Calcul matriciel : matrices identités, matrices inverses

IMIE – 13 décembre 2017

Plan

- Une matrice est un tableau de valeurs (à deux dimensions)
- Une matrice de format (m, n) est un tableau de $m \times n$ éléments, rangés en m lignes et n colonnes
- Une matrice carrée est une matrice qui possède le même nombre de lignes et de colonnes
- Le produit de deux matrices n'est défini que si le nombre de colonnes de la première est égal au nombre de lignes de la seconde

- Si on fait le produit de deux matrices A et B et qu'on nomme C la matrice résultante :
  - pour obtenir la valeur à la position (i, j), on multiplie la i-ème ligne de A avec la j-ème colonne de B

Exemple de produit de matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 2 \times (-2) + 3 \times 1 & 1 \times (-2) + 2 \times 4 + 3 \times (-2) \\ 6 \times 1 + 5 \times (-2) + 4 \times 1 & 6 \times (-2) + 5 \times 4 + 4 \times (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Lorsque l'on multiplie une matrice de format 1×3 par une matrice de format 3×1, on obtient une matrice de quel format ?

Calcul d'un produit de matrices : algorithme

```
product(A,B):

    m <- size(A,1)
    n <- size(A,2)
    p <- size(B,2)
    C <- array(m,p)

    for i in range(0,m):
        for j in range(0,p):
            s <- 0
            for k in range(0,n):
                s <- s + A(i,k) * B(k,j)
            C(i,j) <- s
```

- Une **matrice identité** est une matrice carrée contenant des 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs
- Pour chaque ordre n, la matrice identité d'ordre n est notée I_n
- Elle est composée de coefficients $\delta_{i,j}$ (les nombres contenus dans la matrice) tels que :

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \qquad \text{(symbole de Kronecker)}$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercices

- Calculer le produit : $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times I_4$
- Calculer le produit : $I_4 \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$
- Quelle égalité peut-on en déduire ?

Propriété

- La matrice I_n est **élément neutre** du produit des matrices carrées d'ordre n
- C'est-à-dire que pour toute matrice carrée A d'ordre n, on a :

$$A \times I_n = I_n \times A = A$$

Propriété

- Généralisation de la propriété précédente à d'autres matrices que les matrices carrées
- Pour toute matrice A de format (m, n), on a :

$$A \times I_n = A$$

  $\Leftrightarrow$ pour les matrices de n colonnes on a la $1^{\text{ère}}$ partie de l'égalité vue précédemment
- Pour toute matrice B de format (n, p), on a :

$$I_n \times B = B$$

  $\Leftrightarrow$ pour les matrices de n lignes on a la 2^{de} partie de l'égalité vue précédemment

Exemples

- $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{bmatrix} \times I_3 = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\\mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6}\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1 & \mathbf{0} & 0\\0 & \mathbf{1} & 0\\0 & \mathbf{0} & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & \mathbf{5} & 6\end{bmatrix}$

  Pour la $2^{\text{ème}}$ ligne, $2^{\text{ème}}$ colonne : $4 \times 0 + 5 \times 1 + 6 \times 0 = 5$

- $I_2 \times \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\\mathbf{0} & \mathbf{1}\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1 & \mathbf{2} & 3\\4 & \mathbf{5} & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & \mathbf{5} & 6\end{bmatrix}$

  Pour la $2^{\text{ème}}$ ligne, $2^{\text{ème}}$ colonne : $0 \times 2 + 1 \times 5 = 5$

Exercices

- Quel est le résultat du produit : $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \times I_3$?

- Quel est le résultat du produit : $I_3 \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$?

- On dit qu'une matrice carrée A est **inversible** si et seulement si il existe une matrice B (de même format) telle que :

$$AB = BA = I$$

(I est la matrice identité de même ordre que A et B)
- B est alors appelée l'inverse de A et elle est notée A^{-1}

Exemple

- Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ alors :
- $A \times B = \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 1 \times 0 & 1 \times -1 + 1 \times 1 \\ 0 \times 1 + 1 \times 0 & 0 \times -1 + 1 \times 1 \end{bmatrix}$
- donc : $A \times B = \begin{bmatrix} 1 + 0 & -1 + 1 \\ 0 + 0 & 0 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$
- donc B est l'inverse de A et on peut écrire : $B = A^{-1}$

Propriétés

- Si A est inversible, son inverse est unique
- Si A et B sont inversibles, alors $A \times B$ l'est aussi et
$$(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1} \text{ (attention à l'ordre)}$$
- Si A est inversible et si $\lambda \neq 0$ alors λA est inversible et
$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$$
- Si A est inversible alors A^t l'est aussi et
$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$
(l'inverse de la transposée est la transposée de l'inverse)

Exercices

- Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.
  1. Calculer $A^3 - A$.
  2. En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1}.

  Indices
  - Une fois que l'on a calculé A^2 et A^3 on peut en déduire A^{-1} sans calculs.
  - Pour trois matrices A B et C on a : $A(B+C) = AB + AC$.

Théorème

- Soit A une matrice carrée d'ordre n, et soient X et B deux matrices-colonnes d'ordre n.
- Si A est inversible, alors le système $AX = B$ (ensemble d'équations) admet une solution unique, quelle que soit la matrice-colonne B, donnée par :
$$X = A^{-1}B.$$
- Réciproquement, si le système $AX = B$ n'admet qu'une seule solution, pour une matrice-colonne quelconque B, alors A est inversible (et la solution est $X = A^{-1}B$).

Exercices

- Déterminer l'inverse de la matrice : $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Poser $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$
- Écrire l'ensemble d'équations découlant de l'égalité $AX = B$
- Exprimer x, y et z en fonction de a, b et c
- En déduire A^{-1}