

# Estimering af CES produktionsfunktioner i MAKRO

Anders F. Kronborg, Kristina A. Poulsen og Christian S. Kastrup

17. august 2020

## Resumé

I dette arbejdspapir estimeres substitutionselasticiteterne mellem de forskellige produktionsfaktorer i MAKRO. Dette gøres ved at estimere en ligning for den relative efterspørgsel efter forskellige input i en nestet CES produktionsfunktion. Data er årsdata for tidsperioden 1967-2017, primært baseret på nationalregnskabstal. Idet den teknologiske udvikling er uobserverbar og potentielt ikke-lineær, specificeres en proces for den relative faktorefficiens, der er tidsvarierende. Vi anvender Kalmanfilteret til, simultant, at estimere CES-elasticiteterne såvel som den teknologiske udvikling. Det antages, at sidstnævnte udvikler sig trægt og udtrykker langsigtede trends. Tilgangen i analysen giver velspecificerede modeller med parameterestimater, der minder om analyser på lignende data for Danmark. Punktestimaterne opnås dog med en vis usikkerhed.

# 1 Introduktion

I MAKRO antages det, at den samlede produktion opnås ved at benytte følgende faktorer som input: Maskinkapital, arbejdskraft, bygninger og råstoffer, som består af energi- og materialeinput. Der anvendes en nestet CES-produktionsfunktion, hvor der vælges mellem to faktorer ad gangen. Den nastede CES-struktur tillader forskellig grad af substitution mellem faktorer ved ændringer i priser og teknologi. Faktorefterspørgslen bestemmes dels af den samlede produktion, der øger efterspørgslen efter samtlige faktorer, dels af substitution mellem faktorer som følge af forskydninger i det relative forhold mellem faktorernes pris og effektivitet. Teknologiske fremskridt, f.eks. arbejdskraftbesparende fremskridt, udtrykker forskydninger i faktorernes relative effektivitet, der resulterer i substitution, der ikke kan forklares af skift i de relative priser. Et velkendt problem opstår imidlertid ved, at de to sidste effekter ikke kan adskilles uden yderligere antagelser. Med andre ord, så forudsætter estimation, at man laver en identificerende antagelse om teknologiens tidsmæssige udvikling.

Vi følger metoden, der er detaljeret beskrevet i Kronborg et al. (2019) og anvender Kalman-filteret til, simultant, at estimere CES-elasticiteterne såvel som den teknologiske udvikling.<sup>1</sup> Teknologisk udvikling identificeres ved at antage, at det er en træg proces, der udtrykker de langsigtede trends i økonomien. Herudover antages, at tilpasningen til den ønskede faktorefterspørgsel sker trægt, og vi estimerer derfor faktorefterspørgslen på fejlkorrektionsform. Vi ser på følgende private sektorer: landbrug, byggeri, energi, udvinding, fremstilling, søtransport og tjenester. Hver af disse sektorer antages at benytte de nævnte produktionsfaktorer. Det anvendte data har årlig frekvens og dækker over perioden 1967-2017. I dette notat præsenteres resultaterne af estimationerne og de sammenlignes med andre studier. Herudover dokumenteres robustheden over for en række metodiske valg.

Strukturen i resten af notatet er som følger: I afsnit 2 præsenteres nest-strukturen samt den estimerede model. Ligeledes redegøres for nogle metodemæssige overvejelser såvel som alternative specifikationer, der tidligere har været forsøgt. Afsnit 3 beskriver det anvendte data, herunder det anvendte udtryk for user cost af kapital. De estimerede elasticiteter og andelsparametre fremgår af afsnit 4. Afsnit 5 indeholder en robusthedsanalyse, mens afsnit 6 opsummerer.

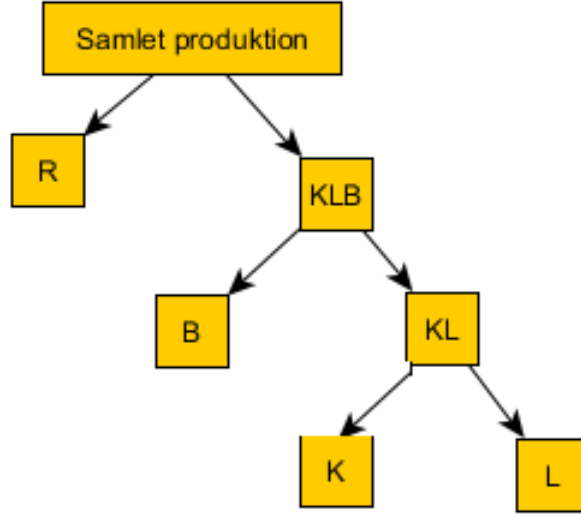
## 2 Beskrivelse af metode

Produktionen følger en nestet CES-produktionsfunktion, hvor virksomhederne benytter maskinkapital ( $K$ ), arbejdskraft ( $L$ ), bygninger ( $B$ ) og råstoffer, dvs. energi- og materialeinput ( $R$ ) som faktorinput. Faktorerne er ordnede, så virksomheden først antages at vælge mellem  $K$  og  $L$ , der

---

<sup>1</sup>Der henvises til dette papir for nærmere gennemgang af metoden samt dennes præstation i et simulationsstudie.

Figur 1: Nest-struktur i MAKROs produktionsfunktion.



samlet giver et KL-aggregat (“nederst” i neststrukturen). Herefter vælges sammensætningen af KL-aggregatet og B, hvorefter virksomheden til sidst bestemmer sammensætningen af KLB-aggregatet og R. I CES-lingo siger vi, at produktionen følger en KLBR-struktur. Denne struktur er illustreret i figur 1.

Produktionen i hvert nest er givet ved CES produktionsfunktionen

$$Y_t = \left[ (\Gamma_{1t} X_{1t})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (\Gamma_{2t} X_{2t})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}, \quad (1)$$

hvor  $Y_t$  er samlet output eller aggregatet (f.eks. KL-aggregatet) i et givent nest på tidspunkt  $t$ ,  $X_{it}$  er den anvendte mængde af produktionsfaktor  $i$  og  $\sigma$  er den konstante substitutionselasticitet, dvs. den procentvise ændring i den relative efterspørgsel mellem  $X_{1t}$  og  $X_{2t}$  ved en én procents ændring i deres relative pris.  $\Gamma_{it}$  er et effektivitetsindeks, der angiver augmenterende (eller faktorudvidende) teknologiske ændringer for faktor  $i$ . I hvert nest er prisen dannet som et Paasche prisindeks, og den efterspurgte mængde er dannet givet en antagelse om omkostningsminimering under bibetingelse af et givent nest-aggregat. Med antagelsen om omkostningsminimerende virksomheder fås den velkendte CES-efterspørgselsfunktion, der kan omskrives til at beskrive de relative udgiftsandele for de to produktionsfaktorer således:

$$\log \left( \frac{P_{1t} X_{1t}}{P_{2t} X_{2t}} \right) = (\sigma - 1) \log \left( \frac{\Gamma_{1t}}{\Gamma_{2t}} \right) + (1 - \sigma) \log \left( \frac{P_{1t}}{P_{2t}} \right), \quad (2)$$

hvor  $P_{it}$  er prisen på faktor  $i$ . Specialtilfældet  $\sigma = 1$  giver en Cobb-Douglas produktionsfunktion med konstante relative udgiftsandele. Det andet specialtilfælde,  $\sigma = 0$ , giver en Leontief pro-

duktionsfunktion, hvor der ikke sker substitution mellem faktorerne grundet prisændringer, men udelukkende pga. teknologiske ændringer. Endeligt er det værd at bemærke, at teknologiske ændringer af Hicks-neutral karakter ikke påvirker det relative teknologi-niveau mellem de to faktorer,  $\Gamma_{1t}/\Gamma_{2t}$ , og derfor heller ikke de relative udgiftsandele.

Man kan tænke på ligning (2) som det langsigtede eller ønskede forhold i udgiftsandelene. For at tillade kortsigtdynamik, indlejres denne langsigtsrelation i en fejlkorrektionsmodel (svarende til tilgangen i det omtalte arbejdspapir). På den måde tages højde for eventuelle tilpasningsomkostninger, f.eks. i kapitalapparatet, som medfører at tilpasningen til den ønskede fordeling af faktorinput i produktionen sker trægt. I de tilfælde hvor residualerne er autokorrelerede, forsøges dette at udbedres ved at tilføje laggede ændringer i de relative priser og udgiftsandele.

Endeligt defineres  $\mu_t \equiv (\sigma - 1) \log \left( \frac{\Gamma_{1t}}{\Gamma_{2t}} \right)$ . Processen for den uobserverede komponent,  $\mu_t$ , antages at følge en  $I(2)$ -proces. Denne antagelse sikrer, at teknologi er en træg (eller “smooth”) serie og svarer til den antagelse, der gøres i et HP-filter, hvor der kan være “mellemsigtet” variation i teknologisk udvikling. MAKROs metode kan derfor ses som værende et udvidet HP-filter. Variansforholdet mellem modellens residualer og den for  $\Delta\mu_t$  svarer ligeledes til smoothing-parameteren i et HP-filter (det inverse støj-signal forhold,  $\lambda$ ). Specialtilfældet  $\lambda = 0$  medfører, at alt kortsigtsstøj i de relative udgiftsandele, der ikke skyldes skift i de relative priser, tilskrives teknologiske fremskridt. Omvendt medfører  $\lambda \rightarrow \infty$  en lineær trendantagelse om den tidsmæssige udvikling i den relative faktorefficiens. Vi lader graden af smoothing være datadrevet på følgende vis: For alle brancher og nests estimeres modellen med en værdi for  $\lambda$ , der varierer mellem 100 og 1.000 med en skridtlængde på 10.<sup>2</sup> Herefter vælges den værdi, der giver den højeste likelihood, betinget på at modellen er velspecificeret - dvs. ingen autokorrelation samt at filteret er velkalibreret, målt fra et NIS-test.<sup>3</sup> Denne fremgangsmåde har også den fordel, at den foretrukne model per konstruktion vil være velspecificeret, dvs. at residualerne ikke er autokorrelerede og at variansrestriktionen er konsistent. I afsnit 5 foretages et robusthedstjek af forskellige støj-signal forholds effekt på elasticitetsestimater.

Specifikationen af den relative teknologiudvikling udgør modellens tilstandsligning, mens fejlkorrektionsomskrivningen af (2) udgør observationsligningen. Dermed er problemet opskrevet som en lineær state-space model, hvorved Kalman filteret kan anvendes til at estimere elasticiteten simultant med, at der opnås en beskrivelse de tidsvarierende teknologiske ændringer.

---

<sup>2</sup>Et andet alternativ er at estimere  $\lambda$  frit med maximum likelihood. Vi finder dog i Kronborg et al. (2019) at det ikke nødvendigvis fører til et bedre fit af data end grid søgningen og at den resulterende model relativt ofte er misspecificeret.

<sup>3</sup>Normalized Innovation Squared test (NIS) er en test for filter misspecification. Der henvises til det omtalte arbejdspapir for nærmere beskrivelse af denne test.

### 3 Data

Som udgangspunkt estimeres modellen baseret på data for den længst mulige periode, dvs. årlig data for perioden 1967-2017.<sup>4</sup> Variablene stammer dels fra den statiske kalibrering af MAKRO, dels fra ADAMs databank. Vi har valgt at bruge alle dataårene i vores foretrukne model, men ser også på robustheden over for en kortere periode. Produktionsfunktionerne estimeres på sektorniveau som de indgår i MAKRO, dvs. opdelt på henholdsvis landbrug, byggeri, energi, udvinding, fremstilling, søtransport samt tjenester. I de tilfælde, hvor opdelingen af sektorer i MAKRO er forskellig fra nationalregnskabet, vægtes faktorerne sammen baseret på deres størrelse i nominelle termer. Lønningerne og timerne fordelt på sektorer tages fra ADAMs databank i stedet for direkte fra MAKRO. Det skyldes, at der i MAKRO antages at være den stort set samme løn på tværs af brancher samt at arbejdskraften i MAKRO er opgjort i effektive enheder frem for antal timer. Der skelnes som nævnt mellem to kapitaltyper: Maskinkapital og bygninger. Som konsekvens beregnes et såkaldt *user cost*-udtryk (den samlede omkostning ved at eje og bruge én enhed kapital) for begge kapitaltyper. I MAKRO udledes *user cost* ud fra virksomhedernes førsteordensbetingelse. I dette notat tages udgangspunkt i en statisk version af dette *user cost*-udtryk (se appendiks A). De skattemæssige afskrivningsrater er fra ADAMs database og den statiske afskrivningsrate er kalibreret for at sikre konsistens mellem kapital- og investeringsserierne. For at undgå for meget støj i realrenten udglattes forventningerne til prisstigningstaksten i investeringsprisen: I stedet for statiske inflationsforventninger anvender vi i vores foretrukne model den HP-filtrerede inflationsrate med en parameter på 100 i den foretrukne modelavl. Denne variabel er den eneste i *user cost*-udtrykket, der udglattes. Som et robusthedscheck har vi ligeledes kørt estimationerne på baggrund af adaptive inflationsforventninger. Som rentevariabel til beregning af *user cost* anvendes den gennemsnitlige obligationsrente, men som robusthedscheck forsøges også med pengeinstitutternes gennemsnitlige udlånsrente. Vi finder generelt at resultaterne er robuste overfor forskellige renteudtryk og inflationsforventninger. Prisindeksene for hvert nest er beregnet som et Paasche kædeprisindeks, som ikke er meget forskelligt fra CES prisindekset, givet at produktionsfunktionen er CES, da det er et superlativt prisindeks. De samlede mængder, der produceres i hvert nest, følger af en nulprofitantagelse. Produceret mængde i det “øverste” nest (KLB og R) kan dermed ses som et mål for det samlede output, og prisen er her prisen på samlet output, dog justeret for en markup, således at nulprofitantagelsen holder. De relative faktorpriser og relative budgetandele, der anvendes i estimationerne, er vist i appendiks B.

---

<sup>4</sup>Vi har data for de fleste serier fra 1967, men mangler to observationer på kapitalafgiftssatsen. Desuden indgår investeringsprisen med et lag. Vi mister den sidste observation i 2017, fordi der i kalibreringen af afskrivningsraten indgår det leadede kapitalapparat.

## 4 Estimationsresultater

I dette afsnit præsenteres resultaterne af vores foretrukne model- og dataspecifikation, mens afsnit 5 ser på robustheden af resultaterne over for andre specifikationer. Tabel 1 giver et overblik over punktestimaterne for CES elasticiteterne i den foretrukne modelspecifikation, fordelt på brancher og på nests. Tabellerne 5-11 i appendiks C viser de estimerede modeller for hvert CES-nest i større detaljeringsgrad. Det er naturligt at sammenligne resultaterne med lignende studier på dansk data, f.eks. Thomsen (2015) (herefter Thomsen) og estimationerne foretaget til brug i ADAM-modellen (herefter ADAM<sup>5</sup>) og derfor sammenholdes nogle af dem med disse analyser, der i grove træk finder lignende elasticiteter.<sup>6</sup>

Særligt for bygninger er det generelt svært at finde nogen signifikant positive substitutionselasticiteter, hvilket er et velkendt resultat fra andre studier på lignende data. Det kan skyldes, at det anvendte user cost-udtryk er et imperfekt eller støjfyldt mål for det sande niveau, der vil give en bias mod nul (mulig *attenuation bias*). Ligeledes indikerer andre studier, at et højere aggregeringsniveau ligeledes kan give en nedadrettet bias i estimaterne (*mulig aggregation bias*). En langsigtselasticitet på 0 har den implikation, at produktionen i en sektor på lang sigt kun kan rykkes, hvis bygningskapitalen flytter sig. Da bygningskapitalen af lavpraktiske grunde er en træg variabel (selv på årsdata), er dette ikke en god egenskab på kort sigt, så lave substitutionselasticiteter til bygninger må i en model suppleres med kapacitetsudnyttelse på bygningskapital (dvs. at der tillades for midlertidige afvigelse fra isokvanten). Én undtagelse er for udvindingssektoren, hvor vi derimod finder en meget høj elasticitet, der er signifikant større end 1. Det er i sig selv ikke nødvendigvis mærkeligt, idet bygninger i denne sektor for det første udgør en væsentligt større andel af den samlede faktoraflønning og for det andet kan tænkes at have en helt anden funktion end f.eks. private tjenester. Udvindingssektoren adskiller sig ligeledes fra fremstilling og tjenester ved, at den relative faktoraflønning til bygningskapital har været stødt stigende gennem estimationsperioden. Der er dog en del støj og tegn på et muligt strukturelt brud i data i udvindingssektoren. Ekskluderes den første del af perioden fås en lavere, men stadig relativt høj elasticitet, der ikke er signifikant forskellig fra Cobb-Douglas.

I KLB(R)-nestet finder vi også nul-elasticiteter for flere sektorer. Idet R er en sammenvægtning af energi- og materialeinput, er dette konsistent med estimater med samme metode, men med en KELM-neststruktur (se Kronborg et al., 2019). Her fandt vi, at energi og materialer begge typisk havde relativt lav eller ingen signifikant substitution ift. priser (i lighed med ADAM). Noget indikerer, at antagelsen om kortsigtdynamik er betydende for elasticiteten til materialer: Vi

---

<sup>5</sup>ADAM-gruppen opdaterer med mellemrum sine estimater, der dokumenteres i en række af arbejdsrapporter - senest i Gustafsson (2014). Typisk er der tale om små bevægelser i punktestimaterne mellem opdateringer, men det betyder, at de refererede punktestimater i teksten kan være forskellige fra de senest anvendte.

<sup>6</sup>Disse analyser adskiller sig fra nærværende bl.a. ved en lidt anderledes branche- eller nest-struktur som foretrukken specifikation, hvorfor en én-til-én sammenligning ikke umiddelbart kan foretages.

Tabel 1: Oversigt, estimerede CES elasticiteter (foretrukken specifikation).

	Nest		
Sektor	(K)L	(KL)B	(KLB)R
Landbrug	0,08	0	0
Byggeri	0,03	0	0,41
Energi	0,04	0	0,10
Udvinding	0,33	1,57	0
Fremstilling	0,51	0,05	0,53
Søtransport	0,07	0	0
Tjenester	0,42	0	0

har tidligere estimeret modellerne på statisk form, dvs. hvor økonomien også på kort sigt implicit antages at befinde sig på isokvanten i lighed med Thomsen. Denne specifikation giver generelt højere substitutionselasticiteter på materialeinput. Det skal bemærkes, at neststrukturen her var lidt anderledes (KELM, dvs. energi og materialer var opsplittet). I byggeriet og fremstillingssektoren samt, i mindre grad, i energisektoren finder vi positive og moderate substitutionselasticiteter i R-nestet hvilket er et robust resultat for modelspecifikation og estimationsperiode.

Lad os for KL-nestet starte med at se på de to store private sektorer, dvs. fremstilling og tjenester: I begge finder vi moderate elasticiteter: I vores foretrukne modelspecifikation finder vi punktestimater på henholdsvis 0,51 og 0,42. Som med de andre resultater bidrager den korte estimationsperiode til en ikke-uvæsentlig usikkerhed omkring estimerne, men det bør bemærkes, at de ligger relativt tæt på - eller lidt højere end - dem der findes i andre danske studier: For fremstilling finder ADAM en elasticitet på 0,25 (dog 0,65 for næringsmidler, som MAKRO medtager i fremstilling), Thomsen ca. 0,4. For tjenester finder ADAM ca. 0,3 og Thomsen 0,5-0,6. Kastrup (2019) bruger samme metode som i denne dokumentation, men estimerer KL-elasticiteten på en række OECD-lande og finder en KL-elasticitet for den samlede private sektor, der ligger omkring 0,3-0,5 for de fleste økonomier. Den danske estimeres til 0,52 og ikke signifikant forskellig fra estimatet i service eller tjenester i indeværende notat. Et andet papir, der estimerer elasticiteten på dansk data, og som tillader ikke-lineær teknologisk udvikling via en Box-Cox trend er Muck (2017) som finder en elasticitet i spændet mellem 0,3 og 0,7. Elasticiteterne for sektorerne landbrug, byggeri, energi og søtransport er relativt usikkert bestemt, men findes generelt at være lave på tværs af modelspecifikationer.

## 5 Robusthed

I dette afsnit ses på robustheden af de estimerede elasticiteter. Da prisen på kapital, dvs. user cost-udtrykket er den variabel, der i størst grad afhænger af de antagelser man gør, undersøges

Tabel 2: Robusthed: Elasticiteter ved alternative inflationsforventninger.

Sektor	Nest	
	(K)L	(KL)B
Landbrug	0,01 (0,08)	0 (0)
Byggeri	0,03 (0,03)	0 (0)
Energi	0,05 (0,04)	0 (0)
Udvinding	0,31 (0,33)	0 (1,57)
Fremstilling	0,24 (0,51)	0 (0,05)
Søtransport	0,10 (0,07)	0 (0)
Tjenester	0,46 (0,42)	0 (0)

Anm.: Viser estimaterne fordelt på brancher og nest ved at anvende adaptive inflationsforventninger. Punktestimaterne sammenlignes med den foretrukne model (HP-filtrerede inflationsforventninger), der er angivet i parentes.

først effekterne af at variere user cost-udtrykket med andre inflationsforventninger (tabel 2) og en anden rente (tabel 3). Herefter analyseres robustheden over for en kortere estimationsperiode (4) og endeligt over for graden af smoothing for teknologiske ændringer, dvs. værdier af  $\lambda$  - se afsnit 2 (tabel 12-18, se appendiks E).

Først ses på en alternativ forventningsdannelse i forhold til prisstigningstakten på den relevante investeringspris i user cost-udtrykket. Som nævnt giver statiske inflationsforventninger anledning til en realrente, der er meget volatil i starten af estimationsperioden og som derfor er svær at estimere på. Et alternativ til at bruge HP-filteret kunne derfor være at bruge adaptive forventninger til inflationsraten. Tabel 2 viser resultaterne med en adaptiv forventning som "opdateres" med en faktor 0,2 for sidste periodes inflation af 0,8 for sidste periodes inflationsforventninger (der er kun vist for (K)L- og (KL)B-nestene, da kædeprisindeksene for (KLB)R-nestet er næsten upåvirket af ændringerne i user cost-udtrykkene). I de fleste sektorer og nest betyder inflationsforventningerne relativt lidt for elasticitetsestimaterne (ofte ud på 2. decimal). 0-elasticiteterne for bygninger i vores foretrukne modelspecifikation genfindes eksempelvis. Mindst robust er elasticiteten på bygningskapital i udvindingssektoren der, ligesom de øvrige sektorer, ikke har en positivt, velbestemt elasticitet under adaptive inflationsforventninger. Det er ikke utænkeligt, at de databrud, der ser ud til at ske i starten af 1980'erne, særligt i udvindingssektoren gør estimaterne sensitive over for specifikationen af user cost. Endeligt betyder adaptive inflationsforventninger en halvering af elasticiteten mellem K og L i fremstilling, hvilket bringer den tæt på estimatet brugt i ADAM.

Som den relevante rente i vores foretrukne model bruges samme rente, som anvendes i MAKRO, dvs. den gennemsnitlige obligationsrente (IWBZ). Som alternativ hertil estimeres elasticiteterne, hvor der i stedet anvendes pengeinstitutternes gennemsnitlige udlånsrente (IWLO). De to renteudtryk følger hinanden relativt tæt, men der er dog forskelle, primært i starten af estimationsperioden. Elasticiteterne er vist i tabel 3 (igen vises kun de relevante nest). Ligesom med de alternative inf-



Tabel 3: Robusthed: Elasticiteter ved alternativ rentevariabel.

Sektor	Nest	
	(K)L	(KL)B
Landbrug	0,11 (0,08)	0 (0)
Byggeri	0,06 (0,03)	0 (0)
Energi	0,06 (0,04)	0 (0)
Udvinding	0,19 (0,33)	0,75 (1,57)
Fremstilling	0,37 (0,51)	0 (0,05)
Søtransport	0,11 (0,07)	0 (0)
Tjenester	0 (0,42)	0,06 (0)

Anm.: Viser estimaterne fordelt på brancher og nest ved at anvende IWLO som rentevariabel. Punktestimaterne sammenlignes med den foretrukne model (IWBZ), der er angivet i parantes.

lationsforventninger gælder det for de fleste af estimationerne, at der er en begrænset effekt af at anvende en anden rente. Mest bemærkelsesværdigt er tjenestesektoren, hvor der ikke kan findes en positiv CES-elasticitet. Dette understreger, at prissubstitutionen her generelt er svagt bestemt og forbundet med en betydelig usikkerhed. For nestet med bygningskapital genfindes resultatet fra vores foretrukne specifikation, at udvindingssektoren er den eneste med en betydelig positiv elasticitet, dog med et punktestimat på 0,75.

Som nævnt i ovenstående, indikerer nogle af graferne i figur 2-8 (og måske særligt udvinding, se figur 5), at der kan være et strukturelt brud i dataserierne, herunder et skift til lavere volatilitet i user cost-udtrykkene (“great moderation”). I tabel 4 vises derfor punktestimaterne for elasticiteterne, hvis modellen estimeres fra 1983 i stedet for den fulde periode. For det første kan det konstateres, at nul- (og “næsten nul-”) elasticiteterne fra vores foretrukne specifikation genfindes ved den kortere estimationsperiode. Det indikerer, at de lave elasticiteter ikke alene skyldes de relativt volatile user cost-udtryk i starten af estimationsperioden. Resultatet i sektorerne for byggeri og fremstilling, hvor vi fandt substitution i forhold til ressourcer (R), er relativt robust over for den kortere estimationsperiode. Det andet hovedresultat, at udvindingssektoren har en højere elasticitet ift. bygninger genfindes også, omend punktestimatet er under 1, ligesom i tabel 3. Igen findes en lav elasticitet mellem K og L i tjenester.

Endeligt undersøger vi robustheden af vores “identificerende antagelse”, dvs. trægheden i teknologisk udvikling. Foruden de tilladte værdier i vores hovedanalyse, udvides grænseværdierne for  $\lambda$  her til at være mellem 10 og 10.000. Resultaterne af elasticiteterne som funktion af  $\lambda$  er vist i tabel 12-18 i appendiks E.

Tabel 4: Robusthed: Elasticiteter estimation fra 1983.

Sektor	Nest		
	(K)L	(KL)B	(KLB)R
Landbrug	0 (0,08)	0 (0)	0 (0)
Byggeri	0,06 (0,03)	0 (0)	0,45 (0,41)
Energi	1,67 (0,04)	0,03 (0)	0 (0,10)
Udvinding	0,14 (0,33)	0,55 (1,57)	0 (0)
Fremstilling	0,31 (0,51)	0 (0,05)	0,30 (0,53)
Søtransport	0 (0,07)	0 (0)	0 (0)
Tjenester	0,05 (0,42)	0 (0)	0 (0)

Anm.: Viser estimaterne fordelt på brancher og nest ved data fra 1983 og frem. Punktestimaterne sammenlignes med den foretrukne model (fuld periode), der er angivet i parantes.

## 6 Opsummering

Produktionssiden i MAKRO er karakteriseret ved en CES-produktionsfunktion, yderligere opdelt i en nestet struktur. Vi estimerer substitutionselasticiteterne mellem produktionsfaktorerne maskinkapital, arbejdskraft, bygningskapital samt ressourcer (dvs. energi- og materialeinput). CES-elasticiteterne i produktionsfunktionerne estimeres for alle MAKROs private brancher (pånær bolig), dvs. landbrug, byggeri, energi, udvinding, fremstilling, søtransport og tjenester. Som vores foretrukne modelspecifikation estimerer vi CES-elasticiteterne baseret på den fulde periode 1967-2017. Modellen estimeres på fejlkorrigeringsform for at tillade, at nogle produktionsfaktorer tilpasser sig trægt til et ønsket niveau, f.eks. pga. tilpasningsomkostninger. Teknologiske ændringer tillades at være tidsvarierende, men pålægges den restriktion, at det skal være en træg proces. Tilgangen resulterer i velspecificerede modeller, baseret på en række økonometriske tests samt punktestimater, der minder om lignende studier på dansk data. CES-elasticiteterne er dog bestemt med en vis usikkerhed.

## A User cost

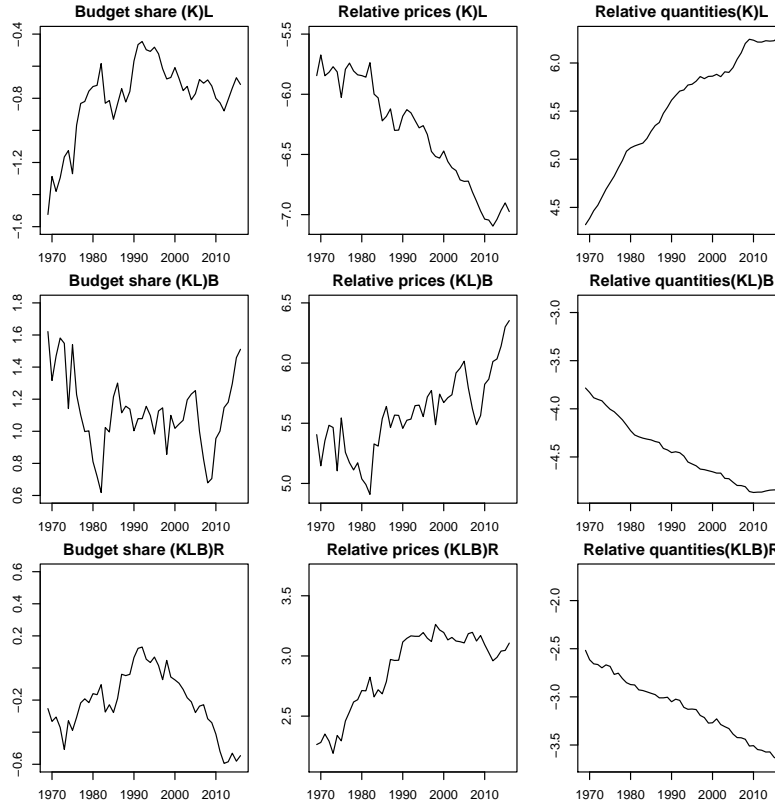
I beregningen af user cost skelnes der mellem maskin- og bygningskapital og der udregnes et user cost udtryk for begge kapitaltyper. User cost på kapital,  $p_{k,sp,t}^K$ , udledes fra virksomhedens maksimeringsproblem, hvor  $k$  er kapitaltype,  $sp$  er sektor og  $t$  er tidsperiode. Udtrykket er givet ved:

$$\begin{aligned}
P_{k,sp,t}^K &= \frac{1}{1-t_t^{Selskab}} \cdot p_{k,sp,t-1}^I \cdot \\
&\left[ \left( 1 - t_t^{Selskab} \cdot \frac{x_{k,t}^{SkatAfskr}}{x_t^{VirKDisk} + r_{k,t}^{SkatAfskr}} \right) \left( x_t^{VirKDisk} + x_{k,sp,t}^{AfskrStatic} - \left( 1 - x_{k,sp,t}^{AfskrStatic} \right) gp_{k,sp,t}^{IStatic} \right) \right. \\
&\quad + \left( 1 - t_t^{Selskab} \right) t_{t,sp,t}^K \left( 1 + gp_{k,sp,t}^{IStatic} \right) \\
&\quad \left. - t_t^{Selskab} \cdot r_t^{Rente} \cdot x_{t-1}^{Laan2K} \right].
\end{aligned}$$

$t_t^{selskab}$  er selskabsskattesats,  $p_{k,sp,t-1}^I$  er investeringsdeflator fordelt på brancher,  $x_{k,t}^{SkatAfskr}$  er skattemæssig afskrivningsrate,  $x_t^{VirKDisk}$  er selskabernes diskonteringsrate,  $x_{k,sp,t}^{AfskrStatic}$  er afskrivningsraten,  $gp_{k,sp,t}^{IStatic}$  er den forventede inflationsrate for investeringsprisen,  $r_t^{Rente}$  er obligationsrenten og  $x_{t-1}^{Laan2K}$  er andel af investeringer, som er gældsfinansierede. Dette er et udtryk for den statiske user cost, som ikke medtager installationsomkostninger.

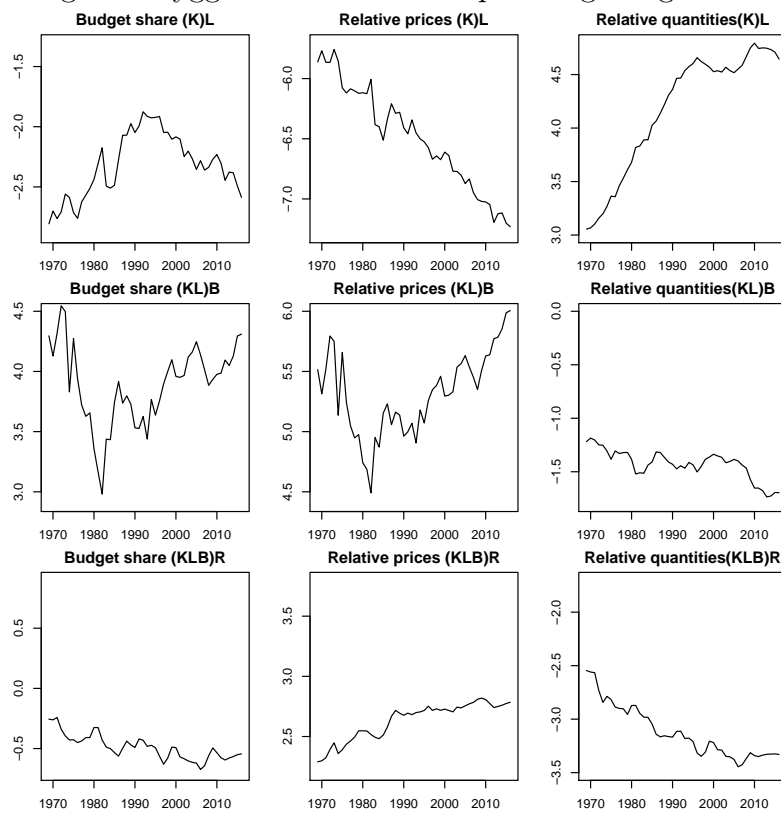
## B Dataserier

Figur 2: Landbrugssektor: Relative priser og budgetandele.



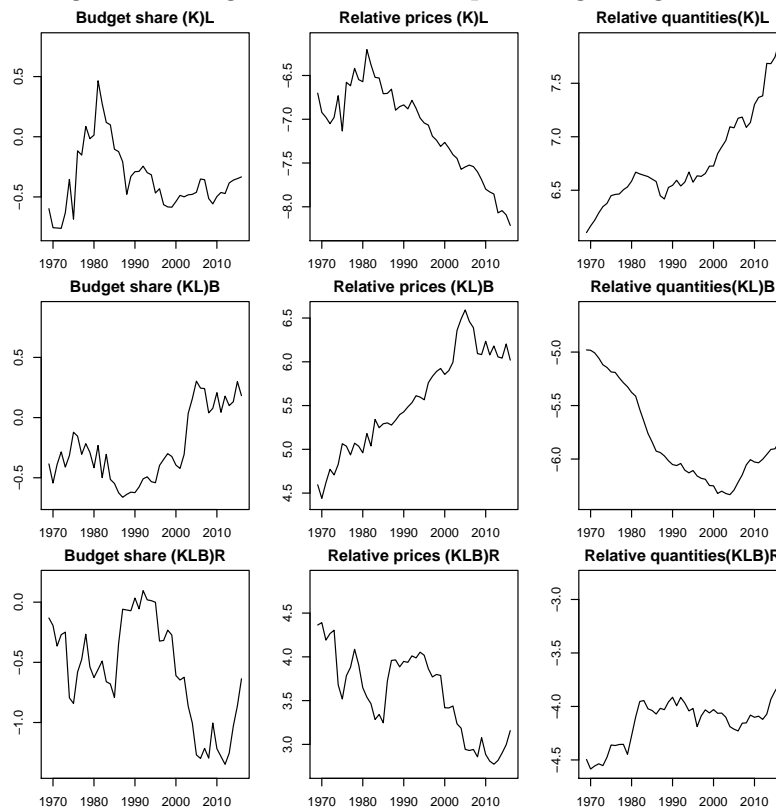
Anm.: Parenteser viser nestede faktorer.

Figur 3: Byggerisector: Relative priser og budgetandele.



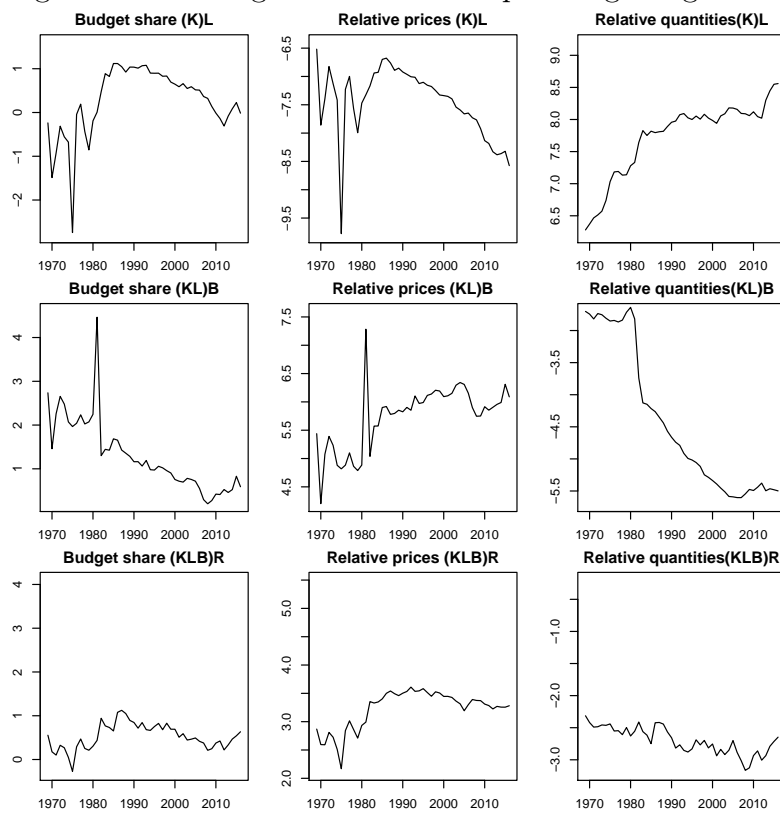
Anm.: Parenteser viser nestede faktorer.

Figur 4: Energisektor: Relative priser og budgetandele.



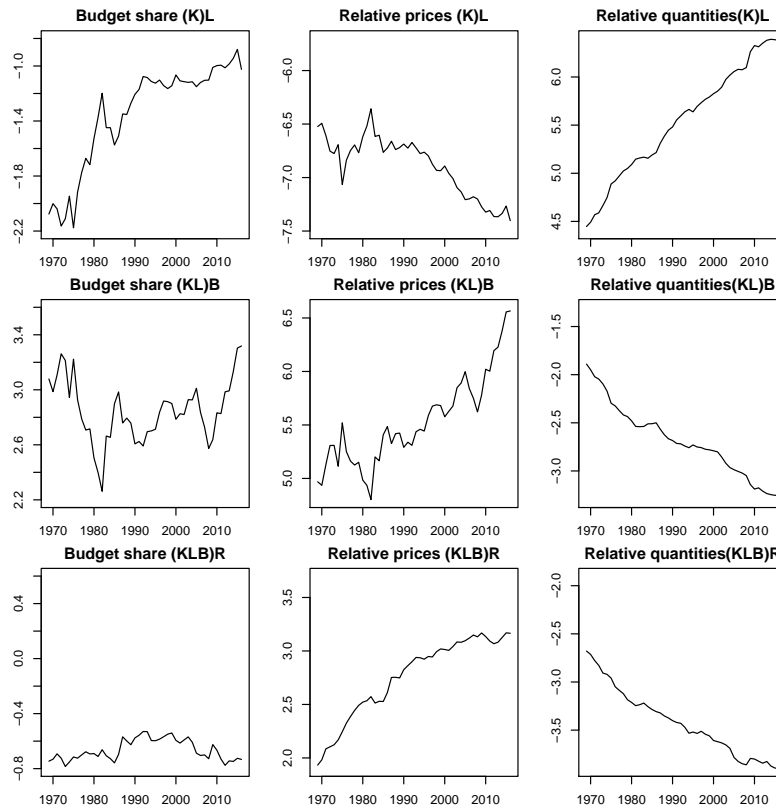
Anm.: Parenteser viser nastede faktorer.

Figur 5: Udvindingssektor: Relative priser og budgetandele.



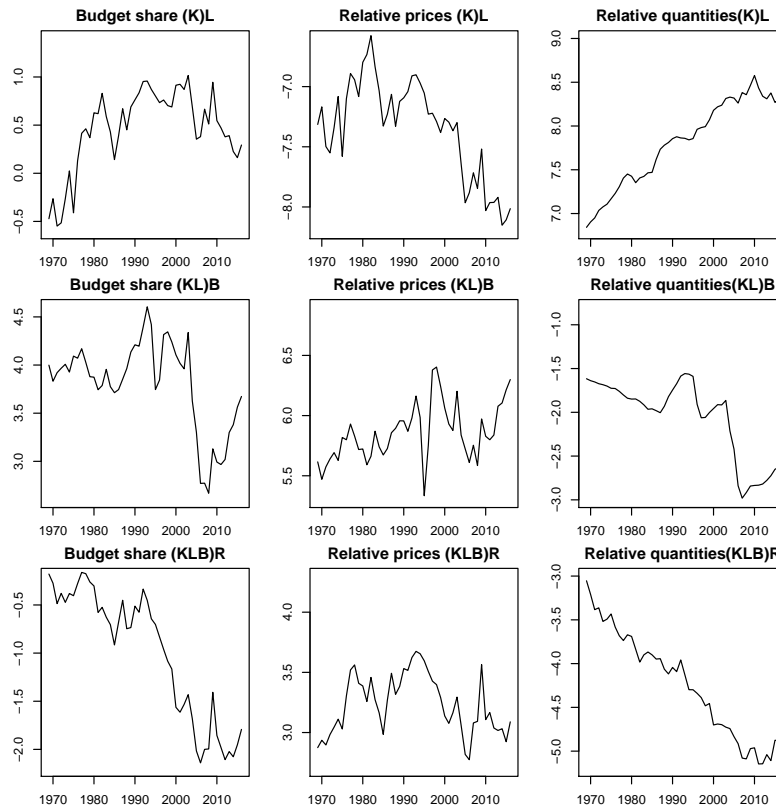
Anm.: Parenteser viser nastede faktorer.

Figur 6: Fremstillingssektor: Relative priser og budgetandele.



Anm.: Parenteser viser nastede faktorer.

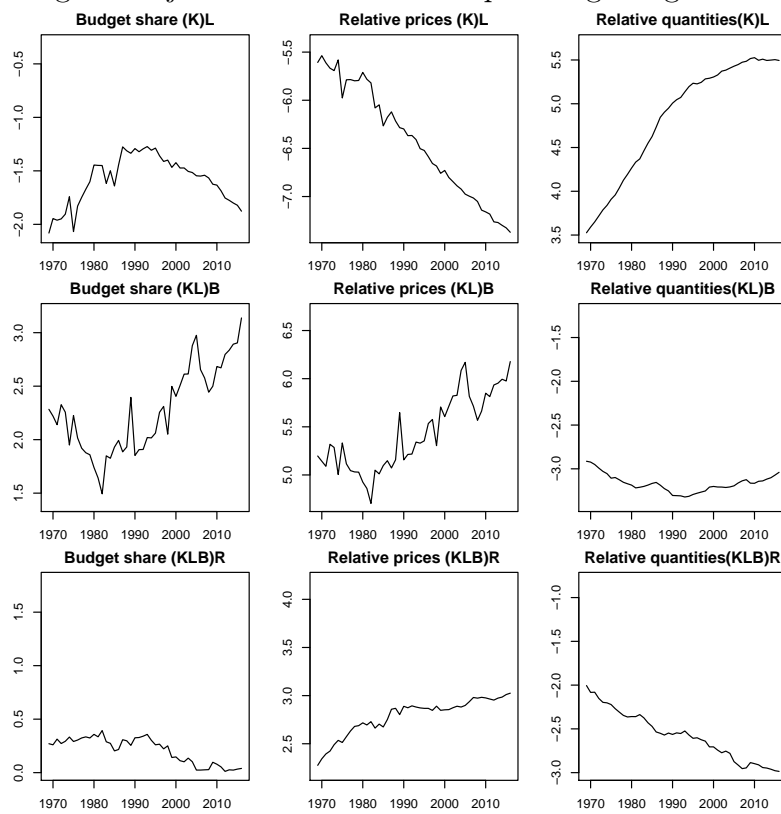
Figur 7: Søtransportsektor: Relative priser og budgetandele.



Anm.: Parenteser viser nestede faktorer.



Figur 8: Tjenestesektor: Relative priser og budgetandele.



Anm.: Parenteser viser nestede faktorer.

## C Detaljerede tabeller for estimationer (foretrukken model-specifikation)

Tabel 5: Landbrugssektor: Estimerede resultater i en ((KL)B)R nest struktur.

	(K)L	(KL)B	(KLB)R
$\sigma$	0.08 (-0.54;0.88)	0.00 (-0.14;0.11)	0.00 (-0.12;0.05)
$\alpha$	-0.17 (-0.25;-0.04)	-0.30 (-0.41;-0.10)	-0.65 (-0.80;-0.41)
nlags	0	0	0
Likelihood	116.91	140.98	129.87
$\lambda$	100.00	100.00	960.00
Autocorrelation	[ 0.12 ]	[ 0.50 ]	[ 0.84 ]
Heteroskedasticity	[ 0.21 ]	[ 0.97 ]	[ 0.65 ]
Normality	[ 0.94 ]	[ 0.17 ]	[ 0.10 ]
NIS	0.79	0.82	0.87

Anm.: Udtrykkene i parenteserne er henholdsvis nedre og øvre kritiske værdi på et 10% signifikansniveau. P-værdier for misspecifikations test er i kantede parenteser. De kritiske værdier for NIS er (0.68;1.37) på et 10% signifikansniveau.

Tabel 6: Byggerisektor: Estimerede resultater i en ((KL)B)R nest struktur.

	(K)L	(KL)B	(KLB)R
$\sigma$	0.03 (-1.33;1.13)	0.00 (-0.25;0.50)	0.41 (-0.01;0.96)
$\alpha$	-0.18 (-0.25;-0.04)	-0.23 (-0.30;-0.06)	-0.61 (-0.74;-0.38)
nlags	0	1	1
Likelihood	103.81	98.21	101.44
$\lambda$	100.00	1000.00	480.00
Autocorrelation	[ 0.57 ]	[ 0.75 ]	[ 0.77 ]
Heteroskedasticity	[ 0.74 ]	[ 0.83 ]	[ 0.79 ]
Normality	[ 0.86 ]	[ 0.13 ]	[ 0.16 ]
NIS	0.78	0.82	0.78

Anm.: Udtrykkene i parenteserne er henholdsvis nedre og øvre kritiske værdi på et 10% signifikansniveau. P-værdier for misspecifikations test er i kantede parenteser. De kritiske værdier for NIS er (0.68;1.37) på et 10% signifikansniveau.

Tabel 7: Energisektor: Estimerede resultater i en ((KL)B)R nest struktur.

	(K)L	(KL)B	(KLB)R
$\sigma$	0.04 (-0.46;0.28)	0.00 (-1.01;0.27)	0.10 (-0.16;0.26)
$\alpha$	-0.40 (-0.51;-0.20)	-0.19 (-0.21;-0.05)	-0.41 (-0.51;-0.17)
nlags	0	0	0
Likelihood	82.73	112.80	80.05
$\lambda$	100.00	100.00	100.00
Autocorrelation	[ 0.35 ]	[ 0.74 ]	[ 0.66 ]
Heteroskedasticity	[ 0.23 ]	[ 0.35 ]	[ 0.60 ]
Normality	[ 0.05 ]	[ 0.51 ]	[ 0.08 ]
NIS	0.81	0.80	0.81

Anm.: Udtrykkene i parenteserne er henholdsvis nedre og øvre kritiske værdi på et 10% signifikansniveau. P-værdier for misspecifikations test er i kantede parenteser. De kritiske værdier for NIS er (0.68;1.37) på et 10% signifikansniveau.

Tabel 8: Udvindingssektor: Estimerede resultater i en ((KL)B)R nest struktur.

	(K)L	(KL)B	(KLB)R
$\sigma$	0.33 (0.11;0.97)	1.57 (1.09;2.89)	0.00 (-0.48;0.33)
$\alpha$	-0.28 (-0.38;-0.10)	-0.19 (-0.26;-0.11)	-0.53 (-0.67;-0.29)
nlags	0	0	0
Likelihood	69.51	59.28	61.89
$\lambda$	140.00	1000.00	220.00
Autocorrelation	[ 0.29 ]	[ 0.14 ]	[ 0.97 ]
Heteroskedasticity	[ 0.59 ]	[ 0.21 ]	[ 0.26 ]
Normality	[ 0.36 ]	[ 0.00 ]	[ 0.74 ]
NIS	0.82	0.88	0.84

Anm.: Udtrykkene i parenteserne er henholdsvis nedre og øvre kritiske værdi på et 10% signifikansniveau. P-værdier for misspecifikations test er i kantede parenteser. De kritiske værdier for NIS er (0.68;1.37) på et 10% signifikansniveau.

Tabel 9: Fremstillingssektor: Estimerede resultater i en ((KL)B)R nest struktur.

	(K)L	(KL)B	(KLB)R
$\sigma$	0.51 (0.09;1.72)	0.05 (-0.17;0.50)	0.53 (0.09;0.80)
$\alpha$	-0.21 (-0.34;-0.05)	-0.19 (-0.25;-0.08)	-0.31 (-0.40;-0.12)
nlags	0	1	0
Likelihood	112.98	118.18	125.15
$\lambda$	1000.00	1000.00	1000.00
Autocorrelation	[ 0.28 ]	[ 0.76 ]	[ 0.45 ]
Heteroskedasticity	[ 0.56 ]	[ 0.83 ]	[ 0.63 ]
Normality	[ 0.00 ]	[ 0.41 ]	[ 0.18 ]
NIS	0.87	0.81	0.87

Anm.: Udtrykkene i parenteserne er henholdsvis nedre og øvre kritiske værdi på et 10% signifikansniveau. P-værdier for misspecifikations test er i kantede parenteser. De kritiske værdier for NIS er (0.68;1.37) på et 10% signifikansniveau.

Tabel 10: Søtransportsektor: Etimerede resultater i en ((KL)B)R nest struktur.

	(K)L	(KL)B	(KLB)R
$\sigma$	0.07 (-0.28;0.31)	0.00 (-0.85;1.07)	0.00 (-0.24;0.16)
$\alpha$	-0.29 (-0.45;-0.14)	-0.23 (-0.31;-0.10)	-0.64 (-0.71;-0.37)
nlags	0	2	0
Likelihood	86.30	58.81	73.32
$\lambda$	460.00	860.00	100.00
Autocorrelation	[ 0.59 ]	[ 0.98 ]	[ 0.67 ]
Heteroskedasticity	[ 0.04 ]	[ 0.14 ]	[ 0.31 ]
Normality	[ 0.70 ]	[ 0.00 ]	[ 0.97 ]
NIS	0.85	0.75	0.80

Anm.: Udtrykkene i parenteserne er henholdsvis nedre og øvre kritiske værdi på et 10% signifikansniveau. P-værdier for misspecifikations test er i kantede parenteser. De kritiske værdier for NIS er (0.68;1.37) på et 10% signifikansniveau.

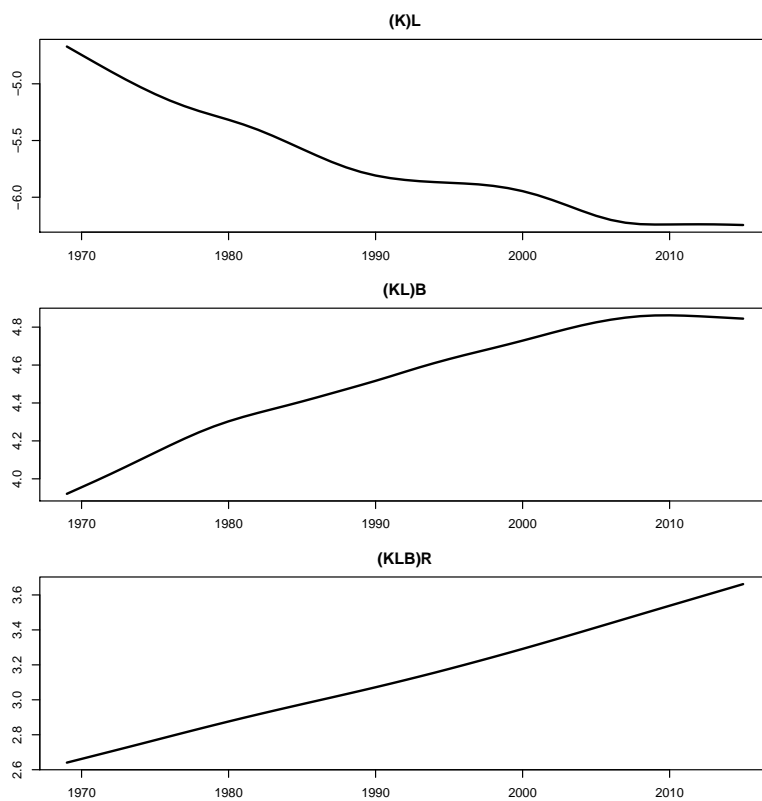
Tabel 11: Tjenestesektor: Estimerede resultater i en ((KL)B)R nest struktur.

	(K)L	(KL)B	(KLB)R
$\sigma$	0.42 (-0.70;4.03)	0.00 (-0.18;0.21)	0.00 (-1.05;0.37)
$\alpha$	-0.14 (-0.13;-0.00)	-0.23 (-0.30;-0.08)	-0.33 (-0.46;-0.13)
nlags	0	1	0
Likelihood	137.07	129.93	125.18
$\lambda$	100.00	360.00	1000.00
Autocorrelation	[ 1.00 ]	[ 0.13 ]	[ 0.55 ]
Heteroskedasticity	[ 0.13 ]	[ 0.92 ]	[ 0.84 ]
Normality	[ 0.70 ]	[ 0.25 ]	[ 0.92 ]
NIS	0.79	0.80	0.89

Anm.: Udtrykkene i parenteserne er henholdsvis nedre og øvre kritiske værdi på et 10% signifikansniveau. P-værdier for misspecifikations test er i kantede parenteser. De kritiske værdier for NIS er (0.68;1.37) på et 10% signifikansniveau.

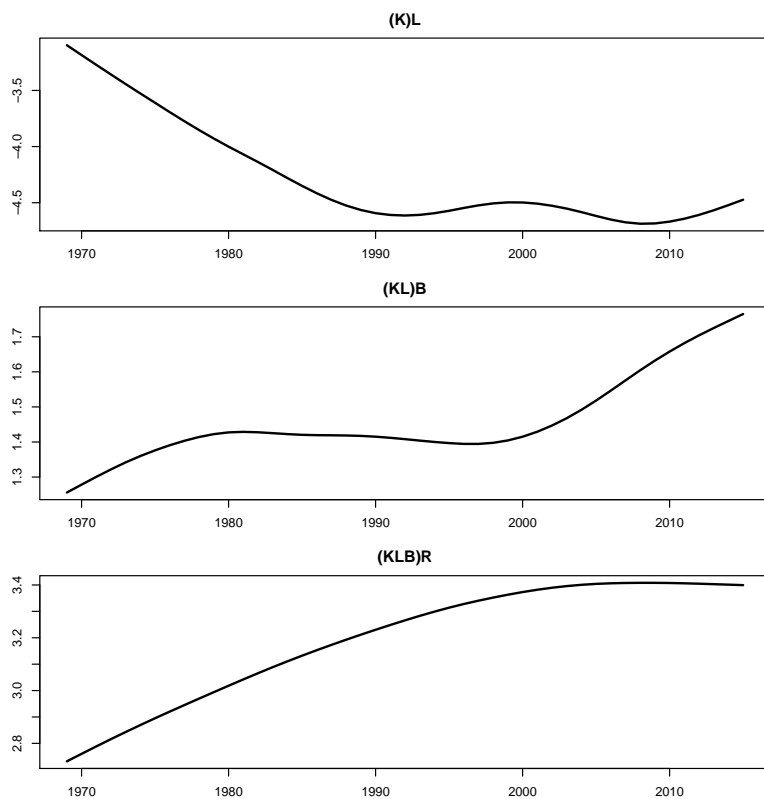
## D Fitrerede effektivitetsindeks

Figur 9: Landbrugssektor: Augmenterende teknologiske ændringer i en ((KL)B)R nest struktur.



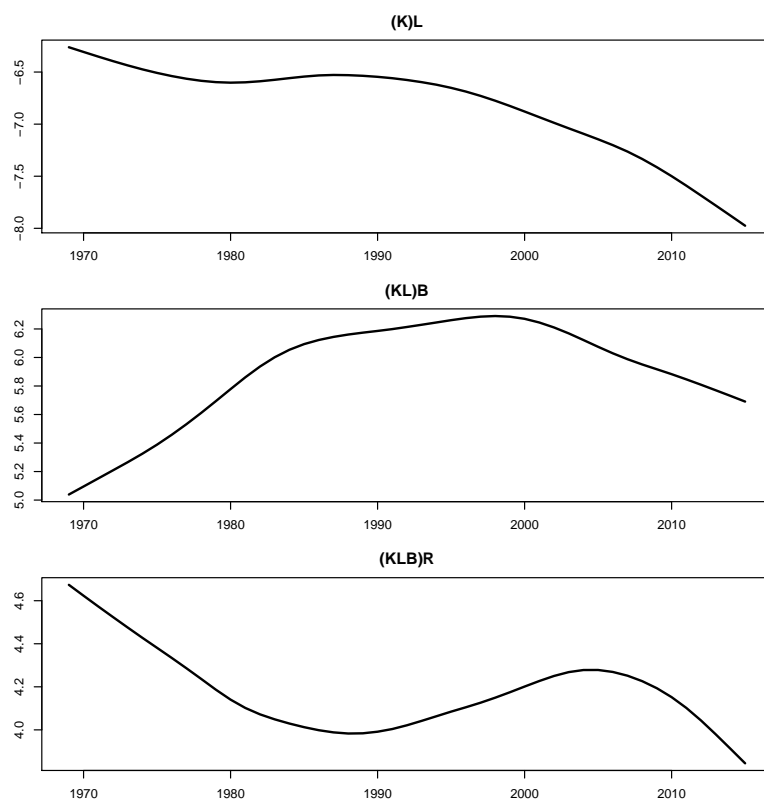
Anm.: Graferne viser de relative augmentedede teknologier af f.eks. kapital relativt til arbejdskraft.

Figur 10: Byggerisektor: Augmenterende teknologiske ændringer i en ((KL)B)R nest struktur.



Anm.: Graferne viser de relative augmentedede teknologier af f.eks. kapital relativt til arbejdskraft.

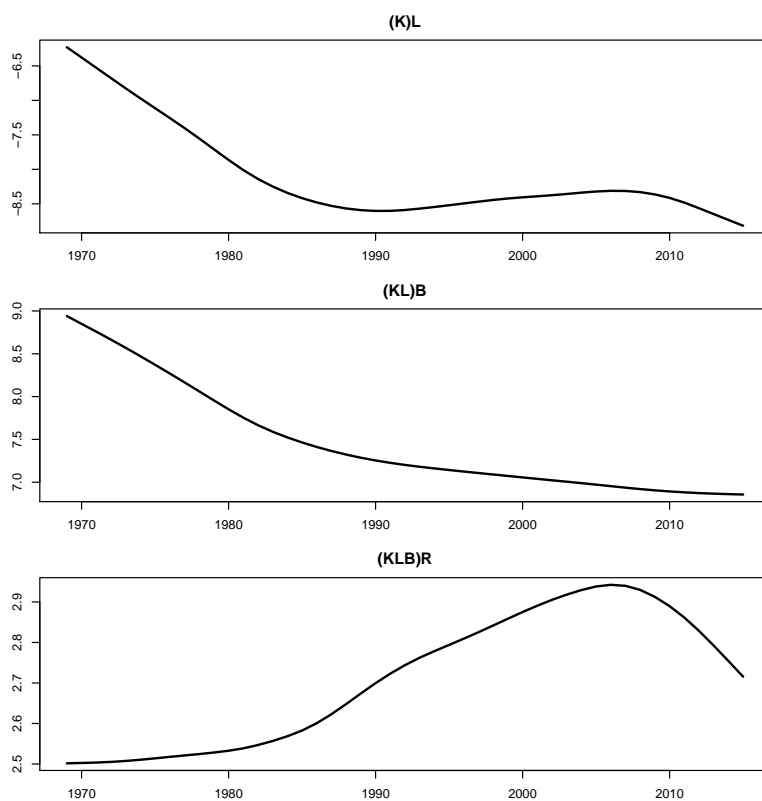
Figur 11: Energisektor: Augmenterende teknologiske ændringer i en ((KL)B)R nest struktur.



Anm.: Graferne viser de relative augmentedede teknologier af f.eks. kapital relativt til arbejdskraft.

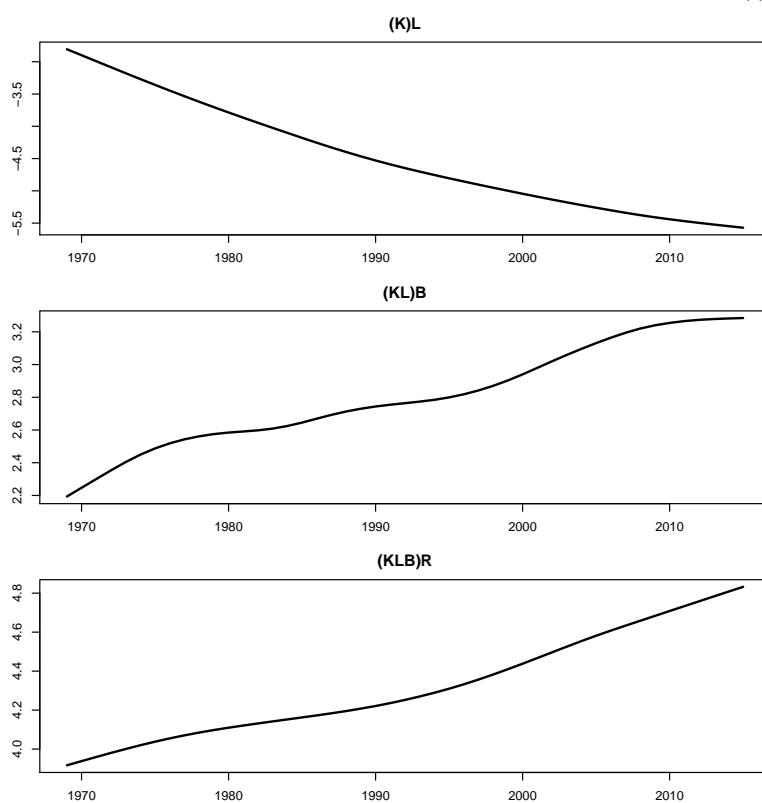


Figur 12: Udviningssektor: Augmenterende teknologiske ændringer i en ((KL)B)R nest struktur.



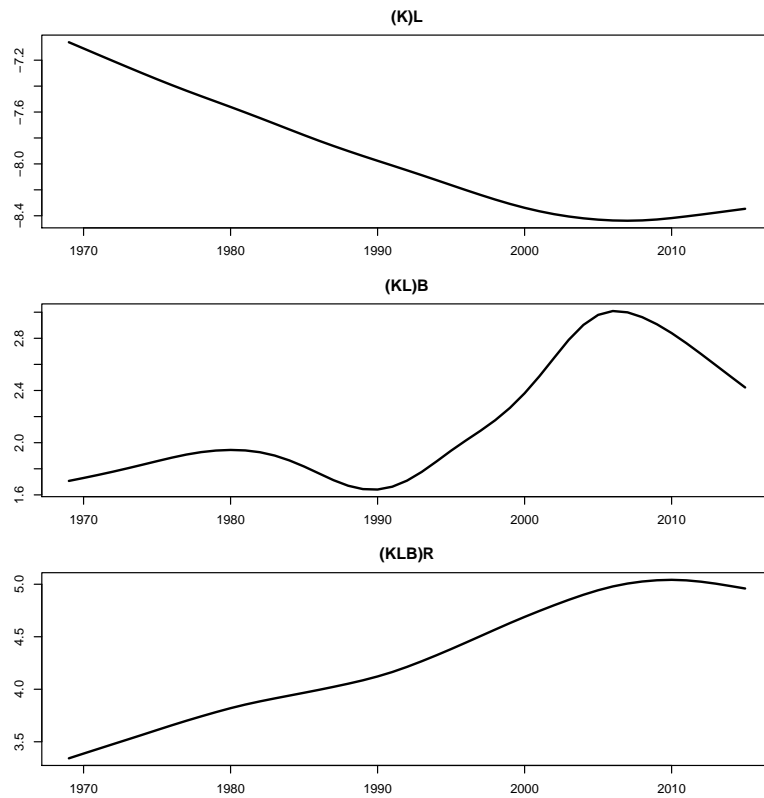
Anm.: Graferne viser de relative augmenterede teknologier af f.eks. kapital relativt til arbejdskraft.

Figur 13: Fremstillingssektor: Augmenterende teknologiske ændringer i en ((KL)B)R nest struktur.



Anm.: Graferne viser de relative augmentedede teknologier af f.eks. kapital relativt til arbejdskraft.

Figur 14: Søtransportsektor: Augmenterende teknologiske ændringer i en ((KL)B)R nest struktur.

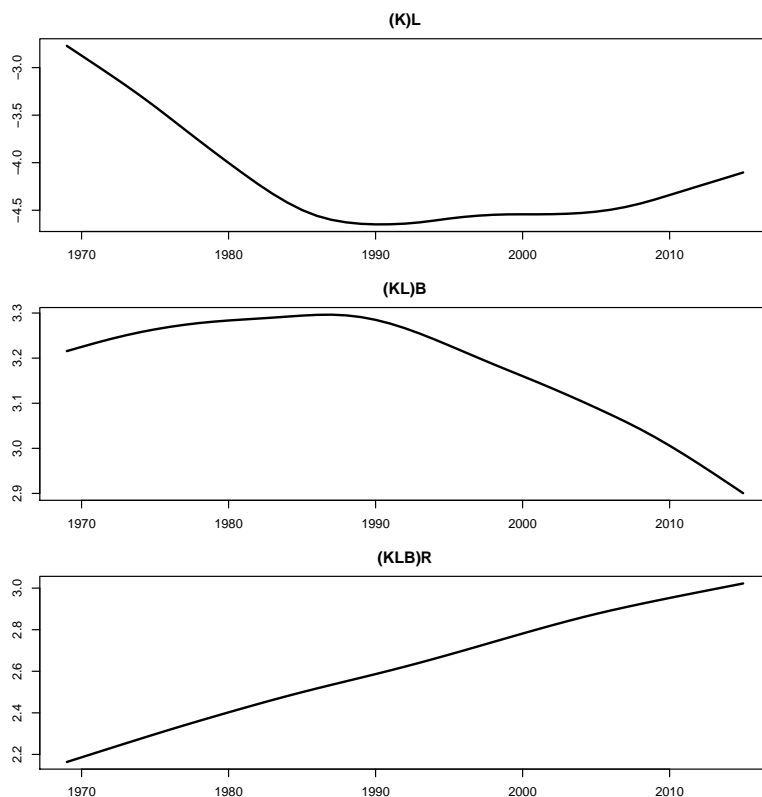


Anm.: Graferne viser de relative augmentedede teknologier af f.eks. kapital relativt til arbejdskraft.

Tabel 12: Landbrugssektor: Sensitivitet over for forskellige grader af smoothness for teknologisk udvikling.

$\lambda$	$\sigma$	K(L)			$\sigma$	KL(B)			$\sigma$	KLB(R)		
		NIS	Auto	LV		NIS	Auto	LV		NIS	Auto	LV
10	0.01	0.68	0.53	119.03	0.00	0.73	0.83	141.61	0.09	0.78	0.28	125.56
50	0.03	0.76	0.29	117.41	0.00	0.80	0.61	141.10	0.08	0.79	0.59	126.58
100	0.08	0.79	0.12	116.91	0.00	0.82	0.50	140.98	0.07	0.80	0.76	126.55
500	0.01	0.75	0.05	103.11	0.00	0.90	0.40	140.64	0.02	0.88	0.95	126.16
1,000	0.03	0.75	0.05	102.16	0.00	0.91	0.38	140.47	0.00	0.91	0.84	129.87
10,000	0.00	0.80	0.80	104.03	0.00	0.94	0.39	139.83	0.00	0.92	0.82	129.20

Figur 15: Tjenestesektor: Augmenterende teknologiske ændringer i en ((KL)B)R nest struktur.



Anm.: Graferne viser de relative augmentedede teknologier af f.eks. kapital relativt til arbejdskraft.

## E Betydning af smoothing

Tabel 13: Byggerisektor: Sensitivitet over for forskellige grader af smoothness for teknologisk udvikling.

$\lambda$	$\sigma$	K(L)			$\sigma$	KL(B)			$\sigma$	KLB(R)		
		NIS	Auto	LV		NIS	Auto	LV		NIS	Auto	LV
10	0.12	0.64	0.02	88.81	0.00	0.77	0.41	99.64	0.19	0.80	0.28	99.76
50	0.02	0.76	0.29	104.32	0.00	0.81	0.12	99.75	0.35	0.77	0.78	100.12
100	0.03	0.78	0.57	103.81	0.00	0.80	0.41	97.61	0.36	0.78	0.79	100.77
500	0.08	0.82	0.71	102.92	0.00	0.81	0.64	98.16	0.42	0.78	0.78	101.44
1,000	0.10	0.82	0.53	102.35	0.00	0.82	0.75	98.21	0.51	0.78	0.81	101.30
10,000	10.16	0.87	0.25	100.78	0.00	0.83	0.99	98.05	0.93	0.81	0.73	100.24

Tabel 14: Energisektor: Sensitivitet over for forskellige grader af smoothness for teknologisk udvikling.

$\lambda$	$\sigma$	K(L)			$\sigma$	KL(B)			$\sigma$	KLB(R)		
		NIS	Auto	LV		NIS	Auto	LV		NIS	Auto	LV
10	0.11	0.73	0.20	82.88	0.12	0.68	0.21	112.27	0.17	0.75	0.89	79.20
50	0.03	0.79	0.40	82.83	0.00	0.78	0.91	113.34	0.12	0.80	0.65	80.04
100	0.04	0.81	0.35	82.73	0.00	0.80	0.74	112.80	0.10	0.81	0.66	80.05
500	0.13	0.84	0.29	82.18	0.00	0.83	0.37	111.52	0.10	0.81	0.72	78.98
1,000	0.26	0.85	0.28	81.93	0.00	0.82	0.29	110.62	0.15	0.82	0.65	78.30
10,000	1.77	0.89	0.28	81.33	1.77	0.86	0.15	106.47	0.46	0.88	0.43	77.27

Tabel 15: Udvindingssektor: Sensitivitet over for forskellige grader af smoothness for teknologisk udvikling.

$\lambda$	$\sigma$	K(L)			$\sigma$	KL(B)			$\sigma$	KLB(R)		
		NIS	Auto	LV		NIS	Auto	LV		NIS	Auto	LV
10	0.23	0.76	0.88	68.11	0.85	0.78	0.56	54.52	0.10	0.78	0.65	59.60
50	0.29	0.81	0.40	69.22	1.21	0.84	0.27	56.64	0.04	0.82	0.91	61.22
100	0.32	0.82	0.31	69.47	1.34	0.86	0.22	57.43	0.01	0.83	1.00	61.63
500	0.47	0.83	0.26	69.20	1.53	0.88	0.15	58.89	0.00	0.85	0.97	61.52
1,000	0.76	0.85	0.27	68.95	1.57	0.88	0.14	59.28	0.00	0.86	0.95	61.21
10,000	2.99	0.89	0.24	68.59	1.87	0.88	0.14	59.62	0.03	0.88	0.65	61.52

Tabel 16: Fremstillingssektor: Sensitivitet over for forskellige grader af smoothness for teknologisk udvikling.

$\lambda$	$\sigma$	K(L)			$\sigma$	KL(B)			$\sigma$	KLB(R)		
		NIS	Auto	LV		NIS	Auto	LV		NIS	Auto	LV
10	0.08	0.73	0.74	110.84	0.00	0.70	0.30	125.43	0.29	0.76	0.98	123.35
50	0.30	0.82	0.45	111.31	0.00	0.74	0.15	117.58	0.44	0.81	0.59	124.56
100	0.39	0.84	0.38	111.76	0.01	0.76	0.27	117.89	0.49	0.83	0.55	124.87
500	0.50	0.87	0.29	112.77	0.03	0.80	0.61	118.06	0.55	0.85	0.48	125.12
1,000	0.51	0.87	0.28	112.98	0.05	0.81	0.76	118.18	0.53	0.87	0.45	125.15
10,000	0.42	0.87	0.19	112.46	0.10	0.83	0.96	118.55	0.40	0.89	0.36	125.14

Tabel 17: Søtransportsektor: Sensitivitet over for forskellige grader af smoothness for teknologisk udvikling.

$\lambda$	$\sigma$	K(L)			$\sigma$	KL(B)			$\sigma$	KLB(R)		
		NIS	Auto	LV		NIS	Auto	LV		NIS	Auto	LV
10	0.00	0.74	0.98	87.70	0.00	0.69	0.18	64.94	0.00	0.80	0.58	72.23
50	0.02	0.82	0.75	85.45	0.00	0.70	0.48	58.56	0.00	0.81	0.66	73.53
100	0.05	0.84	0.67	85.86	0.00	0.72	0.64	58.63	0.00	0.80	0.67	73.32
500	0.07	0.85	0.58	86.30	0.00	0.75	0.96	58.79	0.00	0.83	0.82	72.07
1,000	0.09	0.85	0.62	86.23	0.00	0.75	0.96	58.81	0.00	0.85	0.94	71.59
10,000	0.01	0.88	0.61	83.60	0.00	0.77	0.72	58.23	0.00	0.90	0.66	70.87

Tabel 18: Tjenestesektor: Sensitivitet over for forskellige grader af smoothness for teknologisk udvikling.

$\lambda$	$\sigma$	K(L)			$\sigma$	KL(B)			$\sigma$	KLB(R)		
		NIS	Auto	LV		NIS	Auto	LV		NIS	Auto	LV
10	0.06	0.73	0.64	137.40	0.00	0.70	0.94	131.28	0.00	0.78	0.68	122.43
50	0.29	0.78	0.85	137.40	0.00	0.77	0.20	132.79	0.00	0.84	0.95	123.83
100	0.42	0.79	1.00	137.07	0.00	0.73	0.08	119.21	0.00	0.85	0.86	124.29
500	0.71	0.79	0.49	135.31	0.00	0.80	0.15	129.90	0.00	0.88	0.63	124.94
1,000	0.72	0.81	0.29	134.27	0.00	0.80	0.20	129.71	0.00	0.89	0.55	125.18
10,000	0.00	0.85	0.86	126.16	0.00	0.85	0.68	128.81	0.00	0.93	0.43	125.83

## Litteratur

- Gustafsson, N. (2014). Estimation af faktorblokken med nye usercostudtryk inkl. egenfinansiering til jun14. Working paper, Danmarks Statistik, Modelgruppen.
- Kastrup, C. S. (2019). Directed technical change: Evidence from the oecd countries. *Seminar paper in Economic Growth*.
- Kronborg, A. F., Kastrup, C. S., and Stephensen, P. P. (2019). Estimating the Constant Elasticity of Substitution when Technical Change is Time-Varying: A Kalman Filtering Approach. Working paper, DREAM.
- Muck, J. (2017). Elasticity of substitution between labor and capital: robust evidence from developed economies. NBP Working Paper No. 271. Economic Research Department, Narowy Bank Polski.
- Thomsen, T. (2015). Klem-estimationer 1968-2013. Working paper, IntERACT model.