

Ch. 多項式

(適用 108 課綱)

許哲瑋 編纂

LineID/手機號碼：0975058607

多項式基本

1. 定義：

將符號(x,y,z,a,b...etc)以加、減、乘、除連接的式子，稱作多項式

$$P(x) = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{(常數項)}}}{a_0} + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{(一次項)}}}{a_1}x + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{(二次項)}}}{a_2}x^2 + a_3x^3 + \dots + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{(n 次項)}}}{a_n}x^n, \text{ 其中 } n \text{ 是正整數或 } 0, \text{ } a_0 \sim a_n \text{ 是任意數}$$

(各項係數、 a_n 為_____)

符號不可在_____，_____，_____中 !!!

2. 次數(幾次多項式)：

- 當多項式最高次項為 n ，且 $n > 0$ ，則稱作 **n 次多項式**

ex: $f(x) = x + 3x^2 + 1 \Rightarrow 2$ 次

- 對任意 n 次多項式 $f(x)$ ，我們定義 **$\deg(f(x)) = n$**

ex: $f(x) = x + 3x^2 + 1 \Rightarrow \deg(f(x)) = 2$

- 當多項式僅有常數項，常數項=0 稱**零多項式**，其餘稱**常數多項式**或**零次多項式**

< 整理 >

3. 多項式相等：

- 當兩多項式 $f(x) = g(x)$ ，則其最高次相等外，其**展開後**之所有項前係數都需相等。
(簡單來說就是兩者要完全一樣)

ex:

若 $f(x) = x^2 + 9$ ， $g(x) = ax^2 + bx + c$

$f(x) = g(x)$ 則 $f(x) = 1x^2 + 0x + 9 = ax^2 + bx + c = g(x)$

則 $a = 1$ ， $b = 0$ ， $c = 9$

4. 設 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ，則其係數有以下關係：

● 常數項 $a_0 = f(0)$

● 係數和 $= a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = f(1)$

ex：若 $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ ，則 $a_0 + 2a_1 + 4a_2 =$ _____

● 偶次項係數和 $= \frac{f(1) + f(-1)}{2}$

● 奇次項係數和 $= \frac{f(1) - f(-1)}{2}$

5. 多項式運算：

● 多項式相加減 \Rightarrow 各項係數相加減

$$f(x) = 3x^2 + x + 1, g(x) = 2x + 3$$

$$\Rightarrow f(x) + g(x) = (3+0)x^2 + (1+2)x + (1+3) = 3x^2 + 3x + 4$$

● 多項式相乘 \Rightarrow 各項相乘 (n 次多項式乘 m 次多項式 $= n*m$ 次多項式)

$$f(x) = x + 1, g(x) = 3x - 2, f(x) \times g(x) = (x)(3x) + (x)(-2) + 1(3x) + 1(-2) = 3x^2 + x - 2$$

● 多項式除法 \Rightarrow 長除法、綜合除法

設 $f(x) = 6x^3 + 4x^2 + x + 2, g(x) = 3x - 1$ ：

< 長除法 >

< 綜合除法 >

練習 1

下列何者為 x 的多項式？

- (A) $x^2 + \sqrt{2}x + \frac{1}{y}$ (B) $x^2 + \sqrt{x} + 2$ (C) $x^2y + \frac{x}{y} + \sqrt{y} + \sqrt{3}$ (D) $x^2 + |x| + 1$ (E) $\frac{1}{x+1} + 2x + 1$

【解析】

練習 2

設 $a, b \in R$ ，多項式 $f(x) = a(x^3 - x^2) + b(x^3 - x + 2) + x^2 + ax + 2$ 為一次式，

則 (A) $a = 0$ (B) $b = 0$ (C) $a + b = 0$ (D) $f(x)$ 之領導係數為 2 (E) $f(x) = 2x + 4$

【解析】

練習 3

若 $f(x)$ 為四次多項式，則 $(x^3 + 3)f(x^2 + 1)$ 的次數 = (A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12

【解析】

練習 4

() 設 $f(x), g(x)$ 為兩多項式，且 $\deg(f(x) \cdot g(x)) = 6$ ， $\deg(f(x) + g(x)) = 4$ ，則下列何者可能為 $f(x)$ 的次數？ (1) 0 次 (2) 1 次 (3) 2 次 (4) 3 次 (5) 4 次

【解析】

練習 5

設多項式 $f(x) = (x^2 + kx + 1)(x^3 - 2x^2 + x + 1)$ ，且 $f(x)$ 的奇次項係數總和為 -2 ，求 $k = ?$

【解析】

練習 6

設 $f(x) = (x^5 + 2x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x - 2) \cdot (3x^6 + 2x^5 + x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x + 1)$ ，則 $f(x)$ 的
 (A) x^7 係數為 -2 (B) x^9 係數為 2 (C) 各項係數和為 -13 (D) 各奇次項係數和為 -9
 (E) 領導係數為 3 。

【解析】**@練習 7**

求 $(1 + 2x + 3x^2 + \cdots + 10x^9 + 11x^{10})(1 - 3x^2 + 5x^4 - 7x^6 + 9x^8 - 11x^{10})$ 乘開後， x^9 的係數
 (提示：觀察 x^9 是誰乘誰，有沒有規律。)

【解析】**練習 8**

對於任意異於 1 與 -2 的實數 x ，恆使 $\frac{2x^2 + hx + k}{x^2 + x - 2}$ 為定值 t ，則下列何者正確？

(1) $h = 2$ (2) $k = -4$ (3) $t = \frac{1}{2}$ (4) $t = 2$ (5) t 有二個可能值

【解析】**練習 9**

若 $x^3 + 3x^2 + mx + 2$ 可被 $x^2 + nx + 1$ 整除，則 $(m, n) = \underline{\hspace{2cm}}$

【解析】

練習 10

若 $b < -2$ 且 $x^4 + 2x^3 + 7x^2 + ax + 10$ 可被 $x^2 + 2x - b$ 整除，則 $a + b =$ _____。

【解析】

練習 11

下式是小明利用綜合除法計算三次多項式 $f(x)$ 除以 $x - 1$ 的算式，因不小心將飲料翻倒在計算紙上，所以只能辨識部分數字：（無法辨識的數字以英文字母代替）若小明沒有計算錯誤求 $a + b + c + d$ 的值為_____。

【解析】

練習 12

$7^5 - 6 \times 7^4 - 4 \times 7^3 - 26 \times 7$ () 使用綜合除法計算

$f(x) = ax^4 + 3x^3 + 5x^2 + bx + 6$ 除以 $x + \frac{1}{2}$ 的過程如下：

$$\begin{array}{r} a+3+5+b+6 \\ -1+d-2+e \\ \hline 2+c+4-6+f \end{array} \Bigg| -\frac{1}{2}$$

則下列敘述何者正確？ (1) $a + b > 0$ (2) $c - d + e$ 為偶數 (3) $f(x)$ 除以 $x + \frac{1}{2}$ 的餘式為 3

(4) $f(x)$ 除以 $2x + 1$ 的餘式為 9 (5) $f(x)$ 除以 $2x + 1$ 的商式為 $2x^3 + 2x^2 + 4x - 6$

【解析】

@練習 14

設 $f(x) = x^4 - 8x^3 + 25x^2 - 30x + 8 = a(x-2)^4 + b(x-2)^3 + c(x-2)^2 + d(x-2) + e$ ，則

(1) $a + b + c + d + e$ 之值為_____。

(2) $f(1.99)$ 的近似值為_____。(至小數點以下第二位，第三位四捨五入)

【解析】

@練習 15

設 $g(x) = 16x^4 - 8x^3 - 28x^2 + 16x + 5 = a(2x-1)^4 + b(2x-1)^3 + c(2x-1)^2 + d(2x-1) + e$ ，則

(1) 序組 $(a, b, c, d, e) =$ _____。

(2) $g(0.499) =$ _____。(求近似值到小數第三位，第四位四捨五入)

【解析】

練習 16

() 設 a, b, c 為相異三個實數且 $f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}$ ，
則 (A) $f(a) = 1$ (B) $f(b) = 1$ (C) $f(c) = 1$ (D) $f(2000) = 1$
(E) $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(10) = 55$

【解析】

@範例 17

x 的多項式 $f(x)$ 滿足 $f(x+1) - f(x) = 2x - 3$ 且 $f(0) = 2$ ，則最低次的 $f(x) =$ _____。

【解析】已知 $f(x+1) - f(x) = 2x - 3$ ，知 $f(x)$ 最低次數為二次

$$\text{令 } f(x) = ax^2 + bx + c, f(0) = 2 \Rightarrow c = 2$$

$$\text{又 } f(x+1) = a(x+1)^2 + b(x+1) + 2 = ax^2 + (2a+b)x + a+b+2, f(x) = ax^2 + bx + 2$$

$$\therefore f(x+1) - f(x) = 2ax + a + b = 2x - 3$$

$$\text{比較係數，得 } 2a = 2, a + b = -3 \therefore a = 1, b = -4, \text{ 故 } f(x) = x^2 - 4x + 2$$

Ch. 多項式(2)

(適用 108 課綱)

許哲瑋 編纂

LineID/手機號碼：0975058607

除法原理

1. 小學記憶：

$$10 \div 3 = 3 \dots 1 \quad \Leftrightarrow \quad 10 = 3 \times 3 + 1$$

2. 除法原理本質：

$$\text{被除} = \text{除} \times \text{商} + \text{餘}$$

$$f(x) = g(x)Q(x) + R(x)$$

● 餘式定理：

若 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 有餘式 $R(x)$ ，已知 $x=k$ 可使 $g(k)=0$ ，則 $R(k)=f(k)$

Or

多項式 $f(x)$ 除以 $ax-b$ 之餘式 $f(\frac{b}{a})$

ex:

$f(x) = x^2 + 5x + 8$ ， $g(x) = x + 2$ ，則因為 $g(-2)=0$ ， $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式為 $f(-2)$

$f(x) = 9x^2 + 3x + 3$ ， $g(x) = 3x - 2$ ，則 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式為 $f(\frac{2}{3})$

$f(x) = 9x^2 + 3x + 3$ ， $g(x) = -x + 4$ ，則 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式為_____

$f(x) = 9x^2 + 3x + 3$ ， $g(x) = x^2 - 2x + 1$ ，則 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式為_____、餘數為_____

● 餘式定理自然規律：

(1.) $\deg(\text{餘式}) \leq \deg(\text{除式})$

$$f(x) = 9x^2 + 3x + 3 = \underbrace{(x^2 - 2x + 1)}_{\text{除式(二次)}} Q(x) + \underbrace{(21x - 6)}_{\text{餘式(一次)}} \quad \Rightarrow 2 > 1$$

$$f(x) = 9x^3 + 3x + 3 = (x^2 + 2x + 1)Q(x) + (\quad) \quad \Rightarrow 2 > 1$$

(2.) 「餘數」是除式為_____狀況下的餘式

$$f(x) = 9x^2 + 3x + 3 = (3x - 2)Q(x) + (9) \\ \text{除式(一次)} \quad \text{餘式(零次/常數)} \quad \Rightarrow 1 > 0$$

- 因式定理：餘式為零的餘式定理

$f(x) = g(x)Q(x) + 0$ ，若找到 x 的值使 $g(x) = 0$ ，則 $f(x) = 0$

ex: $f(x) = x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3) + 0 \Rightarrow g(-2) = f(-2) = 0$

- 餘式假設法：看除式幾次，設為少他一次的多項式

ex: 除式 = $(x-3)$ 則設餘式為 a

除式 = (x^2-3) 則設餘式為 $ax+b$

除式 = (x^3-3) 則設餘式為 ax^2+bx+c

...

3. 代數基本定理延伸(補充，但一定要知道)：

- 一個 n 次方程式必有 n 個根。(代數基本定理)

(108 課綱不在高一探討多項式、方程式和根的關係。)

- n 個未知數需要 n 個條件，才有唯一解。(數論)

Recall：國中教的二元一次聯立方程式，為什麼要兩條聯立？

Recall：國中假設一條線，怎麼假設的，有幾個未知數，為什麼？

今天要決定一個 n 次多項式，有_____個未知數，要_____個條件

=>延伸：若 $f(x)$ 為一個 3 次多項式， $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=30$ ，求 $f(x) = ?$

Ans. $f(x) = 30$

=>如果改成：若 $f(x)$ 為一個多項式， $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=30$ ，求 $f(x) = ?$

答案還會一樣嗎？

練習 1

設二多項式 $f(x)$ ， $g(x)$ 其次數均大於 2，已知 $f(x)$ 與 $g(x)$ 除以 $x^2 - x - 1$ 之餘式分別為 $2x + 1$ 與 $x - 3$ ，則：

- (1) $f(x) + g(x)$ 除以 $x^2 - x - 1$ 之餘式為_____。
- (2) $2f(x) - 3g(x)$ 除以 $x^2 - x - 1$ 之餘式為_____。
- (3) $f(x) \cdot g(x)$ 除以 $x^2 - x - 1$ 之餘式為_____。

【解析】

練習 2

$(x - 1)h(x)$ 被 $x^2 + x + 1$ 除的餘式為 $6x + 3$ ，則多項式 $h(x)$ 被 $x^2 + x + 1$ 除的餘式為_____

【解析】

@練習 3

若 $x^3 + x^2 - 1 = a(x + 1)(x + 2)(x + 3) + b(x + 1)(x + 2) + c(x + 1) + d$ ，求 $a + b + c + d$ 之值
(提示：用餘式定理的想法，一層一層剝掉)

【解析】

@練習 4

設 k 為實數，若多項式 $f(x)$ 有下列性質： $f(x + k) = f(x) + 2k$ ， $f(1) = 5$ ，則 $f(x) =$ _____

【解析】

練習 5

設 $x = \sqrt{2} - 1$ ，則 $(x^3 + x^2 - 2x + 2)^3$ 的值為 (1)2 (2) $2\sqrt{2}$ (3) -2 (4) $-2\sqrt{2}$

【解析】

練習 6

設 $f(x)$ 為實係數多項式，以 $x-1$ 除之，餘式為 9；以 $x-2$ 除之，餘式為 16，求 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)$ 的餘式為_____。

【解析】

練習 7

() 設 $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$ ，若 $f(x)$ 除以 $x^2 - 4x + 1$ 的餘式為 $7x + 1$ ， $f(x)$ 除以 $x - 1$ 的餘式為 2，則 $f(x)$ 除以 $x + 1$ 的餘式為 (1) -12 (2) -6 (3)6 (4)12

【解析】

練習 8

設多項式 $f(x)$ 除以 $x-1$ ， $x^2 - 2x + 3$ 之餘式依次為 2， $4x + 6$ ，則 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x^2 - 2x + 3)$ 的餘式為_____

【解析】

@練習 9

設 $\deg f(x) \geq 4$ ， $f(x)$ 除以 $(x-1)^2$ 餘式為 $3x+2$ ，除以 $(x+2)^2$ 餘式為 $5x-3$ ，則

- (A) $x-1$ 除 $f(x)$ 餘式為 5 (B) $x+2$ 除 $f(x)$ 餘式為 -13 (C) $(x-1)(x+2)$ 除 $f(x)$ 餘式為 $6x-1$
(D) $(x-1)^2(x+2)$ 除 $f(x)$ 餘式為 $-x^2+5x+1$ (E) $(x-1)^2(x+2)^2$ 除 $f(x)$ 餘式為 $-x^2+5x+1$

【解析】

練習 10

求以 $(x+1)^2$ 除 x^{12} 的餘式。

【解析】

練習 11

求以 x^8+x^4+1 除 $x^{12}+99$ 的餘式。

【解析】

練習 12

多項式 $f(x) = x^{2000} + 3x^{90} - 5x^{18} + 7$ 除以 $x^3 - 1$ 之餘式為_____。

【解析】