIN, B. P. *Investigation of the Strength and Ductility of Reinforced Concrete Beams Strengthened with CRFP Laminates.* Virginia Polytechnic Institute and State University. Blacksburg – Virginia, 1998.

FUSCO, P.B. *Estruturas de Concreto Solicitações Normais*. Editora Guanabara Dois S.A. Rio de Janeiro – RJ, 1981.

JR, K. M. L. C., SILVA, R.C. da. *Domínios de Deformação em Estruturas de Concreto: Uma Nova Abordagem para o Ensino*. XXXVIII Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia COBENGE 2010. Fortaleza – CE, 2010.

KWAK, H.G., FILIPPOU, F.C. *Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures Under Monotonic Loads*. Universidade da Califórnia. Berkeley – California, 1990.

PFEIL, W. *Concreto Armado Dimensionamento.* Ed AO LIVRO TÉCNICO S.A., 1969. Rio de Janeiro – RJ.

PILLAI, S.U., MENON, D. *Reinforced Concrete Design*. Ed. Tata McGraw – Hill Publishing Company Limited. ISBN 0-07-049504-1, 2005.

PROENÇA, S. P. B., *Sobre Modelos Matemáticos do Comportamento não-linear do Concreto: Análise Crítica e Contribuições*. Universidade de São Carlos. São Carlos – SP, 1988.

ROCHA, A.M. da. *Concreto Armado*. Ed nobel, 1985. São Paulo – SP. Vol 1: ed 25. ISBN 85-213-0330-0.

SAENZ, L. P. *Discussion of "Equation for the Stress – Strain Curve of Concrete"* by Prakash Desayi and S. Krishnan, ACI Journal, *Proceedings* V.61, N°9, Set, 1964, pp. 1229-1235.

SCANLON, A. *Time – Dependent Deflextions of Reinforced Concrete Slabs.* Tese de PhD. Universidade de Alberta, Edmonton, 1971.

SUSSEKIND, J. C. *Curso de Concreto: Volume I*. Rio de Janeiro: Ed. Globo, 1985.

TAVARES, M. E. N., *Estruturas de Concreto Armado***.** Rio de Janeiro: Universidade do Estado do Rio de Janeiro UERJ, 2005.

VITTORIO, S. de. *Time – Dependent Behaviour of Reinforced Concrete Slabs*. 2011. Universidade de Bologna

WALSH, P. F. *Fracture of plain concrete.* The Indian Concrete Journal, Vol, 46, N° 11, 1979.

ANEXO A – PROGRAMAÇÃO REFERENTE AO ESTÁDIO 1

```
Imports System.Math

Module Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio1

    'VARIAVEIS CONCRETO

    Public fck As Double
    Public ftk As Double
    Public Ec As Double
    Public etm As Double
    Public ecm As Double
    Public ecp As Double
    Public L As Double
    Public deflexao_estadio1 As Double
    Public comprimento_vao As Double

    'VARIAVEIS AÇO

    Public aco_compressao As Double
    Public aco_tracao As Double
    Public Es As Double
    Public es2_estadio1 As Double
    Public es1_estadio1 As Double

    'VARIAVEIS SECAO

    Public altura_total As Double
    Public altura_util As Double
    Public largura_maior As Double

    'VARIAVEL LN

    Public LN_estadio1 As Double

    'VARIAVEIS COEFICIENTES

    Public A_estadio1 As Double
    Public B_estadio1 As Double
```

```
Public Q_estadio1 As Double

Public k1_estadio1 As Double
Public k1_estadio1_parte1 As Double
Public k1_estadio1_parte2 As Double

Public k2_estadio1 As Double
Public k2_estadio1_parte1 As Double
Public k2_estadio1_parte2 As Double
Public k2_estadio1_parte3 As Double
Public k2_estadio1_parte4 As Double

Public k3_estadio1 As Double

Public k4_estadio1 As Double

'VARIAVEL MOMENTO

Public momento_estadio1 As Double
Public momento_linear_estadio1 As Double

' CALCULO DEFORMACOES

Function Funcao_etp_Rec_Estadio1() As Double

    etm = ftk / Ec

    Return etm

End Function

Function Funcao_ecm_Rec_Estadio1() As Double

        ecm = Funcao_etp_Rec_Estadio1() * Funcao_LN_Estadio1() / _
        (altura_total - Funcao_LN_Estadio1())

    Return ecm

End Function
```

```
Function Funcao_etm_Rec_Estadio1() As Double

         etm = (altura_total - Funcao_LN_Estadio1()) * Funcao_ecm_Rec_Estadio1() /
         Funcao_LN_Estadio1()

    Return etm

End Function

Function Funcao_es2_Rec_Estadio1() As Double

         es2_estadio1 = (altura_util - Funcao_LN_Estadio1()) *
         Funcao_etp_Rec_Estadio1() / _
         (altura_total - Funcao_LN_Estadio1())

    Return es2_estadio1

End Function

Function Funcao_es1_Rec_Estadio1() As Double

    If frm_Calcula_Secao.txt_aco_compressao.Text > 0 Then

        es1_estadio1 = (Funcao_LN_Estadio1() - _
        (altura_total - altura_util)) * Funcao_etp_Rec_Estadio1() / _
        (altura_total - Funcao_LN_Estadio1())

    Else

        es1_estadio1 = 0

    End If

    Return es1_estadio1

End Function

Function Funcao_ecp_Rec_Estadio1() As Double
```

```
        ecp = 2 * fck / Ec

        Return ecp

    End Function

    ' COEFICIENTES A, B, Q, K1, K2, K3, K4

    Function Funcao_A_Rec_Estadio1() As Double

        A_estadio1 = ((Ec * Funcao_ecp_Rec_Estadio1() / fck) - 2) /
        Funcao_ecp_Rec_Estadio1()

        Return A_estadio1

    End Function

    Function Funcao_B_Rec_Estadio1() As Double

        B_estadio1 = 1 / (Funcao_ecp_Rec_Estadio1() ^ 2)

        Return B_estadio1

    End Function

    Function Funcao_Q_rec_Estadio1() As Double

        Q_estadio1 = 4 * Funcao_B_Rec_Estadio1() - Funcao_A_Rec_Estadio1() *
        Funcao_A_Rec_Estadio1()

        Return Q_estadio1

    End Function

    Function Funcao_k1_Rec_Estadio1() As Double

        k1_estadio1_parte1 = (0.5 / Funcao_B_Rec_Estadio1()) * _
        (Math.Log(1 + Funcao_A_Rec_Estadio1() * Funcao_ecm_Rec_Estadio1() + _
        Funcao_B_Rec_Estadio1() * Funcao_ecm_Rec_Estadio1() *
       Funcao_ecm_Rec_Estadio1()))
```

```
        k1_estadio1_parte2 = (Funcao_A_Rec_Estadio1() / (Funcao_B_Rec_Estadio1() *_
        Math.Sqrt(Funcao_Q_rec_Estadio1))) * _
        (Math.Atan(Funcao_A_Rec_Estadio1() / Math.Sqrt(Funcao_Q_rec_Estadio1)) -
        Math.Atan((Funcao_A_Rec_Estadio1() + _
        2 * Funcao_B_Rec_Estadio1() * Funcao_ecm_Rec_Estadio1()) / _
        Math.Sqrt(Funcao_Q_rec_Estadio1)))

        k1_estadio1 = (Ec / (fck * Funcao_ecm_Rec_Estadio1())) * (k1_estadio1_parte1 +
        k1_estadio1_parte2)



        Return k1_estadio1

    End Function

    Function Funcao_k2_Rec_Estadio1() As Double

        k2_estadio1_parte1 = (Funcao_A_Rec_Estadio1() * 0.5 / (Funcao_B_Rec_Estadio1()
        * Funcao_B_Rec_Estadio1())) * _
        Math.Log(1 + Funcao_A_Rec_Estadio1() * Funcao_ecm_Rec_Estadio1() +
        Funcao_B_Rec_Estadio1() * Funcao_ecm_Rec_Estadio1() *
        Funcao_ecm_Rec_Estadio1())

        k2_estadio1_parte2 = ((Funcao_A_Rec_Estadio1() * Funcao_A_Rec_Estadio1() - 2 *
        Funcao_B_Rec_Estadio1()) / _
        (Funcao_B_Rec_Estadio1() * Funcao_B_Rec_Estadio1() *
        Math.Sqrt(Funcao_Q_rec_Estadio1))) * _
        (Math.Atan((2 * Funcao_B_Rec_Estadio1() * Funcao_ecm_Rec_Estadio1() +
        Funcao_A_Rec_Estadio1()) / Math.Sqrt(Funcao_Q_rec_Estadio1)) - _
        Math.Atan(Funcao_A_Rec_Estadio1() / Math.Sqrt(Funcao_Q_rec_Estadio1)))

        k2_estadio1_parte3 = (0.5 / Funcao_B_Rec_Estadio1()) * _
        (Math.Log(1 + Funcao_A_Rec_Estadio1() * Funcao_ecm_Rec_Estadio1() + _
       Funcao_B_Rec_Estadio1() * Funcao_ecm_Rec_Estadio1() *
       Funcao_ecm_Rec_Estadio1()))

        k2_estadio1_parte4 = (Funcao_A_Rec_Estadio1() / (Funcao_B_Rec_Estadio1() *
        Math.Sqrt(Funcao_Q_rec_Estadio1))) * _
        (Math.Atan(Funcao_A_Rec_Estadio1() / Math.Sqrt(Funcao_Q_rec_Estadio1)) -
        Math.Atan((Funcao_A_Rec_Estadio1() + 2 * Funcao_B_Rec_Estadio1() *
        Funcao_ecm_Rec_Estadio1()) / Math.Sqrt(Funcao_Q_rec_Estadio1)))
```

```
    k2_estadio1 = 1 - (((Funcao_ecm_Rec_Estadio1() / Funcao_B_Rec_Estadio1()) -
    k2_estadio1_parte1 + k2_estadio1_parte2) / (Funcao_ecm_Rec_Estadio1() *
    (k2_estadio1_parte3 + k2_estadio1_parte4)))

    Return k2_estadio1

End Function

Function Funcao_k3_Rec_Estadio1() As Double

    k3_estadio1 = Ec * Funcao_etp_Rec_Estadio1() / (2 * ftk)

    Return k3_estadio1

End Function

Function Funcao_k4_Rec_Estadio1() As Double

    k4_estadio1 = 1 / 3

    Return k4_estadio1

End Function

' CALCULOS SECAO ESTADIO 1

' CALCULO LN

Function Funcao_LN_Estadio1() As Double

    LN_estadio1 = (2 * (Es / Ec) * (altura_util * (aco_tracao - aco_compressao) +
    altura_total * aco_compressao) + _
    largura_maior * altura_total * altura_total) / _
     (2 * (altura_total * largura_maior + (Es / Ec) * aco_tracao + (Es / Ec) *
   aco_compressao))

    Return LN_estadio1

End Function
```

```
    ' CALCULO MOMENTO

    Function Funcao_Momento_Rec_Estadio1() As Double

        momento_estadio1 = Funcao_k1_Rec_Estadio1() * fck * largura_maior * 10 *
        Funcao_LN_Estadio1() * 10 * (altura_total * 0.5 * 10 -
        Funcao_k2_Rec_Estadio1() * Funcao_LN_Estadio1() * 10) + _
        Funcao_es2_Rec_Estadio1() * Es * aco_tracao * 100 * (altura_util * 10 -
        altura_total * 0.5 * 10) + _
        Funcao_es1_Rec_Estadio1() * Es * aco_compressao * 100 * (altura_util * 10 -
        altura_total * 0.5 * 10) + _
        Funcao_k3_Rec_Estadio1() * ftk * largura_maior * 10 * (altura_total * 10 -
        Funcao_LN_Estadio1() * 10) * (altura_total * 0.5 * 10 -
        Funcao_k4_Rec_Estadio1() * (altura_total * 10 - Funcao_LN_Estadio1() * 10))

        Return momento_estadio1 * 0.000001

    End Function

    ' CALCULO DEFLEXAO

    Function Funcao_Deflexao_Estadio1() As Double

        deflexao_estadio1 = (comprimento_vao ^ 2) *
        Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio1.Funcao_ecm_Rec_Estadio1 / (12 *
        Funcao_LN_Estadio1())

        Return deflexao_estadio1

    End Function

    ' FIM CALCULOS SECAO ESTADIO 1

End Module
```

ANEXO B – **PROGRAMAÇÃO REFERENTE AO ESTÁDIO 2**

```
Imports System.Math

Module Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio2

    'VARIAVEL LN
    Public LN_estadio2 As Double
    Public LN_estadio2_parte1 As Double
    Public LN_estadio2_parte2 As Double
    Public LN_estadio2_parte3 As Double
    Public LN_resultado_parte1_estadio2 As Double
    Public LN_resultado_parte2_estadio2 As Double
    Public LN_resultado_parte3_estadio2 As Double
    Public LN As Double ' Essa é a variavel

    Public i As Double

    'VARIAVEIS AÇO
    Public es1_estadio2 As Double
    Public es2_estadio2 As Double
    Public es1_variavel_estadio2 As Double
    Public es2_variavel_estadio2 As Double
    Public fy_compressao_estadio2 As Double
    Public fy_tracao_estadio2 As Double

    'VARIAVEIS CONCRETO
    Public Et As Double
    Public ecm_variavel_estadio2 As Double
    Public ecm_estadio2 As Double
    Public ecm_final_estadio2 As Double
    Public ecm_resultado_parte1_estadio2 As Double
    Public ecm_resultado_parte2_estadio2 As Double
    Public ecm_resultado_parte3_estadio2 As Double
    Public etp As Double
    Public etf As Double
    Public etm_estadio2 As Double
    Public etm_variavel_estadio2 As Double
    Public deflexao_estadio2 As Double
```

```
Public deflexao_variavel_estadio2 As Double

'VARIAVEIS COEFICIENTES
Public k1_estadio2 As Double
Public k1_estadio2_parte1 As Double
Public k1_estadio2_parte2 As Double

Public k2_estadio2 As Double
Public k2_estadio2_parte1 As Double
Public k2_estadio2_parte2 As Double
Public k2_estadio2_parte3 As Double
Public k2_estadio2_parte4 As Double

Public k3_estadio2 As Double

Public k4_estadio2 As Double
Public k4_estadio2_parte1 As Double
Public k4_estadio2_parte2 As Double

'VARIAVEL MOMENTO
Public momento_estadio2 As Double
Public momento_variavel_estadio2 As Double

' CALCULO MODULO

Function Funcao_Et_Estadio2() As Double

    Et = (70 * Ec * (1000000 / 6895) / (57 + ftk * (1000000 / 6895))) * (6895 /
    1000000)

    Return Et

End Function

' CALCULO DEFORMACOES

Function Funcao_etp_Rec_Estadio2() As Double

    etp = ftk / Ec
```

```
    Return etp

End Function

Function Funcao_etf_Rec_Estadio2() As Double

    etf = (ftk / Funcao_Et_Estadio2()) + Funcao_etp_Rec_Estadio2()

    Return etf

End Function

Function Funcao_ecm_Rec_Estadio2() As Double

    ecm_estadio2 = Funcao_LN_Estadio2() * Funcao_etp_Rec_Estadio2() /
    (altura_total - Funcao_LN_Estadio2())

    Return ecm_estadio2

End Function

Function Funcao_etm_Rec_Estadio2() As Double

    etm_estadio2 = (altura_total - Funcao_LN_Estadio2()) * ecm_variavel_estadio2 /
    Funcao_LN_Estadio2()

    Return etm_estadio2

End Function

Function Funcao_ecm_Final_Rec_Estadio2() As Double

    ecm_final_estadio2 = Funcao_LN_Estadio2() * Funcao_etf_Rec_Estadio2() /
    (altura_total - Funcao_LN_Estadio2())

    Return ecm_final_estadio2

End Function

Function Funcao_es1_Estadio2() As Double
```

```
    If aco_compressao = 0 Then

        es1_estadio2 = 0

    Else

        es1_estadio2 = (Funcao_LN_Estadio2() - altura_total + altura_util) *
        ecm_variavel_estadio2 / Funcao_LN_Estadio2()

    End If

    Return es1_estadio2

End Function

Function Funcao_es2_Estadio2() As Double

    es2_estadio2 = (altura_util - Funcao_LN_Estadio2()) * ecm_variavel_estadio2 /
    Funcao_LN_Estadio2()

    Return es2_estadio2

End Function

' CALCULO COEFICIENTES K1, K2, K3, K4

Function Funcao_k1_Estadio2() As Double

    k1_estadio2_parte1 = (0.5 / Funcao_B_Rec_Estadio1()) * (Math.Log(1 +
    Funcao_A_Rec_Estadio1() * ecm_variavel_estadio2 + _
    Funcao_B_Rec_Estadio1() * ecm_variavel_estadio2 * ecm_variavel_estadio2))

    k1_estadio2_parte2 = (Funcao_A_Rec_Estadio1() / (Funcao_B_Rec_Estadio1() *
    Math.Sqrt(Funcao_Q_rec_Estadio1))) * _
    (Math.Atan(Funcao_A_Rec_Estadio1() / Math.Sqrt(Funcao_Q_rec_Estadio1)) -
    Math.Atan((Funcao_A_Rec_Estadio1() + 2 * Funcao_B_Rec_Estadio1() *
    ecm_variavel_estadio2) / _
    Math.Sqrt(Funcao_Q_rec_Estadio1)))

    k1_estadio2 = (Ec / (fck * ecm_variavel_estadio2)) * (k1_estadio2_parte1 +
    k1_estadio2_parte2)
```

```
    Return k1_estadio2

End Function

Function Funcao_k2_Estadio2() As Double

    k2_estadio2_parte1 = (ecm_variavel_estadio2 / Funcao_B_Rec_Estadio1()) - (0.5
    * Funcao_A_Rec_Estadio1() / (Funcao_B_Rec_Estadio1() ^ 2)) * _
    Math.Log(1 + Funcao_A_Rec_Estadio1() * ecm_variavel_estadio2 +
    Funcao_B_Rec_Estadio1() * (ecm_variavel_estadio2 ^ 2)) + _
    (Funcao_A_Rec_Estadio1() ^ 2 - 2 * Funcao_B_Rec_Estadio1()) * (Math.Atan((2 *
    Funcao_B_Rec_Estadio1() * ecm_variavel_estadio2 + Funcao_A_Rec_Estadio1()) / _
    Math.Sqrt(Funcao_Q_rec_Estadio1)) - Math.Atan(Funcao_A_Rec_Estadio1() /
    Math.Sqrt(Funcao_Q_rec_Estadio1))) / _
           (Funcao_B_Rec_Estadio1() ^ 2 * Math.Sqrt(Funcao_Q_rec_Estadio1))

    k2_estadio2_parte2 = Funcao_k1_Estadio2() * (ecm_variavel_estadio2 ^ 2) * fck
    / Ec

    k2_estadio2 = 1 - (k2_estadio2_parte1 / k2_estadio2_parte2)

    Return k2_estadio2

End Function

Function Funcao_k3_Estadio2() As Double

    k3_estadio2 = ((ftk + Funcao_etp_Rec_Estadio2() * Funcao_Et_Estadio2()) *
    (altura_total - Funcao_LN_Estadio2()) * ecm_variavel_estadio2 /
    (Funcao_LN_Estadio2()) - _
    0.5 * Funcao_Et_Estadio2() * (((altura_total - Funcao_LN_Estadio2()) *
    ecm_variavel_estadio2 / (Funcao_LN_Estadio2())) ^ 2) - _
    0.5 * ftk * Funcao_etp_Rec_Estadio2() - 0.5 * Funcao_Et_Estadio2() *
    (Funcao_etp_Rec_Estadio2() ^ 2)) / _
    (ftk * (altura_total - Funcao_LN_Estadio2()) * ecm_variavel_estadio2 /
    (Funcao_LN_Estadio2()))

    Return k3_estadio2

End Function

Function Funcao_k4_Estadio2() As Double
```

```
    k4_estadio2_parte1 = -(1 / 6) * ftk * (Funcao_etp_Rec_Estadio2() ^ 2) + (0.5 *
    ftk + 0.5 * Funcao_Et_Estadio2() * Funcao_etp_Rec_Estadio2()) _
    * (((altura_total - Funcao_LN_Estadio2()) * ecm_variavel_estadio2 /
    (Funcao_LN_Estadio2())) ^ 2) - _
    (1 / 3) * Funcao_Et_Estadio2() * (((altura_total - Funcao_LN_Estadio2()) *
    ecm_variavel_estadio2 / (Funcao_LN_Estadio2())) ^ 3) - _
    (1 / 6) * Funcao_Et_Estadio2() * ((Funcao_etp_Rec_Estadio2()) ^ 3)

    k4_estadio2_parte2 = Funcao_k3_Estadio2() * _
   (((altura_total - Funcao_LN_Estadio2()) * ecm_variavel_estadio2 /
   (Funcao_LN_Estadio2())) ^ 2) * ftk

    k4_estadio2 = 1 - (k4_estadio2_parte1 / k4_estadio2_parte2)

    Return k4_estadio2

End Function

' CALCULO LN

Function Funcao_LN_Estadio2() As Double

    LN_estadio2_parte1 = (ecm_variavel_estadio2 * Es * (aco_compressao +
    aco_tracao) - _
    largura_maior * altura_total * (ftk + Funcao_etp_Rec_Estadio2() *
    Funcao_Et_Estadio2()) - _
    Funcao_Et_Estadio2() * largura_maior * altura_total * ecm_variavel_estadio2)

    LN_estadio2_parte2 = (ecm_variavel_estadio2 * Es * ((altura_total -
    altura_util) * aco_compressao + altura_util * aco_tracao) _
    - 0.5 * altura_total * altura_total * Funcao_Et_Estadio2() * largura_maior *
    ecm_variavel_estadio2)

    LN_estadio2_parte3 = ((Funcao_k1_Estadio2() * fck * largura_maior + _
   largura_maior * (ftk + Funcao_etp_Rec_Estadio2() * Funcao_Et_Estadio2()) +
   0.5 * Funcao_Et_Estadio2() * largura_maior * ecm_variavel_estadio2 - _
   largura_maior * (-0.5 * ftk * Funcao_etp_Rec_Estadio2() - _
   0.5 * Funcao_Et_Estadio2() * Funcao_etp_Rec_Estadio2() * _
   Funcao_etp_Rec_Estadio2()) / ecm_variavel_estadio2))

    LN_estadio2 = (-LN_estadio2_parte1 + _
   Math.Sqrt(LN_estadio2_parte1 * LN_estadio2_parte1 + 4 * LN_estadio2_parte2 *
   LN_estadio2_parte3)) / _
```

```
        (2 * LN_estadio2_parte3)

        Return LN_estadio2

    End Function

    ' CALCULO MOMENTO ESTADIO 2

    Function Funcao_Momento_Estadio2() As Double

        'O momento depende da LN, K1, K2, K3, K4

        momento_estadio2 = Funcao_k1_Estadio2() * fck * largura_maior * 10 *
        Funcao_LN_Estadio2() * 10 * (altura_total * 0.5 * 10 - Funcao_k2_Estadio2() *
        Funcao_LN_Estadio2() * 10) +
        Funcao_es1_Estadio2() * Es * aco_compressao * 100 * (altura_util * 10 - 0.5 *
        altura_total * 10) + _
        Funcao_es2_Estadio2() * Es * aco_tracao * 100 * (altura_util * 10 - 0.5 *
        altura_total * 10) + _
        Funcao_k3_Estadio2() * ftk * largura_maior * 10 * (altura_total * 10 -
        Funcao_LN_Estadio2() * 10) * _
        (altura_total * 0.5 * 10 - Funcao_k4_Estadio2() * (altura_total * 10 -
        Funcao_LN_Estadio2() * 10))

        Return momento_estadio2 * 0.000001

    End Function

    ' FIM CALCULOS SECAO ESTADIO 2

End Module
```

ANEXO C – PROGRAMAÇÃO REFERENTE AO ESTÁDIO 3

```
Imports System.Math

Module Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio3

    'VARIAVEL
    Public LN_variavel_estadio3 As Double

    'VARIAVEL LN
    Public LN_estadio3 As Double  ' esse é o X da funcao
    Public LN_estadio3_parte1 As Double
    Public LN_estadio3_parte2 As Double
    Public LN_estadio3_parte3 As Double
    Public LN_resultado_parte1_estadio3 As Double
    Public LN_resultado_parte2_estadio3 As Double
    Public LN_resultado_parte3_estadio3 As Double

    'VARIAVEIS CONCRETO
    Public ecm_variavel_estadio3 As Double
    Public etm_variavel_estadio3 As Double
    Public ecm_resultado_parte1_estadio3 As Double
    Public ecm_resultado_parte2_estadio3 As Double
    Public ecm_resultado_parte3_estadio3 As Double
    Public etm_estadio3 As Double
    Public deflexao_estadio3 As Double

    'VARIAVEIS AÇO
    Public es1_estadio3 As Double
    Public es2_estadio3 As Double
    Public es1_variavel_estadio3 As Double
    Public es2_variavel_estadio3 As Double
    Public fy_compressao_estadio3 As Double
    Public fy_tracao_estadio3 As Double
    Public fy As Double

    'VARIAVEIS COEFICIENTES
    Public k1_estadio3 As Double
    Public k1_estadio3_parte1 As Double
    Public k1_estadio3_parte2 As Double
```

```
Public k2_estadio3 As Double
Public k2_estadio3_parte1 As Double
Public k2_estadio3_parte2 As Double
Public k2_estadio3_parte3 As Double
Public k2_estadio3_parte4 As Double

Public k3_estadio3 As Double

Public k4_estadio3 As Double
Public k4_estadio3_parte1 As Double
Public k4_estadio3_parte2 As Double
Public k4_estadio3_parte3 As Double

'VARIAVEIS MOMENTO
Public momento_estadio3 As Double
Public momento_variavel_estadio3 As Double

' DEFORMACOES

Function Funcao_es1_Estadio3() As Double

    If aco_compressao = 0 Then

        es1_estadio3 = 0

    Else

        es1_estadio3 = (Funcao_LN_Estadio3() - altura_total + altura_util) *
        ecm_variavel_estadio3 / Funcao_LN_Estadio3()

    End If

    Return es1_estadio3

End Function

Function Funcao_es2_Estadio3() As Double
```

```
    es2_estadio3 = (altura_util - Funcao_LN_Estadio3()) * ecm_variavel_estadio3 /
    Funcao_LN_Estadio3()

    Return es2_estadio3

End Function

Function Funcao_etm_Estadio3() As Double

    etm_estadio3 = (altura_total - Funcao_LN_Estadio3()) * ecm_variavel_estadio3 /
    Funcao_LN_Estadio3()

    Return etm_estadio3

End Function

' CALCULO COEFICIENTES K1, K2, K3, K4

Function Funcao_k1_Estadio3() As Double

    k1_estadio3_parte1 = (0.5 / Funcao_B_Rec_Estadio1()) * (Math.Log(1 +
    Funcao_A_Rec_Estadio1() * ecm_variavel_estadio3 + Funcao_B_Rec_Estadio1() *
    ecm_variavel_estadio3 * ecm_variavel_estadio3))

    k1_estadio3_parte2 = (Funcao_A_Rec_Estadio1() / (Funcao_B_Rec_Estadio1() *
    Math.Sqrt(Funcao_Q_rec_Estadio1))) * _

    (Math.Atan(Funcao_A_Rec_Estadio1() / Math.Sqrt(Funcao_Q_rec_Estadio1)) -
    Math.Atan((Funcao_A_Rec_Estadio1() + _

    2 * Funcao_B_Rec_Estadio1() * ecm_variavel_estadio3) /
    Math.Sqrt(Funcao_Q_rec_Estadio1)))

    k1_estadio3 = (Ec / (fck * ecm_variavel_estadio3)) * (k1_estadio3_parte1 +
    k1_estadio3_parte2)

    Return k1_estadio3

End Function

Function Funcao_k2_Estadio3() As Double

    k2_estadio3_parte1 = (ecm_variavel_estadio3 / Funcao_B_Rec_Estadio1()) - (0.5
    * Funcao_A_Rec_Estadio1() / (Funcao_B_Rec_Estadio1() ^ 2)) * _
```

```
        Math.Log(1 + Funcao_A_Rec_Estadio1() * ecm_variavel_estadio3 +
        Funcao_B_Rec_Estadio1() * (ecm_variavel_estadio3 ^ 2)) + _
        ((Funcao_A_Rec_Estadio1() ^ 2) - 2 * Funcao_B_Rec_Estadio1()) * (Math.Atan((2
        * Funcao_B_Rec_Estadio1() * ecm_variavel_estadio3 + Funcao_A_Rec_Estadio1()) /
        _
        Math.Sqrt(Funcao_Q_rec_Estadio1)) - Math.Atan(Funcao_A_Rec_Estadio1() /
        Math.Sqrt(Funcao_Q_rec_Estadio1))) / _
        ((Funcao_B_Rec_Estadio1() ^ 2) * Math.Sqrt(Funcao_Q_rec_Estadio1))


        k2_estadio3_parte2 = Funcao_k1_Estadio3() * (ecm_variavel_estadio3 ^ 2) * fck
        / Ec

        k2_estadio3 = 1 - (k2_estadio3_parte1 / k2_estadio3_parte2)

        Return k2_estadio3

    End Function

    Function Funcao_k3_Estadio3() As Double

        k3_estadio3 = ((ftk + Funcao_etp_Rec_Estadio2() * Funcao_Et_Estadio2()) *
        Funcao_etf_Rec_Estadio2() - 0.5 * Funcao_Et_Estadio2() *
        ((Funcao_etf_Rec_Estadio2()) ^ 2) - _
        0.5 * ftk * Funcao_etp_Rec_Estadio2() - 0.5 * Funcao_Et_Estadio2() *
        (Funcao_etp_Rec_Estadio2() ^ 2)) / _
        (ftk * Funcao_etm_Estadio3())

        Return k3_estadio3

    End Function

    Function Funcao_k4_Estadio3() As Double

        k4_estadio3_parte1 = (-(1 / 6) * ftk * Funcao_etp_Rec_Estadio2() *
        Funcao_etp_Rec_Estadio2()) + _
        (0.5 * ftk + 0.5 * Funcao_Et_Estadio2() * Funcao_etp_Rec_Estadio2()) *
        (Funcao_etf_Rec_Estadio2() * Funcao_etf_Rec_Estadio2()) - _
        (1 / 3) * Funcao_Et_Estadio2() * (Funcao_etf_Rec_Estadio2() ^ 3) - _
        (1 / 6) * Funcao_Et_Estadio2() * (Funcao_etp_Rec_Estadio2() ^ 3)

        k4_estadio3_parte2 = (Funcao_etm_Estadio3() ^ 2) * Funcao_k3_Estadio3() * ftk
```

```
    k4_estadio3 = 1 - (k4_estadio3_parte1 / k4_estadio3_parte2)

    Return k4_estadio3

End Function

'   CALCULO LN

Function Funcao_LN_Estadio3() As Double

    If fy_tracao_estadio3 < fy And fy_compressao_estadio3 < fy Then

        LN_estadio3_parte1 = Funcao_k1_Estadio3() * fck * largura_maior - _
          (largura_maior / ecm_variavel_estadio3) * ((ftk +
          Funcao_etp_Rec_Estadio2() * Funcao_Et_Estadio2()) *
          Funcao_etf_Rec_Estadio2() - _
          0.5 * Funcao_Et_Estadio2() * (Funcao_etf_Rec_Estadio2() ^ 2) - _
          0.5 * ftk * Funcao_etp_Rec_Estadio2() - _
          0.5 * Funcao_Et_Estadio2() * (Funcao_etp_Rec_Estadio2() ^ 2))

        LN_estadio3_parte2 = ecm_variavel_estadio3 * Es * aco_compressao +
        ecm_variavel_estadio3 * Es * aco_tracao

        LN_estadio3_parte3 = -(altura_total - altura_util) * ecm_variavel_estadio3
        * Es * aco_compressao - altura_util * ecm_variavel_estadio3 * Es *
        aco_tracao

        LN_estadio3 = (-LN_estadio3_parte2 + Math.Sqrt((LN_estadio3_parte2 ^ 2) -
        4 * LN_estadio3_parte1 * LN_estadio3_parte3)) / (2 * LN_estadio3_parte1)

    ElseIf fy_tracao_estadio3 < fy And fy_compressao_estadio3 > fy Then

        LN_estadio3_parte1 = Funcao_k1_Estadio3() * fck * largura_maior - _
           (largura_maior / ecm_variavel_estadio3) * ((ftk +
          Funcao_etp_Rec_Estadio2() * Funcao_Et_Estadio2()) *
          Funcao_etf_Rec_Estadio2() - _
          0.5 * Funcao_Et_Estadio2() * (Funcao_etf_Rec_Estadio2() ^ 2) - _
          0.5 * ftk * Funcao_etp_Rec_Estadio2() - _
          0.5 * Funcao_Et_Estadio2() * (Funcao_etp_Rec_Estadio2() ^ 2))

        LN_estadio3_parte2 = fy * aco_compressao + ecm_variavel_estadio3 * Es *
        aco_tracao
```

```
    LN_estadio3_parte3 = -altura_util * Es * aco_tracao *
    ecm_variavel_estadio3

    LN_estadio3 = (-LN_estadio3_parte2 + Math.Sqrt((LN_estadio3_parte2 ^ 2) -
    4 * LN_estadio3_parte1 * LN_estadio3_parte3)) / (2 * LN_estadio3_parte1)

ElseIf fy_tracao_estadio3 > fy And fy_compressao_estadio3 < fy Then

    LN_estadio3_parte1 = Funcao_k1_Estadio3() * fck * largura_maior - _
     (largura_maior / ecm_variavel_estadio3) * ((ftk +
     Funcao_etp_Rec_Estadio2() * Funcao_Et_Estadio2()) *
     Funcao_etf_Rec_Estadio2() - _
     0.5 * Funcao_Et_Estadio2() * (Funcao_etf_Rec_Estadio2() ^ 2) - _
    0.5 * ftk * Funcao_etp_Rec_Estadio2() - _
    0.5 * Funcao_Et_Estadio2() * (Funcao_etp_Rec_Estadio2() ^ 2))

    LN_estadio3_parte2 = ecm_variavel_estadio3 * Es * aco_compressao - fy *
    aco_tracao

    LN_estadio3_parte3 = -(altura_total - altura_util) * ecm_variavel_estadio3
    * Es * aco_compressao

    LN_estadio3 = (-LN_estadio3_parte2 + Math.Sqrt((LN_estadio3_parte2 ^ 2) -
    4 * LN_estadio3_parte1 * LN_estadio3_parte3)) / (2 * LN_estadio3_parte1)

ElseIf fy_tracao_estadio3 > fy And fy_compressao_estadio3 > fy Then

    LN_estadio3_parte1 = fy * aco_tracao - fy * aco_compressao

    LN_estadio3_parte2 = Funcao_k1_Estadio3() * fck * largura_maior

    LN_estadio3_parte3 = (largura_maior / ecm_variavel_estadio3) * ((ftk +
    Funcao_etp_Rec_Estadio2() * Funcao_Et_Estadio2()) *
    Funcao_etf_Rec_Estadio2() - _
    0.5 * Funcao_Et_Estadio2() * Funcao_etf_Rec_Estadio2() *
    Funcao_etf_Rec_Estadio2() - _
    0.5 * ftk * Funcao_etp_Rec_Estadio2() - _
     0.5 * Funcao_Et_Estadio2() * Funcao_etp_Rec_Estadio2() *
     Funcao_etp_Rec_Estadio2())

    LN_estadio3 = LN_estadio3_parte1 / (LN_estadio3_parte2 -
    LN_estadio3_parte3)

End If
```

```
        Return LN_estadio3

End Function

' CALCULO MOMENTO ESTADIO 3

Function Funcao_Momento_Estadio3() As Double

    'O momento depende da LN, K1, K2, K3, K4

    If es1_estadio3 * Es > fy And es2_estadio3 * Es > fy Then

        momento_estadio3 = Funcao_k1_Estadio3() * fck * largura_maior * 10 *
        Funcao_LN_Estadio3() * 10 * (altura_total * 0.5 * 10 -
        Funcao_k2_Estadio3() * Funcao_LN_Estadio3() * 10) +

       fy * aco_compressao * 100 * (altura_util * 10 - 0.5 * altura_total * 10) +
       fy * aco_tracao * 100 * (altura_util * 10 - 0.5 * altura_total * 10) +
       Funcao_k3_Estadio3() * ftk * largura_maior * 10 * (altura_total * 10 -
       Funcao_LN_Estadio3() * 10) * _

       (altura_total * 0.5 * 10 - Funcao_k4_Estadio3() * (altura_total * 10 -
       Funcao_LN_Estadio3() * 10))

    ElseIf es1_estadio3 * Es > fy And es2_estadio3 * Es < fy Then

        momento_estadio3 = Funcao_k1_Estadio3() * fck * largura_maior * 10 *
        Funcao_LN_Estadio3() * 10 * (altura_total * 0.5 * 10 -
        Funcao_k2_Estadio3() * Funcao_LN_Estadio3() * 10) +

       fy * aco_compressao * 100 * (altura_util * 10 - 0.5 * altura_total * 10)
       +Es * Funcao_es2_Estadio3() * aco_tracao * 100 * (altura_util * 10 - 0.5 *
       altura_total * 10) + _

       Funcao_k3_Estadio3() * ftk * largura_maior * 10 * (altura_total * 10 -
       Funcao_LN_Estadio3() * 10) * _

       (altura_total * 0.5 * 10 - Funcao_k4_Estadio3() * (altura_total * 10 -
       Funcao_LN_Estadio3() * 10))

    ElseIf es1_estadio3 * Es < fy And es2_estadio3 * Es > fy Then

        momento_estadio3 = Funcao_k1_Estadio3() * fck * largura_maior * 10 *
        Funcao_LN_Estadio3() * 10 * (altura_total * 0.5 * 10 -
        Funcao_k2_Estadio3() * Funcao_LN_Estadio3() * 10) +

        Es * Funcao_es1_Estadio3() * aco_compressao * 100 * (altura_util * 10 -
        0.5 * altura_total * 10) + _

      fy * aco_tracao * 100 * (altura_util * 10 - 0.5 * altura_total * 10) + _
      Funcao_k3_Estadio3() * ftk * largura_maior * 10 * (altura_total * 10 -
      Funcao_LN_Estadio3() * 10) * _
```

```
        (altura_total * 0.5 * 10 - Funcao_k4_Estadio3() * (altura_total * 10 -
        Funcao_LN_Estadio3() * 10))

      ElseIf es1_estadio3 * Es < fy And es2_estadio3 * Es < fy Then

          momento_estadio3 = Funcao_k1_Estadio3() * fck * largura_maior * 10 *
          Funcao_LN_Estadio3() * 10 * (altura_total * 0.5 * 10 -
          Funcao_k2_Estadio3() * Funcao_LN_Estadio3() * 10) +

          Es * Funcao_es1_Estadio3() * aco_compressao * 100 * (altura_util * 10 -
          0.5 * altura_total * 10) + _

          Es * Funcao_es2_Estadio3() * aco_tracao * 100 * (altura_util * 10 - 0.5 *
          altura_total * 10) + _

           Funcao_k3_Estadio3() * ftk * largura_maior * 10 * (altura_total * 10 -
           Funcao_LN_Estadio3() * 10) * _

        (altura_total * 0.5 * 10 - Funcao_k4_Estadio3() * (altura_total * 10 -
        Funcao_LN_Estadio3() * 10))

      End If

      Return momento_estadio3 * 0.000001

    End Function
    ' FIM CALCULOS SECAO ESTADIO 3

End Module
```

ANEXO D – **PROGRAMAÇÃO REFERENTE AO PREENCHIMENTO DO *DATAGRID***

```
Public Class frm_Calcula_Secao

    ' ESTADIO 1
    Public deflexao_estadio1 As Double

    ' ESTADIO 2
    Public eixo_ecm_estadio2(i) As Double
    Public eixo_etm_estadio2(i) As Double
    Public eixo_momento_estadio2(i) As Double
    Public eixo_aco_compressao_estadio2(i) As Double
    Public eixo_aco_tracao_estadio2(i) As Double
    Public eixo_linha_neutra_estadio2(i) As Double
    Public eixo_deflexao_estadio2(i) As Double

    ' ESTADIO 3
    Public eixo_ecm_estadio3(j) As Double
    Public eixo_etm_estadio3(j) As Double
    Public eixo_momento_estadio3(j) As Double
    Public eixo_aco_compressao_estadio3(j) As Double
    Public eixo_aco_tracao_estadio3(j) As Double
    Public eixo_linha_neutra_estadio3(j) As Double
    Public numero_linhas_estadio3 As Double
    Public eixo_deflexao_estadio3(j) As Double

    ' CONTAGEM DE LINHA
    Public i_final As Int64

    Public i As Int64

    Public j As Int64

    Public x As Int64

    Private Sub btn_Calcular_Click_1(sender As Object, e As EventArgs) Handles
btn_Calcular.Click
```

```
 If (txt_altura.Text = "" Or txt_altura_util.Text = "" Or txt_largura.Text = ""
 Or txt_fck.Text = "" Or _
 txt_aco_compressao.Text = "" Or txt_aco_tracao.Text = "" Or _
txt_modulo_aco.Text = "" Or txt_ftk.Text = "" Or txt_modulo_concreto.Text = ""
Or txt_fy_aco.Text = "" Or _
    txt_comprimento_vao.Text = "") Then

        MessageBox.Show("Preencha todos os campos.", "Campos Vazios",
        MessageBoxButtons.OK, MessageBoxIcon.Information)

        If txt_altura.Text = "" Then

            txt_altura.Focus()

        ElseIf txt_altura_util.Text = "" Then

            txt_altura_util.Focus()

        ElseIf txt_largura.Text = "" Then

            txt_largura.Focus()

        ElseIf txt_fck.Text = "" Then

            txt_fck.Focus()

        ElseIf txt_aco_compressao.Text = "" Then

            txt_aco_compressao.Focus()

        ElseIf txt_aco_tracao.Text = "" Then

            txt_aco_tracao.Focus()

        ElseIf txt_modulo_aco.Text = "" Then

            txt_modulo_aco.Focus()

        ElseIf txt_ftk.Text = "" Then

            txt_ftk.Focus()
```

```
        ElseIf txt_modulo_concreto.Text = "" Then

            txt_modulo_concreto.Focus()

        ElseIf txt_fy_aco.Text = "" Then

            txt_fy_aco.Focus()

        ElseIf txt_comprimento_vao.Text = "" Then

            txt_comprimento_vao.Focus()

        End If

    End If

    ' Verifica se todos os campos estao preenchidos e recebe os valores de calculo

    If (txt_altura.Text <> "" And txt_altura_util.Text <> "" And txt_largura.Text
    <> "" And txt_fck.Text <> "" And _
    txt_aco_compressao.Text <> "" And txt_aco_tracao.Text <> "" And _
   txt_modulo_aco.Text <> "" And txt_ftk.Text <> "" And txt_modulo_concreto.Text <>
   "" And txt_fy_aco.Text <> "" And _
   txt_comprimento_vao.Text <> "") Then

        Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio1.comprimento_vao =
        txt_comprimento_vao.Text

        Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio1.altura_total = txt_altura.Text

        Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio1.altura_util =
        txt_altura_util.Text

        Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio1.largura_maior = txt_largura.Text

        Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio1.L = txt_comprimento_vao.Text

        Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio1.fck = txt_fck.Text
        Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio1.ftk = txt_ftk.Text
```

```
Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio1.Ec = txt_modulo_concreto.Text

Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio1.aco_compressao =
txt_aco_compressao.Text

Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio1.aco_tracao = txt_aco_tracao.Text

Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio1.Es = txt_modulo_aco.Text

Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio3.fy = txt_fy_aco.Text

My.Forms.frm_Resultado.txt_resultado_LN.Text =
Format(Funcao_LN_Estadio1(), "####.00000")

  My.Forms.frm_Resultado.txt_resultado_deformacao_tracao_concreto.Text =
  Format(Funcao_etp_Rec_Estadio1(), "####.0000000000")

  My.Forms.frm_Resultado.txt_resultado_compressao_concreto.Text =
  Format(Funcao_ecm_Rec_Estadio1(), "####.00000")

  My.Forms.frm_Resultado.txt_resultado_compressao_maxima_concreto.Text =
  Format(Funcao_ecp_Rec_Estadio1(), "####.0000000000")

  My.Forms.frm_Resultado.txt_resultado_Aco_compressao.Text =
  Format(Funcao_es1_Rec_Estadio1(), "####.0000000000")

  My.Forms.frm_Resultado.txt_resultado_aco_tracao.Text =
  Format(Funcao_es2_Rec_Estadio1(), "####.0000000000")

  My.Forms.frm_Resultado.txt_resultado_momento_fissuracao.Text =
  Format(Funcao_Momento_Rec_Estadio1(), "####.00000")

  ' Inicio ao comando For. Para isso, precisamos iniciar o valor de
  deformacao_compressao_variavel_concreto_Estadio2. Ele inicia o com o
  valor de deformacao
  ' de compressao final encontrado no estadio 1

For x As Int64 = 1 To 2 Step 1

    'ESTADIO 1

    If My.Forms.frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows.Count = 0
    Then
```

```
        ' add primeira linha

My.Forms.frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows.Add("0", "Regime
Linear (Estadio 1)", _

Format(Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio1.Funcao_LN_Estadio1(),
"####.00000"), _

Format(Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio1.Funcao_ecm_Rec_Estadio1()
, "####.0000000000"), _

Format(Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio1.Funcao_es1_Rec_Estadio1()
, "####.0000000000"), _

Format(Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio1.Funcao_es2_Rec_Estadio1,
"####.0000000000"), _

Format(Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio1.Funcao_Momento_Rec_Estadi
o1(), "####.00000"), _

Format(Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio1.Funcao_Deflexao_Estadio1(
), "####.0000000000"))

        'ESTADIO 2

  Else

        ecm_variavel_estadio2 =
        Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio1.Funcao_ecm_Rec_Estadio1()

        For i As Int64 = 1 To 1000 Step 1   ' Nao se sabe quantos passos
        terao, apenas a extrapolei para 1000 'for'

            'Cálculos

            fy_compressao_estadio2 =
            Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio2.Funcao_es1_Estadio2()
            * Es

            fy_tracao_estadio2 =
            Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio2.Funcao_es2_Estadio2()
            * Es

            ecm_variavel_estadio2 = ecm_variavel_estadio2 * 1.01 '
            ACRESCENTAR 1% EM CIMA DO ENCREMENTO FEITO
```

```
LN = Funcao_LN_Estadio2()

momento_variavel_estadio2 =
Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio2.Funcao_Momento_Estadi
o2()

etm_variavel_estadio2 =
Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio2.Funcao_etm_Rec_Estadi
o2()

es1_variavel_estadio2 =
Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio2.Funcao_es1_Estadio2()

es2_variavel_estadio2 =
Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio2.Funcao_es2_Estadio2()

'VERIFICACAO DO ACO

If fy_compressao_estadio2 > txt_fy_aco.Text Then

    Exit For

Else

    es1_variavel_estadio2 =
    Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio2.Funcao_es1_Estadi
    o2()

End If

If fy_tracao_estadio2 > txt_fy_aco.Text Then

    Exit For

Else

    es2_variavel_estadio2 =
    Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio2.Funcao_es2_Estadi
    o2()

End If

'VARIFICACAO DO CONCRETO
```

```
If (etm_variavel_estadio2 <=
Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio2.Funcao_etf_Rec_Estadi
o2) Then

 ' PRIMEIRA VERIFICAÇÃO QUANTO AO MOMENTO: 3Mi/4 MENOR QUE
O MOMENTO DE FISSURAÇÃO

 If 3 * momento_variavel_estadio2 / 4 <=
 Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio1.Funcao_Momento_Re
 c_Estadio1 Then

 deflexao_estadio2 = ((comprimento_vao ^ 2) / 48) * ( _(3 *
 momento_variavel_estadio2 *
 Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio1.Funcao_ecm_Rec_Es
 tadio1 /
 (Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio1.Funcao_Momento_R
 ec_Estadio1 *
 Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio1.Funcao_LN_Estadio
 1)) +(ecm_variavel_estadio2 / LN))

My.Forms.frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows.Add
(i, "Regime Nao Linear (Estadio 2)-1", _

Format(LN, "####.00000"), _

Format(ecm_variavel_estadio2, "####.0000000000"), _

Format(es1_variavel_estadio2, "####.0000000000"), _

Format(es2_variavel_estadio2, "####.0000000000"), _

Format(momento_variavel_estadio2, "####.00000"), _

Format(deflexao_estadio2, "####.0000000000"))

‘SEGUNDA VERIFICAÇÃO QUANTO AO MOMENTO: 3Mi/4 MAIOR QUE O
MEOMENTO DE FISSURACAO E Mi/2 MENOR

 ElseIf 3 * momento_variavel_estadio2 / 4 >
 Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio1.Funcao_Momento_Re
 c_Estadio1 And _

 momento_variavel_estadio2 / 2 <
 Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio1.Funcao_Momento_Re
 c_Estadio1 Then
```

```
My.Forms.frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows.Ad
d(i, "Regime Nao Linear (Estadio 2)-2", _

Format(LN, "####.00000"), _

Format(ecm_variavel_estadio2, "####.0000000000"), _

Format(es1_variavel_estadio2, "####.0000000000"), _

Format(es2_variavel_estadio2, "####.0000000000"), _

Format(momento_variavel_estadio2, "####.00000"), _

"0")


For a As Int64 = 0 To
My.Forms.frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows.Co
unt - 1 Step 1


If
My.Forms.frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows(a)
.Cells(6).Value.ToString() <= 1.01 * 3 *
momento_variavel_estadio2 / 4 _
And
My.Forms.frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows(a)
.Cells(6).Value.ToString() >= 0.99 * (3 *
momento_variavel_estadio2 / 4) Then  'verifica a condição
do valor do momento na coluna momento


ecm_resultado_parte1_estadio2 =
My.Forms.frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows(a)
.Cells(3).Value.ToString()


LN_resultado_parte1_estadio2 =
My.Forms.frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows(a)
.Cells(2).Value.ToString()


deflexao_estadio2 = ((comprimento_vao ^ 2) / 48) * _
((3 * momento_variavel_estadio2 *
Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio1.Funcao_ecm_Rec_Est
adio1 / _
(4 *
Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio1.Funcao_Momento_Rec
_Estadio1 *
Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio1.Funcao_LN_Estadio1
)) + _
```

```
(3 * ecm_resultado_parte1_estadio2 /
LN_resultado_parte1_estadio2) + _
(ecm_variavel_estadio2 / LN))

'ADD

My.Forms.frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows.Ite
m(My.Forms.frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows.C
ount - 1).Cells(7).Value = Format(deflexao_estadio2,
"####.0000000000")

Exit For

End If

Next

' TERCEIRA VERIFICAÇÃO QUANTO AO MOMENTO: Mi/2 MAIOR QUE O
MOMENTO DE FISSURACAO E Mi/4 MENOR

 ElseIf momento_variavel_estadio2 / 2 >
 Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio1.Funcao_Momento_Re
 c_Estadio1 And _
 momento_variavel_estadio2 / 4 <
 Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio1.Funcao_Momento_Re
 c_Estadio1 Then

 My.Forms.frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows.Ad
 d(i, "Regime Nao Linear (Estadio 2)-3", _

 Format(LN, "####.00000"), _

 Format(ecm_variavel_estadio2, "####.0000000000"), _

 Format(es1_variavel_estadio2, "####.0000000000"), _

 Format(es2_variavel_estadio2, "####.0000000000"), _

 Format(momento_variavel_estadio2, "####.00000"), _

 "0")

 For a As Int64 = 0 To
 My.Forms.frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows.Co
 unt - 1 Step 1
```

```
If
My.Forms.frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows(a)
.Cells(6).Value.ToString() <= 1.01 * 3 *
momento_variavel_estadio2 / 4 _
And
My.Forms.frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows(a)
.Cells(6).Value.ToString() >= 0.99 * (3 *
momento_variavel_estadio2 / 4) Then

ecm_resultado_parte1_estadio2 =
My.Forms.frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows(a)
.Cells(3).Value.ToString()

LN_resultado_parte1_estadio2 =
My.Forms.frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows(a)
.Cells(2).Value.ToString()

Exit For
End If
Next

    For a As Int64 = 0 To
    My.Forms.frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Row
    s.Count - 1 Step 1

    If My
    .frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows(a).Cel
    ls(6).Value.ToString() <= 1.01 *
    momento_variavel_estadio2 / 2 _
     And
    frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows(a).Cell
    s(6).Value.ToString() >= 0.99 *
    (momento_variavel_estadio2 / 2) Then

    ecm_resultado_parte2_estadio2 =
    frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows(a).Cell
    s(3).Value.ToString()

    LN_resultado_parte2_estadio2 =
    frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows(a).Cell
    s(2).Value.ToString()

    Exit For

    End If

      Next
```

```
deflexao_estadio2 = ((comprimento_vao ^ 2) / 48) * ((3
* momento_variavel_estadio2 *
Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio1.Funcao_ecm_Re
c_Estadio1 / _
(4 *
Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio1.Funcao_Moment
o_Rec_Estadio1 *
Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio1.Funcao_LN_Est
adio1)) + _
(3 * ecm_resultado_parte1_estadio2 /
LN_resultado_parte1_estadio2) + _
  (ecm_variavel_estadio2 / LN))


'ADD

  My.Forms.frm_Resultado.DataGrid_Resultado_estadio2.R
  ows.Item(My.Forms.frm_Resultado.DataGrid_Resultado_E
  stadio2.Rows.Count - 1).Cells(7).Value =
  Format(deflexao_estadio2, "####.0000000000")


'QUARTA VERIFICAÇÃO QUANTO AO MOMENTO: Mi/4 MAIOR QUE
O MOMENTO DE FISSURACAO


 ElseIf momento_variavel_estadio2 / 4 >
 Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio1.Funcao_Momento_Re
 c_Estadio1 Then

My.Forms.frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows.Add
(i, "Regime Nao Linear (Estadio 2)-4", _

Format(LN, "####.00000"), _

Format(ecm_variavel_estadio2, "####.0000000000"), _

Format(es1_variavel_estadio2, "####.0000000000"), _

Format(es2_variavel_estadio2, "####.0000000000"), _

Format(momento_variavel_estadio2, "####.00000"), _

"0")


 For a As Int64 = 0 To
 My.Forms.frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows.Co
 unt - 1 Step 1
```

```
If
frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows(a).Cells(6)
.Value.ToString() <= 1.01 * 3 * momento_variavel_estadio2
/ 4 _
And
frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows(a).Cells(6)
.Value.ToString() >= 0.99 * (3 * momento_variavel_estadio2
/ 4) Then  'verifica a condição do valor do momento na
coluna momento

ecm_resultado_parte1_estadio2 =
frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows(a).Cells(3)
.Value.ToString()

LN_resultado_parte1_estadio2 =
frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows(a).Cells(2)
.Value.ToString()

Exit For

End If

Next

For a As Int64 = 0 To
My.Forms.frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows.Cou
nt - 1 Step 1

If
frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows(a).Cells(6).
Value.ToString() <= 1.01 * momento_variavel_estadio2 / 2 _
And
frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows(a).Cells(6).
Value.ToString() >= 0.99 * (momento_variavel_estadio2 / 2)
Then

ecm_resultado_parte2_estadio2 =
frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows(a).Cells(3).
Value.ToString()

LN_resultado_parte2_estadio2 =
frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows(a).Cells(2).
Value.ToString()

Exit For
```

```
End If

Next

For a As Int64 = 0 To
My.Forms.frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows.Cou
nt - 1 Step 1

If
frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows(a).Cells(6).
Value.ToString() <= 1.01 * momento_variavel_estadio2 / 4 _
And
frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows(a).Cells(6).
Value.ToString() >= 0.99 * (momento_variavel_estadio2 / 4)
Then

ecm_resultado_parte3_estadio2 =
frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows(a).Cells(3).
Value.ToString()

LN_resultado_parte3_estadio2 =
frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows(a).Cells(2).
Value.ToString()

Exit For

End If

Next

deflexao_estadio2 = ((comprimento_vao ^ 2) / 48) * _
                        ((ecm_resultado_parte3_estadio2 /
LN_resultado_parte3_estadio2) + _
(ecm_resultado_parte2_estadio2 /
LN_resultado_parte2_estadio2) + _
(3 * ecm_resultado_parte1_estadio2 /
LN_resultado_parte1_estadio2) + _
(ecm_variavel_estadio2 / LN))

     'ADD

My.Forms.frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows.Ite
m(My.Forms.frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows.C
ount - 1).Cells(7).Value = Format(deflexao_estadio2,
"####.0000000000")
```

```
                End If
                ecm_variavel_estadio3 = ecm_variavel_estadio2
                es1_variavel_estadio3 = es1_variavel_estadio2
                es2_variavel_estadio3 = es2_variavel_estadio3
                i_final = i
            Else
                Exit For
            End If
                numero_linhas_estadio2 = numero_linhas_estadio2 + 1
        Next i
    End If
Next x
' PRESERVANDO OS VALORES
ecm_variavel_estadio3 = ecm_variavel_estadio2
es1_variavel_estadio3 = es1_variavel_estadio2
es2_variavel_estadio3 = es2_variavel_estadio3
momento_variavel_estadio3 = momento_variavel_estadio2
numero_linhas_estadio2 = numero_linhas_estadio2
' ESTADIO 3
'INICIANDO A CONTAGEM
```

```
For j As Int64 = i_final + 1 To 1000 Step 1

    ecm_variavel_estadio3 = ecm_variavel_estadio3

    etm_variavel_estadio3 =
    Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio3.Funcao_etm_Estadio3() '
    Calcula a variacao da deformaçao de tracao do concreto

    fy_compressao_estadio3 =
    Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio3.Funcao_es1_Estadio3() * Es '
    Calcula a variacao da tensao no aco de compressao

    fy_tracao_estadio3 =
    Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio3.Funcao_es2_Estadio3() * Es '
    Calcula a variacao da tensao no aco de tracao

    es1_variavel_estadio3 = Funcao_es1_Estadio3() ' Calcula a variacao na
    deformacao do aco de compressao

    es2_variavel_estadio3 = Funcao_es2_Estadio3() ' Calcula a variacao na
    deformacao do aco de tracao

    momento_variavel_estadio3 =
    Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio3.Funcao_Momento_Estadio3()

    ' VERIFICACAO DO ACO

    If fy_tracao_estadio3 > txt_fy_aco.Text And fy_compressao_estadio3 >
    txt_fy_aco.Text Then  ' ACO TRAÇÃO E COMPRESSAO ESCOAM

        fy_tracao_estadio3 = fy

        es2_variavel_estadio3 =
        Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio3.Funcao_es2_Estadio3()

        fy_compressao_estadio3 = fy

        es1_variavel_estadio3 =
        Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio3.Funcao_es1_Estadio3()

        LN_variavel_estadio3 = Funcao_LN_Estadio3()

        momento_variavel_estadio3 =
        Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio3.Funcao_Momento_Estadio3()
```

```
ElseIf fy_tracao_estadio3 < txt_fy_aco.Text And fy_compressao_estadio3
> txt_fy_aco.Text Then  ' ACO TRACAO NÃO ESCOA E COMPRESSAO ESCOA

    es2_variavel_estadio3 =
    Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio3.Funcao_es2_Estadio3()

    fy_tracao_estadio3 =
    Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio3.Funcao_es2_Estadio3() *
    Es

    fy_compressao_estadio3 = fy

    es1_variavel_estadio3 =
    Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio3.Funcao_es1_Estadio3()

    LN_variavel_estadio3 = Funcao_LN_Estadio3()

    momento_variavel_estadio3 =
    Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio3.Funcao_Momento_Estadio3()

ElseIf fy_tracao_estadio3 > txt_fy_aco.Text And fy_compressao_estadio3
< txt_fy_aco.Text Then  ' ACP TRACAO ESCOA E COMPRESSAO NAO ESCOA

    fy_tracao_estadio3 = fy

    es2_variavel_estadio3 =
    Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio3.Funcao_es2_Estadio3()

    es1_variavel_estadio3 =
    Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio3.Funcao_es1_Estadio3()

    fy_compressao_estadio3 =
    Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio3.Funcao_es1_Estadio3 * Es

    LN_variavel_estadio3 = Funcao_LN_Estadio3()

    momento_variavel_estadio3 =
    Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio3.Funcao_Momento_Estadio3()

ElseIf fy_tracao_estadio3 < txt_fy_aco.Text And fy_compressao_estadio3
< txt_fy_aco.Text Then  ' ACO TRACAO E COMPRESSAO NAO ESCOAM
```

```
        es2_variavel_estadio3 =
        Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio3.Funcao_es2_Estadio3()

        fy_tracao_estadio3 =
        Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio3.Funcao_es2_Estadio3() *
        Es

        es1_variavel_estadio3 =
        Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio3.Funcao_es1_Estadio3()

        fy_compressao_estadio3 =
        Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio3.Funcao_es1_Estadio3 * Es

        LN_variavel_estadio3 = Funcao_LN_Estadio3()

        momento_variavel_estadio3 =
        Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio3.Funcao_Momento_Estadio3()

    End If

    ' VERIFICACAO DO CONCRETO

    If ecm_variavel_estadio3 <= 3.5 * 0.001 Then

        '   PRIMEIRA VERIFICACAO

        If 3 * momento_variavel_estadio3 / 4 <=
        Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio1.Funcao_Momento_Rec_Estadi
        o1 Then

            deflexao_estadio3 = ((comprimento_vao ^ 2) / 48) * ( _
        (3 * momento_variavel_estadio3 *
        Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio1.Funcao_ecm_Rec_Estadio1 /
        (Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio1.Funcao_Momento_Rec_Estad
        io1 *
        Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio1.Funcao_LN_Estadio1))
        +(ecm_variavel_estadio3 / LN_estadio3))

        My.Forms.frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows.Add(j,
        "Regime Nao Linear (Estadio 3)-1", _

        Format(LN_estadio3, "####.00000"), _

        Format(ecm_variavel_estadio3, "####.0000000000"), _

        Format(es1_variavel_estadio3, "####.0000000000"), _
```

```
Format(es2_variavel_estadio3, "####.0000000000"), _

Format(momento_variavel_estadio3, "####.00000"), _

Format(deflexao_estadio3, "####.00000000000"))

    '   SEGUNDA VERIFICACAO

ElseIf 3 * momento_variavel_estadio3 / 4 >
Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio1.Funcao_Momento_Rec_Estadi
o1 And _
momento_variavel_estadio3 / 2 <
Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio1.Funcao_Momento_Rec_Estadi
o1 Then

       My.Forms.frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows.Add
       (j, "Regime Nao Linear (Estadio 3) - 2", _

       Format(LN_estadio3, "####.00000"), _

       Format(ecm_variavel_estadio3, "####.0000000000"), _

       Format(es1_variavel_estadio3, "####.0000000000"), _

       Format(es2_variavel_estadio3, "####.0000000000"), _

       Format(momento_variavel_estadio3, "####.00000"), _

       "0")

    For a As Int64 = 0 To
    My.Forms.frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows.Count
    - 1 Step 1

        If
        frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows(a).Cells(6)
        .Value.ToString() <= 1.01 * (3 * momento_variavel_estadio3
        / 4) And _
        frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows(a).Cells(6)
        .Value.ToString() >= 0.99 * (3 * momento_variavel_estadio3
        / 4) Then

            ecm_resultado_parte1_estadio3 =
            frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows(a).Cell
            s(3).Value.ToString()
```

```
                    LN_resultado_parte1_estadio3 =
                    frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows(a).Cell
                    s(2).Value.ToString()


                    deflexao_estadio3 = ((comprimento_vao ^ 2) / 48) *((3
                    * momento_variavel_estadio3 *
                    Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio1.Funcao_ecm_Re
                    c_Estadio1 / _
                     (4 *
                    Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio1.Funcao_Moment
                    o_Rec_Estadio1 *
                    Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio1.Funcao_LN_Est
                    adio1)) + _
                   (3 * ecm_resultado_parte1_estadio3 /
                   LN_resultado_parte1_estadio3) + _
                   (ecm_variavel_estadio3 / LN_estadio3))


                    'ADD

                      My.Forms.frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.R
                      ows.Item(My.Forms.frm_Resultado.DataGrid_Resultado_E
                      stadio2.Rows.Count - 1).Cells(7).Value =
                      Format(deflexao_estadio3, "####.0000000000")


                    Exit For

                End If

            Next

            '   TERCEIRA VERIFICACAO

        ElseIf momento_variavel_estadio3 / 2 >
        Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio1.Funcao_Momento_Rec_Estadi
        o1 And _
                                  momento_variavel_estadio3 / 4 <
        Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio1.Funcao_Momento_Rec_Estadi
        o1 Then

        My.Forms.frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows.Add(j,
        "Regime Nao Linear (Estadio 3) - 2", _

        Format(LN_estadio3, "####.00000"), _

        Format(ecm_variavel_estadio3, "####.0000000000"), _

        Format(es1_variavel_estadio3, "####.0000000000"), _
```

```
Format(es2_variavel_estadio3, "####.0000000000"), _

Format(momento_variavel_estadio3, "####.00000"), _

"0")

    For a As Int64 = 0 To
    My.Forms.frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows.Count
    - 1 Step 1

        If
        frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows(a).Cells(6)
        .Value.ToString() <= 1.01 * (3 * momento_variavel_estadio3
        / 4) And _

              frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows(a).Ce
              lls(6).Value.ToString() >= 0.99 * (3 *
              momento_variavel_estadio3 / 4) Then

            ecm_resultado_parte1_estadio3 =
            frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows(a).Cell
            s(3).Value.ToString()

            LN_resultado_parte1_estadio3 =
            frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows(a).Cell
            s(2).Value.ToString()

            Exit For

        End If

    Next

    For a As Int64 = 0 To
    My.Forms.frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows.Count
    - 1 Step 1

       If
       frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows(a).Cells(6).
       Value.ToString() <= 1.01 * (momento_variavel_estadio3 / 2)
       And _

       frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows(a).Cells(6).
       Value.ToString() >= 0.99 * (momento_variavel_estadio3 / 2)
       Then
```

```
            ecm_resultado_parte2_estadio3 =
            frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows(a).Cells(3)
            .Value.ToString()

            LN_resultado_parte2_estadio3 =
            frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows(a).Cells(2)
            .Value.ToString()

                Exit For

            End If

        Next

        deflexao_estadio3 = ((comprimento_vao ^ 2) / 48) * _
           ((momento_variavel_estadio3 *
           Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio1.Funcao_ecm_Rec_Est
           adio1 / (4 *
           Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio1.Funcao_Momento_Rec
           _Estadio1 *
           Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio1.Funcao_LN_Estadio1
           )) + _
           (3 * ecm_resultado_parte1_estadio3 /
           LN_resultado_parte1_estadio3) + _
           (ecm_resultado_parte2_estadio3 /
           LN_resultado_parte2_estadio3) + _
           (ecm_variavel_estadio3 / LN_estadio3))

        'ADD

                 My.Forms.frm_Resultado.Datagrid_Resultado_Estadio2.R
                 ows.Item(My.Forms.frm_Resultado.DataGrid_Resultado_E
                 stadio2.Rows.Count - 1).Cells(7).Value =
                 Format(deflexao_estadio3, "####.0000000000")

        '   QUARTA VERIFICACAO

    ElseIf momento_variavel_estadio3 / 4 >
    Modulo_Calculo_Secao_Retangular_Estadio1.Funcao_Momento_Rec_Estadi
    o1 Then

    My.Forms.frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows.Add(j,
    "Regime Nao Linear (Estadio 3) - 4", _

    Format(LN_estadio3, "####.00000"), _
```

```
Format(ecm_variavel_estadio3, "####.0000000000"), _

Format(es1_variavel_estadio3, "####.0000000000"), _

Format(es2_variavel_estadio3, "####.0000000000"), _

Format(momento_variavel_estadio3, "####.00000"), _

"0")

    For a As Int64 = 0 To
    My.Forms.frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows.Count
    - 1 Step 1

       If
       frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows(a).Cells(6).
       Value.ToString() <= 1.01 * 3 * momento_variavel_estadio3 /
       4 And _
       frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows(a).Cells(6).
       Value.ToString() >= 0.99 * (3 * momento_variavel_estadio3 /
       4) Then

            ecm_resultado_parte1_estadio3 =
            frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows(a).Cell
            s(3).Value.ToString()

            LN_resultado_parte1_estadio3 =
            frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows(a).Cell
            s(2).Value.ToString()

            Exit For

        End If

 Next

    For a As Int64 = 0 To
    My.Forms.frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows.Count
    - 1 Step 1

        If
        frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows(a).Cells(6)
        .Value.ToString() <= 1.01 * (momento_variavel_estadio3 /
        2) And _

        frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows(a).Cells(6)
```

```
.Value.ToString() >= 0.99 * (momento_variavel_estadio3 /
2) Then

    ecm_resultado_parte2_estadio3 =
    frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows(a).Cell
    s(3).Value.ToString()

    LN_resultado_parte2_estadio3 =
    frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows(a).Cell
    s(2).Value.ToString()

    Exit For

End If

Next

For a As Int64 = 0 To
My.Forms.frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows.Count
- 1 Step 1

   If
frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows(a).Cells(6).Val
ue.ToString() <= 1.01 * (momento_variavel_estadio3 / 4) And _
frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows(a).Cells(6).Val
ue.ToString() >= 0.99 * (momento_variavel_estadio3 / 4) Then

        ecm_resultado_parte3_estadio3 =
        frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows(a).Cell
        s(3).Value.ToString()

        LN_resultado_parte3_estadio3 =
        frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows(a).Cell
        s(2).Value.ToString()

        Exit For

    End If

Next

' calculando  deflexao
deflexao_estadio3 = ((comprimento_vao ^ 2) / 48) *
((ecm_resultado_parte3_estadio3 / LN_resultado_parte3_estadio3) +
_
```

```
                    (ecm_resultado_parte2_estadio3 / LN_resultado_parte2_estadio3) +
                    (3 * ecm_resultado_parte1_estadio3 /
                    LN_resultado_parte1_estadio3) + _
                    (ecm_variavel_estadio3 / LN_estadio3))

                       'ADD

                    My.Forms.frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows.Item(My.Fo
                    rms.frm_Resultado.DataGrid_Resultado_Estadio2.Rows.Count -
                    1).Cells(7).Value = Format(deflexao_estadio3, "####.0000000000")

                    End If

                    ecm_variavel_estadio3 = ecm_variavel_estadio3 * 1.01 ' ACRESCENTA
EM 1% A DEFORMACAO

                Else

                    Exit For

                End If

            Next j

            ' EXIBICAO DOS RESULTADOS

            My.Forms.frm_Resultado.TabControl_Resultado.SelectedTab =
            frm_Resultado.tab_estadio1

            frm_Resultado.Show()

        End If

End Sub
```

ANEXO E – TABELA DE COEFICIENTES ADIMENSIONAIS

						σ'_s (MPa)				
ξ	ε_c	ε_s	ζ	μ_d	ω	δ' = 0,05	δ' =0,10	δ' =0,15	δ' =0,20	
0,06	0,64	10,00	0,979	0,014	0,015	22				Domínio 2
0,07	0,75	10,00	0,976	0,019	0,020	45				
0,08	0,87	10,00	0,972	0,025	0,025	68				
0,09	0,99	10,00	0,969	0,031	0,032	92				
0,10	1,11	10,00	0,965	0,037	0,038	117	0			
0,11	1,24	10,00	0,961	0,044	0,046	142	24			
0,12	1,36	10,00	0,957	0,051	0,054	167	48			
0,13	1,49	10,00	0,953	0,059	0,062	193	72			
0,14	1,63	10,00	0,949	0,067	0,071	220	98			
0,15	1,76	10,00	0,945	0,075	0,079	247	124	0		
0,16	1,90	10,00	0,940	0,083	0,088	275	150	25		
0,17	2,05	10,00	0,936	0,091	0,097	304	177	51		
0,18	2,20	10,00	0,931	0,099	0,107	333	205	77		
0,19	2,35	10,00	0,927	0,107	0,116	363	233	104		
0,20	2,50	10,00	0,922	0,115	0,125	394	263	131	0	
0,22	2,82	10,00	0,912	0,130	0,143	435	323	188	54	
0,24	3,16	10,00	0,902	0,145	0,161	435	387	249	111	
0,2593	3,50	10,00	0,892	0,159	0,178	435	435	310	168	
0,28	3,50	9,00	0,884	0,170	0,193	435	435	341	210	Domínio 3
0,30	3,50	8,17	0,875	0,181	0,206	435	435	368	245	
0,32	3,50	7,44	0,867	0,191	0,220	435	435	390	276	
0,34	3,50	6,79	0,859	0,201	0,234	435	435	411	303	
0,36	3,50	6,22	0,850	0,211	0,248	435	435	429	327	
0,38	3,50	5,71	0,842	0,220	0,261	435	435	435	348	
0,40	3,50	5,25	0,834	0,229	0,275	435	435	435	368	
0,42	3,50	4,83	0,825	0,239	0,289	435	435	435	385	

0,44	3,50	4,45	0,817	0,247	0,303	435	435	435	401	
0,46	3,50	4,11	0,809	0,256	0,317	435	435	435	415	
0,48	3,50	3,79	0,800	0,264	0,330	435	435	435	429	
0,50	3,50	3,50	0,792	0,272	0,344	435	435	435	435	
0,52	3,50	3,23	0,784	0,280	0,358	435	435	435	435	
0,54	3,50	2,98	0,775	0,288	0,372	435	435	435	435	
0,56	3,50	2,75	0,767	0,296	0,385	435	435	435	435	
0,58	3,50	2,53	0,759	0,303	0,399	435	435	435	435	
0,60	3,50	2,33	0,750	0,310	0,413	435	435	435	435	
0,62	3,50	2,15	0,742	0,317	0,427	435	435	435	435	
0,6283	3,50	2,07	0,739	0,319	0,433	435	435	435	435	
0,64	3,50	1,97	0,734	0,323	0,463	435	435	435	435	Domínio 4
0,66	3,50	1,80	0,725	0,329	0,521	435	435	435	435	
0,68	3,50	1,65	0,717	0,336	0,588	435	435	435	435	
0,70	3,50	1,50	0,709	0,341	0,665	435	435	435	435	
0,72	3,50	1,36	0,701	0,347	0,754	435	435	435	435	
0,74	3,50	1,23	0,692	0,352	0,857	435	435	435	435	
0,76	3,50	1,11	0,684	0,358	0,980	435	435	435	435	
0,78	3,50	0,99	0,676	0,363	1,126	435	435	435	435	
0,80	3,50	0,88	0,667	0,367	1,303	435	435	435	435	
0,82	3,50	0,77	0,659	0,372	1,520	435	435	435	435	
0,84	3,50	0,67	0,651	0,376	1,795	435	435	435	435	

Fonte: TAVARES (2005)