Det gælder at

$$w_{it} = \hat{p}_{it} b_{it} + \alpha_i \left(1 - \sum_j \hat{p}_{jt} b_{jt} \right) + u_{it} \tag{1}$$

hvor

$$\hat{p}_{it} \equiv \frac{p_{it}}{\mu_t}$$

Data er w_{it} og $\hat{p}_{it}$ og parametre der skal estimeres er b_{it} og α_i. Ved at summere (1) ses det at:

$$1 - \sum_i \alpha_i = \left(1 - \sum_i \alpha_i \right) \sum_i \hat{p}_{it} b_{it} + \sum_i u_{it} \tag{2}$$

idet det anvendes at $\sum_i w_{it} = 1$ per definition. Der er så vidt jeg kan se ikke noget der sikrer at $\sum_i \alpha_i = 1$. Lad i_0 være den vare vi smider ud af problemet fordi budgetandelene summer til 1. Vi kan da antage at:

$$\alpha_i = \frac{e^{\gamma_i}}{1 + \sum_{j \neq i_0} e^{\gamma_j}}, \; i \neq i_0. \tag{3}$$

Hvorfor er dette ok? Lad os antage vi definerede α_i som en almindelig logit:

$$\alpha_i = \frac{e^{\gamma_i}}{\sum_j e^{\gamma_j}}$$

Det ville da gælde at γ_j'erne ikke var identificerede da

$$\frac{e^{\gamma_i}}{\sum_j e^{\gamma_j}} = \frac{e^{\gamma_i + x}}{\sum_j e^{\gamma_j + x}}$$

for alle x. Vi kan derfor vælge en af γ_j'erne frit. Lad os vælge $\gamma_{i_0} = 0$. Dette giver (3).

Bemærk at specifikationen (3) sikrer at $\sum_i u_{it} = 0$ i følge (2). Også selv om vi har smidt en vare ud.

Likelihoodfunktionen

Likelihoodfunktionen ser således ud

$$L = -\frac{(n-1)\,T}{2} log\,(2\pi) - \frac{T}{2} log\,(|\Omega|) - \frac{1}{2} \sum_t u_t' \Omega^{-1} u_t$$

Det er problematisk at både $|\Omega|$ og Ω^{-1} optræder i funktionen. Heldigvis gælder det at

$$|\Omega| = \frac{1}{|\Omega^{-1}|}$$

Definer

$$A \equiv \Omega^{-1}$$

Likelihood-functionen ser da således ud

$$L = -\frac{(n-1)T}{2} log(2\pi) + \frac{T}{2} log(|A|) - \frac{1}{2}\sum_t u_t' A u_t$$

Da Ω er symmetrisk er A symmetrisk. I kan gå direkte efter at estimere A. I kan så bagefter beregne Ω.

I relation til implementering i GAMS er det værd at bemærke at:

$$u_t' A u_t = \sum_i \sum_j a_{ij} u_{it} u_{jt}$$

Man kan sikre sig at A er symmetrisk ved at tilføje ligninger:

$$a_{ij} = a_{ji}$$

Og så den svære: Beregning af determinanten $|A|$.

Jeg fandt et link: https://forum.gamsworld.org/viewtopic.php?t=7030

Det gælder at

$$|A| = \prod_{j=1}^{n} r_j \tag{4}$$

hvor r_j er den j'te egenværdi. Lad $(v_{i1}, .., v_{in})$ være den i'te normaliserede egenvektor (defineret nedenfor).

Vi kan finde egenværdierne med GAMS-kode med følgende lininger (jeg forstår det næsten). Egenværdier og egenvektorer er defineret ved:

$$a_{ij} = \sum_s v_{is} r_s v_{js}$$

Normalisering indebærer at:

$$\sum_j v_{ij}^2 = 1$$

Determinanten beregnes nu fra (4).