Задание №19 из ЕГЭ по профильной математике

Теоретический минимум

Основная теорема арифметики

Каждое натуральное число $n > 1$ можно единственным образом разложить в произведение простых чисел $p_1, p_2, \dots p_n$ в некоторых натуральных степенях $d_1, d_2, \dots, d_n$, то есть

$$n = p_1^{d_1} p_2^{d_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{d_n}$$

Тогда количество делителей числа n вычисляется по формуле

$$N = (d_1 + 1) \cdot (d_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (d_n + 1)$$

Свойства делимости

Пусть $n, m, d \in \mathbb{N}$.

1. если n и m делятся на d, то для любых $k, l \in \mathbb{Z}$ числа $kn \pm ml$ делится на d.
2. если n делится на d, а m не делится на d, то $n \pm m$ не делится на d.
3. если n делится на m, m делится на $d \in \mathbb{Z}$, то n делится на d.
4. если n делится на d и l, $d, l \in \mathbb{Z}$, НОД$(d, l) = 1$, то n делится на $d \cdot l$.

Пример, где встречается

Натуральные числа $3n+2$ и $8n+3$ делятся на натуральное $p \neq 1$. Найдите p.

► По свойству (1) $7 = 8(3n+2) - 3(8n+3) \vdots p$, следовательно, $p = 7$. Это верно, например, при $n = 4$. ■

Арифметика остатков

Пусть все числа далее — целые.

- Число n делится на число d, если существует число k такое, что $n = kd$.
- Остатком числа n при делении на d называют число r, такое $0 \leqslant r \leqslant d-1$, что $n - r$ делится на d. Также r называют остатком числа n по модулю d. Имеет место представление $n = kd + r$, k — неполное частное.
- Пусть $d > 1$. Два числа n и m называются сравнимыми по модулю d, если у них одинаковые остатки при делении на d. Обозначение: $n \equiv m \pmod d$.

Свойства:

1. $a \equiv b \pmod m \quad \Leftrightarrow \quad b \equiv a \pmod m$
2. $a \equiv b \pmod m$ и $b \equiv c \pmod m$, то $a \equiv c \pmod m$
3. $a \equiv b \pmod m$ и $c \equiv d \pmod m$, то $a + c \equiv b + d \pmod m$ и $ac \equiv bd \pmod m$
4. $(km + r)^n \equiv r^n \pmod m$

Примеры, где встречается

- $13 \equiv 1 \pmod 4 \quad \Rightarrow \quad 13^{100} \equiv 1^{100} \pmod 4$
- $6^{2n+1} + 1 \equiv 0 \pmod 7$, так как $6^{2n+1} \equiv (-1)^{2n+1} \pmod 7$, следовательно, $6^{2n+1} + 1 \equiv -1 + 1 = 0 \pmod 7$
- Найдите последнюю цифру числа $239^{100} \cdot 1514^{100} \cdot 2086^{102}$

► Чтобы найти последнюю цифру числа, нужно найти остаток при делении на 10 этого числа.
1) $239^{100} \equiv (-1)^{100} = 1 \pmod{10}$
2) $1514^{100} \equiv 4^{100} \pmod{10}$. Так как $4^1 \equiv 4 \pmod{10}$, $4^2 \equiv 6 \pmod{10}$, $4^3 \equiv 4 \pmod{10}$ и т.д., то $4^{100} \equiv 6 \pmod{10}$.
3) $2086^{102} \equiv 6^{102} \pmod{10}$. Так как $6^1 \equiv 6 \pmod{10}$, $6^2 \equiv 6 \pmod{10}$, $6^3 \equiv 6 \pmod{10}$ и т.д., то $6^{102} \equiv 6 \pmod{10}$.
Таким образом, $239^{100} \cdot 1514^{100} \cdot 2086^{102} \equiv 1 \cdot 6 \cdot 6 = 6 \pmod{10}$. Последняя цифра равна 6. ■

Признаки делимости числа $n \in \mathbb{N}$

- n делится на 2, если последняя цифра числа n — это $0, 2, 4, 6$ или 8.
- n делится на 3 (на 9), если сумма цифр числа n делится на 3 (на 9). Причем остаток от деления суммы цифр на 3 или 9 равен остатку при делении самого числа n на 3 или 9 соответственно.
- n делится на 4 (на 8), если последние две (последние три) цифры числа n образуют число, делящееся на 4 (на 8).
- n делится на 5, если последняя цифра числа n — это 0 или 5.
- n делится на 11, если модуль разности суммы цифр, стоящих на четных местах, и суммы цифр, стоящих на нечетных местах, делится на 11.

Свойства сумм $S(n)$, $S(m)$ цифр чисел $n, m \in \mathbb{N}$

Любое число n в десятичной записи можно представить в виде $n = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0} = 10^k a_k + 10^{k-1} a_{k-1} + \ldots + 10a_1 + a_0$,
где $a_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 8, 9\}$, $a_k \neq 0$. Тогда сумма цифр числа n — это $S(n) = a_0 + a_1 + \ldots + a_{k-1} + a_k$.

1. $S(10n) = S(n)$
2. $S(n+m) \leqslant S(n) + S(m)$
3. $S(n) \leqslant n$
4. $S(kn) \leqslant k \cdot S(n)$, $k \in \mathbb{N}$
5. $S(n \cdot m) \leqslant S(n) \cdot S(m)$

Пример, где встречается

- Запись шестизначного числа начинается цифрой 2. Если эту цифру перенести с первой позиции на последнюю, сохранив порядок остальных цифр, то вновь полученное число будет втрое больше первоначального. Найдите первоначальное число.

► Пусть искомое число $\overline{2abcde}$. Тогда $3 \cdot \overline{2abcde} = \overline{abcde2}$. Пусть $x = \overline{abcde}$, тогда

$$3 \cdot (2 \cdot 10^5 + x) = 10x + 2 \Leftrightarrow 599\,998 = 7x \Leftrightarrow x = 85\,714$$

Следовательно, $n = 285\,714$. ■

- Пусть $n \in \mathbb{N}$. Его умножили на m, полученное из n перестановкой цифр. Могло ли при этом получиться число $27\,812\,754$?

► Число $27\,812\,754$ делится на 27, но не делится на 81.
(1) n делится на 9. Тогда m делится на 9. Следовательно, число nm делится на 81. Противоречие.
(2) n не делится на 9. Следовательно, m не делится на 9. То есть каждое из чисел n и m делится максимум на первую степень тройки. Следовательно, nm делится максимум на вторую степень тройки. Противоречие.
Ответ: нет. ■

Идея минимальной суммы

Пусть на доске написано 100 различных натуральных чисел, сумма которых равна 5120. Может ли на доске быть написано число 230?

► Предположим, что на доске написано число 230. Тогда наименьшая сумма будет достигаться при наименьших возможных оставшихся 99-ти чисел, следовательно,

$S_{min} = 1 + 2 + \ldots + 98 + 99 + 230 = \dfrac{1 + 99}{2} \cdot 99 + 230 = 4950 + 230 = 5180 > 5120$.

Получили, что наименьшая возможная сумма превосходит данную, следовательно, ответ: нет. ■

Решение уравнений, используя делимость

Из квадратного листа бумаги в клетку, содержащего целое число клеток, вырезали квадрат, содержащий целое число клеток так, что осталось 124 клетки. Сколько клеток мог содержать первоначальный лист бумаги?

► Так как первоначальный лист квадратный, то пусть в нем было x^2 клеток. Так как вырезали также квадрат, то пусть вырезали y^2 клеток. Тогда получаем уравнение $x^2 - y^2 = 124$, откуда

$$(x - y)(x + y) = 124 = 2 \cdot 2 \cdot 31$$

Мы получили уравнение в целых числах. Таким образом, каждый из множителей $x - y$ и $x + y$ является делителем числа 124. Значит, хотя бы один из этих множителей чётен, так как чётно число 124. Так как сумма или разность чисел одинаковой чётности чётна, а разной — нечётна, то x и y имеют одинаковую чётность. Следовательно, $x + y$ и $x - y$ чётны. Следовательно

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 62 \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = 62 \\ x - y = 2 \end{cases} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 32 \\ y = 30 \end{cases}$$

У первой системы получили отрицательные значения, что противоречит тму, что числа натуральные. Следовательно, ответ: $x^2 = 32^2 = 1024$. ■

Выделение целой части для оценки выражения

- Найдите все натуральные n, при каждом из которых дробь

$$\frac{2n^2 - 3n + 7}{2n - 1}$$

является целым числом.

► Выделим целую часть дроби, то есть разделим числитель на знаменатель:

$$N = \frac{2n^2 - n - 2n + 7}{2n - 1} = n - \frac{2n - 7}{2n - 1} = n - 1 + \frac{6}{2n - 1}$$

Число N будет целым, если целым будет число $\frac{6}{2n-1}$. Таким образом, число $2n - 1$ должно быть делителем числа 6. Следовательно, $2n - 1 \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$, откуда получаем натуральные $n = 1; 2$. ■

- $x, y \in N$, для которых выполнено равенство $x^2(y - 5) + 4x - 4 = 0$. При каком x значение y наименьшее?

► Так как числа натуральные, то есть $x \geqslant 1$, то выразим y :

$$y = 5 - \frac{4x - 4}{x^2}$$

y принимает наименьшее значение, когда дробь принимает наибольшее значение. Рассмотрим функцию при $x > 0$:

$$f(x) = \frac{4x - 4}{x^2}$$

Исследуем ее. Найдем производную:

$$f'(x) = -\frac{4x(x - 2)}{x^4}$$

Следовательно, $x = 2$ — точка максимума. Тогда $f_{max} = f(2) = 1$. Тогда наименьшее значение $y_{min} = 4$. ■

Прогрессии

- Арифметическая прогрессия — это последовательность чисел $\{a_n\}$, члены которой связаны следующим соотношением: $a_n = a_{n-1} + d$, где число d называется разностью арифметической прогрессии.

Важные равенства:
  - $a_n = a_1 + (n - 1)d$
  - $a_{n-1} + a_{n+1} = 2a_n$
  - $a_{n-k} + a_{n+k} = 2a_n$
  - $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$
  - $S_n = \dfrac{2a_1 + (n - 1)d}{2} \cdot n$

- Геометрическая прогрессия — это последовательность чисел $\{b_n\}$, члены которой связаны соотношением $b_n = b_{n-1} \cdot q$, где число q называется знаменателем геометрической прогрессии.

Важные равенства:
  - $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$
  - $\sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}} = b_n \quad (b_i \geqslant 0)$
  - $\sqrt{b_{n-k} \cdot b_{n+k}} = b_n \quad (b_i \geqslant 0)$
  - $S_n = \dfrac{b_n \cdot q - b_1}{q - 1}$
  - $S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$

Пример, где используется

Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($n \geqslant 3$). Найдите все возможные значения n, если сумма всех данных чисел равна **129**.

► Пусть первый член равен a, разность равна d. Тогда $129 = 0,5(2a + d(n - 1))n$, откуда $(2a + d(n - 1))n = 2 \cdot 3 \cdot 43$. Следовательно, n является делителем числа $2 \cdot 3 \cdot 43$.
При $n \geqslant 43$ имеем $(2a + d(n - 1))n > (2 + 1 \cdot 42) \cdot 43 = 44 \cdot 43 > 2 \cdot 3 \cdot 43$. Следовательно, $n = 6$ или $n = 3$.
При $n = 3$ получим $a + d = 43$. Тогда условию задачи удовлетворяют $a = 1$ и $d = 42$. Получим последовательность $1, 43, 85$.
При $n = 6$ получим $2a + 5d = 43$. Тогда условию задачи удовлетворяют $a = 4$ и $d = 7$. Получим последовательность $4, 11, 18, 25, 32, 39$. ■

Линейное диофантово уравнение

Это уравнение $ax + by = c$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $x, y \in \mathbb{Z}$.
Оно имеет решения тогда и только тогда, когда c делится на НОД$(a, b) = d$.
Тогда $a = a_1 d$, $b = b_1 d$, $c = c_1 d$. Если $(x_0; y_0)$ — некоторое частное решение уравнения, то все решения задаются формулами $x = x_0 + b_1 t$, $y = y_0 + a_1 t$, $t \in \mathbb{Z}$.

Как найти частное решение линейного диофантова уравнения

Пусть дано уравнение $5x - 7y = 3$. Выразим

$$x = \frac{7y + 3}{5} = y + \frac{2y + 3}{5}$$

Остаток при делении на 5 числа y равен $r \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$. Тогда $y = 5k + r$, откуда получаем $2y + 3 = 10k + 2r + 3$. Следовательно, $2r + 3$ должно делиться на 5. Значит $r = 1$. Тогда $y = 5k + 1$ и $x = y + \frac{10k+5}{5} = 7k + 2$.