

Ch. 多項式不等式

(適用 108 課綱)

許哲瑋 編纂

LineID/手機號碼：0975058607

多項式不等式

1. 解法：

- 第一步：將領導係數改為正 (一定要記得!!!)
- 第二步：將不等式轉為等式找根，恆正直接劃掉 (注意可否為 0)
- 第三步：畫數線標點(剛剛找得根)，正負正相間隔，取正或負

2. 範例：

● $x - 3 < 5$

● $-4x + 9 < 5$

● $x^2 - 4x - 45 < 0$

● $-x^2 - 6x + 1 < 10$

● $(x-1)(x-3)(x-5)(x+1)^2 \leq 0$

● $x^3 + 3x^2 - x - 3 > 0$

3. 有分母的不等式：將分母的多項式翻上來，補一個該多項式不等於 0 的條件

● $\frac{x+1}{x-1} \leq 0$

● $\frac{x+1}{x^2+2x+1} \leq 0$

● $\frac{x+1}{x^2-1} \leq 0$

4. 二次函數 $f(x)$ 恆正： $f(x) > 0$

- 本質：「和 x 軸沒有交點」 \Rightarrow Recall: (b^2-4ac) _____ 0
且「開口向上」 \Rightarrow Recall: a _____ 0

- 變化： $f(x)$ 恆大於 $g(x) \Rightarrow$ 二次函數 $[f(x)-g(x)]$ 恆正 (解法一樣)
 $f(x) > g(x) \Rightarrow f(x)-g(x) > 0$

練習 1

求聯立不等式組 $\begin{cases} 5x+1>3x-5 \\ 3-2x\leq 7-3x \end{cases}$ 的解。

【解析】

練習 2

已知 $ax+3>x+5$ 的解為 $x<-3$ ，則實數 a 的值為何？

【解析】

練習 3

某火力發電廠燒煤發電，會產生大量的空氣污染，若精算出要清除 $r\%$ 的空氣污染，每度電需成本 C 元， $C = \frac{4r}{100-r}$ ， $0 \leq r < 100$ 。已知該電廠清除空氣污染的成本不大於 4 元，試求 r 的最大值。

【解析】

練習 4

() 不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解為 $-2 < x < 5$ ，則 (1) $a = -1$ (2) $b = 3$ (3) $c = 10$
(4) $\frac{ax-c}{ax-b} \geq 0$ 的解為 $x > -3$ 或 $x \leq -10$ (5) $ax^2 - bx + c < 0$ 的解為 $x > 2$ 或 $x < -5$

【解析】**練習 5**

() 若不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 的解為 $1 < x < 2$ ，則不等式 $bx^2 + cx + a > 0$ 的解為
(1) $x < 1$ (2) $-\frac{1}{3} < x < 1$ (3) $x > 2$ (4) $2 < x < 3$.

【解析】**練習 6**

已知二次不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解為 $2 < x < 4$ ，試問 $ax^2 - bx + c < 0$ 的解 .

【解析】**練習 7**

() 設 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ，且不等式 $f(x) > 0$ 之解為 $-4 < x < 2$ ，則 $f(2x) < 0$ 之解為何？
(1) $-2 < x < 1$ (2) $x > 1$ 或 $x < -2$ (3) $-4 < x < 2$ (4) $x > 2$ 或 $x < -4$ (5) $x > 2$ 或 $x < -1$

【解析】

@練習 8

下列不等式，何者無實解？(A) $x^2 - x + 2 < 0$ (B) $-x^2 + 2x - 3 \leq 0$ (C) $x^2 + 3x - 1 > 0$
(D) $-x^2 + 3x - 5 > 0$ (E) $-x^2 - 2x + 3 > 0$ 。

【解析】

練習 9

已知不等式 $x^2 - ax + (a + 1) < 0$ 無實數解，求實數 a 的範圍。

【解析】

練習 10

x 為實數， $-(x + 1)^2 < (a - 2)x - a < (x - 1)^2 - 1$ 恆成立，求實數 a 的範圍。

【解析】

練習 11

() 設 $y = x^2 - 2kx + 3k$ (x 是實數) 的圖形恆在 $y = -4$ 的圖形上方，則下列之整數 k 值何者符合要求？ (1) -1 (2) 0 (3) 1 (4) 2 (5) 3 。

【解析】

練習 12

若二次函數 $y = 2x^2 - 2ax + (5 + 2a)$ 的圖形恆在 $y = ax^2$ 圖形的上方，實數 a 的範圍為_____。

【解析】

練習 13

求滿足不等式 $-4 \leq x^2 - 5x < 6$ 的整數解。

【解析】

練習 14

設 m 為一實數，若 $\frac{2x^2 + 2mx + m}{4x^2 + 6x + 3} < 1$ 對所有實數 x 均成立，求 m 的範圍。

【解析】

練習 15

解下列不等式：(1) $(x-1)(x-3)(x-5) > 0$. (2) $(x-1)(x-3)(x-5)(x^2 + 2x + 5) < 0$.

【解析】

練習 16

解下列不等式：(1) $(x-1)(x-3)^2(x-5)^3 \geq 0$. (2) $(x-1)(x-3)^2(x-5)^3 < 0$.

【解析】

練習 17

解下列分式不等式：(1) $x < \frac{1}{x}$. (2) $\frac{(x+3)^3(x+1)^2}{2-x} \geq 0$.

【解析】

練習 18

若 x 為正整數，滿足 $\frac{(x-1)(x+1)^2(x^2-3x-4)}{x^2-x+1} < 0$ ，則 $x =$ _____。

【解析】

練習 19

若函數 $f(x) = \frac{2x^2 + ax - 7}{x^2 + x + 1}$ 的圖形恆在直線 $y = 5$ 的下方，求實數 a 的範圍。

【解析】