Apuntes

Alumno: Zepeda Rosales Ana Yadira
Carrera: Mecatronica
Grado/Grupo: 8°A

Profesor: Moran Garabito Carlos Enrique
Asignatura: Cinemática de robots
Periodo cuatrimestral: enero-abril 2019

TEMA: Zepeda Rosales Ana Yadira

FECHA: 07 Enero 2019

¿Que es un robot?

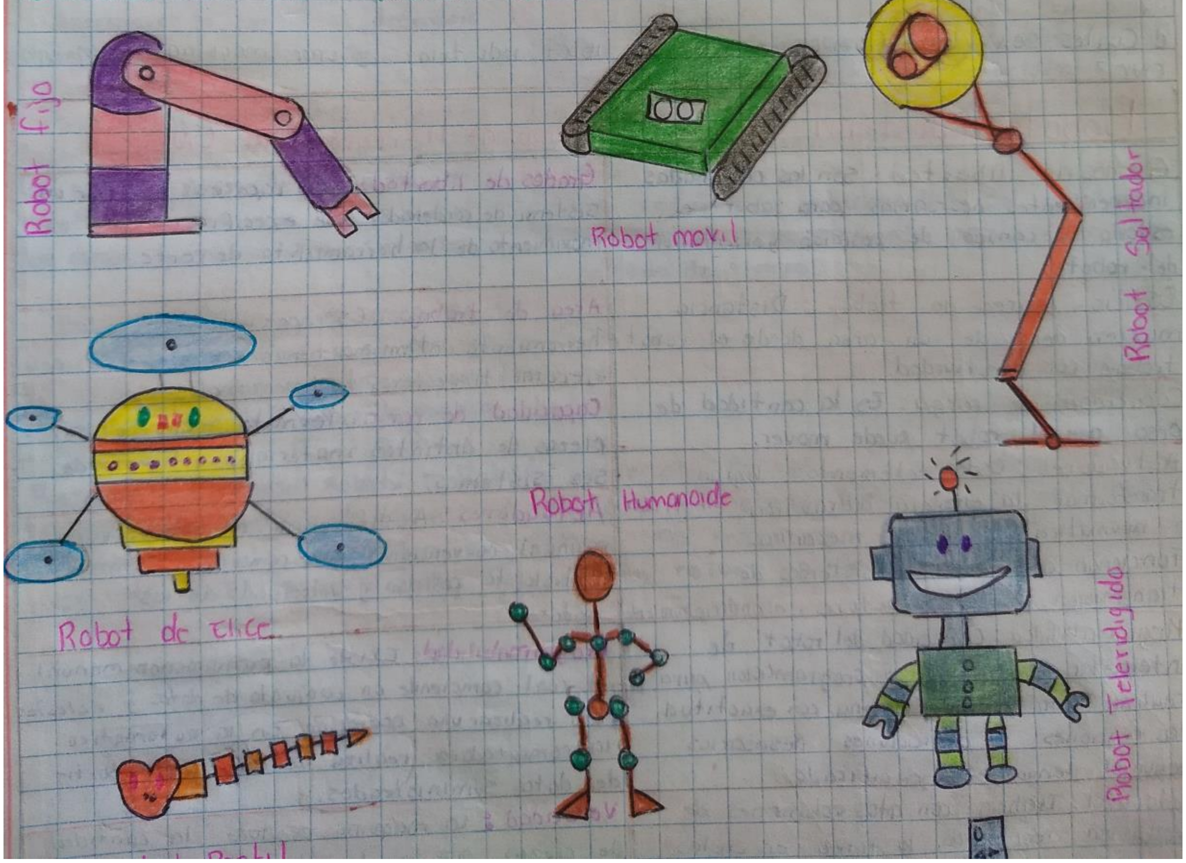
La RAE lo define como una maquina automatica programable capaz de realizar determinadas tareas de forma autonoma. Un robot se compone principalmente de 3 partes.

Sensores: Son dispositivos que le permiten a un robot darse cuenta de su entorno, estos sensores reciben variables fisicas y las transforman en señales electricas.

Sistema de control: El sistema de control interpreta la señal que le entregan los sensores y segun su programación realiza la tarea para lo que fue diseñado.

Actuadores: Es un conjunto de instrucciones logicas diseñados segun la problematica que se requiere resolver y finalmente ejecutan la acción que deben realizar a travez de sus actuadores.

¿Cuales son los tipos de robots?



TEMA FECHA

Aplicaciones típicas de un robot industrial

- Soldadura por puntos
- Soldadura por resistencia
- Soldadura al arco
- Soldadura laser
- Corte por chorro de agua
- Corte termico
- Corte laser
- Corte plasma
- Manipulación de partes de carrocería.
- Pintura spray
- Esmaltado
- Desbordado
- Pulido
- Pulverización a la llama
- Manipulación de materiales
- Carga pesada
- Carga y descarga de maquinas de herramientas
- Gantry
- Estanpación en frio y caliente
- Tratamientos termicos
- Descarga e inyeccion de aluminio
- Emsanblaje
- Operacion de plegado
- Embalaje
- Etiquetado
- Paletizado
- Pulido
- Arenado
- Encolado
- Fusión a la cera
- Foja, Presa, fundición

¿Cuales son las diferencias entre un robot industrial y una maquina herramienta CNC?

Robot Industrial	Maquina-Herramienta CNC
Grados de libertad: Son las cordinadas independientes nesesarias para saber el estado mecanico de posición y orientación del robot.	Grados de libertad: Son capaces de usar un sistema de cordenadas que especificara el movimiento de la herramienta de corte.
Espacio ó area de trabajo: Distancia maxima dentro de un area donde el robot trabaja con efectividad.	Area de trabajo: Es capaz de mover la herramienta al mismo tiempo en los 3 ejes para ejecutar trayectoras tridimencionales.
Capacidad de carga: Es la cantidad de peso que el robot puede mover.	Capacidad de carga: Permite manufacturar piezas de distintos materiales a travez de sus sistemas.
Actuadores: Estos elementos logran transformar la energia hidraulica, electrica o neumatica en energia mecanica. Funcionan a travez de sistemas de transmision, control, reductores, acondicionamiento	Actuadores: A diferencia de una maquina manual convencional una computadora controla la posicion y velocidad de los motores.
Programabilidad: Capacidad del robot de interpretar los comandos y programacion para realizar una tarea. Cordina con exactitud las funciones y operaciones nesesarias segun el lenguaje especificado.	Programabilidad: Existe la programacion manual el cual comprende un conjunto de datos y calculos para realizar una operación. En la automatico la computadora realiza los calculos a partir de datos suministrados.
Velocidad: Trabaja con altos volumenes de produccion repitiendo la tarea en ciclos completos por minuto.	Velocidad: La maquina produce la cantidad de piezas que se le indique con un minimo de errores.

TEMA

FECHA 07 Enero 2019

¿Como debe decidirse el tipo de robot para un determinado trabajo?

1. Tipos de movimiento
- Movimientos punto a punto
- Movimientos coordinados
- Trayectorias continuas

2. Modo de programación
- Enseñanza
- Textual

3. Costos

4. Tipo de acondicionamiento
- Electrico
- Neumatico
- Hidraulico

5. Capacidad de comunicaciones
- E/S Digital
- Comunicacion por linea serie

6. Servicio proveedor
- Mantenimiento
- Servicio tecnico
- Cursos de formación

7. Area de trabajo
- Debe elegirse de modo que el campo de acción le permita llegar a todos los puntos necesarios para llevar a cabo su tarea.

8. Grados de libertad
- Determina la accesibilidad y capacidad de orientar su herramienta terminal, dependera del tipo de aplicación.

9. Resolucion
- Incremento que puede aceptar la unidad de control del robot, es decir el numero de bits con los que se realizan las operaciones en el cpu y los actuadores.

10. Exactitud
- La distancia entre el punto programado y el valor medio de los puntos realmente alcanzados al repetir el movimiento varias veces con carga y temperaturas nominales.

11. Exactitud - Repetitividad
Radio de la esfera que abarca los puntos alcanzados por el robot al ordenarlo al mismo punto de destino programado, con identicas condiciones de temperatura.

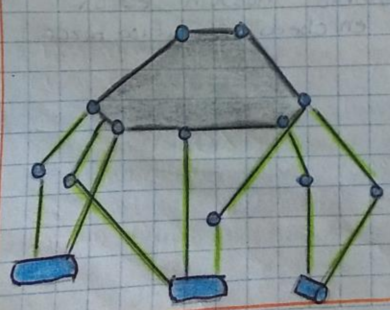
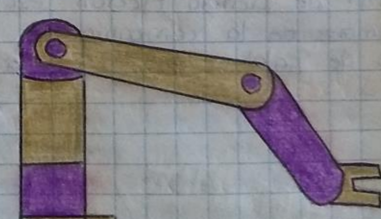
12. Capacidad de carga
- Debe considerarse el peso de las piezas a manipular y el peso propio de la herramienta o pinza que emplee el robot colocado sobre la muneca.

13. Velocidad de respuesta
- Se refiere a la capacidad del robot para desplazarse a la siguiente posicion en breve periodo de tiempo.

¿Que es un R.U.R?

Rossum's Universal Robots - Robots universales Rossum. Es una obra teatral de ciencia ficción, escrita por el checo Karel Capek en 1920, el nombre de la compañia que fabrica las maquinas Rossum es un juego de palabras del autor, ya que en rozum en checo significa razon.

Anote las diferencias entre robots seriales y paralelos

Robot Paralelo	Robot Serial
Son cadenas cinematicas cerradas cuyo organo terminal o plataforma movil, esta conectada con la base mediante varias cadenas cinematicas seriales independientes.	Son cadenas cinematicas abiertas cuando hay solamente una secuencia ELO conectados a finales de la cadena. Los eslabones suministran un grado de movilidad
Modelado de posición $x = f(q)$ $q = f^{-1}(x)$ Modelado de velocidad $A t = Bq$ $t = \begin{bmatrix} x \\ \omega \end{bmatrix}$ Modelado inverso de Posición $q = f^{-1}(x)$ Modelado directo de posición Determina la postura del efector final dados los valores de las cordenadas articulares	Cinematica diferencial $v = J(q)\dot{q}$ Cinematica inversa de Posición Determina el conjunto de variables que corresponde a una posición. Cinematica directa de Posición $T^0 q = \begin{bmatrix} n^0 & s^0 & a^0 & p^0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Las configuraciones singulares ocurren cuando al menos algunas de las dos matrices Jacobinas es singular, se tienen los siguientes casos: Si A es singular, se dice que el manipulador esta bajo una configuracion serial. Gana GDL Si B es singular, se dice que el manipulador esta bajo una configuracion singular serial Pierde GDL	Presenta una configuracion singular cuando el Jacobino posee lineas que son linealmente dependientes, se tienen los siguientes casos. Singularidad interna - cuando ocurre el alineamiento de dos o mas ejes de los sistemas de cordenados, tomando las lineas del Jacobino linealmente dependientes. Singularidad limite - cuando el manipulador esta completamente distendido o retraido.
Simulador de vuelo Maquinado de piezas Transporte de objetos Pocisionamiento de precision	Manipulador antropomorfico de Pintura SCARA Manipulador serial cartesiano Manipulación de piezas
	

TEMA | FECHA 07 Enero 2018

¿Como se especifica un robot industrial?

Un robot industrial es una maquina multifuncional capaz de mover materias u objetos, manipular herramientas y piezas, son programables para hacer tareas automaticamente, sin la necesidad de la intervencion de una persona.

¿Cual es la población mundial de robots?

En 2018 la población mundial fue de 1.63 millones de robots y se espera que en el año 2019 existan unos 2.6 millones de robots.

¿Que industria es considerado el usuario mas grande de robots industriales de tipo serial?

La industria automotriz

¿Cuales son los problemas de seguridad en el uso de robots?

- Los robots industriales son extraordinariamente potentes con gran capacidad
- y alcance, lo cual puede resultar peligroso.
- Se debe mantener al personal fuera del alcance del robot para no sufrir percances.
- Asegurar que el robot pueda detenerse en caso de emergencia.
- Conexiones externas del robot.
- Corte de suministro electrico.
- Paro de lineas de producción.
- Seguridad durante la instalación de los robots.
- No manejarlo correctamente la programacion y cometer errores que causen perdidas.

¿Cuales son las areas nuevas de aplicaciones de los robots?

- Aplicaciones militares
- Agricultura
- Educación
- Medicina
- Vehiculos Submarinos
- Exploracion especial
- Construcción
- Mineria
- Entornos peligrosos
- Medición

14 - Enero - 2019

Capitulo 3 "HERRAMIENTAS MATEMATICAS PARA LA LOCALIZACION ESPACIAL"

La manipulación de piezas llevada a cabo por un robot implica el movimiento espacial de su extremo. Así mismo para que el robot pueda recoger una pieza, es necesario conocer la posición y orientación de esto con respecto a la base del robot. Se aprecia entonces la necesidad de contar con una serie de herramientas matemáticas que permitan especificar la posición y orientación en el espacio de piezas, herramientas y en general cualquier objeto.

Representación de la posición

Para localizar un cuerpo rígido en el espacio es necesario contar con una herramienta que permita la localización espacial de sus puntos.
En un plano el posicionamiento tiene dos grados de libertad y por lo tanto la posición de un punto vendrá definida por componentes independientes.

Sistema cartesiano de referencia

Se caracteriza por

Los sistemas de referencia se definen mediante ejes perpendiculares entre sí con un origen definido, y se denominan sistemas cartesianos

Puede ser

- **Dos dimensiones**: El sistema de referencia OXY queda definido por los vectores cordenados OX y OY perpendiculares entre sí con un punto de intersección común O.
- **Tres dimensiones**: El sistema cartesiano OXYZ esta compuesto por una terna ortonormal de vectores cordenados OX, OY y OZ.

Se divide en

- **Cordenadas cartesianas** — Comienza con: Se trabaja en un plano, con su sistema cordenado OXY de referencia asociado a un punto O, expresado por los componentes X,Y correspondientes a los ejes cordenados del sistema OXY este punto tiene asociado un vector p(x,y) que va desde el origen O del sistema OXY
- **Cordenadas Polares** — Comienza con: La localización de un punto o vector p respecto a un sistema de ejes cartesianos de referencia OXY, en esta representación r representa la distancia desde el origen O del sistema hasta el extremo del vector P con ~~el eje~~ OX
- **Cordenadas Cilindricas** — Comienza con: La localización en tres dimensiones un vector P podra expresarse con respecto a un sistema de referencia OXYZ, los componentes r y θ tienen el mismo significado que en el caso de las cordenadas polares, aplicando el razonamiento sobre el plano OXY la componente
- **Cordenadas esfericas** — Comienza con: Se realiza la localización de un vector en un espacio de 3 dimensiones, utilizando el sistema de referencia OXYZ el vector p tendra como cordenadas (r, θ, ϕ) donde la componente r es la distancia desde el origen O hasta el extremo del vector p, la componente θ es el angulo por la proyección del

TEMA

Zepeda Rosales Ana Yadira

FECHA

14 - Enero - 2018

Capitulo 3 "HERRAMIENTAS MATEMATICAS PARA LA LOCALIZACION ESPACIAL"

La manipulación de piezas llevada a cabo por un robot implica el movimiento espacial de su extremo. Asi mismo para que el robot pueda recoger una pieza, es necesario conocer la posición y orientación de está con respecto a la base del robot. Se aprecia entonces la necesidad de contar con una serie de herramientas matemáticas que permitan especificar la posición y orientación en el espacio de piezas, herramientas y en general cualquier objeto.

Representación de la pocisión

Para localizar un cuerpo rigido en el espacio es necesario contar con una herramienta que permita la localizacion espacial de sus puntos.
En un plano el pocisionamiento tiene dos grados de libertad y por lo tanto la pocisión de un punto vendra definida por componentes independientes.

Sistema cartesiano de referencia

Se caracteriza por

Los sistemas de referencia se definen mediante ejes perpendiculares entre si con un origen definido, y se denominan sistemas cartesianos

Puede ser

Dos dimenciones
El sistema de referencia OXY queda definido por los vectores cordenados OX y OY perpendiculares entre si con un punto de interseccion comun O.

Tres dimenciones
El sistema cartesiano OXYZ esta compuesto por una terna ortonormal de vectores cordenados OX, OY y OZ.

Se divide en

Cordenadas cartesianas

Cordenadas Polares

Cordenadas Cilindricas

Cordenadas esfericas

... referencia se definen mediante ejes perpendiculares entre si con un origen definido, y se denominan sistemas cartesianos

Puede ser

Dos dimensiones

El sistema de referencia OXY queda definido por los vectores cordenados OX y OY perpendiculares entre si con un punto de interseccion comun O.

Tres dimenciones

El sistema cartesiano OXYZ esta compuesto por una terna ortonormal de vectores cordenados OX, OY y OZ.

Se divide en

Cordenadas cartesianas

Comienza con

Se trabaja en un plano, con su sistema cordenado OXY de referencia asociado a un punto a, expresado por los componentes X,Y correspondientes a los ejes cordenados del sistema OXY este punto tiene asociado un vector p(x,y) que va desde el origen O del sistema OXY hasta el punto a, entonces el extremo del vector p esta caracterizado por la proyeccion sobre los ejes OX, OY

Cordenadas Polares

Comienza con

La localización de un punto o vector p respecto a un sistema de ejes cartesianos de referencia OXY, en esta representación r representa la distancia desde el origen O del sistema hasta el extremo del vector P con el eje OX.

Cordenadas Cilindricas

Comienza con

La localización en tres dimensiones un vector P podra expresarse con respecto a un sistema de referencia OXYZ, los componentes r y θ tienen el mismo significado que en el caso de las cordenadas polares, aplicando el razonamiento sobre el plano OXY, la componente z expresa la proyección sobre el eje OZ del vector P.

Cordenadas esfericas

Comienza con

Se realiza la localización de u[n] vector en un espaci[o] de 3 dimensiones, utilizando el sistem[a] de referencia OXYZ el vector p tendra como cordenadas (r, θ, Φ) donde la componente r es la distancia desde el origen O hasta el extremo del vector p, la componente θ es el angulo por la proyección del vector p sobre el plano OXY con eje OX, la componente Φ es el angulo formado por el vector p con el eje OZ.

Representación de la orientación

Un punto queda totalmente definido en el espacio a travez de los datos de su posición, ademas es necesario definir cual es su orientación con respecto a un sistema de referencia. Para describir la forma de la orientación de un objeto respecto a un sistema de referencia, se asigna al objeto un nuevo sistema para despues estudiar la relación espacial entre ambos sistemas. Para analizar los metodos de orientacion se supondra que ambos sistemas coinciden en el origen y por lo tanto no existe cambio alguno de posición.

Matrices de rotación

Define la orientación del sistema OUV con respecto al sistema OXY lo cual sirve para transformar las coordenadas de un vector al sistema del otro. La principal orientación y utilidad de esta matriz corresponde a la representación de sistemas girados unicamente sobre uno de los ejes principales del sistema de referencia.

Suponiendo que los sistemas OXYZ y OUVW coinciden en el origen, siendo OXYZ el sistema de referencia fijo y el OUVW el solidario al objeto cuya orientación se desea definir. Los vectores unitarios del sistema OXYZ seran i_x, j_y, k_z, mientras que los del OUVW seran i_u, j_v, k_w,. Un vector p del espacio podra ser referido a cualquiera de los sistemas:

$$P_{uvw} = [P_u, P_v, P_w]^T = P_u \cdot i_u + P_v \cdot j_v + P_w \cdot k_w$$

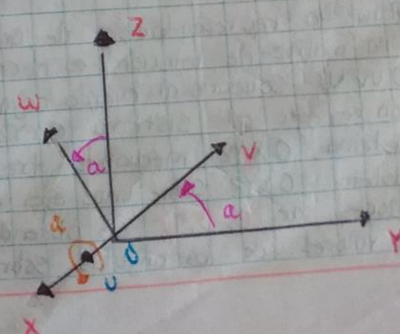
$$P_{xyz} = [P_x, P_y, P_z]^T = P_x \cdot i_x + P_y \cdot j_y + P_z \cdot k_z$$

obteniendo la equivalencia

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} P_u \\ P_v \\ P_w \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} i_x i_u & i_x j_v & i_x k_w \\ j_y i_u & j_y j_v & j_y k_w \\ k_z i_u & k_z j_v & k_z k_w \end{bmatrix}$$

La orientación OUVW con el eje OU coincide con el eje OX vendria representado por

$$R(x, a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & -\operatorname{sen} a \\ 0 & \operatorname{sen} a & -\cos a \end{bmatrix}$$



1. El sistema de referencia es representa la matriz

1. $R(y,\phi) = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \operatorname{sen}\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix}$

2. $R(z,\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. La orientación del sistema OUVW con el eje OW coincide con el eje OZ, vendra representada por la matriz.

Composición de rotaciones

Las matrices de rotación pueden componerse para expresar la aplicación continua de varias rotaciones. Si tenemos un sistema OUVW se le aplica una rotacion del angulo a sobre Ox, seguido de una rotación del angulo ϕ sobre OY y una rotación del angulo θ sobre OZ, la rotacion global puede expresarse como:

$$T = R(z,\theta)\, R(y,\phi)\, R(x,a) = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\phi & 0 & S\phi \\ 0 & 1 & C\phi \\ -S\phi & 0 & C\phi \end{bmatrix}$$

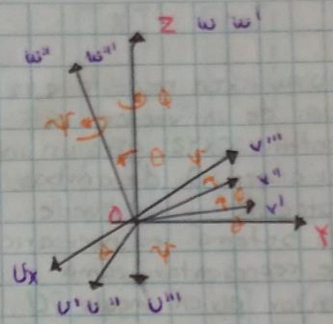
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & Ca & -Sa \\ 0 & Sa & Ca \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta C\phi & -S\theta Ca + C\theta Sa & S\theta Sa + C\theta S\phi Ca \\ S\theta C\phi & C\theta Ca + S\theta S\phi Sa & -C\theta Sa + S\theta S\phi Ca \\ -S\phi & C\phi Sa & C\phi Ca \end{bmatrix}$$

Es importante considerar el orden en el que se realizan las rotaciones, pues el producto de matrices no es conmutativo

Angulos de Euler

Para la representación de orientación en un espacio tridimencional mediante una matriz de rotación es necesario definir nueve elementos. Todo sistema OUVW solidario al cuerpo cuya orientación se quiere describir, puede definirse con respecto al sistema OXYZ sobre unos ejes determinados respecto al sistema OXYZ mediante tres angulos: ϕ, θ, ψ. Girando sucesivamente el sistema OXYZ sobre unos ejes determinados de un triedro ortormal los valores de ϕ, θ, ψ se obtendra el sistema OUVW, es necesario conocer los valores de los angulos sobre los que se realizaran los giros.

TEMA FECHA



Angulo de Euler ZXZ

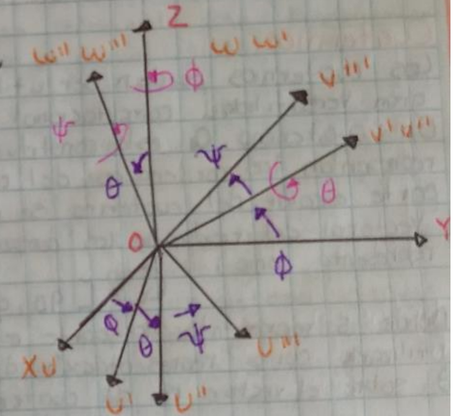
Representa los giros sobre ejes previamente girados. Si se parte de los sistemas OXYZ y OUVW se puede colocar al sistema OUVW en cualquier orientación siguiendo los siguientes pasos:

1. Girar el sistema OUVW un angulo ϕ con respecto al eje OZ convirtiendose en OU'V'W'.
2. Girar el sistema OU'V'W' un angulo θ con respecto al eje OU' convirtiendose en OU''V''W''.
3. Girar el sistema OU''V''W'' un angulo ψ con respecto al eje OW'' convirtiendose finalmente en OU'''V'''W'''.

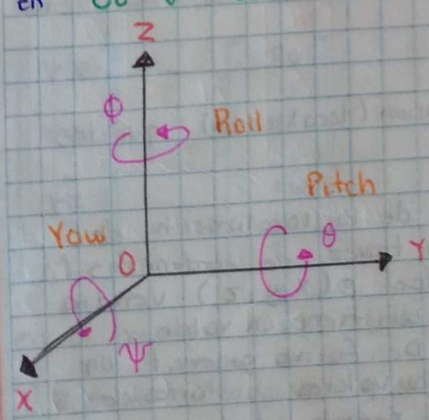
Angulo de Euler ZYZ

Representa los giros sobre ejes previamente girados, solo se diferencea de la anterior en la eleccion del eje sobre el que se realiza el segundo giro. Si se parte de los sistemas OXYZ y OUVW en cualquier orientación siguiendos los siguientes pasos:

1. Girar el sistema OUVW un angulo ϕ con respecto al eje OZ convirtiendose en OU'V'W'.
2. Girar el sistema OU'V'W' un angulo θ con respecto al eje OV' convirtiendose en OU''V''W''.
3. Girar el sistema OU''V''W'' un angulo ψ con respecto al eje OW conviertiendose en OU'''V'''W'''.



Roll, Pitch and Yaw (alabeo, Cabezeo, guiñada



Es una representación utilizada en aeronautica tambien se aplica a los giros sobre los ejes del sistema fijo. Teniendo un sistema OXYZ y OUVW, se puede colocar el sistema OUVW en cualquier orientación siguiendo los siguientes pasos:

1. Girar el sistema OUVW un angulo ψ con respecto al eje OX, denominado Yaw (guiñ
2. Girar el sistema OUVW un angulo θ respecto al eje OY, denominado Pitch (Cabezo
3. Girar el sistema OUVW un angulo ϕ respecto al eje OZ, denominado Roll (alab

TEMA FECHA

Par de Rotación

La representacion de la orientación de un sistema OUVW con respecto a un sistema OYXZ puede realizarse mediante la definicion de un vector K (Kx, Ky, Kz) y un angulo de giro θ, tal que el sistema OXYZ gira un angulo θ sobre el eje K, el eje K ha de pasar por el origen O de ambos sistemas, al par (K θ) se le denomina par de rotación y se puede demostrar que es unico. Para la definicion de este sistema es necesario definir 4 parametros: Kx, Ky, Kz, y θ, se puede representar como Rot (K θ). Para aplicar el par de rotación en un vector p un angulo θ alrrededor del eje K se realiza a travez de la siguiente expresión:

$$Rot(K,\theta)\ p = p\cos\theta - (K \times p)\ Sen\ \theta + K(K\cdot p)(1-\cos\theta)$$

Cuaternios

Los cuaternios pueden ser utilizados como herramienta matematica de gran versatilidad computacional para trabajar con giros y orientaciones. Un cuaterino Q esta constituido por 4 componentes (q0, q1, q2, q3) que representan las cordenadas del cuaterino en una base {e, i, j, k}, la parte escalar del cuaterino se puede representar como e: q0 y parte vectoral del resto de los componentes, de modo que un cuaterino se representa como:

$$Q = [q_0, q_1, q_2, q_3] = [s, v]$$

Donde s representa la parte escalar y v la parte vectorial. Para utilizarlo como representación de orientaciones se asocia el giro de un angulo θ sobre el vector K al cuaterino definido por:

$$Q = Rot(K,\theta) = \left(\cos\frac{\theta}{2},\ K\ Sen\ \frac{\theta}{2}\right)$$

MATRICES DE TRANSFORMACION HOMOGENEA

Representa el conjunto de la posición y la orientacion (localizacion) que los epigrafes anteriores no pueden representar.

Cordenadas y matrices homogeneas

La representacion mediante coordenadas homogeneas de la localización de solidos en un espacio n-dimencional se realiza a travez de cordenadas de un espacio (n+1) de tal forma que un vector p(x, y, z) vendra representado por p(wx, wy, wz, w) donde w tiene un valor arbitrario y representa un factor de escala. De forma general un vector p = ai + bj + ck donde i, k, j son los valores unitarios de los ejes OX, OY y OZ del sistema OXYZ, representando cordenas homogeneas mediante el vector columna:

$$p = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aw \\ bw \\ cw \\ dw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se define como matriz de transformacion homogenio T a una matriz de dimensión 4x4 que representa la transformación de un vector de cordenadas homogeneas de un sistema de cordenados a otro.

$$T = \begin{bmatrix} R_{3x3} & P_{3x1} \\ F_{1x3} & W_{1x1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Rotación} & \text{Perspectiva} \\ \text{Translación} & \text{Escalado} \end{bmatrix}$$

Una matriz homogenea esta compuesto por cuatro submatrices de distinto tamaño, una submatriz R_{3x3} que es una matriz de rotación; una submatriz P_{3x1} que corresponde al vector de translación; una submatriz F_{1x3} que representa una transformación perspectiva y una submatriz W_{1x1} que representa un escalado global.

Aplicación de las matrices homogeneas

Se considera la transformación de perspectiva nula y el escalado global unitario, la matriz homogenea T resoltara:

$$T = \begin{bmatrix} R_{3x3} & P_{3x1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Rotación} & \text{Translación} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La cual representa la orientación y posición de un sistema OUVW rotado y trasladado con respecta al sistema de referencia OXYZ. Esta matriz sirve para conocer las coordenadas (r_x, r_y, r_z) del vector r en el sistema OXYZ a partir de sus coordenadas (r_u, r_v, r_w) en OUVW

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} R_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} r'_x \\ r'_y \\ r'_z \\ 1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tambien se puede utiliza para expresar la rotacion y translación de un vector respecto de un sistema de referencia fijo OXYZ, un vector r_{xyz} segun R_{3x3} y translado P se convierte en el vector r'_{xyz} dado por:

1. Representa la posición y orientacion de un sistema girado y transladado O'U'V'W' con respecto a un sistema fijo OXYZ.
2. Transforma un vector expresado en coordenadas con respecto a un sistema OUVW a su expresión en cordenadas de OXYZ.
3. Rotar y transladar un vector con respecto a un sistema fijo OXYZ.

Translación

El sistema OUVW se encuentra trasladado un vector $p = p_x i + p_y j + p_z k$ con respecto al sistema OXYZ. La matriz T corresponderá a una matriz homogénea de translación:

$$T(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que es la denominada matriz básica de translación.

Un vector cualquiera r representado en el sistema OUVW por r_{uvw} tendrá como componentes del vector con respecto al sistema OXYZ:

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_u + p_x \\ r_v + p_y \\ r_w + p_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotación

El sistema OUVW solo se encuentra rotado con respecto al sistema OXYZ, la submatriz de rotación R_{3x3} será la que defina la rotación:

$$T(x,\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T(y,\phi) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \operatorname{sen}\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(z,\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Translacion junto con rotación

La principal ventaja de las matrices homogeneas reside en su capacidad de representación conjunta de posición y orientación. Esta representación se realiza utilizando la matriz de rotación R_{3x3} y el vector de translación p_{3x1} en una misma matriz de transformación homogenea.
Originalmente coinciden y habra que tener en cuenta si primero se realiza la rotación y despues la translación y viceversa, pues se trata de transformaciones espaciales no conmutativas.

Rotación seguida de translación

Si se realiza una rotacion sobre uno de los ejes coordenados del sistema OXYZ seguida de una translacion las matrices homogenas seran:

Rotación de un angulo a sobre el eje OX seguido de una translacion de vector $p_{x,yz}$

$$T((x,a),p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & px \\ 0 & \cos\theta & & py \\ 0 & \text{sen}\,\theta & & pz \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

$$T((\phi,y)p) = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \text{sen}\,\phi & px \\ 0 & 1 & 0 & py \\ -\text{sen}\,\phi & 0 & \cos\phi & pz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotación de un angulo ϕ sobre el eje OY seguido de una translación del vector p_{xyz}.

Rotación de un angulo θ sobre el eje OZ seguido de una translación de vector p_{xyz}.

$$T((z,\theta)p) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta & 0 & px \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 & py \\ 0 & 0 & 0 & pz \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Translación seguida de rotación

En caso de realizar primero una translacion seguida de una rotación sobre los ejes cordenados de OXYZ:

$$T(p(x,a)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & px \\ 0 & \cos a & -\text{sen}\,a & py\cos a - pz\,\text{sen}\,a \\ 0 & \text{sen}\,a & \cos a & py\,\text{sen}\,a + pz\cos a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Translación de un vector p_{xyz} seguida de una rotación de un angulo a sobre el eje OX.

TEMA FECHA

$$T(p(y,\phi)) = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \operatorname{sen}\phi & p_x\cos\phi + p_z\operatorname{sen}\phi \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ -\operatorname{sen}\phi & 0 & \cos\phi & p_z\cos\phi + p_z\operatorname{sen}\phi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Translación de un vector P_{xyz} seguida de una rotación de un ángulo ϕ sobre el eje OY.

$$T(p(z,\theta)) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 & p_x\cos\theta - p_y\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 & p_x\operatorname{sen}\theta - p_y\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Translación del vector P_{xyz} seguida de la rotación de un ángulo θ sobre el eje OZ.

Perspectiva y escalado

Para la realización de un escalado de los componentes de un vector, bastara utilizar una matriz T del tipo:

$$T = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cualquier vector $r(x,y,z)$ puede ser transformado en el vector $r(ax, bx, cz)$.
Una aplicación más de las matrices homogéneas es la transformación de perspectiva, se puede comprobar que el punto $r(x,y,z)$ se ve en el plano de la lente como un punto $r'(x' y' z')$ cuyas cordenadas son:

$$x' = \frac{x}{1-\frac{y}{F}} \qquad y' = 0 \qquad z' = \frac{z}{1 - \frac{y}{f}}$$

SIGNIFICADO GEOMETRICO DE LAS MATRICES HOMOGENEAS

Se puede utilizar para girar y rotar un vector referido a un sistema de referencia fijo, expresa la orientación y posición de un sistema OUVW con respecto a OXYZ.

$$T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & o & a & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde n, o, a es una terna ortonormal que representa la orientación y p es un vector que representa la posición.

TEMA FECHA

Considerando un vector $r_{uvw} = [0,0,0,1]^T$ en el origen de Ovw la aplicación de la matriz T representa (translación + rotación) de $Ouvw$ con respecto $OXYZ$ para optener r_{xyz}:

$$r_{xyz} = \begin{bmatrix} n & o & a & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Que coincide con el vector columna p de T. Representa la posición del origen $Ouvw$ con respecto a $OXYZ$.

Si se considera el vector de coordenadas homogeneas $[1,0,0,1]^T$ con respecto a $Ouvw$ donde el

Vector p de translacion es nulo:

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

El vector n representa las coordenadas del eje Ou del sistema $Ouvw$ con respecto a $OXYZ$.

Consecuentemente, los vectores n, o y a definen una terna ortonormal a derechas:

$$\|n\| = \|o\| = \|a\| = 1$$

$$n \times o = a$$

La Submatriz de rotación $[n, o, a]$ corresponde a una matriz ortonormal:

$$[n \; o \; a]^{-1} = [n \; o \; a]^T$$

La matriz inversa de la matriz homogénea de transformación T corresponde

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & -n^T p \\ o_y & o_y & o_z & -o^T p \\ a_z & a_z & a_z & -a^T p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si se tiene la relación $r_{xyz} = T r_{uvw}$ y es multiplicada en ambos miembros por T^{-1}:

$T^{-1} r_{xyz} = r_{uvw}$ Se deduce que los vectores fila de la submatriz de rotación de la matriz T (vectores de columna de la submatriz de rotacion T^{-1}) representan los ejes cordenados de $OXYZ$ con respecto a $Ouvw$, donde los vectores fila de la matriz $[n \; o \; a]$ representan una terma ortonormal a derechas.

TEMA FECHA

COMPOCICIÓN DE MATRICES HOMOGENEAS

Una transformación compleja podra descomponerse en la aplicación consecutiva de transformaciones simples (giros basicos, translaciones).
Una matriz representa un giro de un angulo a sobre el eje OX, seguido de un giro de angulo ϕ sobre el eje OY y un giro de angulo θ sobre el eje OZ, Se obtiene la composición de matrices basicas de rotación:

$$T = T(z\theta)\, T(y,\phi)\, T(x\,a) = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\phi & 0 & S\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S\phi & 0 & C\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Ca & -Sa & 0 \\ 0 & Sa & Ca & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C\phi C\theta & -S\theta Sa + C\theta S\phi Sa & S\theta Sa + C\theta S\phi Ca & 0 \\ S\theta C\phi & C\theta Ca + S\theta S\phi Sa & -C\theta Sa + S\theta S\phi Ca & 0 \\ -S\phi & C\phi Sa & Ca C\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Debido a que el producto de matrices no es conmutativo, tampoco lo es la composición de transformaciones.

A la hora de componer de difersas transformaciones mediante matrices homogeneas, debemos tener en cuenta:

1. Si el sistema fijo OXYZ y el sistema transformado OUVW son coincidentes, la matriz homogenea de transformacion sera la matriz 4x4 identidad I_4.
2. Si el sistema OUVW se obtiene mediante rotaciones y translaciones definidas con respecto OXYZ, la matriz homogenea que representa cada transformación se debera premultiplicar sobre las matrices de transformaciones previas.
3. Si el sestema OUVW se obtiene mediante rotaciones y translaciones definidas con respecto al sistema movil, la matriz homogenea que representa cada transformación debera postmultiplicarse sobre las matrices de transformaciones previas.

GRAFICOS DE TRANSFORMACION

La localización espacial de un objeto o de su sistema de referencia asociado, puede realizarse a travez de la composición de diversas transformaciones distintas. Un manipulador cuya base esta referida al sistema $OUXYZ$ mediante la transformación ${}^{M}T^{R}$, la base del manipulador a su extremo utiliza la transformación ${}^{R}T_{E}$; el extremo de la herramienta esta referido con respecto al extremo del manipulador por la transformación ${}^{E}T_{H}$; un objeto esta referido a $OXYZ$ mediante la transformación ${}^{M}T_{O}$; el extremo de la herramienta esta referido con respecto al objeto con la transformación ${}^{O}T_{H}$. Entonces el final de la herramienta puede ser referido con respecto a $OXYZ$, por el manipulador y el objeto:

$${}^{M}T_{R}\ {}^{R}T_{E}\ {}^{E}T_{H} = {}^{M}T_{O}\ {}^{O}T_{H}$$

De tal manera que si se quiere obtener la relación entre el objeto y la herramienta bastara multiplicar ambos miembros de la ecuacion por ${}^{M}T_{O}^{-1}$ obteniendo:

$$({}^{M}T_{O})^{-1}\ {}^{M}T_{R}\ {}^{R}T_{E}\ {}^{E}T_{H} = {}^{O}T_{H}$$

Se ira desde el objetivo inicial al final multiplicar las matrices a los arcos del grafico, considerando recorrer estos en sentido inverso a las flechas utilizando una matriz inversa, asi la relacion entre la base del robot y el objeto se

$${}^{R}T_{O} = {}^{R}T_{E}\ {}^{E}T_{H}({}^{O}T_{H})^{-1} \quad ó \quad {}^{R}T_{O} = ({}^{M}T_{R})^{-1}\ {}^{M}T_{O}$$

APLICACION DE LOS CUATERNIOS

La utilización de los cuaternos supone una ventaja sustancial sobre otros metodos de descripción espacial.

Algebra de cuaternios

Un cuaternio esta formado por 4 componentes (q_0, q_1, q_2, q_3) que representan las coordenadas del cuaternio en una base $\{e, i, j, k\}$

$$Q = q_0 e + q_1 i + q_2 j + q_3 k = (s, v)$$

Sobre los elementos de la base se define la ley de composición interna.

Los cuaternios forman un grupo ciclico de orden 4, se describen algunas propiedades utiles de los cuaternios a la hora de su utilización para realizar transformaciones.

o	e	i	j	k
e	e	i	j	k
i	i	-e	k	-j
j	j	-k	-e	i
k	k	j	-i	-e

Cuaternio conjugado

A todo cuaternio Q se le puede asociar su conjugado Q^*, en el que mantiene el signo de la parte escalar e invierte el de la vectorial

$$Q^* = [q_0, -q_1, -q_2, -q_3] = (s, v)$$

Operaciones algebraicas

Se definen 3 operaciones algebraicas sobre los cuaternios: producto, suma y producto con un escalar. El producto de dos cuaternios $Q_1 Q_2$, para la transformación viene dado por:

$$Q_3 = Q_1 \circ Q_2 = (S_1, V_1) \circ (S_2, V_2) = (S_1 S_2 - V_1 V_2, V_1 \times V_2 + S_1 V_2 + S_2 V_1)$$

No se trata de un producto conmutativo si se expresa componente a componente:

$$q_{30} = q_{10} q_{20} - (q_{11} q_{21} + q_{12} q_{22} + q_{13} q_{23})$$
$$q_{31} = q_{10} q_{21} + q_{11} q_{20} + q_{12} - q_{13} q_{23}$$
$$q_{32} = q_{10} q_{22} + q_{12} q_{20} + q_{13} - q_{12} q_{22}$$
$$q_{33} = q_{10} q_{23} + q_{13} q_{20} + q_{11} - q_{11} q_{21}$$

la suma de dos cuaternios $Q_1 Q_2$ se define como

$$Q_3 = Q_1 + Q_2 = (S_1, V_1) + (S_2 V_2) = (S_1 \; S_2 \; V_1 \; V_2)$$

Producto por un escalar

$$Q_3 = a Q_2 = a(S_2 V_2) = (aS_2 \; aV_2)$$

Por lo tanto el cuaternio es asociativo no conmutativo.

Norma e inverso

El cuaternio conjugado y el producto de cuaternios se deduce que:

$$Q \circ Q^* = (q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) C$$

Al numero real $(q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)^{1/2}$ se le denomina norma de Q y se representa $\|Q\|$. El inverso del cuaternio puede allarse:

$$Q^{-1} = \frac{Q^*}{\|Q\|}$$

Siempre y cuando se trata de un cuaternio no nulo.

UTILIZACIÓN DE LOS CUATERNIOS

Propician el uso de cuaternios para la representación y composición de rotaciones. Definimos el cuaternio con un giro de valor θ sobre un eje K como:

$$Q = Rot(K, \theta) \left(\cos\frac{\theta}{2}, K \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \right)$$

TEMA FECHA

Rotación expresada por el cuaternio Q a un vector r:

$$Q \circ (0\ r) \circ Q^*$$

Rotar el segundo cuaternio Q_1 para posteriormente rotar Q_2 es lo mismo que rotar Q_3:

$$Q_3 = Q_2 \circ Q_1$$

Rotaciones con translaciones de un vector p respecto OXYZ, el vector r en el sistema OXYZ en OUVW:

$$(0, r_{xzy}) = Q \circ (0\ X_{uvw}) + p \circ Q^*$$

Sistema OXYZ translado segun vector r y p luego rota segun Q

$$(0, r') = Q \circ (0, r\ p) \circ Q^*$$

Se aplica el giro y despues la translación p al vector r

$$(0, r') = Q \circ (0, r) \circ Q^* + (0, p)$$

COMPARACION DE METODOS DE LOCALIZACION ESPACIAL

La comparación se realiza en razon a la capacidad para la realización de cuatro cuestiones basicas de toda transformación:

1. Capacidad de representacion conjunta de posición y orientación.
2. Representar la posición y orientación de un sistema rotado y transladado OUVW con respecto a un sistema OXYZ.
3. Transformar un vector expresado en coordenadas con respecto a un sistema OUVW a su expresión en coordenadas del sistema OXYZ.
4. Rotar y transladar un vector con respecto a un sistema de referencia fijo OXYZ.

Matrices de transformación homogénea

Su representación conjunta de posición y orientación para realizar la composición de transformaciones. Bastara con multiplicar el orden adecu de las matrices. Su principal inconveniente es su alto nivel de redundanci (necesita definir 12 componentes para 6 grados de libertad).

Angulos de Euler

En cualquiera de sus modalidades solo son capaces de representar orientación y una notación compacta (usando solo 3 numeros reales) so dificiles de manejar para la composicion de rotaciones y aplicada a un v

Par de rotación

Solo sirve para la representación de orientaciones, pues unicamente usa 4 parametros para la definicion de orientación de un sistema con respecto a otro.

TEMA FECHA

Cuaternios

Solo es capaz de representar la orientación relativa de un sistema OUVW con respecto a otro a travez del uso de 4 componentes, puede tambien aplicarse para la transformación de un vector, tanto en translación como en rotación

RELACION ENTRE LOS DISTINTOS METODOS DE LOCALIZACION ESPACIAL

Son representaciones equivalentes de modo que es posible pasar de un metodo a otro.

Angulos de Euler: Matriz de transformación homogenea

la matriz homogenea equivalente a un conjunto de angulos de Euler dados, quedara definido por la submatriz de rotacion R_{3x3}.

Relacion directa

Compone las matrices que representan las rotaciones que definen los propios angulos:

Sistema ZXZ - $T_{zxz} = T(z, \phi) T(u, \theta) T(w \psi)$

Sistema ZYZ - $T = T(z \phi) T(v \theta) (T)(w \psi)$

Roll - Pitch - Yaw

Estos angulos de Eulere se representan mediante la concatenación de las rotaciones:

Relación inversa $T = T(z \phi) T(y \theta) T(x \psi)$

la representación mediante la matriz homogénea a los conjuntos de angulos de Euler con una serie de ecuaciones trigonometricas

Par de rotacion: Matriz de transformación homogenea

Mediante un eje y un angulo de rotación solo es posible representar orientación definida por la submatriz R_{3x3} de la matriz homogenea.

Relacion directa

Descomponiendo el giro de un angulo θ al rrededor del eje $K(K_x, K_y, K_z)$ en la composición de rotaciones basicas que se puedan expresar mediante matrices basicas de relación:

$$T(K, \theta) = T(x, -a) \, T(y, \beta) \, T(z \theta) \, T(y - \beta) \, T(x, a)$$

Relaciones.

$$\operatorname{Sen} a = \frac{K_y}{\sqrt{K_y^2 + K_z^2}} \qquad \cos a = \frac{K_z}{\sqrt{K_y^2 + K_z^2}}$$

$$\operatorname{Sen} \beta = K_x \qquad \cos \beta = \sqrt{K_y^2 + K_z^2}$$

TEMA FECHA

Relación inversa

Obtener un eje K y un angulo θ de rotación equivalente a la representación de rotación mediante la matriz homogena de rotación:

Se podran igualar las matrices de las expresiones y realizar una equivalencia componente a componente del vector:

$$Rot = \begin{bmatrix} n_x & O_x & a_x & 0 \\ n_y & O_y & a_y & 0 \\ n_z & O_z & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$tg\,\theta = \frac{\sqrt{(O_z-a_y)^2+(a_x-n_z)^2+(n_y-O_x)^2}}{(n_x+O_y+a_z-1)} \qquad K_x = \frac{O_z-a_y}{2\,sen\,\theta}$$

$$K_y = \frac{a_x-n_z}{2\,sen\,\theta} \qquad K_z = \frac{n_y - O_x}{2\,sen\,\theta}$$

Par de rotacion: Cuaternios

Relación cuaternios (directa)

Un cuaternio Q se puede expresar como componente a componente:

$$Q = \left(\cos\frac{\theta}{2}, K\,sen\,\frac{\theta}{2}\right)$$

$$q_0 = \cos\frac{\theta}{2} \qquad q_1 = K_x\,sen\,\frac{\theta}{2} \qquad q_2 = K_y\,sen\,\frac{\theta}{2} \qquad q_3 = K_z\,sen\,\frac{\theta}{2}$$

Relacion inversa

$$\theta = 2\arccos(q_0) \qquad K_x = \frac{q_1}{(1-q_0^2)} \qquad K_y = \frac{q_2}{(1-q_0^2)^{1/2}} \qquad K_z = \frac{q_3}{(1-q_0^2)^{1/2}}$$

Cuaternios: Matriz de transformación homogena

Se puede deducir facilmente utilizando como representación auxilar intermedia el eje y angulo de rotación:

Relacion directa

Matriz de transformacion T en función de cuaternio Q.

$$\begin{bmatrix} q_0^2+q_1^2-1/2 & q_1q_2-q_3q_0 & q_1q_3+q_2q_0 & 0 \\ q_1q_2+q_3q_0 & q_0^2+q_2^2-1/2 & q_2q_3-q_1q_0 & 0 \\ q_1q_3-q_2q_0 & q_2q_3+q_1q_0 & q_0^2+q_3^2-1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Relación inversa

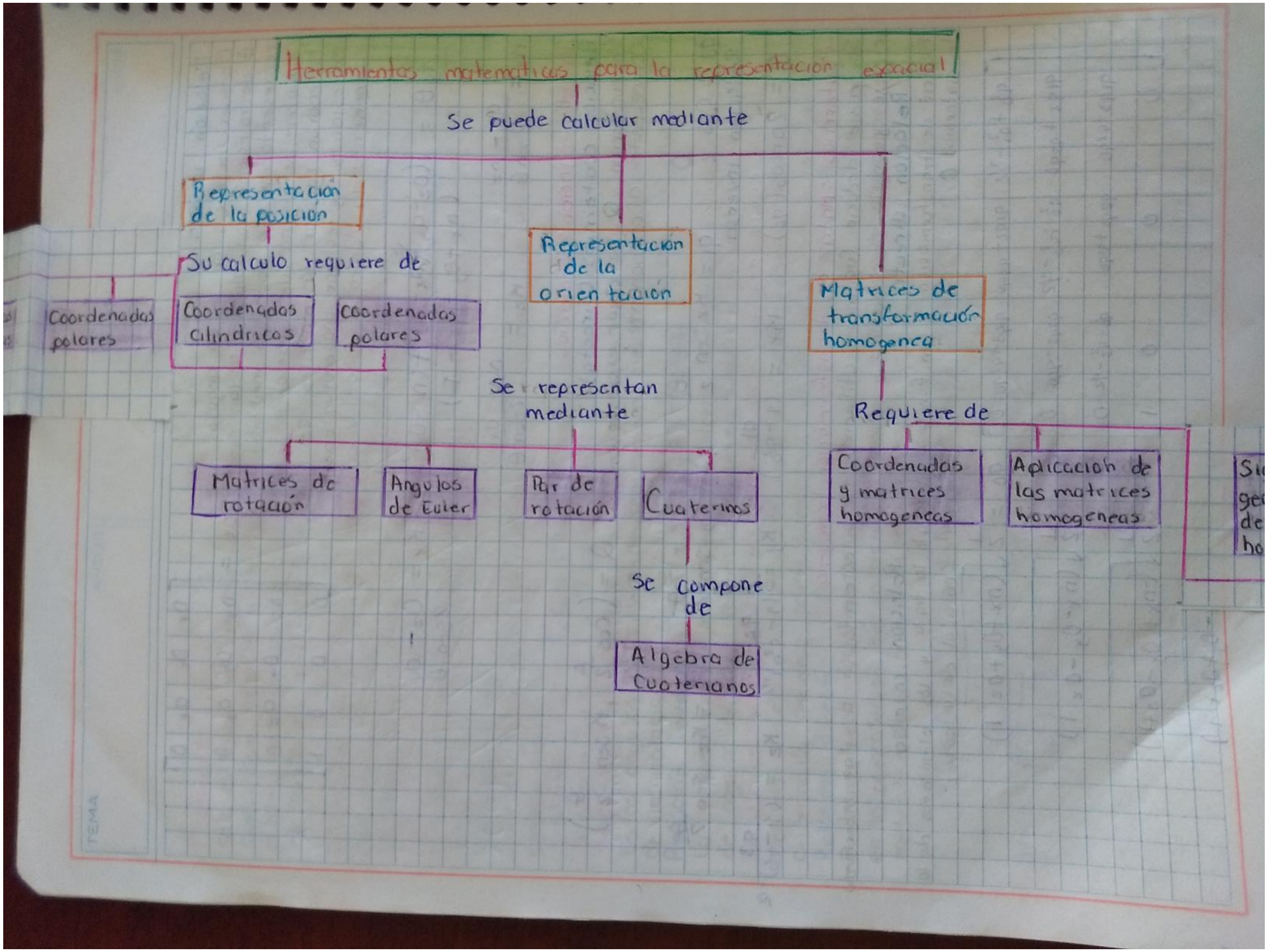
Se iguala la traza y los elementos diagonal principal de la matriz.

$$q_0 = \frac{1}{2}\sqrt{(n_x+O_y+a_z+1)}$$

$$q_1 = \frac{1}{2}\sqrt{(n_x-O_y-a_z+1)}$$

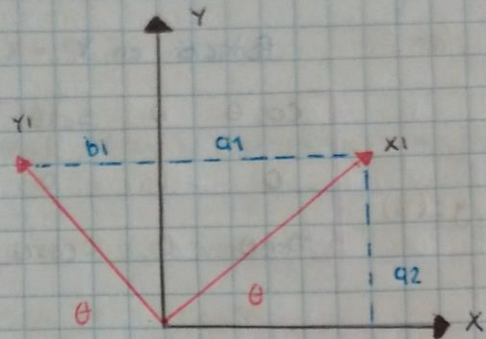
$$q_2 = \frac{1}{2}\sqrt{(-n_x+O_y-a_z+1)}$$

$$q_3 = \frac{1}{2}\sqrt{(-n_x-O_y+a_z+1)}$$



Herramientas matematicas para la representación espacial
Se puede calcular mediante
Representación de la posición
Su calculo requiere de
Coordenadas polares
Coordenadas cilindricos
Coordenadas polares
Representación de la orientación
Se representan mediante
Matrices de rotación
Angulos de Euler
Par de rotación
Cuaternios
Se compone de
Algebra de Cuaternanos
Matrices de transformación homogenea
Requiere de
Coordenadas y matrices homogeneas
Aplicación de las matrices homogeneas

16 de Enero del 2019



X1 relación con x $a_1 = |x| \cos\theta \rightarrow (x_1, x)$

X1 relación con Y $a_2 = |x| \operatorname{Sen}\theta$

Y1 relación con x $-b_1 = |Y| \cos(\theta + 90) = -|Y| \operatorname{Sen}\theta \quad (y, x)$

Y1 relación con x $b_2 = |Y_2| \operatorname{Sen}(\theta + 90) = Y_1 \cos\theta \quad (Y_1, Y)$

$$\therefore \quad X_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{Sen}\theta \end{bmatrix} \qquad Y_1 = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}(\theta + 90) \\ \cos(\theta + 90) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\operatorname{Sen}\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_i = \begin{bmatrix} X_i, Y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{Sen}\theta \\ \operatorname{Sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} X & Y \end{array} \\ \begin{array}{c} X \\ Y \end{array} & \begin{bmatrix} (X,X) & (Y,X) \\ (X,Y) & (Y,Y) \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} X & Y & Z \end{array} \\ \begin{array}{c} X \\ Y \\ Z \end{array} & \begin{bmatrix} (X,X) & (Y,X) & (Z,X) \\ (X,Y) & (Y,Y) & (Z,Y) \\ (X,Z) & (Y,Z) & (Z,Z) \end{bmatrix} \end{array}$$

Rotación en X

$$X(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{Sen}\theta \\ 0 & \operatorname{Sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Rotación en Y

$$y = (\theta) \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \operatorname{Sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{Sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Rotación en Z

$$Z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{Sen}\theta & 0 \\ \operatorname{Sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obtener la rotación de un objeto que realiza:

$X = 90° \rightarrow Y = 30° \rightarrow Z = 70°$

$Y = 75° \rightarrow X = 60° \rightarrow Y = 7°$

$Z = 45° \rightarrow X = 35° \rightarrow Z = 15°$

$Z = 15° \rightarrow X = 35° \rightarrow Z = 45°$

TEMA

Zepeda Rosales Ana Yadira

FECHA

20 de Enero del 2018

$X = 90°$ $Y = 30°$ $Z = 70°$

$T = Rot\, z(70°)\ Rot\, y(30°)\ Rot\, x(90°) =$

$$Z = \begin{bmatrix} \cos 70 & -\text{Sen}70 & 0 \\ \text{Sen } 70 & \cos 70 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} \cos 30 & 0 & \text{Sen } 30 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{Sen } 30 & 0 & \cos 30 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 90 & -\text{Sen}90 \\ 0 & \text{Sen}90 & \cos 90 \end{bmatrix}$$

$$Z(Y) = \begin{bmatrix} \cos 70 \cos 30 & -\text{Sen}70 & \cos 30 \\ \text{Sen}70 \cos 30 & \cos 70 & \text{Sen}70\, \text{Sen}30 \\ -\text{Sen } 30 & 0 & \cos 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 90 & -\text{Sen}90 \\ 0 & \text{Sen}90 & \cos 90 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos 70 \cos 30 & -\text{Sen } 70 \cos 90 + \cos 30\, \text{Sen}90 & -\text{Sen}70\, \text{Sen}90 + \cos 30\, \text{Sen } 90 \cos 90 \\ \text{Sen}70 \cos 30 & \cos 70\, \text{Sen } 90 + \text{Sen } 70\, \text{Sen } 30\, \text{Sen } 90 & -\cos 70\, \text{Sen } 90 + \text{Sen } 70\, \text{Sen}30 \cos 90 \\ -\text{Sen } 30 & \cos 30\, \text{Sen } 90 & \cos 30 \cos 90 \end{bmatrix}$$

$\gamma = 75°$ $\quad X = 60°$ $\quad \gamma = 7°$

$$Y = \begin{bmatrix} \cos 75 & 0 & \operatorname{sen} 75 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen} 75 & 0 & \cos 75 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 60 & -\operatorname{sen} 60 \\ 0 & \operatorname{sen} 60 & \cos 60 \end{bmatrix}$$

$$Y' = \begin{bmatrix} \cos 7 & 0 & \operatorname{sen} 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen} 7 & 0 & \cos 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos 75 & 0 & \operatorname{sen} 75 \operatorname{sen} 60 \\ 0 & \cos 60 & -\operatorname{sen} 60 \\ -\operatorname{sen} 7 & \cos 60 \operatorname{sen} 60 & \cos 75 \cos 60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 7 & 0 & \operatorname{sen} 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen} 7 & 0 & \cos 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos 75 \cos 7 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 60 - \operatorname{sen} 60 & \operatorname{sen} 75 \operatorname{sen} 60 + \operatorname{sen} 60 \cos 7 \\ -\operatorname{sen} 7 \cos 7 & 0 & \cos 75 + -\operatorname{sen} 60 \cos 7 \end{bmatrix}$$

$Z = 45°$ $\quad x = 35°$ $\quad Z = 15°$

$$\begin{bmatrix} \cos 45 & -\text{sen}\, 45 & 0 \\ \text{sen}\, 45 & \cos 45 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 35 & -\text{sen}\, 35 \\ 0 & \text{sen}\, 35 & \cos 35 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos 15 & -\text{sen}\, 15 & 0 \\ \text{sen}\, 15 & \cos 15 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos 45 & 0 & 0 \\ \text{sen}\, 45 & \cos 45 \cos 35 & -\text{sen}\, 35 \\ 0 & \cos 35\, \text{sen}\, 35 & \cos 35 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 35 & -\text{sen}\, 35 \\ 0 & \text{sen}\, 35 & \cos 35 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos 45 & \cos 35 + \cos 35\, \text{sen}\, 35 & -\text{sen}\, 35 + \cos 45 \cos 35\, \text{sen}\, 35 \cos 35 \\ \text{sen}\, 45 & \cos 45 \cos 35 \cos 35 + \text{sen}\, 35 & \cos 35\, \text{sen}\, 35\, \text{sen}\, 35 - \text{sen}\, 35 \cos 35 \\ 0 & \cos 35\, \text{sen}\, 35 & \cos 35 \end{bmatrix}$$

$Z = 15°$ $X = 35°$ $Z = 45°$

$$\begin{bmatrix} \text{Cos } 15 & -\text{Sen } 15 & 0 \\ \text{Sen } 15 & \text{Cos } 15 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{Cos } 35 & -\text{Sen } 35 \\ 0 & \text{Sen } 35 & \text{Cos } 35 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{Cos } 45 & -\text{Sen } 45 & 0 \\ \text{Sen } 45 & \text{Cos } 45 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{Cos } 15 & -\text{Sen } 15 & \text{Cos } 15 \\ \text{Sen } 15 & \text{Cos } 15 \text{ Cos } 35 & \text{Sen } 15 \\ 0 & \text{Sen } 35 & \text{Cos } 35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{Cos } 35 & -\text{Sen } 35 \\ 0 & \text{Sen } 35 & \text{Cos } 35 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{Cos } 15 & -\text{Sen } 15 \text{ Cos } 35 + \text{Sen } 15 & -\text{Sen } 15 \text{ Sen } 35 + \text{Cos } 15 \text{ Cos } 35 \\ \text{Sen } 15 & -\text{Cos } 15 \text{ Cos } 35 + \text{Sen } 15 \text{ Sen } 35 & \text{Cos } 15 + \text{Sen } 15 \text{ Cos } 35 \\ 0 & \text{Cos } 35 \text{ Sen } 35 & \text{Cos } 35 \text{ Cos } 35 \end{bmatrix}$$

Ana Yadira Zepeda Rosales

23 de Enero del 2010

Algoritmo Denavit-Hartenberg

Este algoritmo esta ligado a la cinematica directa la cual determina la posición y orientacion del robot en diferentes direcciones que son determinadas por coordenadas, las cuales se establecen mediante las articulaciones que el robot contenga.
El algoritmo sirve entonces para representar y describir matematicamente la geometria espacial con referencia a un sistema fijo. Estos parametros se representan con la utilización de matrices homogeneas 4x4 en la cual la relacion localización espacial - sistema de coordenadas se hace presente para su determinacion.
Esto es posible ya que el robot esta formado por una cadena de eslabones y/o articulaciones que se encuentran unidos entre ellos.
Siguiendo una serie de pasos se puede obtener dicha matriz

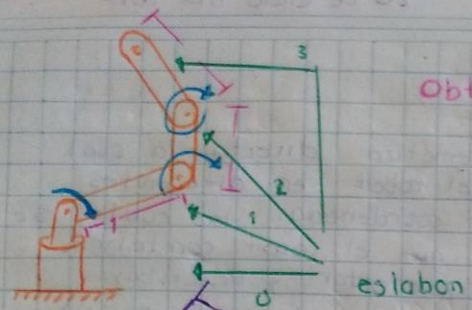
1. Numerar los eslabones moviles comenzando con 1 en el eslabon movil y asi sucesivamente, la base fija sera el numero 0.
2. Numerar las articulaciones donde haya el primer grado de libertad.
3. localizar el eje de cada articulación
4. Situar los ejes en diferentes coordenadas
5. Obtener los angulos a para girar entorno a x, y, z.
6. Obtener la matriz de transformacion homogenea T, para obtener la relacion orientacion-posición.

Terminar los Pasos explicados!! 6 8

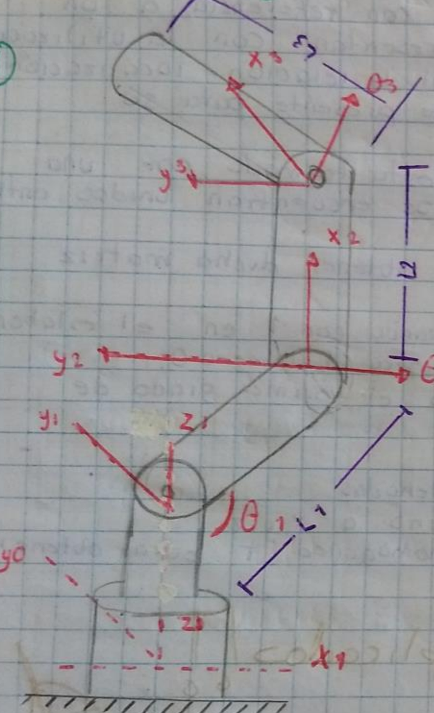
TEMA

FECHA 11 de Febrero del 2019

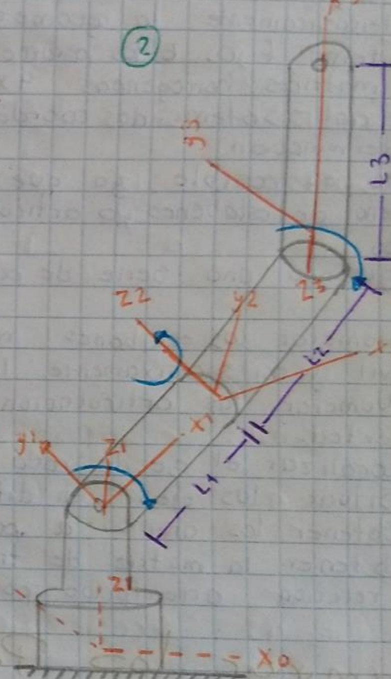
Obtener D-H



1

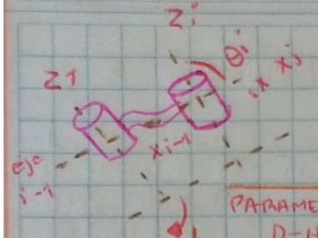


2



TEMA

FECHA 11 de Febrero del 2019



PARAMETRO D-H	INTERPRETACION	MEDIDO
a_{i-1}	distancia de Z_{i-1} a Z_i	Largo de X_{i-1}
α_{i-1}	Angulo Z_{i-1}, Z_i	Respecto X_{i-1}
d_i	Distancia de X_{i-1} a X_i	largo de Z_i
θ_i	Angulo X_{i-1} y X_1	Respecto a Z_i

1

Eslabon	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	90°	0	θ_1
2	L_1	0	L	θ_2
3	L_2	0	L	θ_3

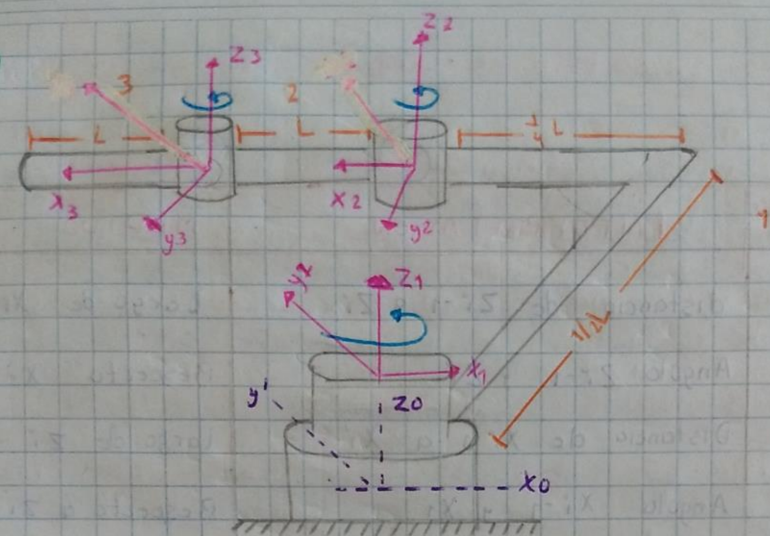
2

Eslabon	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	90	0	θ_1
2	L_1	90	d_1	θ_2
3	L_2	90	0	θ_3

TEMA

FECHA 11 de Febrero del 2019

3



Eslabon	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	$3/4\,L1$	0	$d2$	θ_2
3	$3/4\,L+L2$	0	0	θ_3

TEMA FECHA 11 de Febrero del 2019

Calculo de matrices homogeneas

$$T_i^{i-1} \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ S\theta_i C\alpha_{i-1} & C\theta_i C\alpha_{i-1} & -S\alpha_{i-1} & -d_i S\alpha_{i-1} \\ S\theta_i S\alpha_{i-1} & C\theta_i S\alpha_{i-1} & C\alpha_{-1} & d_i C\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

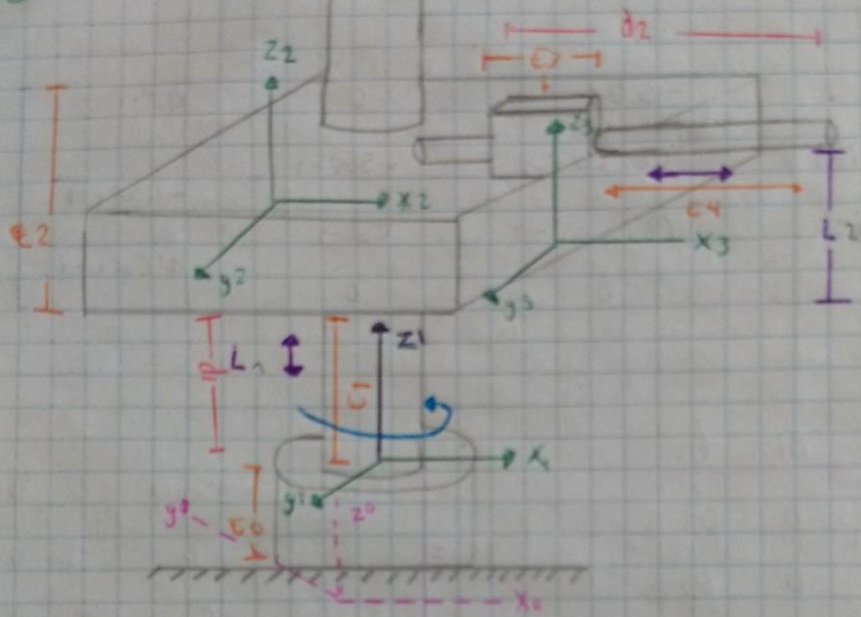
i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	90	0	θ_1
2	L_1	0	0	θ_2
3	L_2	0	0	θ_3

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} Cos\theta_1 & -Sen\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ Sen\theta_1 & Cos\theta & 0 \\ 0 & \theta & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} Cos\theta_1 & -S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S\theta_1 & Cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_2^1 = \begin{bmatrix} Cos\,2 & -Sen\,2 & 0 \\ So\,2 & Cos\,2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_3^2 \begin{bmatrix} Cos\theta_3 & -Sen\theta_3 & 0 & L_2 \\ Sen\theta_3 & Cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

④ RPP



Eslabon	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	L_1	90	d_1	θ_2
3	L_2	0	d_2	θ_3

Ana Yadira Zepeda Rosales

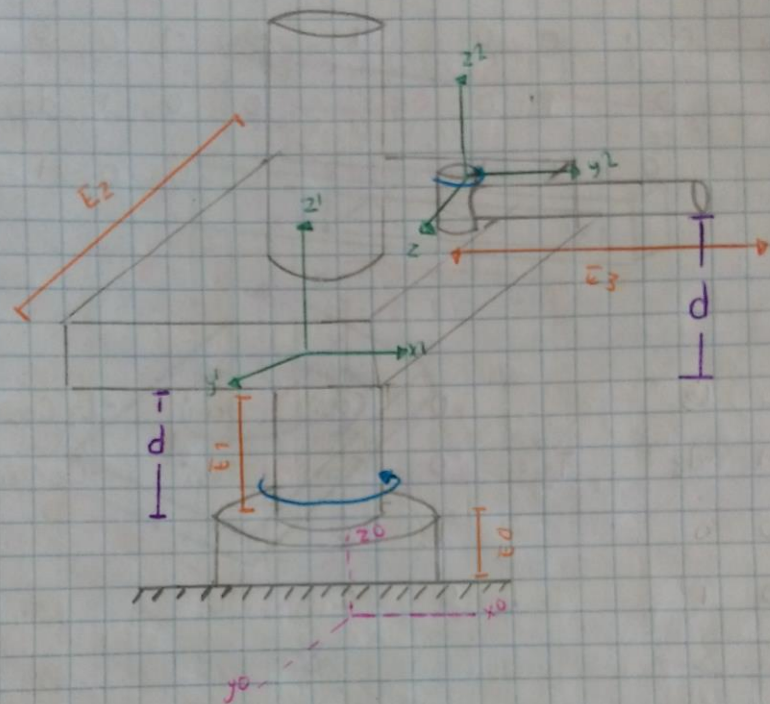
13 de Febrero del 2019

$$T_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & \mathrm{Sen}\,\theta & 0 & 0 \\ \mathrm{Sen}\,\theta_1 \cos 90 & \cos\theta_1 \mathrm{Sen}\,90 & 0 & -90 \\ \mathrm{Sen}\,\theta_1 \mathrm{Sen}\,90 & \cos\theta\, \mathrm{Sen}\,90 & \cos 90 & 90 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\mathrm{Sen}\,\theta_2 & 0 & L_1 \\ S\theta_2 C90 & C\theta_2 90 & -\mathrm{Sen}\,90 & -L_1 S90 \\ S\theta_2 S90 & C\theta_2 S90 & \cos 90 & L_1 S90 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^2 = \begin{bmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & 0 & l_2 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & Sd_2 & 0 & -d_2 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & Cd_2 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^0 \begin{bmatrix} C\theta_2 + C\theta_3 & \mathrm{Sen}\,\theta_2 \cos 90 + \mathrm{Sen}\,\theta_1 & 0 & 0 \\ \mathrm{Sen}\,\theta_2 + \mathrm{Sen}\,\theta_1 \cos 90 & C\theta_2 S90 + \cos\theta_1 \mathrm{Sen}\,90 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{Sen}\,90 + \mathrm{Sen}\,\theta_1 \mathrm{Sen}\,9 & \cos 90 \cos 90 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Eslabon	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ
1	0	0	0	θ_i
2	0	0	d_2	180
3	90°	L_3	d_3	90

TEMA

FECHA

$$T_i = \begin{bmatrix} \text{Cos}\, i & -\text{Sen}\, i & 0 & 0 \\ \text{Sen}\, i & \text{Cos}\, i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^{1}T_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

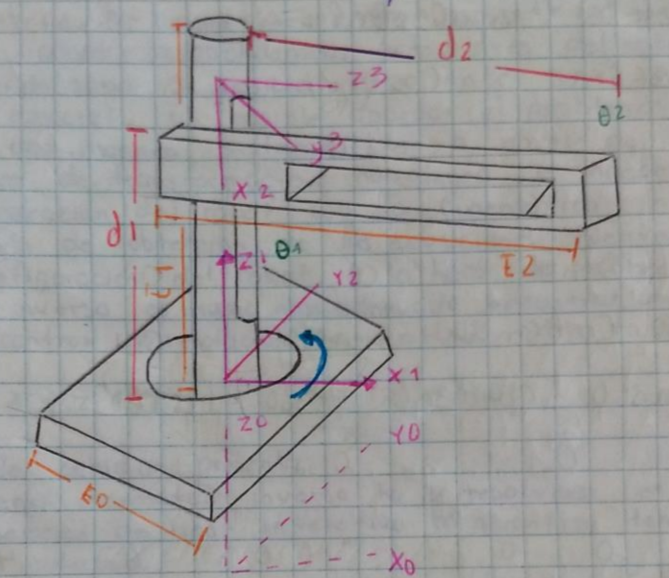
$${}^{2}T_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & L_3 \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^{0}T_3 = \begin{bmatrix} 0 & \text{Cos}\, i & -\text{Sen}\, i & -L_3 \text{Cos}\, i - \text{Sen}\, i\, d_3 \\ 0 & \text{Sen}\, i & \text{Cos}\, i & -L_3 \text{Sen}\, i + \text{Cos}\, i\, d_3 \\ 1 & 0 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

TEMA

FECHA

18 de Febrero del 2019

Robot Cilíndrico



Z X

Z_0

Eslabones	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	360°	0	θ_1
2	L	0	d_1	0
3	40 L	0	d_2	0

TEMA

FECHA

$$
{}^{i-1}_{\;\;i}T = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\operatorname{Sen}\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ \operatorname{Sen}\theta_i \cos\alpha_{i-1} & \cos\theta_i \cos\alpha_{i-1} & -\operatorname{Sen}\alpha_{i-1} & -d_i \operatorname{Sen}\alpha_{i-1} \\ \operatorname{Sen}\theta_i \operatorname{Sen}\alpha_{i-1} & \cos\theta_i \alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1} & d_i \cos\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
T^{1}_{2} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\operatorname{Sen}\theta_1 & 0 & 0 \\ \operatorname{Sen}\theta \cos 360 & \cos\theta \operatorname{Sen} 360 & -\operatorname{Sen} 360 & 0 \\ \operatorname{Sen}\theta_1 \operatorname{Sen} 360 & \cos\theta\, 360 & \cos 360 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
T^{2}_{3} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 40L \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
T^{0}_{3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 40L \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

18 de Febrero del 2019

Cinematica inversa

El objetivo de la cinematica inversa consiste en encontrar los valores que deben adoptar las coordenadas articulares del robot $q = [q_1, q_2 \ldots q_n]$ para que se extremo se posicione y oriente segun una determinada localización espacial. Es posible abordar el problema cinematico directo de una manera sistematica a partir de la utilización de matrices de transformación homogenea, e independientemente de la configuracion del robot; con la cinematica inversa el procedimiento de obtención de las ecuaciones fuertemente dependiente de la configuración del robot. A la hora de resolver el problema cinematico inverso es mucho mas adecuado encontrar una solución cerrada, esto es, encontrar una resolación matematica explicita de la forma:

$$q_k = f_k(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) \qquad k = 1 \ldots n \ (GDL)$$

Este tipo de solucion presenta:

1. El problema cinematico inverso ha de resolverse en tiempo real, ya que una solución de tipo interativo no garantiza tener la solucion en el momento adecuado.
2. La solución del problema cinematico inverso no es único; existiendo diferentes n-uplas $[q_1 \ldots q_n]^T$ que posicionan y orientan en el extremo del robot del mismo modo. En estos casos una solución cerrada permite incluir determinadas reglas o restricciones que aseguren que la solución obtenida sea la mas adecuada de entre las posibles.

Los metodos geometricos permiten obtener normalmente los valores de las primeras variables articulares, que son las que consiguen posicionar el robot (prescindiendo de la orientación de su extremo). Para ello se utilizan relaciones trigonometricas y geometricas sobre los elementos del robot, se suele recurrir a la resolucion de triangulos formados por elementos y articulaciones del robot. Se puede reccurrir a manipular directamente las ecuaciones del problema cinematico directo, se estable la resolución:

$$\begin{bmatrix} n & o & a & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{ij} \end{bmatrix}$$

donde los elementos t_{ij} son función de las coordenadas articulares $[q_1 \ldots q_n]^T$ es posible mediante ciertas combinaciones de las 12 ecuaciones planteadas se pueda despejar las n variables articulares q_1 en función de las componentes de los vectores n, o, a, p. El metodo de desacoplamiento cinematico permite para determinados tipos de robots, resolver los primeros grados de libertad, dedicados al posicionamiento de manera independiente la resolucion de los ultimos grados de libertad dedicados a la orientación.

Resolución del problema cinematico inverso por metodos geometricos

El procedimiento se basa en encontrar suficiente numero de relaciones geometricas en las que intervendran las coordenadas del extremo del robot, sus coordenadas articulares y las dimenciones fisicas de sus elementos.

Para un robot con 3GDL de rotación el dato de partida son las coordenadas (p_x, p_y, p_z) referidas a $\{S_0\}$ con las que se quiere posicionar su extremo.

El valor de q_1 se obtiene inmediatamente como:

$$q_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{p_y}{p_x}\right)$$

considerando los elementos 2 y 3 situados en el plano y utilizando el teorema del coseno se tendra:

$$r^2 = p_x^2 + p_y^2$$

$$r^2 + p_z^2 = l_2^2 + l_3^2 + 2l_2 l_3 \cos q_3$$

$$\cos q_3 = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2 l_3}$$

Esta expresición permite obtener q_3 en funcion del vector de posicion del extremo p, es mas conveniente utilizar la expresión de la arcotangente puesto que:

$$\operatorname{Sen} q_3 \pm \sqrt{1-\cos^2 q_3}$$

Se tendro que

$$q_3 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 q_3}}{\cos q_3}\right)$$

con

$$\cos q_3 = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2 l_3}$$

Existen entonces 2 posibles soluciones para q_3 segun se tome el signo positivo o negativo de la raiz.

El calculo de q_2 se hace a partir de la diferencia entre β y α

$$q_2 = \beta - \alpha \quad \text{Siendo} \quad \beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{p_z}{r}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{p_z}{\pm\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}\right)$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{l_3 \operatorname{sen} q_3}{l_2 + l_3 \cos q_3}\right)$$

Luego finalmente:

$$q_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{p_z}{\pm\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{l_3 \operatorname{sen} q_3}{l_2 + l_3 \cos q_3}\right)$$

De nuevo los dos posibles valores segun la eleccion del signo dan lugar a dos valores diferentes de q_2 correspondientes a las configuraciones codo arriba y abajo

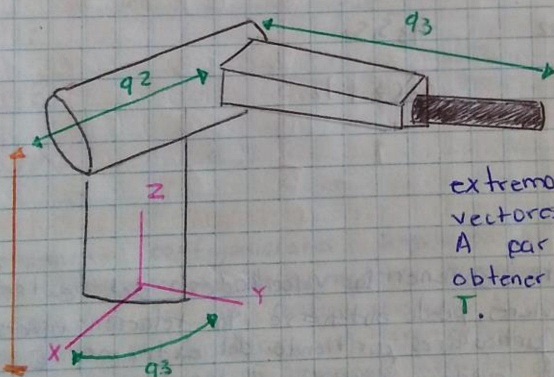
TEMA

FECHA

18 de Febrero del 2019

Resolución del problema cinemático inverso a partir de la matriz de transformación homogénea

Es posible la resolucion del problema cinematico inverso a partir del conocimiento de su modelo directo, suponiendo que se conocen las relaciones que expresan el valor de la posición y orientación del extremo del robot en funcion de sus coordenadas articulares, obtener por manipulación de aquellas relaciones inversas. Se buscan relaciones (una por cada grado de libertad) existen ciertas dependencias entre las expresiones de partida (resultado de la condición de la ortonormalidad de los vectores n, o, a) con lo cual la elección de ecuaciones debe hacerse con sumo cuidado. Para un robot de 3GDL de configuración esferica (2 giros y un desplazamiento); el robot queda siempre contenido en un plano determinado. El primer paso para resolver el problema cinematico inverso es obtener la expresion correspondiente al robot, La matriz T que relaciona el sistema de referencia $\{S_0\}$ asociado a la base con el sistema de referencia $[S_3]$ asociado a su extremo, la asignación de sistemas de referencia segun los criterios D-H con el robot situado en la posición de partida $(q_1 = q_2 = 0)$:



Obtenida la expresión T en funcion de las coordenadas articulares (q_1, q_2, q_3), y supuesta una localización de destino para el extremo del robot definida por los vectores n, o, a, p.
A partir de estos es inmediato obtener las matrices A y la matriz T.

Articulación	θ	d	a	α
1	q_1	l_1	0	90
2	q_2	0	0	-90
3	0	q_3	0	0

18 de Febrero del 2019

$$
{}^{0}A_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\qquad
{}^{1}A_2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{2}A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\qquad
{}^{0}A_2 = \begin{bmatrix} C_1C_2 & -S_1 & -C_1S_1 & 0 \\ S_1C_2 & C_1 & -S_1S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & 0_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
T = {}^{0}A_3 \begin{bmatrix} C_1C_2 & -S_1 & -C_1S_2 & -q_3C_1S_2 \\ S_1C_2 & C_1 & -S_1S_2 & -q_3S_1S_2 \\ S_2 & 0 & C_2 & q_3C_2 + l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Jacobiana inversa

La relación directa que permite obtener las velocidades del extremo a partir de las velocidades articulares, puede obtenerse la relacion inversa que permite calcular las velocidades articulares partiendo del extremo. En la obtencion de la relacion inversa pueden emplearse diferentes procedimientos.

Conocida la relacion directa, dada por la matriz Jacobiana, se puede obtener a relacion inversa invirtiendo simbolica la matriz.

$$
\begin{bmatrix} \dot{q}_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \dot{q}_n \end{bmatrix}^T = J^{-1} \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} & \dot{\alpha} & \dot{\beta} & \dot{\gamma} \end{bmatrix}^T
$$

TEMA

FECHA 18 de Febrero del 2019

Como segunda alternativa puede plantearse la evaluación numerica de la matriz J para una configuracion (q_i) concreta del robot, e invirtiendo numericamente. El valor de la Jacobina va cambiando a medida que el robot se mueve y por lo tanto la Jacobina se recalcula constantemente.
Pueden existir n-uplas $(q_i \ldots q_n)$ para las cuales la matriz Jacobiana no sea invertible por ser su determinante, denominado Jacobino nulo.
La tercera alternativa para obtener la matriz Jacobiana inversa es repetir el procedimiento seguido para la obtención de la Jacobina directa, pero ahora partiendo del modelo cinematico inverso. Esto conociendo la relacion:

$$q_1 = f_1(x, y, z, \alpha, \beta, r)$$

$$q_n = f_n(x, y, z, \alpha, \beta, r)$$

La matriz Jacobiana inversa se obtendra por diferenciacion con respecto del tiempo de ambos miembros de igualdad.:

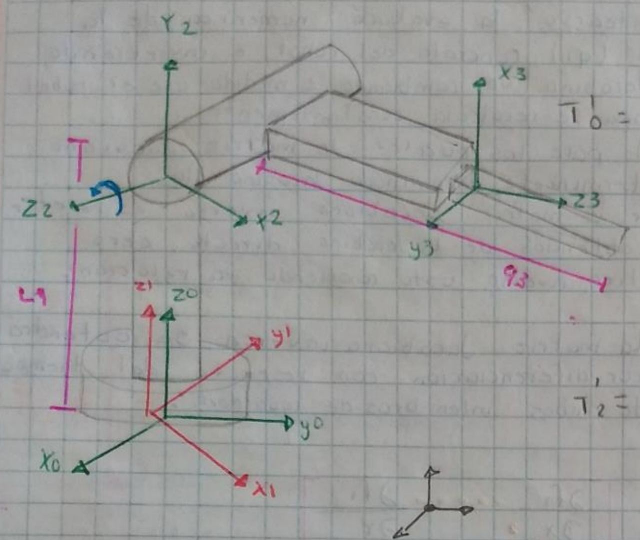
$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{r} \end{bmatrix} \qquad J^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial r} \end{bmatrix}$$

Configuraciones Singulares

Se denominan configuraciones singulares de un robot a aquellas en las que la determinante de su matriz Jacobiana (Jacobiano) sea nulo, por esta circunstancia en las configuraciones singulares no existe Jacobina inversa. Al anularse el Jacobiano, un incremento infinitesimal de las coordenadas cartesianas supondrian un incremento infinito de las coordenadas articulares, el pretender que el extremo del robot se mueva velosmente constante, obligaria a movimientos de las articulaciones a velocidades inabordables por sus actuadores en las inmediaciones de las configuraciones singulares se pierda alguno de los grados de libertad del robot siendo imposible que su extremo se mueva en una determinada direccion cartesiana.

- **Singularidades en los limites del espacio de trabajo**: Se presentan cuando el extremo del robot esta en algun punto del limite de trabajo interior o exterior resulta obio que el robot no podra desplazarse en las direcciones que lo alejan de este espacio de trabajo;
- **Singularidades en el interior del espacio de trabajo del robot**: Ocurren dentro de la zona de trabajo y se producen generalmente por el alineamiento de dos o mas ejes de las articulaciones del robot.

$\uparrow$ Fila $\rightarrow$ Columna



$$T_0^1 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 & 0 & 0 \\ S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_1^2 = \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -L_1 \\ -S\theta_2 & -C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

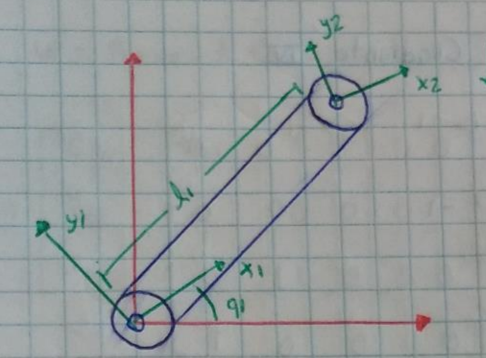
$$T_2^3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -q_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

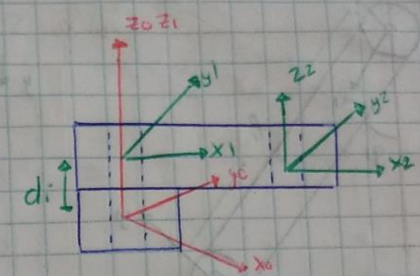
	$z \rightarrow x$		$x \rightarrow z$	
Articulación	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ
1	Ø	Ø	0	θ_1
2	Ø	-90	L_1	θ_2
3	Ø	90	q_3	90

$$\begin{bmatrix} C\theta_1 C\theta_2 & -S\theta_1 \cdot -S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

TEMA

FECHA 04 de Marzo del 2019



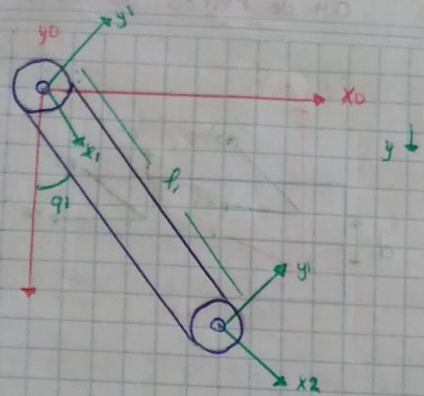


Cuadrante I $\qquad q_1 = \emptyset$ home

i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ
1	0	0	d_1	q_1
2	l_1	0	0	0

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} Cq_1 & -Sq_1 & 0 & 0 \\ Sq_1 & Cq_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_0^2 = \begin{bmatrix} Cq_1 & -Sq_1 & 0 & 0 \\ Sq_1 & Cq_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Cuadrante IV

$$T^0_1\,(3\pi/2)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ
1				
2				

$$= \begin{bmatrix} Cq1 & -Sq1 & 0 & 0 \\ Sq1 & Cq1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Cq1 & -Sq1 & 0 & 0 \\ S_1 & Cq1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^1_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & l_1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

TEMA FECHA

06 de Marzo del 2019

$$\omega_1^1 = R_0^1 \omega_0^0 + \dot{\theta}_1 Z_1^1 = [R_1^0]^T \omega_0^0 + \dot{q}_1 Z_1$$

$$= \begin{bmatrix} C_{q1} & -S_{q1} & 0 \\ S_{q1} & C_{q1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \dot{q}_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix}$$

$$v_1^1 = R_0^1 v_0^0 + R_0^1 [\omega_0^1 \times r_1^0] = [R_1^0]^T + [R_1^0][\omega_0^0 \times r_1^0]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} + \dot{q}_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix}$$

$$\omega_2^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} l_1 S q \\ l_1 C q_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

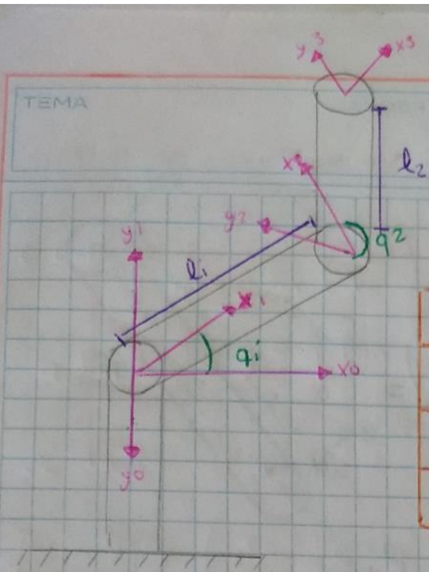
$$v_0^2 = v_2^2 \begin{bmatrix} l_1 S q_1 \\ l_1 C q_1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial F_r}{\partial q_1} \dot{q}_1 = \begin{bmatrix} l_1 C q_1 \\ l_1 S q_1 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_1 = \begin{bmatrix} l_1 C q_1 & 0 & 0 \\ 0 & -l_1 S q_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$q_1 = \tan^{-1} \left[\frac{x}{y} \right] = IK \rightarrow \text{Cinematica inversa}$$

TEMA

FECHA

06 de Marzo del 2019



i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	q_1
2	l_1	0	0	q_2
3	l_2	0	0	0

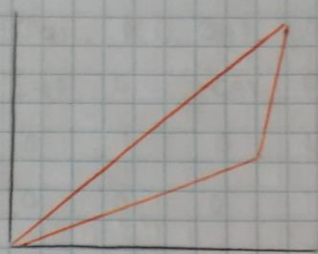
$$T_1^0 = \begin{bmatrix} Cq_1 & -Sq_1 & 0 & 0 \\ Sq_1 & Cq_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_2^1 = \begin{bmatrix} Cq_2 & -Sq_2 & 0 & l_1 Cq_2 \\ Sq_2 & Cq_2 & 0 & l_1 Sq_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^0 = \begin{bmatrix} Cq_1+q_2 & -Sq_1+q_2 & 0 & l_1 Cq_1 + l_1 Cq_1+q_2 \\ Sq_1+q_2 & Cq_1+q_2 & 0 & l_1 Sq_1 + l_2 Sq_1+q_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

TEMA

FECHA 25 de Marzo del 2019



$$\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \operatorname{Sen} Q_1 + l_2 \operatorname{Sen} Q_1 + Q_2 \\ -l_1 \cos Q_1 - l_2 \cos Q_1 + Q_2 \\ \beta_1 + \beta_2 \end{bmatrix}$$

$$J(q) = \begin{bmatrix} -l_1 \operatorname{sen} Q_1 - l_2 \operatorname{Sen} Q_1 + Q_2 & -L_2 \operatorname{Sen} Q_1 + Q_2 \\ L_1 \cos Q_1 + L_2 \cos Q_1 + Q_2 & L_2 \cos Q_1 + Q_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -L_1 \operatorname{Sen} Q_1 - L_2 \operatorname{Sen} Q_1 + Q_2 & -L_2 \operatorname{Sen} Q_1 + Q_2 \\ L_1 \cos Q_1 + L_2 \cos Q_1 + Q_2 & L_2 \cos Q_1 + Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

$$x_0^2 + y_0^2 = [L_1 + L_2 \cos Q_2]^2 + L_2^2 \operatorname{Sen}^2 Q_2 = L_1^2 + L_2 [\cos^2 Q_2 + \operatorname{Sen}^2 Q_2] \rightarrow$$

$$+ 2 L_1 L_2 \cos Q_2$$

$$\theta = a \tan \left(\frac{L_2 \operatorname{Sen} Q_2}{L_1 + L_2 \cos Q_2} \right)$$

Tomando los angulos $\theta + q_1$ dentro del triangulo y la hipotenusa $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ se cumplen los siguientes:

$$\theta + q_1 = a \tan \left(\frac{X_0}{Y_0} \right)$$

Entonces

$$q_1 = a\tan\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - \theta$$

$$= a\tan\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - a\tan\left(\frac{L_2 \operatorname{Sen} Q_2}{L_1 + L_2 \operatorname{Cos} Q_2}\right)$$

∴ La cinematica del Robot de 2GDL

$$Q_2 = a\operatorname{Cos}\left(\frac{x_0^2 + y_1^2 - L_1^2 - L_2^2}{2 L_1 L_2}\right)$$

$$Q_1 = a\tan\left(\frac{X_0}{Y_0}\right) - a\tan\left(\frac{L_2 \operatorname{Sen} Q_2}{L_1 + L_2 \operatorname{Cos} Q_2}\right)$$

Practica 2

Obtener q_1 y q_2 del robot de 2 GDL con $L_1 = 30$ $L_2 = 20$ con punto en el origen en (4, 4). Para los siguientes puntos:

(-1, 6) (9, -6) (-5, 6)

Practica 3

Investigar y expliar los librerias de Ros en su robot.

Entonces

$$q_1 = a\tan\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - \theta$$

$$= a\tan\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - a\tan\left(\frac{L_2 \operatorname{Sen} Q_2}{L_1 + L_2 \operatorname{Cos} Q_2}\right)$$

∴ La cinematica del Robot de 2GDL

$$Q_2 = a\cos\left(\frac{x_0^2 + y_1^2 - L_1^2 - L_2^2}{2 L_1 L_2}\right)$$

$$Q_1 = a\tan\left(\frac{X_0}{Y_0}\right) - a\tan\left(\frac{L_2 \operatorname{Sen} Q_2}{L_1 + L_2 \operatorname{Cos} Q_2}\right)$$

Practica 2

Obtener q_1 y q_2 del robot de 2 GDL con $L_1 = 30$ $L_2 = 20$ con punto en el origen en (4, 4). Para los siguientes puntos:

(-1, 6) (9, -6) (-5, 6)

Practica 3

investigar y explicar las librerias de Ros en su robot.

01 de Abril del 2019

$$\begin{bmatrix} Cq1 & 0 & Sq1 & 0 \\ Sq1 & 0 & -Cq1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_2^1 = \begin{bmatrix} Cq2 & 0 & -Sq2 & 0 \\ Sq1 & 0 & C2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^0 = A_1^0 \, A_2^1 \, A_3^2$$

$$(A_1^0)^{-1} \, {}_A^0t = {}_1^1A \; {}_3^2A \longrightarrow \text{Despejar } qi$$

$$({}_1^0\Delta)^{-1} \, {}^0T_n = \begin{bmatrix} Cq1 & 0 & -Sq1 & 0 \\ Sq1 & 0 & Cq1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} n_x & O_x & a_x & P_x \\ n_y & O_y & a_y & P_y \\ n_z & O_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \left| \begin{array}{ll} Cq2 & 0 \\ Sq2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right.$$

TEMA

FECHA 01 de Abril del 2019

$$({}^{1}A_{1})^{-1}\,({}^{0}_{1}A)^{-1}\,{}^{0}T_{n} = \begin{bmatrix} Cq2 & Sq2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ Sq2 & Cq2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Cq1 & Sq1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -L1 \\ Sq1 & Cq1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} nx & ox & ax & Px \\ ny & o_y & a_y & P_y \\ nz & oz & az & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Cq2\,Cq1 & Sq2\,Sq1 & Sq1 & -L_1 Sq2 \\ -Sq1 & -Cq1 & 1 & 0 \\ -Sq2\,Cq1 & -Sq2\,Sq1 & Cq2 & -L_1 Cq2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} nx & ox & ax & Px \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ nz & oz & az & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_y\,Cq2\,Cq_1 + P_y\,Sq_1\,Cq_2 + P_z\,Sq2 - L_1\,Sq2 = 0 \longrightarrow \frac{-Sq_1}{Cq2}$$

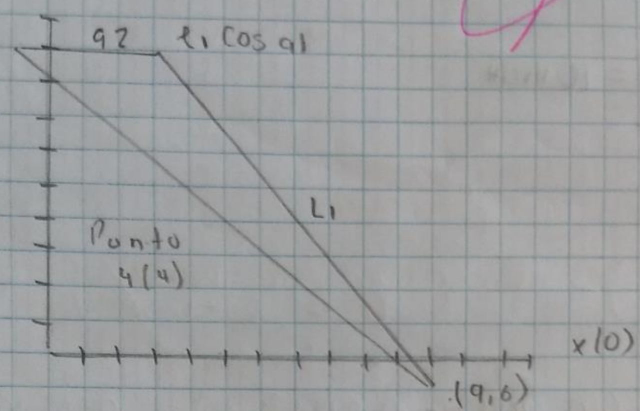
$$\frac{P_x Cq_1 + P_y Sq_1}{P_z - L_1} \qquad q2 = \arctan\left(\frac{P_x Cq_1 + P_y Sq1}{P_z - L_1}\right)$$

$$-Sq2\,Cq_1 P_z - Sq2\,Sq_1 P_y + P_z\,Cq2 - L_1 Cq2 = q3 \longrightarrow q3 = Cq2(P_z - L_1) - Sq1(Cq_1 P_z + Sq_1 P_y)$$

01 de Abril del 2019

Practica 2

(-1,6) (9-6) (-5,6) $\emptyset$=(4,4)



$$\begin{bmatrix} x_0 \\ q_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -l_1 \cos q_1 & - L_2 \cos q_1 + q_2 \\ l_1 \operatorname{Sen} q_1 & + L_2 \operatorname{Sen} q_1 q_2 \end{bmatrix}$$

$$x^2 + y_0^2 = [L_2 + L_2 \cos q_2]^2 + L_2^2 \operatorname{Sen}^2 (q_2) =$$

$$L_1^2 + L_2^2 [q_2 \operatorname{Sen}^2 C q_2] + \operatorname{Sen} L_1 L_2 \cos q_2$$

$$q_2 = L_2^1 + L_2^2 + 2 L_1 L_2 \cos q_2$$

$$= \arccos \left(\frac{x^2 \; y^2 - l_1^2 - L_2^2}{2 l_1 L_2} \right)$$

$$\theta \arctan \left(\frac{L_2 \operatorname{Sen} q_2}{L_1 + L_2 \cos q_2} \right)$$

$$q_1 = \arctan \left(\frac{y}{x} \right) - \arctan \left(\frac{20 \operatorname{Sen} q_2}{(30 + 20) \cos C q_2} \right)$$

$$q_2 = \arccos \left(\frac{x^2 + y^2 - C 30^2 - 20^2}{2(30)(20)} \right)$$

TEMA

FECHA

(-1,6)

$$\arccos\left(\frac{x^2+y^2-(30)^2-20^2}{2(30)(20)}\right) = \frac{1+36-900-400}{1200} = \frac{-1263}{1200}$$

$$= \arccos(-1.0525) = \text{Error}$$

$$q2 = (9,6) \quad \arccos\left(\frac{x^2+y^2-(30)^2-(20)^2}{2(30)(20)}\right)$$

$$\frac{81+36-900-400}{1200} = \frac{-1183}{1200} = 170.34$$

$$q1 = \arctan\left(\frac{x}{y}\right) - \arctan\left(\frac{20\ S\ 170.34}{30\ C\ 170.34}\right) = \frac{3.2}{-49.29} = 3.43$$

$$\arctan\left(\frac{9}{6}\right) = -58.30 - 3.43 = 54.73^\circ$$

(-5,6)

$$q2 = \arccos\left(\frac{-5^2+6^2-(30)^2-(20)^2}{2(30)(20)}\right) = \frac{25+36-900-400}{1200}$$

$$= 1.325 = \arccos = \text{Error}$$

vgkhgvf