Estructuras de datos

Universidad Veracruzana

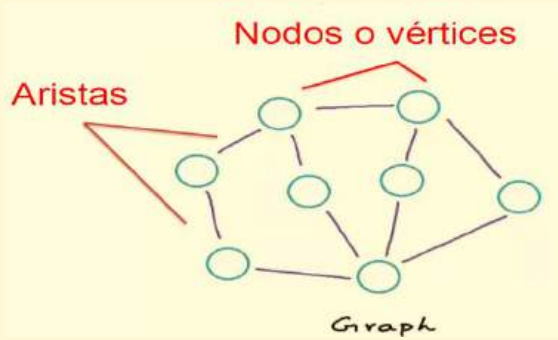
Grafos: Recorridos y Circuitos

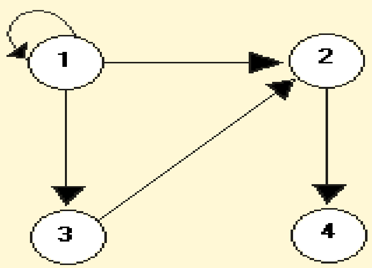
Yesenia Zavaleta

yzavaleta@uv.mx

Grafos

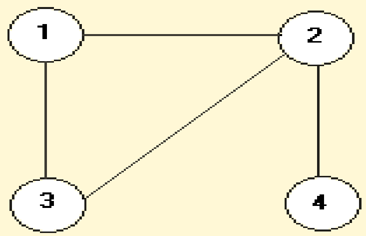
Un Grafo *G=(V,A)* consiste de dos conjuntos finitos: Un conjunto *V* llamado de vértices o nodos y de otro conjunto *A* llamado de aristas o lados.





Grafo Dirigido

Grafo donde las aristas tienen un sentido o dirección, es decir, se representan como pares ordenados de nodos (u, v).

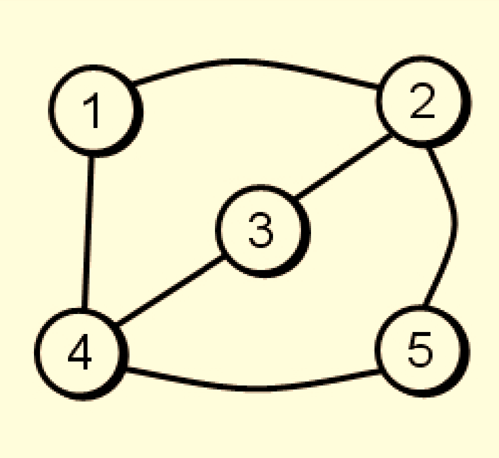


Grafo No dirigido

Grafo donde las aristas que conectan dos nodos no tienen dirección.

Matriz de Adyacencia

El grafo es, entonces, una representación gráfica de la información. Pero, con una imagen no podemos hacer cálculos para obtener información precisa, ni calcular otros datos. Para poder hacer esto, se crea la llamada **matriz de adyacencia**.



M	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	1
3	0	1	0	1	0
4	1	0	1	0	1
5	0	1	0	1	0

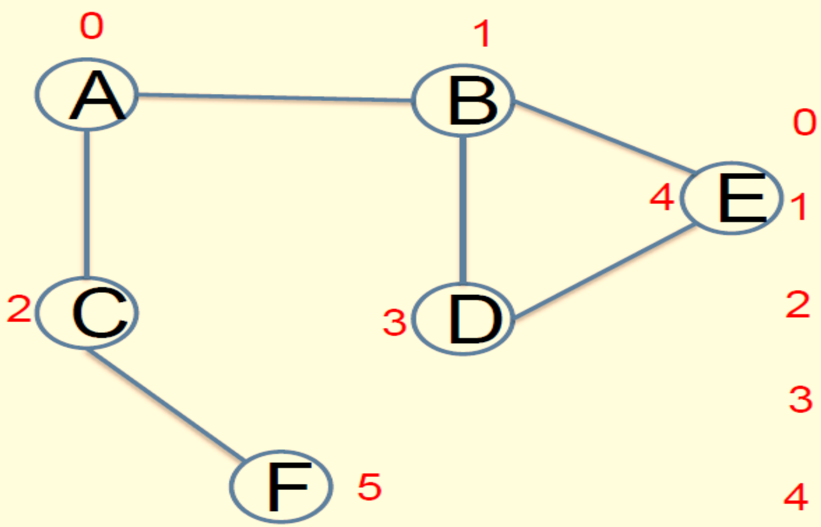
$$Mij = \begin{cases} 1, & \text{if } \{i, j\} \text{ si es una arista} \\ 0, & \text{eoc} \end{cases}$$

Esta matriz es una representación numérica del grafo con la cual podemos hacer operaciones y obtener más datos.

Matriz de Adyacencia

Consideremos un grafo G(V,E):

Matriz de Adyacencia (grafo no dirigido)



0	A
1	B
2	C
3	D
4	E
5	F

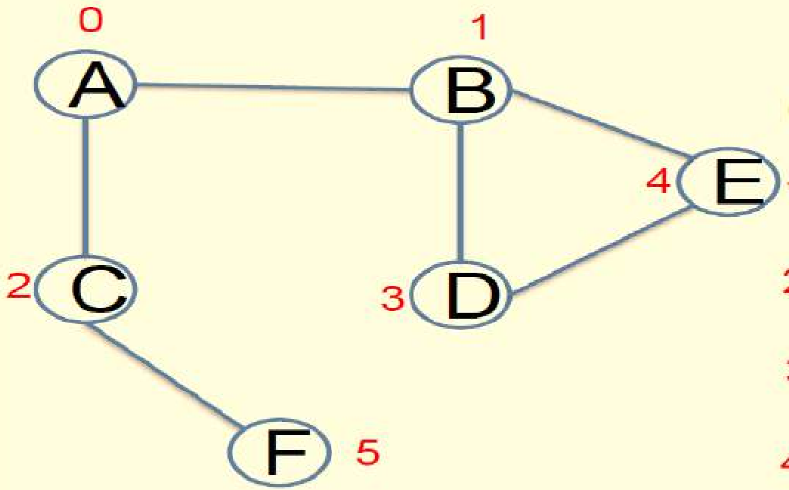
	0	1	2	3	4	5
0	0	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1	0
2	1	0	0	0	0	1
3	0	1	0	0	1	0
4	0	1	0	1	0	0
5	0	0	1	0	0	0

$$M_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } \{i, j\} \text{ si es una arista} \\ 0, & \text{eoc} \end{cases}$$

Matriz de Adyacencia

Consideremos un grafo G(V,E):

Matriz de Adyacencia (grafo no dirigido)

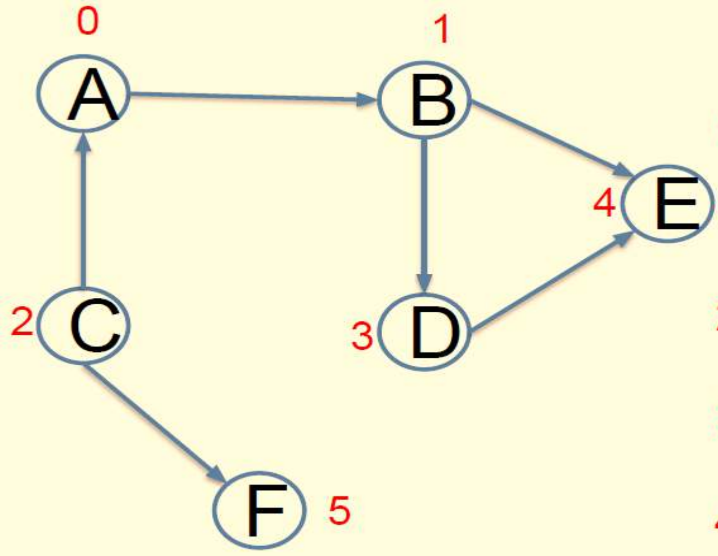


		0	1	2	3	4	5
0	A	0	1	1	0	0	0
1	B	1	0	0	1	1	0
2	C	1	0	0	0	0	1
3	D	0	1	0	0	1	0
4	E	0	1	0	1	0	0
5	F	0	0	1	0	0	0

En los grafos no dirigidos, la matriz de adyacencia va a ser simétrica: Mij = Mji

Matriz de Adyacencia

Consideremos un grafo G(V,E):



0	A
1	B
2	C
3	D
4	E
5	F

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0
2	1	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	1	0
4	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0

$$Mij = \begin{cases} 1, & \text{if (i, j) si es una arista} \\ 0, & \text{eoc} \end{cases}$$

En este caso, **la matriz no es simétrica**

Recorridos y Circuitos: definiciones

Consideremos un grafo G(V,E) cualquiera.

- Un camino (WALK) de u a w es una sucesión finita y alternada de vértices adyacentes y lados que los conectan de G. Así, éste tiene la forma:

$$u = u_o\, e_1\, u_1\, e_2\, u_2 \cdots e_n\, u_n = w$$

Recorridos y Circuitos: definiciones

Consideremos un grafo G(V,E) cualquiera.

- Un camino (WALK) de u a w es una sucesión finita y alternada de vértices adyacentes y lados que los conectan de G. Así, éste tiene la forma:

$$u = u_o\, e_1\, u_1\, e_2\, u_2 \cdots e_n\, u_n = w$$

- Un camino trivial de u a u consta de sólo el vértice u.

Recorridos y Circuitos: definiciones

Consideremos un grafo G(V,E) cualquiera.

- Un camino (WALK) de u a w es una sucesión finita y alternada de vértices adyacentes y lados que los conectan de G. Así, éste tiene la forma:

$$u = u_o\, e_1\, u_1\, e_2\, u_2 \cdots e_n\, u_n = w$$

- Un camino trivial de u a u consta de sólo el vértice u.
- Un recorrido (PATH) de u a w es un camino de u a w que **no contiene lados repetidos.**

Recorridos y Circuitos: definiciones

Consideremos un grafo G(V,E) cualquiera.

- Un camino (WALK) de u a w es una sucesión finita y alternada de vértices adyacentes y lados que los conectan de G. Así, éste tiene la forma:

$$u = u_o\, e_1\, u_1\, e_2\, u_2 \cdots e_n\, u_n = w$$

- Un camino trivial de u a u consta de sólo el vértice u.
- Un recorrido (PATH) de u a w es un camino de u a w que **no contiene lados repetidos.**
- Un recorrido simple (SIMPLE PATH) de u a w es un camino de u a w que **no contiene vértices repetidos.**

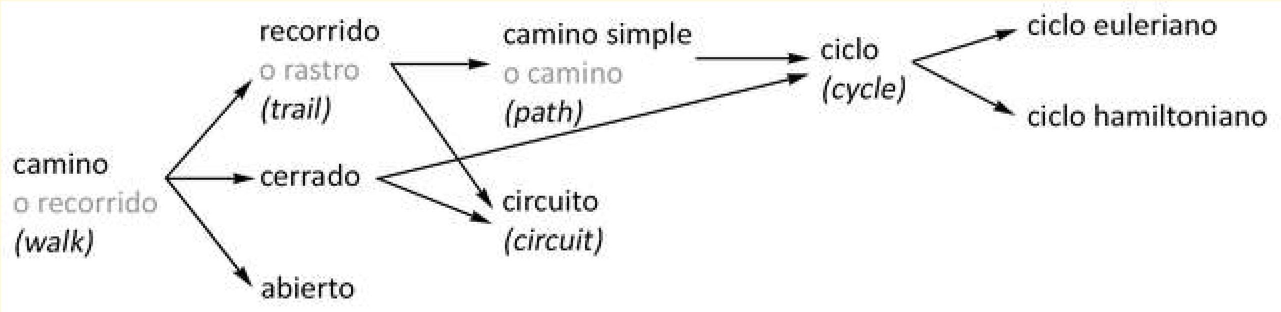
- Un camino cerrado (CLOSED WALK) de u a w es un camino que inicia y termina en el mismo vértice.

- Un camino cerrado (CLOSED WALK) de u a w es un camino que inicia y termina en el mismo vértice.
- Un circuito (CIRCUIT) es un camino cerrado que no contiene lados repetidos.

- Un camino cerrado (CLOSED WALK) de u a w es un camino que inicia y termina en el mismo vértice.
- Un circuito (CIRCUIT) es un camino cerrado que no contiene lados repetidos.
- Un circuito simple (SIMPLE CIRCUIT) es un circuito que no contiene vértices repetidos excepto los extremos.

Tabla de Restrticciones

	Lados Repetidos?	Vértices Repetidos?	Extremos Iguales?
Camino	Permitido	Permitido	Permitido
Recorrido	No	Permitido	Permitido
Recorrido Simple	No	No	No
Camino Cerrado	Permitido	Permitido	Si
Circuito	No	Permitido	Si
Circuito Simple	No	Primero y último Solamente	Si Si

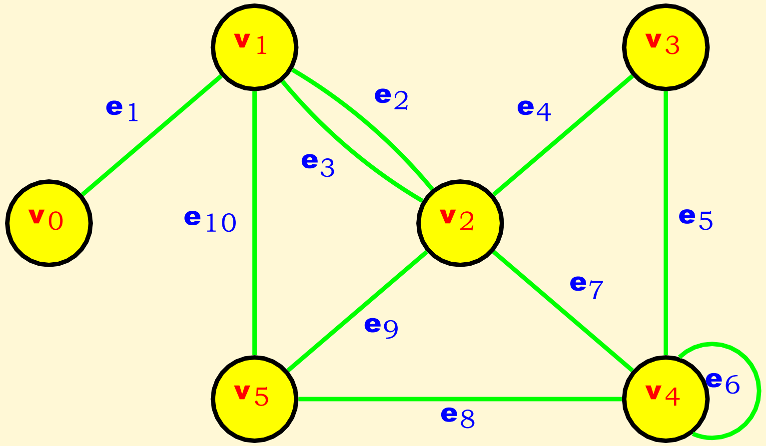


Notación De Caminos

Cuando no exista duda omitiremos o vértices o lados de un camino.

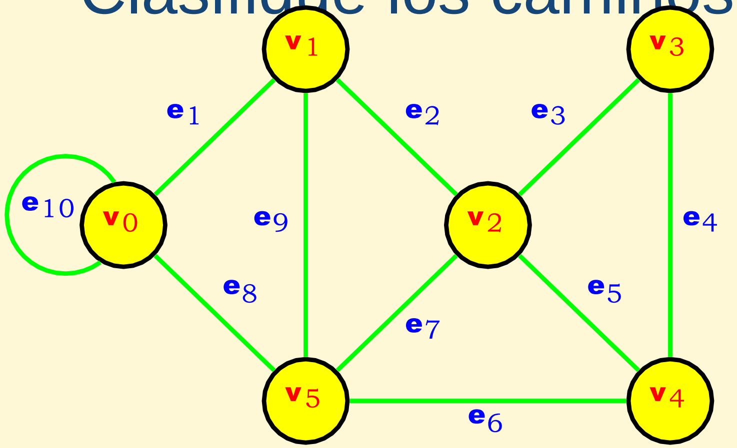
Ejemplo 1

Clasifique los *caminos* dados:



- $v_0\, e_1\, v_1\, e_2\, v_2$
- $v_2\, e_2\, v_1\, e_2\, v_2\, e_7\, v_4$
- $v_2\, e_4\, v_3\, e_5\, v_4\, e_6\, v_4$
- $v_2\, e_4\, v_3\, e_5\, v_4\, e_8\, v_5$
- $v_1\, e_{10}\, v_5\, e_8\, v_4\, e_6\, v_4\, e_7\, v_2\, e_2\, v_1$
- $v_0\, e_1\, v_1\, e_{10}\, v_5\, e_9\, v_2\, e_2\, v_1$
- v_2
- $v_2\, v_3\, v_4\, v_5\, v_2\, v_4\, v_3\, v_2$

Clasifique los caminos dados:



- $v_2\ v_3\ v_4\ v_5\ v_2$
- $v_4\ v_2\ v_3\ v_4\ v_5\ v_2\ v_4$
- $v_2\ v_1\ v_5\ v_2\ v_3\ v_4\ v_2$
- $v_0\ v_5\ v_2\ v_3\ v_4\ v_2\ v_1$
- $v_5\ v_4\ v_2\ v_1$
- $v_1\ e_2\ v_2\ e_3\ v_3\ e_4\ v_4\ e_5\ v_2\ e_2$

CONEXIDAD: Definición

Sea G un grafo.

CONEXIDAD: Definición

Sea G un grafo.

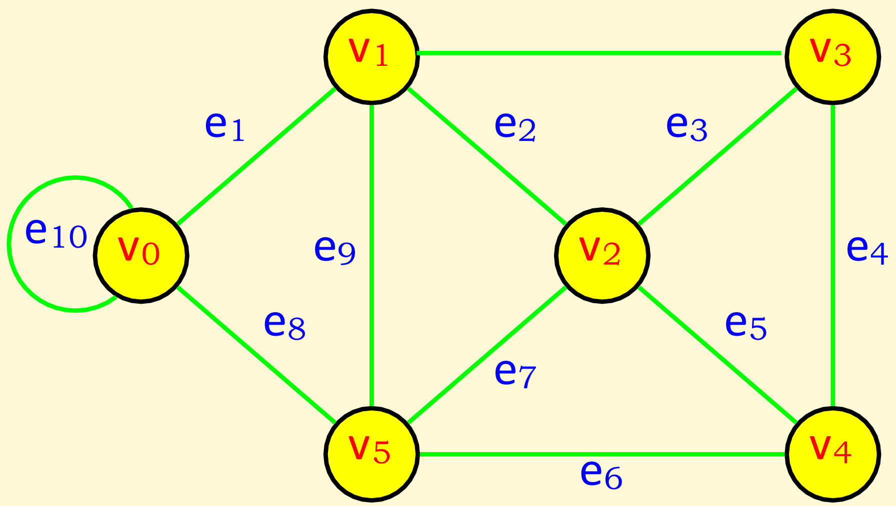
- Dos vértices u y w de G se dicen conectados si y sólo si existe un camino de u a w.

CONEXIDAD: Definición

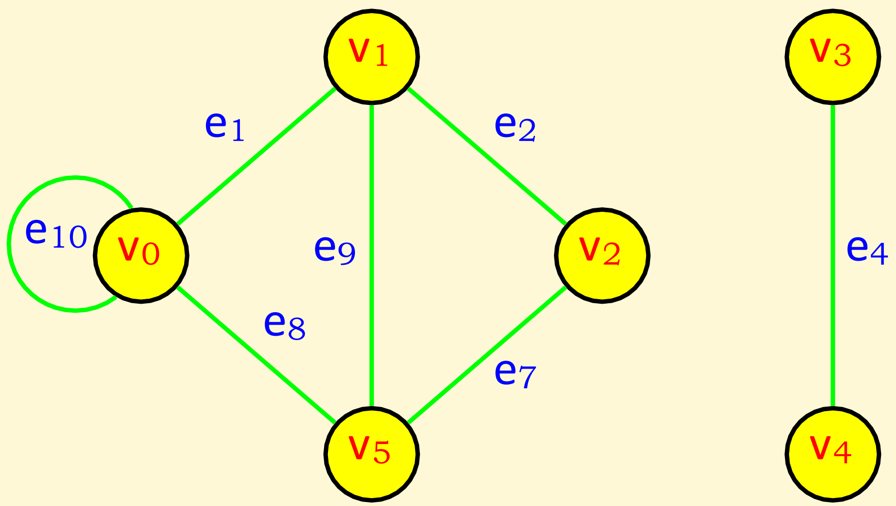
Sea G un grafo.

- Dos vértices u y w de G se dicen conectados si y sólo si existe un camino de u a w.
- G se dice conexo si y sólo si para cualquier par de vértices de G están conectados.
- Si es posible formar un camino desde cualquier vértice a cualquier otro en el grafo, decimos que el grafo es conexo

Ejemplo de Grafo Conexo



Ejemplo de Grafo NO Conexo



Sea G un grafo.

Circuito de Euler

Sea G un grafo. Un circuito de G se llama Circuito de Euler si contiene **todos los lados y todos los vértices** del grafo.

Circuito de Euler

Sea G un grafo.
Dado un **grafo conexo** (*no existen nodos aislados*) y no dirigido G = (V , E), si en G **todos los vértices** tienen **grado par**, G tiene un **ciclo euleriano**.

Un **ciclo euleriano o circuito de Euler** pasa por todas las aristas (lados) exactamente una vez, regresando al punto de partida.

Un circuito euleriano es una trayectoria que empieza y termina en el mismo vértice.

Circuito de Euler

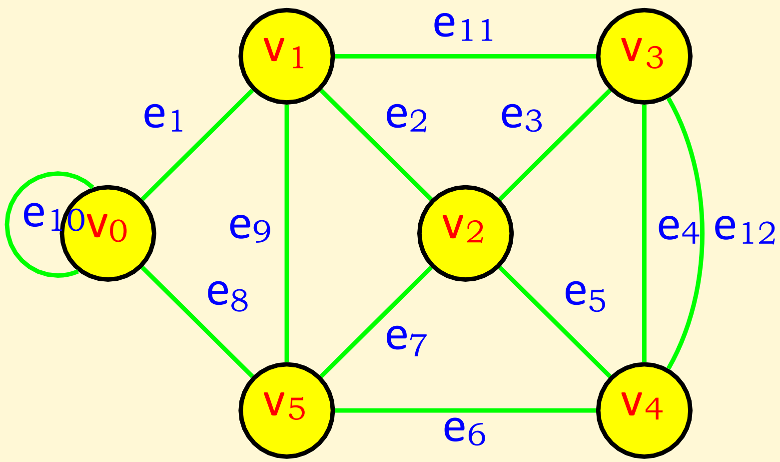
Sea G un grafo. Un circuito de G se llama Circuito de Euler si contiene **todos los lados y todos los vértices** del grafo.

Resultado importante:

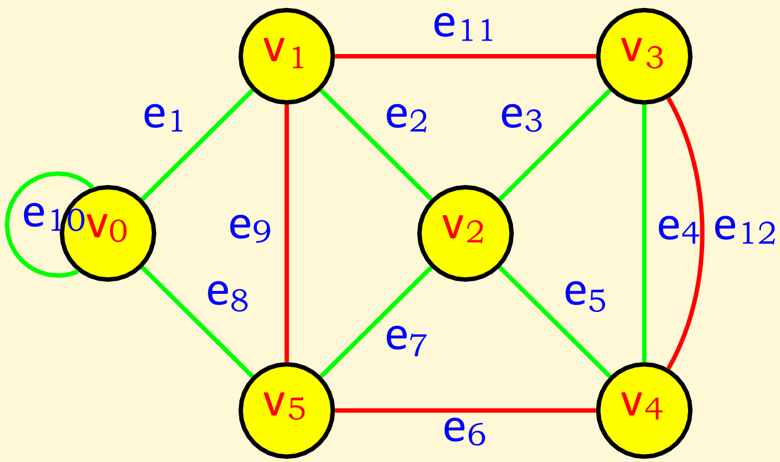
Un grafo contiene un circuito de Euler si y sólo si el grafo es conexo y todo vértice tiene grado par.

Ejemplo

Encuentre un Circuito de Euler para el grafo:



Encuentre un Circuito de Euler para el grafo:

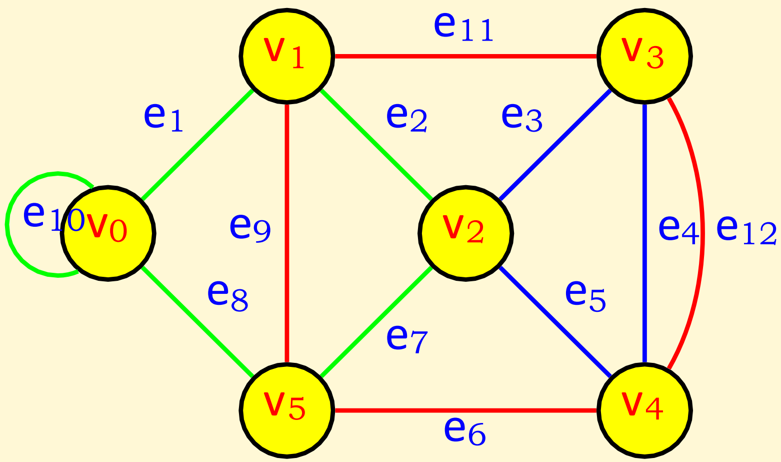


Acumulado: s

Iniciamos con un circuito cualquiera:

$$e_{11}e_{12}e_6e_9$$

Encuentre un Circuito de Euler para el grafo:

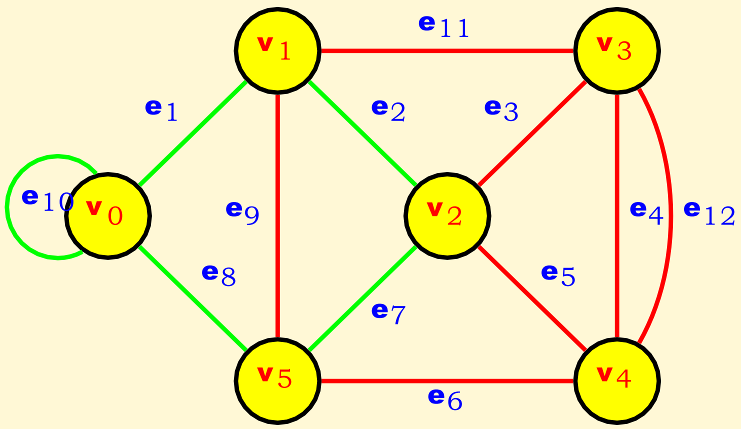


Acumulado: $e_{11}e_{12}e_6e_9$

Si no abarca todos los lados, sobre los verdes generamos otro circuito con un punto en comun con el circuito que se tiene.

$e_5e_3e_4$

Encuentre un Circuito de Euler para el grafo:



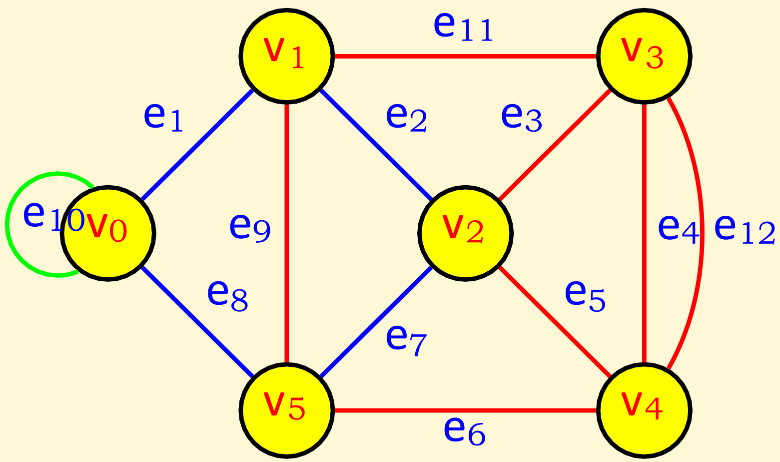
Acumulado: $e_{11}e_{12}e_6e_9$

Nuevo: $e_5e_3e_4$

Se combinan los circuitos para hacer uno mayor. Recuerde que los vértices repetidos no importan. El vértice en común sirve en el enlace.

$e_{11}\ e_{12}\ e_4e_3e_5e_6e_9$

Encuentre un Circuito de Euler para el grafo:



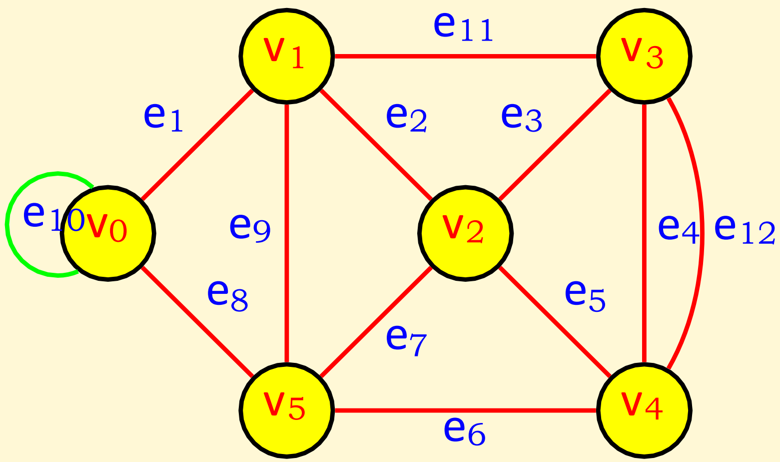
Acumulado:

$e_{11}e_{12}e_4e_3e_5e_6e_9$

Como hay lados sin abarcar (azules) se busca otro cirtuito con un punto en común con el llevado:

$e_1e_8e_7e_2$

Encuentre un Circuito de Euler para el grafo:



Acumulado:

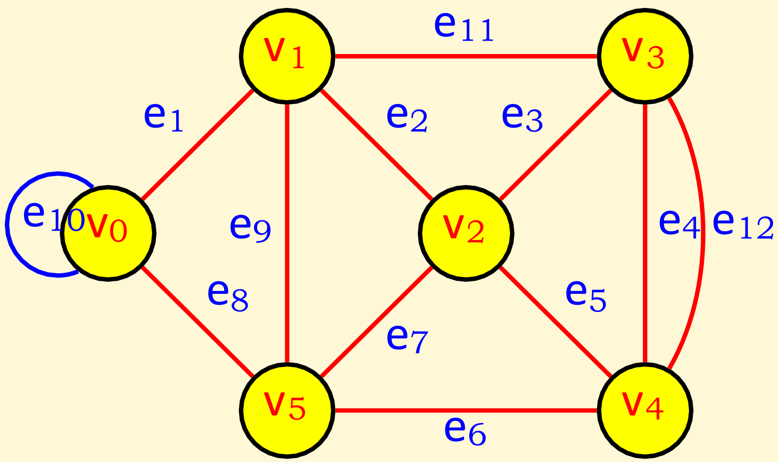
$e_{11}e_{12}e_4e_3e_5e_6e_9$

Nuevo: $e_1e_8e_7e_2$

Se combinan los circuitos para hacer uno mayor. Recuerde que los vértices repetidos no importan. El vértice en común sirve en el enlace. Como hay lados sin abarcar (verdes) se busca otro cirtuito (verdes) con un punto en común con el llevado:

$e_{11}e_{12}e_4e_3e_5e_6e_8e_1e_2e_7e_9$

Encuentre un Circuito de Euler para el grafo:



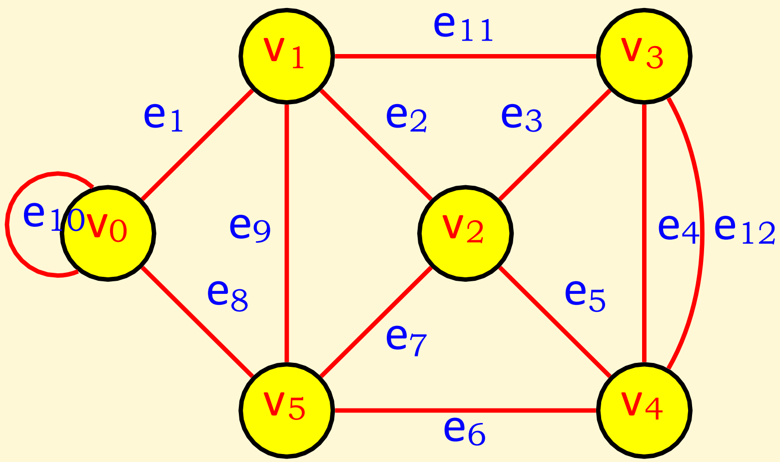
Acumulado:

$e_{11}e_{12}e_4e_3e_5e_6e_8e_1e_2e_7e_9$

Si hay lados sin abarcar se busca otro circuito con un vértice en común con lo acumulado.

e_{10}

Encuentre un Circuito de Euler para el grafo:



Circuito de Euler:

$e_{11}e_{12}e_4e_3e_5e_6e_8e_{10}e_1e_2e_7e_9$

Circuitos de Hamilton Definición

- Un camino hamiltoniano es un camino que pasa por cada vértice exactamente una vez.
- Un grafo que contiene un camino hamiltoniano se denomina un ciclo hamiltoniano si es un ciclo que pasa por cada vértice exactamente una vez (excepto el vértice del que parte y al cual llega).
- Un grafo que contiene un ciclo hamiltoniano se dice grafo hamiltoniano.
- Los caminos y ciclos hamiltonianos se llaman así en honor de William Rowan Hamilton

Circuitos de Hamilton Definición

Dado un grafo G, un circuito de hamilton **es un circuito simple que incluye todos los vértices del grafo.**

Circuitos de Hamilton Definición

Dado un grafo G, un circuito de hamilton **es un circuito simple que incluye todos los vértices del grafo.**

Es decir, es un camino cerrado que pasa por todos los vértices una vez, excepto el primero y el último que deben ser iguales.

Circuitos de Hamilton Definición

Dado un grafo G, un circuito de hamilton **es un circuito simple que incluye todos los vértices del grafo.**
Es decir, es un camino cerrado que pasa por todos los vértices una vez, excepto el primero y el último que deben ser iguales.

Aunque el grafo debe ser conexo y todo vértice debe tener al menos grado dos,

Circuitos de Hamilton Definición

Dado un grafo G, un circuito de hamilton **es un circuito simple que incluye todos los vértices del grafo.**
Es decir, es un camino cerrado que pasa por todos los vértices una vez, excepto el primero y el último que deben ser iguales.

Aunque el grafo debe ser conexo y todo vértice debe tener al menos grado dos, No existe un criterio definitivo para determinar si un grafo posee o no un circuito de Hamilton.

Circuitos de Hamilton Definición

Dado un grafo G, un circuito de hamilton **es un circuito simple que incluye todos los vértices del grafo.** Es decir, es un camino cerrado que pasa por todos los vértices una vez, excepto el primero y el último que deben ser iguales.

Aunque el grafo debe ser conexo y ***todo vértice debe tener al menos grado dos***, No existe un criterio definitivo para determinar si un grafo posee o no un circuito de Hamilton.

Circuitos de Hamilton Definición

Algunas condiciones suficientes para la existencia de circuitos hamiltonianos son:

Teorema de DIRAC

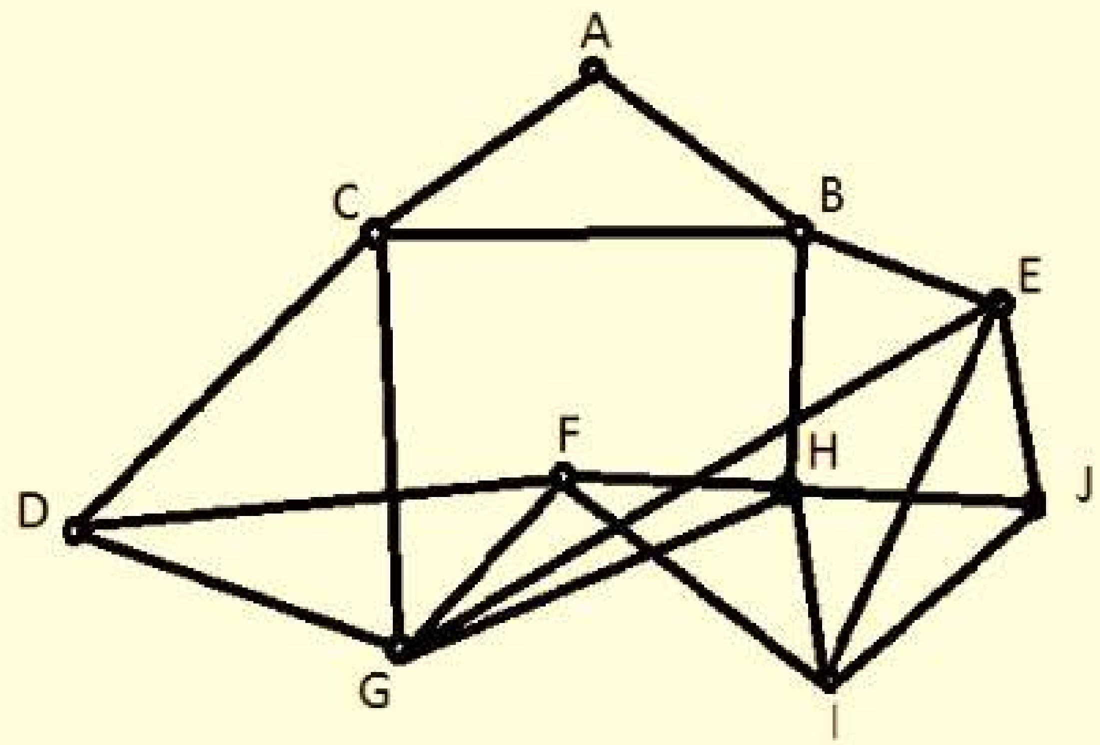
(Gabriel A. Dirac en 1952)
Sea G un grafo simple con n vértices con $n \geq 3$ tal que todos los vertices de G tienen grado mayor o igual que $n/2$.
Entonces, G contiene un circuito hamiltoniano.

Teorema de ORE

(Oystein Ore en 1960)
Sea G un grafo simple con n vértices para $n \geq 3$ tal que $deg(u) + deg(v) \geq n$ para cada par de vértices no adyacentes u y v de G. Entonces, G contiene un circuito hamiltoniano.

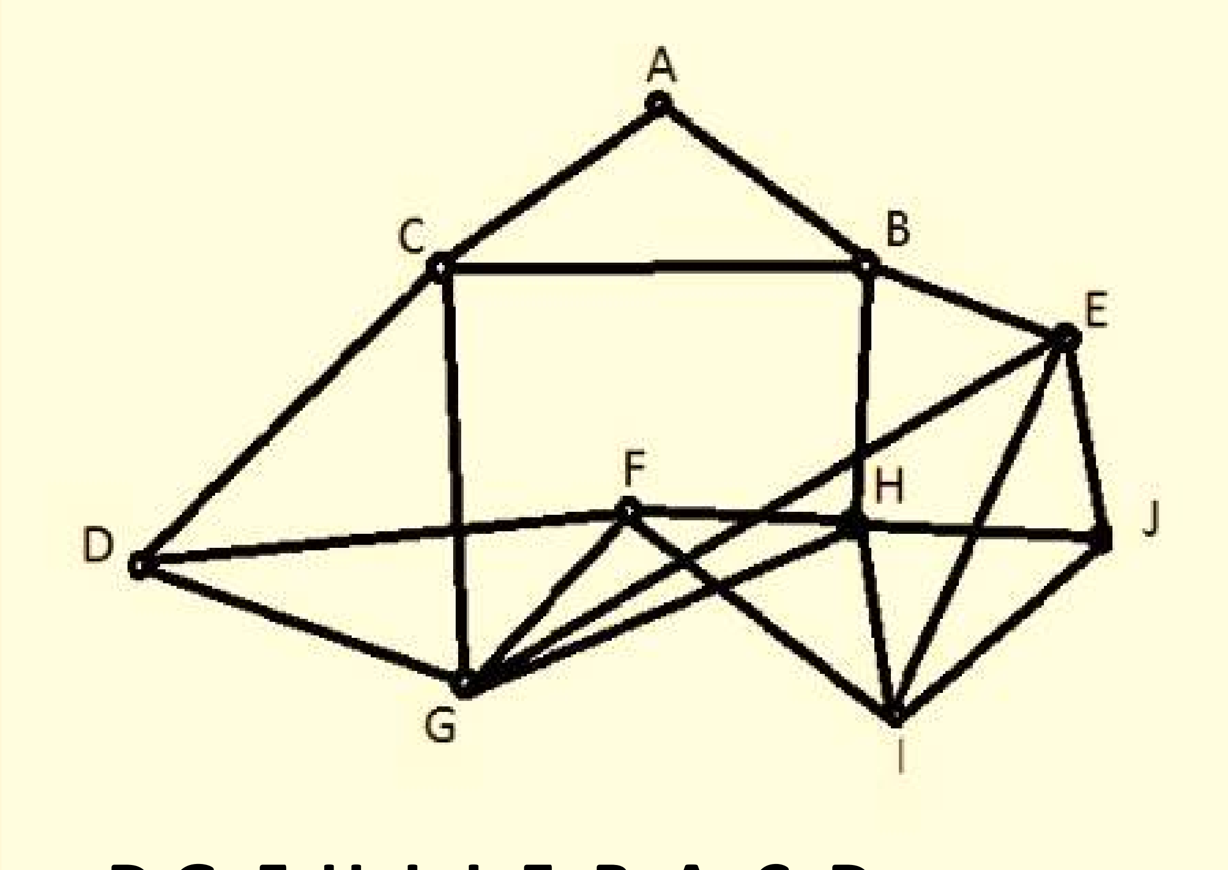
Ejercicio

Determinar si es posible un circuito de Hamilton en el siguiente grafo:



Ejercicio

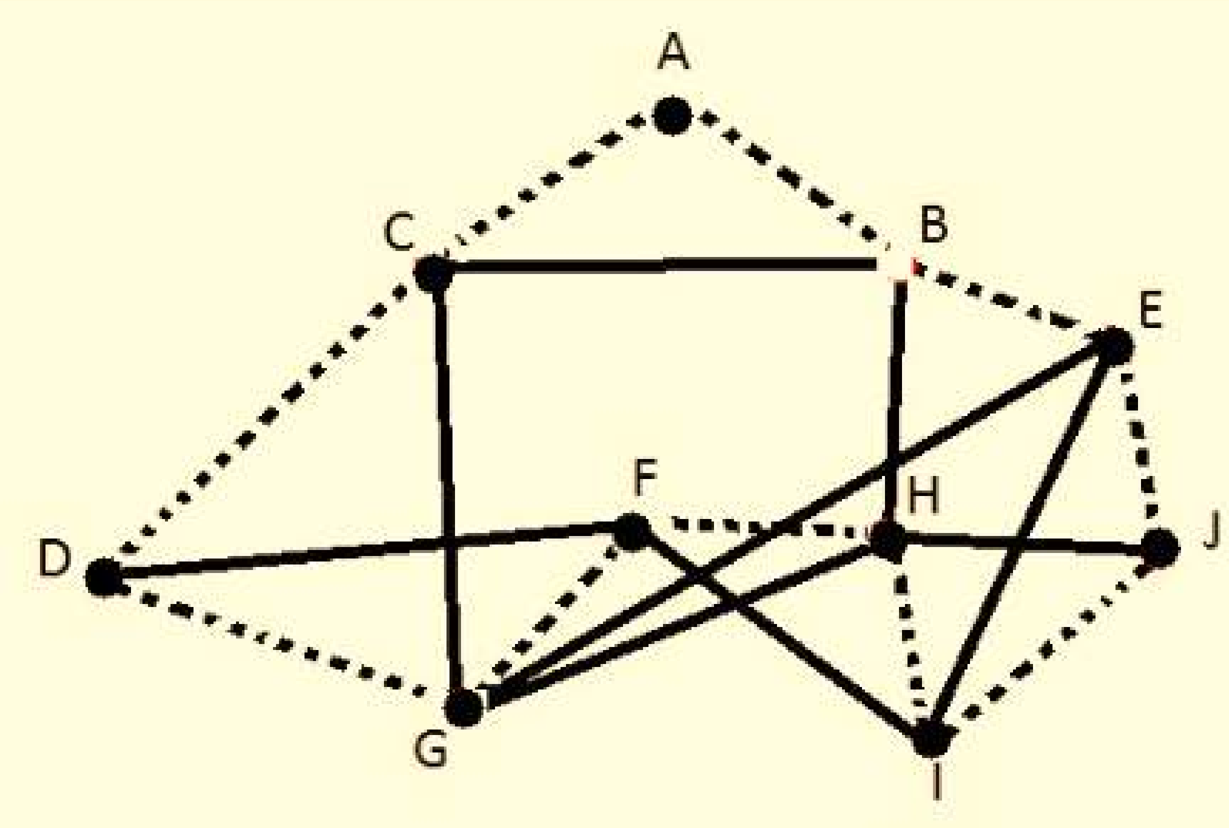
Determinar si es posible un circuito de Hamilton en el siguiente grafo:



Solucion: D,G, F, H, I, J, E, B, A, C, D

Ejercicio

Determinar si es posible un circuito de Hamilton en el siguiente grafo:



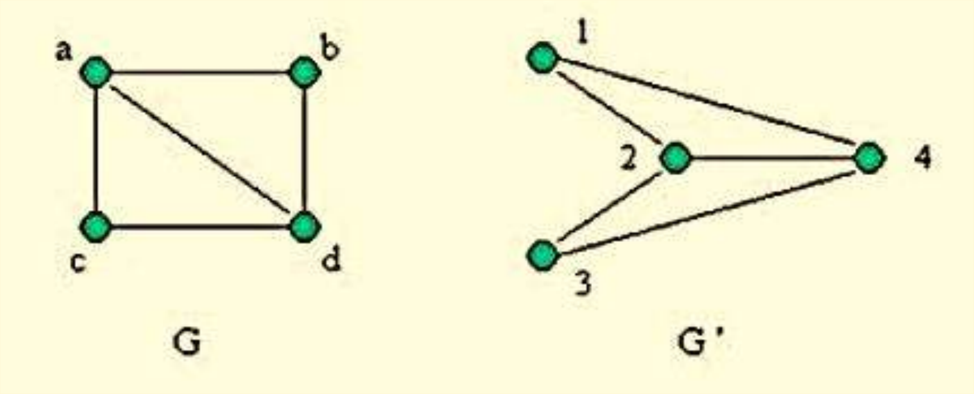
Solucion: D,G, F, H, I, J, E, B, A, C, D

Grafos isomorfos

Isomorfismo significa "de igual forma".

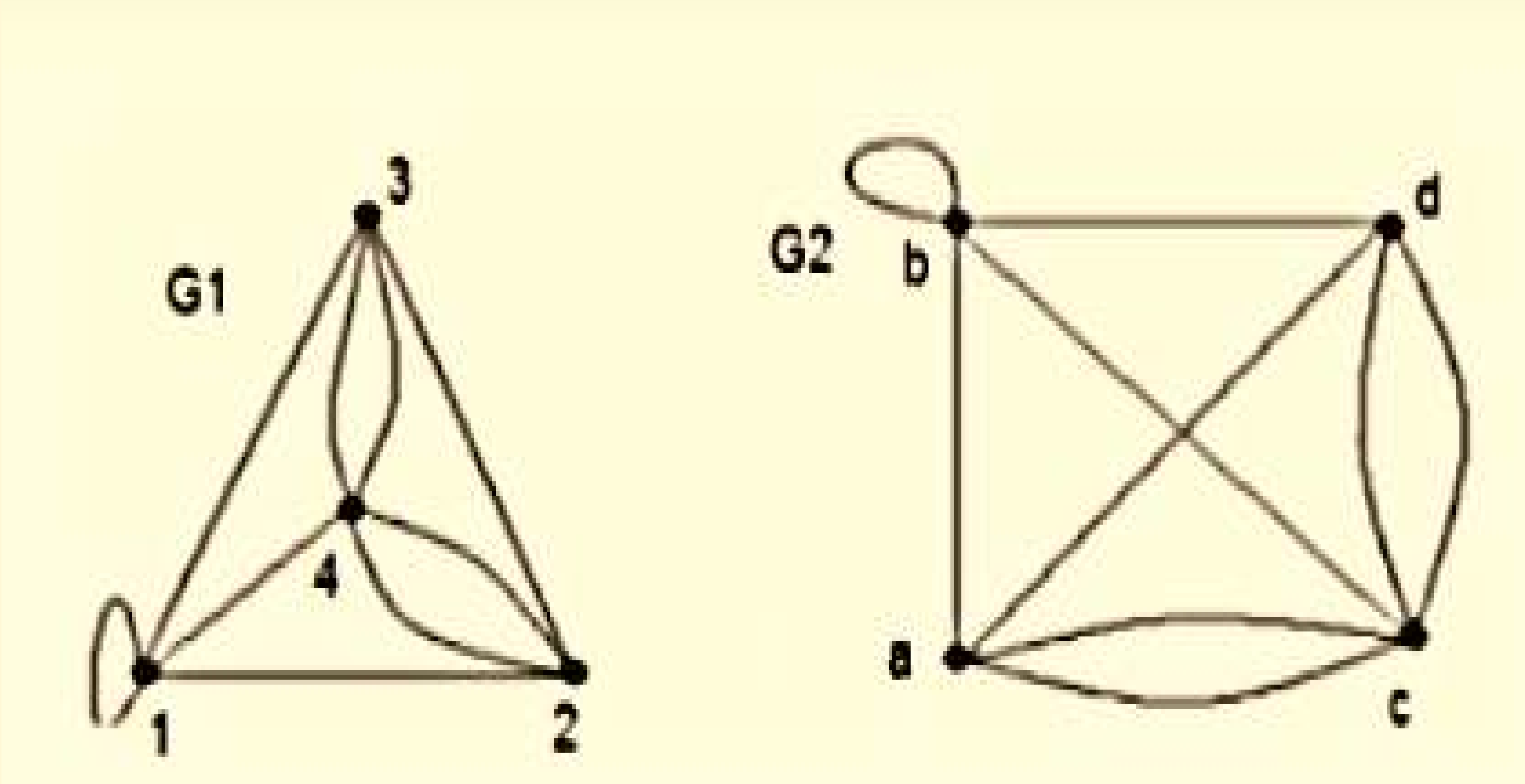
Dos grafos son isomorfos si existe correspondencia uno a uno entre los nodos de ambos grafos (biyección), y además conservan la adyacencia tanto entre los nodos como en la dirección de los lados.

G y G´ se denominan isomorfos, y son matemáticamente iguales, solo varia la apariencia, o sea, que se mantienen las adyacencias, estructura, caminos y ciclos.



Grafos isomorfos

Determine si los grafos de la figura son isomorfos, utilizando sus matrices de adyacencia.



Grafos isomorfos

Solución:

$$G1: \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \end{array} \qquad G2: \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 & 1 & d \\ 1 & 1 & 1 & 0 & c \\ b & a & d & c & \end{array}$$

Grafo	Numero vértices	Número aristas	Grado			
			1	2	3	4
G1	4	9	4	4	4	5

Ahora, con el otro grafo:

Grafo	Numero vértices	Número aristas	Grado			
			a	b	c	d
G2	4	9	4	4	4	5

Por lo tanto, G1 y G2 son isomorfos

Referencias

https://madi.nekomath.com/P2/IntroGraficas.html

https://matematicasies.com/Matriz-de-adyacencia-de-un-grafo

https://www.studysmarter.es/resumenes/matematicas/numeros-y-algebra/grafos-y-matrices/