

Ch. 簡單多項式圖形(2)

(適用 108 課綱)

許哲瑋 編纂

LineID/手機號碼：0975058607

多次單項函數

1. 單項函數：

● 定義：只有一項的 n 次多項式函數($n \neq 0$)，即 $y = f(x) = ax^n$ 。

● 圖形：

(i) $y = x$

(ii) $y = x^2$ (n 是偶數)

(iii) $y = x^3$ (n 是奇數)

● 特性：

函數必過_____、 n 為偶數時，對稱於_____、 n 為奇數時，對稱於_____

● Recall 領導係數：開口大小、開口方向 or 最右邊的正負號

● 奇偶函數：

(i) 奇函數 $f(-x) = -f(x)$

(ii) 偶函數 $f(-x) = f(x)$

(奇函數會吐出負號，偶函數會吃掉負號)

練習 1

三次函數 $y = 2x^3 + 6x^2 + 6x + 7$ 的圖形沿 x 軸方向平移 h 個單位，再沿 y 軸方向平移 k 個單位，

恰與一單項函數的圖形重合，求數對 (h, k) 及此單項函數。

【解析】

練習 2

已知四次函數 $y = ax^4$, $a > 0$ ，圖形通過 (p, q) ，其中 $pq \neq 0$ ，則 $y = -ax^4$ 的圖形必通過下列哪些點？(1) $(p, -q)$ (2) $(-p, q)$ (3) $(0, 0)$ (4) $(-p, -q)$ (5) (p, q) 。

【解析】

練習 3

下列哪些函數的圖形經由平移後可以和某一個單項函數的圖形重合？（多選）

A) $y = x + 3$ B) $y = 2x^2 - 4x + 3$ C) $y = 2(x+1)^3 - 2$ D) $y = x^3 - x$ E) $y = -2x^3 + 12x^2 - 24x + 17$

【解析】

練習 4

() 已知 $f(x) = x^3 + 4$, $g(x) = x^3 - 4x$, $h(x) = 3x^4 + 2$, 則下列哪些選項正確?
(A) $f(x)$ 為奇函數 (B) $f(x)$ 的圖形對稱於原點 (C) $g(x)$ 為奇函數 (D) $h(x)$ 為偶函數
(E) $h(x)$ 的圖形對稱於 y 軸。

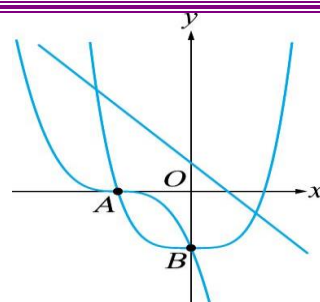
【解析】

@練習 5

右圖為三個函數的圖形： $f(x) = ax + b$, $g(x) = c(x - c)^3$, $h(x) = dx^4 + e$, 其中 $y = g(x)$ 與 $y = h(x)$ 交於 A, B 兩點, 且 A, B 分別在 x 軸與 y 軸上。

則下列哪些敘述是正確的? (多選)

(A) $a > 0$ (B) $b > 0$ (C) $c > 0$ (D) $e = -c^4$ (E) $d > 1$ 。



【解析】

練習 6

試描繪三次函數 $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x + 1)(x - 2)(x - 3)$ 的圖形。

【解析】

練習 7

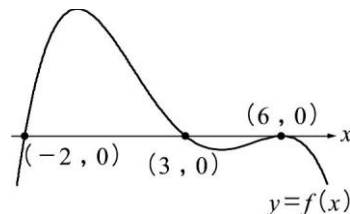
描繪四次函數 $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2 = (x^2 - 2)(x + 1)(x - 1)$ 的圖形。

【解析】

@練習 8

設四次函數 $y=f(x)$ 之略圖如右，則：

- (1) $f(x)=0$ 的解為_____。
- (2) $f(x)>0$ 的解為_____。
- (3) $f(x)<0$ 的解為_____。
- (4) 方程式 $f(x)-0.01=0$ 有_____個實根。
- (5) 方程式 $f(x)+0.01=0$ 有_____個實根。

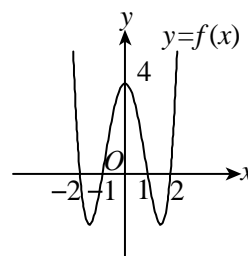


【解析】

練習 9

() 如圖為四次函數 $f(x)$ 的部分圖形，
下列哪個選項最有可能是 $f(x)$?

- (1) $f(x)=(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$
- (2) $f(x)=-(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$
- (3) $f(x)=2(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$
- (4) $f(x)=-2(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$
- (5) $f(x)=(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)+4$.



【解析】

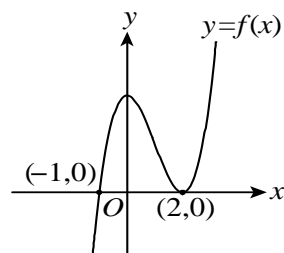
練習 10

() 已知實係數多項式函數 $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$
的圖形與 x 軸恰交於 $(-1, 0)$ 、 $(2, 0)$ 兩點，如圖所示。

下列敘述何者正確？ (A) $a>0$ (B) $e>0$ (C) $a+b+c+d+e<0$

(D) 方程式 $f(x)=0$ 有二實根、二共軛虛根

(E) 不等式 $f(x)<0$ 的解為 $x<-1$.

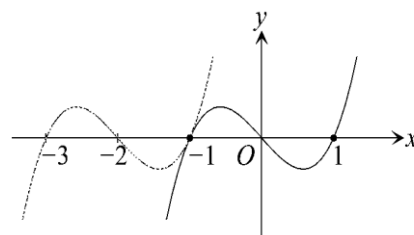


【解析】

練習 11

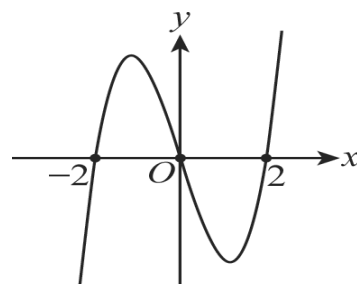
已知三次函數 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 之圖形如圖所示，求不等式 $f(x+2) = 0$ 的解為何？

【解析】

**練習 12**

已知三次函數 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 之圖形如下圖所示，則不等式 $f(x) =$ _____ 。

【解析】



Ch. 簡單多項式圖形(3)

(適用 108 課綱)

許哲瑋 編纂

LineID/手機號碼：0975058607

三次函數

1. 三次函數變化：

- 若要假設一三次函數，最直觀的假設便是 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
- 改寫： $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = \underline{a(x-h)^3 + p(x-h) + k}$

< 為什麼可以說改寫就改寫? >

2. 函數廣域、局部特徵：

- 廣域(x 很大很大或很小很小的時候)：

$$\text{Ex : } f(x) = 5x^3 + 2x + 1, \quad g(x) = -5x^4 + 2x^3 + x + 1$$

在 x 很大很大或很小很小的時候， $f(x) \approx 5x^3$ ， $g(x) \approx -5x^4$

< 再次回想，領導係數為什麼叫領導係數? >

- 局部近似(x 在接近某一點的時候)：

三次函數 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 在 $x = h$ 的值 $= f(h) = f(x)$ 除以 $(x-h)$ 的餘式

$$f(x) \text{ 改寫成 } \underline{a(x-h)^3 + p(x-h)^2 + q(x-h) + k}, \text{ 則 } f(h) = k$$

則當 x 很接近 h 時 (ex : $h=3, x=2.98$)，可以省略高次項的計算

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1 \text{ 在 } x = -1 \text{ 處的一次近似, 二次近似和 } f(-0.999)。$$

(1) 把 $f(x)$ 變成 $\Rightarrow a(x-h)^3 + p(x-h)^2 + q(x-h) + k$ ，求各係數 (使用_____)

$$f(x) = (x+1)^3 - 6(x+1)^2 + 11(x+1) - 5$$

(2) 一次近似即 $11(x+1) - 5$ ，二次近似即 $-6(x+1)^2 + 11(x+1) - 5$

$$(3) f(-0.999) = (0.001)^3 - 6(0.001)^2 + 11(0.001) - 5 \approx 11(0.001) - 5 = 4.989$$

練習 1

若將一多項式 $f(x) = (x+2)^4 - 3(x+2)^3 + (x+2)^2 + (x+2) + 19$ 表示成 $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ 的形式，其中 a, b, c, d, e 皆為實數，則序對 (a, b, c, d, e) 為 (① , ② , ③ , ④ , ⑤⑥)。

又， $f(-1.99)$ 約等於多少(四捨五入到小數點後第4位)

【解析】

練習 2

設 $f(x) = x^3 - 8x^2 + 25x - 32$ ：

(1) 將 $f(x)$ 表成 $(x-3)$ 的多項式，即 $f(x) = a(x-3)^3 + b(x-3)^2 + c(x-3) + d$ ， $(a, b, c, d) = ?$

(2) 以 $(x-3)^2$ 除 $f(x)$ 之餘式為

(3) 求 $f(2.99)$ 的近似值為 。（四捨五入取小數點後二位數字）

【解析】

練習 3

設 $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$ ，求其在 $x=2$ 的一次近似和 $f(-1.999)$ 之近似值(四捨五入到小數點後三位)。

【解析】

練習 4

設 $f(x) = 8x^3 - 16x + 13$ ，求 $f(0.501)$ 之近似值(四捨五入到小數點後三位)。

【解析】

練習 5

設 $f(x) = x^4 - 7x^3 + 20x^2 - 25x + 15$ ，求其在 $x=2$ 的一次近似、二次近似和 $f(2.03)$ 之近似值(四捨五入到小數點後三位)。

【解析】

練習 6

設 $f(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 3 = a(x-1)^4 - b(x-1)^3 + c(x-1)^2 + d(x-1) + e$ ，求數對 (a, b, c, d, e) 、一次近似、 $f(1.01)$ 和 $f(0.98)$ 之近似值(四捨五入到小數點後三位)。

【解析】