Práctica 2

Anabel Gómez Ríos

Funciones de la práctica 1 que vamos a reutilizar.

```
set.seed(237)
# Simular números aleatorios uniformes
simula_unif = function (N=2, dims=2, rango = c(0,1)){
 matrix(runif(N*dims, min=rango[1], max=rango[2]), nrow = N, ncol=dims, byrow=T)
}

# Simular recta que corte a un intervalo dado
simula_recta <- function(intervalo) {
  m <- simula_unif(2, 2, intervalo)
  a <- (m[2,2] - m[1,2]) / (m[2,1] - m[1,1])
  b <- m[1,2] - a * m[1,1]
  c(a,b)
}

# Calcular la simetría de una matriz
calcular_simetria <- function(mat) {
  # Invertimos la matriz por columnas
  mat_invertida = apply(mat, 2, function(x) rev(x))
  # Calulamos el valor absoluto de la diferencia de cada elemento entre las dos
  # matrices
  dif = abs(mat - mat_invertida)
  # Sumamos los elementos de la matriz
  suma <- sum(dif)
  # Devolvemos el signo cambiado de la suma
  -suma
}
```

```
# Método de regresión lineal
Regress_Lin <- function(datos, label) {
  descomp <- La.svd(datos)
  vt <- descomp[[3]]
  # Creamos la inversa de la matriz diagonal al cuadrado
  diag <- matrix(0, length(descomp[[1]]), length(descomp[[1]]))
  for (i in 1:length(descomp[[1]])) {
    diag[i,i] = descomp[[1]][i]
    if (diag[i,i] != 0) {
      diag[i,i] = 1/(diag[i,i]^2)
    }
  }
  prod_inv <- t(vt) %*% diag %*% vt
  pseud_inv <- prod_inv %*% t(datos)
  w <- pseud_inv %*% label
  w
}
```

```r
# Función para contar diferencias dados dos vectores necesaria en la siguiente
# función
cuenta_diferencias <- function(etiquetas1, etiquetas2) {
  vf <- etiquetas1 == etiquetas2
  length(vf[vf == FALSE])
}

# Función para contar errores necesaria en el PLA pocket
cuenta_errores <- function(w, etiquetas_originales, datos) {
  w <- -w/w[2]
  # Etiquetamos con la solución del PLA
  etiquetas_cambiadas <- unlist(lapply(1:nrow(datos), function(i) {
    # Obtenemos los puntos uno a uno y los etiquetamos
    p <- datos[i,]
    f <- -w[1]*p[1] + p[2] - w[3]
    sign(f)
  }))
  # Devolvemos el número de errores que da la solución
  cuenta_diferencias(etiquetas_originales, etiquetas_cambiadas)
}

# Algoritmo PLA pocket
ajusta_PLA_MOD <- function(datos, label, max_iter, vini) {
  parada <- F
  fin <- F
  w <- vini
  wmejor <- w
  iter <- 1
  errores_mejor <- cuenta_errores(wmejor, label, datos)
  # Mientras no hayamos superado el máximo de iteraciones o
  # no se haya encontrado solución
  while(!parada) {
    # iteramos sobre los datos
    for (j in 1:nrow(datos)) {
      if (sign(crossprod(w, datos[j,])) != label[j]) {
        w <- w + label[j]*datos[j,]
        # La variable fin controla si se ha entrado en el if
        fin <- F
      }
    }
    # Contamos el número de errores que hay en la solución actual y si
    # es menor que el número de errores en la mejor solución de las que
    # llevamos, nos quedamos con la actual
    errores_actual <- cuenta_errores(w, label, datos)
    if(errores_actual < errores_mejor) {
      wmejor <- w
      errores_mejor <- errores_actual
    }
    # Si no se ha entrado en el if, todos los datos estaban bien
    # clasificados y podemos poner a TRUE la variable parada.
    if(fin == T) {
      parada = T
    }
```

```
    else {
      fin = T
    }
    iter <- iter + 1
    if (iter >= max_iter) parada = T
  }

  # Devolvemos el hiperplano, el número máximo de iteraciones al que hemos
  # llegado y el número de errores de la mejor solución que hemos encontrado
  list(w = wmejor, numIteraciones = iter, errores = errores_mejor)
}
```

1. MODELOS LINEALES

1. Gradiente Descendente. Implementar el algoritmo de gradiente descendente.

PREGUNTAR SI CONDICIÓN DE PARADA CUANDO SE MUEVA POCO (DIFERENCIA ENTRE VALORES DE LA FUNCIÓN E) Y CUÁL ES ESE POCO

```
# Algoritmo del gradiente descendente. Le pasamos a la función la función de
# error, su gradiente (que serán funciones), el punto en el que se empieza, la
# tasa de aprendizaje, el número máximo de iteraciones a realizar, y el mínimo
# error al que queremos llegar, en orden.
# Devuelve los valores de la función de error por los que pasa junto con la
# iteración.
gradienteDescendente <- function(ferror, gradiente, pini, tasa, maxiter, tope) {
  w <- pini
  i <- 1
  valoresError <- c(i, ferror(pini[1], pini[2]))
  mostrar <- TRUE
  while (i <= maxiter) {
    g <- gradiente(w[1], w[2])
    # Le cambiamos la dirección al gradiente para ir hacia abajo
    v <- -g
    # Nos movemos tanto como indique la tasa
    w <- w + tasa*v
    valoresError <- rbind(valoresError, c(i, ferror(w[1], w[2])))

    if (((abs(ferror(w[1], w[2])) < tope) || (i==maxiter)) && mostrar) {
      cat("He necesitado", i, "iteraciones para llegar al error", ferror(w[1], w[2]),"\n")
      cat("con valores de u y v:", w[1],",", w[2])
      mostrar <- FALSE
    }
    i <- i+1
  }
  return(valoresError)
}
```

a) Considerar la función no lineal de error $E(u,v) = (ue^v - 2ve^{-u})^2$. Usar gradiente descendente y minimizar esta función de error, comenzando desde el punto $(u,v) = (1,1)$ y usando una tasa de aprendizaje $\eta = 0.1$

1) Calcular analíticamente y mostrar la expresión del gradiente de la función $E(u,v)$

Calculamos el gradiente de $E(u,v)$: $\nabla E(u,v) = (\frac{\partial E}{\partial u}, \frac{\partial E}{\partial v}) = (2(ue^v - 2ve^{-u})(e^v + 2ve^{-u}), 2(ue^v - 2e^{-u})(ue^v - 2e^{-u})) = 2(ue^v - 2ve^{-u})(e^v + 2ve^{-u}, ue^v - 2e^{-u})$

2) ¿Cuántas iteraciones tarda el algoritmo en obtener por primera vez un valor de $E(u,v) inferior a 10^{-14}? (Usar flotantes de 64 bits)

```
E <- function(u,v) (u*exp(v) - 2*v*exp(-u))^2
gradE <- function(u,v) {(2*(u*exp(v) - 2*v*exp(-u)))*c(exp(v) + 2*v*exp(-u),
                                                       u*exp(v) - 2*exp(-u))}

val <- gradienteDescendente(E, gradE, c(1,1), 0.1, 20, 10^{-14})
```

```
## He necesitado 10 iteraciones para llegar al error 1.208683e-15
## con valores de u y v: 0.04473629 , 0.02395871
```

3) ¿Qué valores de (u,v) obtuvo en el apartado anterior cuando alcanzó el error de 10^{-14}

Como podemos ver en la salida por pantalla anterior, el valor de u ha sido 0.04473628 y el de v ha sido 0.02395873

b) Considerar ahora la función $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 2 * sin(2\pi x) * sin(2\pi y)$

1) Usar gradiente descendente para minimizar esta función. Usar como valores iniciales $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, la tasa de aprendizaje $\eta = 0.01$ y un máximo de 50 iteraciones. Generar un gráfico de cómo desciende el valor de la función con las iteraciones. Repetir el experimento pero usando $\eta = 0.1$. Comentar las diferencias.

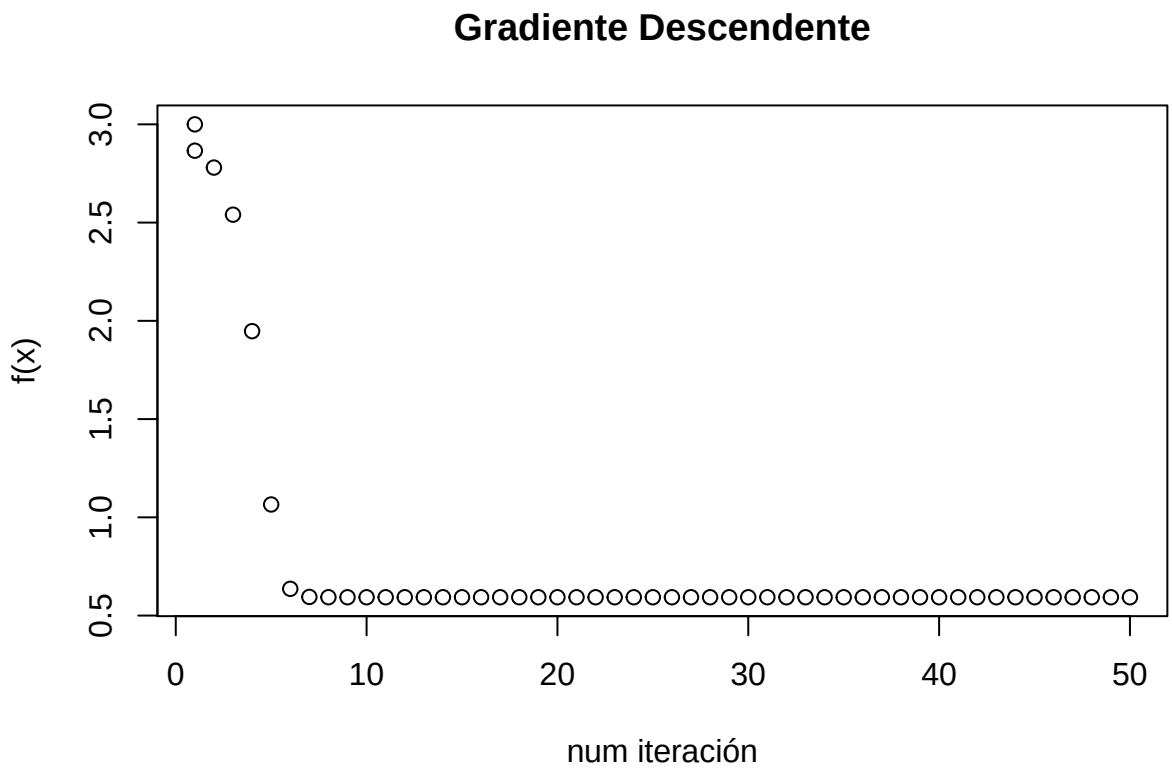
Calculamos primero su gradiente: $\nabla f = (2x + 4\pi * sin(2\pi y) * cos(2\pi x), 4y + 4\pi * sin(2\pi x) * cos(2\pi y))$

```
f <- function(x,y) x^2 + 2*y^2 + 2*sin(2*pi*x)*sin(2*pi*y)
gradF <- function(x,y) c(2*x + 4*pi*sin(2*pi*y)*cos(2*pi*x),
                         4*y + 4*pi*sin(2*pi*x)*cos(2*pi*y))

val <- gradienteDescendente(f, gradF, c(1,1), 0.01, 50, 0)
```

```
## He necesitado 50 iteraciones para llegar al error 0.5932694
## con valores de u y v: 1.21807 , 0.712812
```

```
plot(val[,1], val[,2], type="p", xlab="num iteración", ylab="f(x)", main="Gradiente Descendente")
```

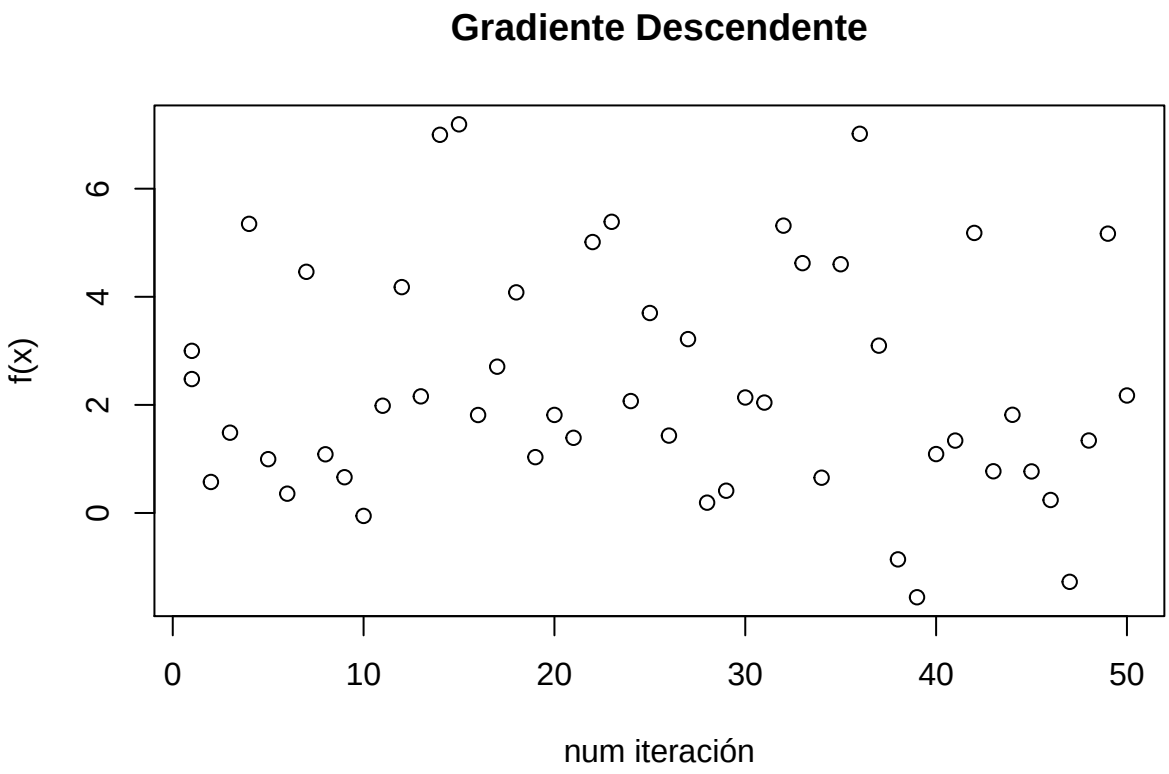


Repetimos con $\eta = 0.1$:

```
val <- gradienteDescendente(f, gradF, c(1,1), 0.1, 50, 0)
```

```
## He necesitado 50 iteraciones para llegar al error 2.173886
## con valores de u y v: 0.6882825 , -0.1732115
```

```
plot(val[,1], val[,2], type="p", xlab="num iteración", ylab="f(x)", main="Gradiente Descendente")
```



2) Obtener el valor mínimo y los valores de las variables que lo alcanzan cuando el punto de inicio se fija: (0.1,0.1), (1,1), (-0.5, -0.5), (-1, -1). Generar una tabla con los valores obtenidos. ¿Cuál sería su conclusión sobre la verdadera dificultad de encontrar el mínimo global de una función arbitraria?

PARA QUÉ TASA DE APRENDIZAJE

```
val <- gradienteDescendente(f, gradF, c(0.1,0.1), 0.01, 50, 0)
```

```
## He necesitado 50 iteraciones para llegar al error -1.820079
## con valores de u y v: 0.243805 , -0.2379258
```

```
val <- gradienteDescendente(f, gradF, c(1,1), 0.01, 50, 0)
```

```
## He necesitado 50 iteraciones para llegar al error 0.5932694
## con valores de u y v: 1.21807 , 0.712812
```

```
val <- gradienteDescendente(f, gradF, c(-0.5,-0.5), 0.01, 50, 0)
```

```
## He necesitado 50 iteraciones para llegar al error -1.332481
## con valores de u y v: -0.7313775 , -0.2378554
```

```
val <- gradienteDescendente(f, gradF, c(-1,-1), 0.01, 50, 0)
```

```
## He necesitado 50 iteraciones para llegar al error 0.5932694
## con valores de u y v: -1.21807 , -0.712812
```

2. Coordenada descendente. En este ejercicio comparamos la eficiencia de la técnica de optimización de "coordenada descendente" usando la misma función del ejercicio 1.1.a. En cada iteración, tenemos dos pasos a lo largo de dos coordenadas. En el paso 1 nos movemos a lo largo de la coordenadas u para reducir el error (suponer que se verifica una aproximación de primer orden como en gradiente descendente), y el paso 2 es para reevaluar y movernos a lo largo de la coordenada v para reducir el error (hacer la misma hipótesis que en el paso 1). Usar una tasa de aprendizaje de $\eta = 0.1$.

```
# Algoritmo de coordenada descendente. Le pasamos a la función la función de
# error, su gradiente (que serán funciones), el punto en el que se empieza, la
# tasa de aprendizaje, el número máximo de iteraciones a realizar, y el mínimo
# error al que queremos llegar, en orden.
coordenadaDescendente <- function(ferror, gradiente, pini, tasa, maxiter, tope) {
  w <- pini
  i <- 1
  mostrar <- TRUE
  while (i <= maxiter) {
    # Paso 1
    g <- gradiente(w[1], w[2])
    # Le cambiamos la dirección al gradiente para ir hacia abajo
    v <- -g
    w[1] <- w[1] + tasa*v[1]

    # Paso 2
    g <- gradiente(w[1], w[2])
    # Le cambiamos la dirección al gradiente para ir hacia abajo
    v <- -g
    w[2] <- w[2] + tasa*v[2]

    if (((abs(ferror(w[1], w[2])) < tope) || (i==maxiter)) && mostrar) {
      cat("He necesitado", i, "iteraciones para llegar al error", ferror(w[1], w[2]),"\n")
      cat("con valores de u y v:", w[1],",", w[2])
      mostrar <- FALSE
    }
    i <- i+1
  }
}
```

a) ¿Qué error $E(u, v)$ se obtiene después de 15 iteraciones completas (i.e. 30 pasos)?

```
val <- coordenadaDescendente(E, gradE, c(1,1), 0.1, 15, 0)
```

```
## He necesitado 15 iteraciones para llegar al error 0.1398138
## con valores de u y v: 6.297076 , -2.852307
```

b) Establezca una comparación entre esta técnica y la técnica de gradiente descendente.

POR HACER

3. Método de Newton. Implementar el algoritmo de minimización de Newton y aplicarlo a la función $f(x, y)$ dada en el ejercicio 1.b. Desarrolle los mismos experimentos usando los mismos puntos de inicio.

PREGUNTAR SI ESTO ESTÁ BIEN

```
# Algoritmo del método de Newton. Le pasamos a la función la función de
# error, su gradiente y la matriz hessiana (que serán funciones), el punto
# en el que se empieza, la tasa de aprendizaje, el número máximo de iteraciones a
# realizar, y el mínimo error al que queremos llegar, en orden.
# Devuelve los valores de la función de error por los que pasa junto con la
# iteración.
metodoNewton <- function(ferror, gradiente, hessiana, pini, tasa, maxiter, tope) {
  w <- pini
  i <- 1
  valoresError <- c(i, ferror(pini[1], pini[2]))
  mostrar <- TRUE
  while (i <= maxiter) {
    hg <- solve(hessiana(w[1], w[2]))%*%gradiente(w[1], w[2])
    # Le cambiamos la dirección al gradiente para ir hacia abajo
    v <- -hg
    # Nos movemos tanto como indique la tasa
    w <- w + tasa*v
    valoresError <- rbind(valoresError, c(i, ferror(w[1], w[2])))

    if (((abs(ferror(w[1], w[2])) < tope) || (i==maxiter)) && mostrar) {
      cat("He necesitado", i, "iteraciones para llegar al error", ferror(w[1], w[2]),"\n")
      cat("con valores de u y v:", w[1],",", w[2])
      mostrar <- FALSE
    }
    i <- i+1
  }
  return(valoresError)
}
```

Calculamos la matriz hessiana de la f. Recordemos que las derivadas parciales cruzadas (de existir y ser continuas, como es nuestro caso) son iguales, por el teorema de Schwarz.

```
f <- function(x,y) x^2 + 2*y^2 + 2*sin(2*pi*x)*sin(2*pi*y)
gradF <- function(x,y) c(2*x + 4*pi*sin(2*pi*y)*cos(2*pi*x),
                         4*y + 4*pi*sin(2*pi*x)*cos(2*pi*y))
d12 <- function(x,y) 8*pi^2*cos(2*pi*y)*cos(2*pi*x)
d11 <- function(x,y) 2 - 8*pi^2*sin(2*pi*y)*sin(2*pi*x)
d22 <- function(x,y) 4 - 8*pi^2*sin(2*pi*x)*sin(2*pi*y)
```

```
hess <- function(x,y) rbind(c(d11(x,y), d12(x,y)), c(d12(x,y), d22(x,y)))

val <- metodoNewton(f, gradF, hess, c(1,1), 0.01, 50, 0)
```

```
## He necesitado 50 iteraciones para llegar al error 2.937804
## con valores de u y v: 0.9803919 , 0.9904148
```

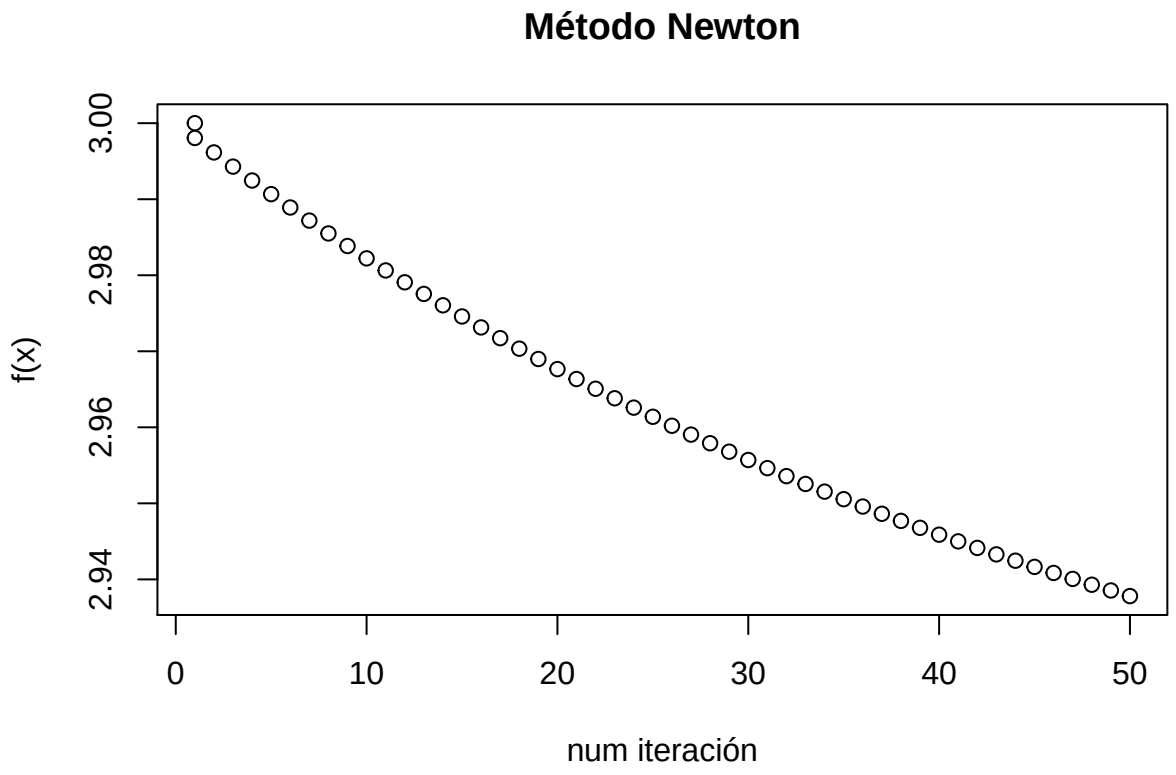
```
val2 <- metodoNewton(f, gradF, hess, c(1,1), 0.1, 50, 0)
```

```
## He necesitado 50 iteraciones para llegar al error 2.900408
## con valores de u y v: 0.9494086 , 0.9747153
```

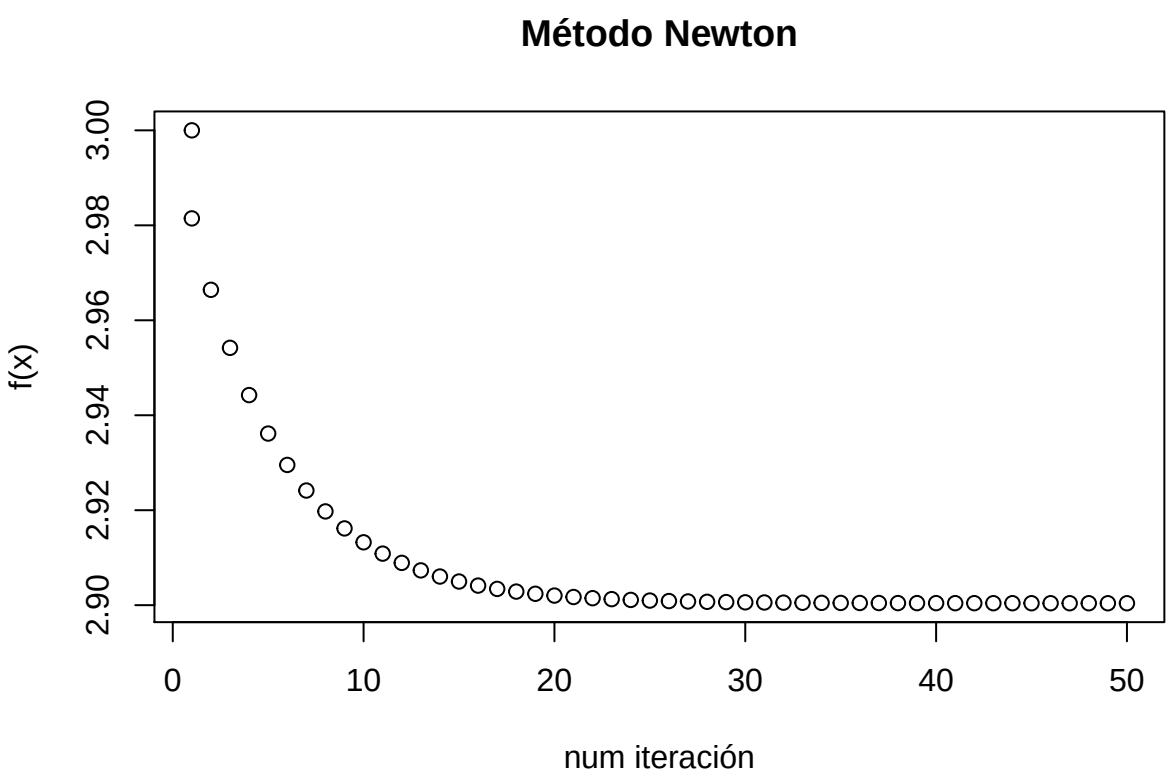
ES ESTO O LO DE DESPUÉS TAMBIÉN?

a) Generar un gráfico de cómo desciende el valor de la función con las iteraciones.

```
plot(val[,1], val[,2], type="p", xlab="num iteración", ylab="f(x)", main="Método Newton")
```




```
plot(val2[,1], val2[,2], type="p", xlab="num iteración", ylab="f(x)", main="Método Newton")
```



b) Extraer conclusiones sobre las conductas de los algoritmos comparando la curva de decrecimiento de la función calculada en el apartado anterior y la correspondiente obtenida con gradiente descendente.

POR HACER

4. Regresión Logística. En este ejercicio crearemos nuestra propia función objetivo f (probabilidad en este caso) y nuestro conjunto de datos D para ver cómo funciona regresión logística. Supondremos por simplicidad que f es una probabilidad con valores 0/1 y por tanto que y es una función determinista de x.

Consideremos $d = 2$ para que los datos sean visualizables, y sea $X = [-1, 1] \times [-1, 1]$ con probabilidad uniforme de elegir cada $x \in X$. Elegir una línea en el plano como la frontera entre $f(x) = 1$ (donde y toma valores +1) y $f(x) = 0$ (donde y toma valores -1), para ello seleccionar dos puntos aleatorios del plano y calcular la línea que pasa por ambos. Seleccionar $N = 100$ puntos aleatorios $\{x_n\}$ de X y evaluar las respuestas de todos ellos $\{y_n\}$ respecto de la frontera elegida.

Generamos la muestra de 100 puntos de manera uniforme:

```
muestra <- simula_unif(100, 2, c(-1,1))
```

Generamos la recta en el cuadrado dado que separa los datos:

```
recta <- simula_recta(c(-1,1))
```

Los etiquetamos con respecto a la recta que acabamos de generar:

```
etiquetas <- unlist(lapply(1:nrow(muestra), function(i) {
  p <- muestra[i,]
  sign(p[2] - recta[1]*p[1] - recta[2])
}))
```

a) Implementar Regresión Logística (RL) con Gradiente Descendente Estocástico (SGD) bajo las siguientes condiciones:

1. Inicializar el vector de pesos con valores 0.
2. Parar el algoritmo cuando $||w^{(t-1)} - w^{(t)}|| < 0.01$, donde $w^{(t)}$ denota el vector de pesos al final de la época t. Una época es un pase completo a través de los N datos.
3. Aplicar una permutación aleatoria de 1,2,...,N a los datos antes de usarlos en cada época del algoritmo.
4. Usar una tasa de aprendizaje de $\eta = 0.01$.

b) Usar la muestra de datos etiquetada para encontrar g y estimar E_{out} (el error de entropía cruzada) usando para ello un número suficientemente grande de nuevas muestras.

QUÉ NARICES ES EL ERROR DE ENTROPÍA CRUZADA

c) Repetir el experimento 100 veces con diferentes funciones frontera y calcule el promedio.

1) ¿Cuál es el valor de E_{out} para $N = 100$?
2) ¿Cuántas épocas tada en promedio RL en converger para $N = 100$, usando todas las condiciones anteriormente especificadas?

5. Clasificación de Dígitos. Considerar el conjunto de datos de los dígitos manuscritos y seleccionar las muestras de los dígitos 1 y 5. Usar los ficheros de entrenamiento (training) y test que se proporcionan. Extraer las características de *intensidad promedio* y *simetría* en la manera que se indicó en el ejercicio 3 del trabajo 1.

```
# Leemos los ficheros y extraemos los dígitos 1 y 5
train <- read.table("datos/zip.train", sep=" ")
```

```
## Warning in scan(file, what, nmax, sep, dec, quote, skip, nlines,
## na.strings, : número de items leídos no es múltiplo del número de columnas
```

```
test <- read.table("datos/zip.test", sep=" ")
```

```
## Warning in scan(file, what, nmax, sep, dec, quote, skip, nlines,
## na.strings, : número de items leídos no es múltiplo del número de columnas
```

```
numero_train <- train$V1
numero_test <- test$V1
frame_train1 <- train[numero_train==1,]
frame_train5 <- train[numero_train == 5,]
frame_test1 <- test[numero_test==1,]
frame_test5 <- test[numero_test==5,]
# Eliminamos de cada uno la primera columna, que guarda el número del
# que son los datos, y la última, que tiene NA
frame_train1 = frame_train1[,-258]
frame_train1 = frame_train1[,-1]
frame_train5 = frame_train5[,-258]
frame_train5 = frame_train5[,-1]
frame_test1 = frame_test1[,-258]
frame_test1 = frame_test1[,-1]
frame_test5 = frame_test5[,-258]
frame_test5 = frame_test5[,-1]
# Los pasamos a matrices
frame_train1 <- data.matrix(frame_train1)
frame_train5 <- data.matrix(frame_train5)
frame_test1 <- data.matrix(frame_test1)
frame_test5 <- data.matrix(frame_test5)
# Hacemos una lista de matrices
lista_train1 <- lapply(split(frame_train1, seq(nrow(frame_train1))), function(x) {
  matrix(x, 16, 16, T)
})
lista_train5 <- lapply(split(frame_train5, seq(nrow(frame_train5))), function(x) {
  matrix(x, 16, 16, T)
})
lista_test1 <- lapply(split(frame_test1, seq(nrow(frame_test1))), function(x) {
  matrix(x, 16, 16, T)
})
lista_test5 <- lapply(split(frame_test5, seq(nrow(frame_test5))), function(x) {
  matrix(x, 16, 16, T)
})

# Eliminamos lo que no vamos a utilizar
rm(train)
rm(test)
rm(frame_test1)
rm(frame_train1)
rm(frame_test5)
rm(frame_train5)
rm(numero_train)
rm(numero_test)
```

A continuación calculamos las intensidades y las simetrías y las metemos todas juntas (las de las instancias de 1 y las de 5, pero dejamos separados siempre los conjuntos de train y test)

```r
# Calculamos primero las intensidades y las simetrías de todas las matrices,
# es decir, de todas las instancias de 1's y 5's
train_simetria1 <- unlist(lapply(lista_train1, function(m) calcular_simetria(m)))
train_simetria5 <- unlist(lapply(lista_train5, function(m) calcular_simetria(m)))
train_intensidad1 <- unlist(lapply(lista_train1, function(m) mean(m)))
train_intensidad5 <- unlist(lapply(lista_train5, function(m) mean(m)))

test_simetria1 <- unlist(lapply(lista_test1, function(m) calcular_simetria(m)))
test_simetria5 <- unlist(lapply(lista_test5, function(m) calcular_simetria(m)))
test_intensidad1 <- unlist(lapply(lista_test1, function(m) mean(m)))
test_intensidad5 <- unlist(lapply(lista_test5, function(m) mean(m)))

train_simetria <- c(train_simetria1, train_simetria5)
test_simetria <- c(test_simetria1, test_simetria5)
train_intensidad <- c(train_intensidad1, train_intensidad5)
test_intensidad <- c(test_intensidad1, test_intensidad5)
test_num1 <- length(test_simetria1)
test_num5 <- length(test_simetria5)
train_num1 <- length(train_simetria1)
train_num5 <- length(train_simetria5)

# Borramos lo que no necesitamos
rm(train_simetria5)
rm(train_simetria1)
rm(test_simetria5)
rm(test_simetria1)
rm(test_intensidad5)
rm(test_intensidad1)
rm(train_intensidad5)
rm(train_intensidad1)
```

Plantear un problema de clasificación binaria que considere el conjunto de entrenamiento como datos de entrada para aprender la función g. Usando el modelo de Regresión Lineal para clasificación seguido por PLA-Pocket como mejora. Responder a las siguientes cuestiones:

Utilizamos primero el algoritmo de regresión lineal para obtener una buena solución inicial para dársela al PLA pocket.
Las etiquetas serán 1 o -1 según representen la intensidad o simetría de las instancias de números 1 o 5, respectivamente.
Necesitamos poner como tercera coordenada de la matriz de datos que le vamos a pasar al método de regresión lineal un 1, para ponerlo en coordenadas homogéneas. Nos quedará por tanto cada fila de la matriz de datos como (intensidad, simetría, 1).

```r
etiquetas <- c(rep(1, train_num1), rep(-1, train_num5))
datos <- cbind(train_intensidad, train_simetria, 1)
w <- Regress_Lin(datos, etiquetas)
# Le pasamos lo que nos devuelve la regresión lineal al PLA pocket como solución
# inicial
sol <- ajusta_PLA_MOD(datos, etiquetas, 1000, w)
```

COMENTAR QUE LA FUNCIÓN ES LA MISMA PORQUE LO QUE DEVUELVE LA REGRESIÓN YA

ES CANELA FINA Y EL POCKET NO LO PUEDE MEJORAR (ES LA MEJOR SOLUCIÓN A LA QUE PUEDE LLEGAR ÉL TAMBIÉN).

a) Generar gráficos separados (en color) de los datos de entrenamiento y test junto con la función estimada.

b) Calcular E_{in} y E_{test} (error sobre los datos de test).

c) Obtener cotas sobre el verdadero valor de E_{out}. Pueden calcularse dos cotas, una basada en E_{in} y otra basada en E_{test}. Usar una tolerancia $\delta = 0.05$. ¿Qué cota es mejor?

d) Repetir los puntos anteriores pero usando una transformación polinómica de tercer orden ($\Phi_3(x)$ en las transparencias de teoría)

e) Si tuviera que usar los resultados para dárselos a un potencial cliente, ¿usaría la transformación polinómica? Explicar la decisión.

2. SOBREAJUSTE