دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده مهندسی برق- گروه مهندسی کنترل

درس سیستم‌های کنترل خطی
پاسخ تمرین سری دوم

نام و نام خانوادگی	آنائیس گل‌بوداغیانس
شمارهٔ دانشجویی	۴۰۱۲۲۱۱۳
تاریخ	آبان ۱۴۰۳

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

فهرست برنامه‌ها

۱ سوال اول: شناسایی سیستم حلقه‌باز

۱.۱ حل دستی

با توجه به شکل صورت سوال، زمان فراجهش، بیشینه آن و مقدار نهایی داده شده است و می‌توان با استفاده از آن‌ها سوال را حل کرد.

$$t_p = 0.332s$$

$$M_p = 44.3\%$$

$$y(\infty) = 1.58$$

ابتدا ζ را پیدا می‌کنیم.

$$M_p\% = 100e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$44.3 = 100e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

از طرفین ln می‌گیریم و به توان دو می‌رسانیم تا معادله ساده‌تر شود.

$$ln(0.443) = \frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$(ln(0.443))^2 = (ln(0.443))^2\zeta^2 + \pi^2\zeta^2$$

تمامی محاسبات با دقت ۵ رقم اعشار انجام شده است. به‌دست می‌آوریم:

$$\zeta = 0.25088$$

حال، ω_n را محاسبه می‌کنیم.

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\omega_n = \frac{\pi}{t_p\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\omega_n = \frac{\pi}{0.332\sqrt{1-0.25088^2}} = 9.77526$$

برای محاسبه k، با توجه به قضیه مقدار نهایی داریم:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s)$$

با توجه به داده سوال داشتیم:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 1.58$$

ورودی سیستم پله می‌باشد؛ پس

$$Y(s) = T(s)R(s) = \frac{1}{s}T(s)$$

$$\lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} T(s) = k$$

نتیجه می‌گیریم:

$$k = 1.58$$

پس تابع T به‌صورت زیر می‌شود:

$$T = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{150.97802}{s^2 + 4.90483s + 95.55571}$$

اگر رابطه سیستم حلقه‌بسته با حلقه‌باز را به صورت زیر تعریف کنیم،

$$T = \frac{G}{1+G}$$

می‌توانیم با طرفین وسطین و تنها کردن G، ارتباط معکوسشان را تعریف کنیم.

$$T + TG = G \rightarrow T = G - TG = G(1-T)$$

$$G = \frac{T}{1-T} = \frac{150.97802}{s^2 + 4.90483s - 55.42231}$$

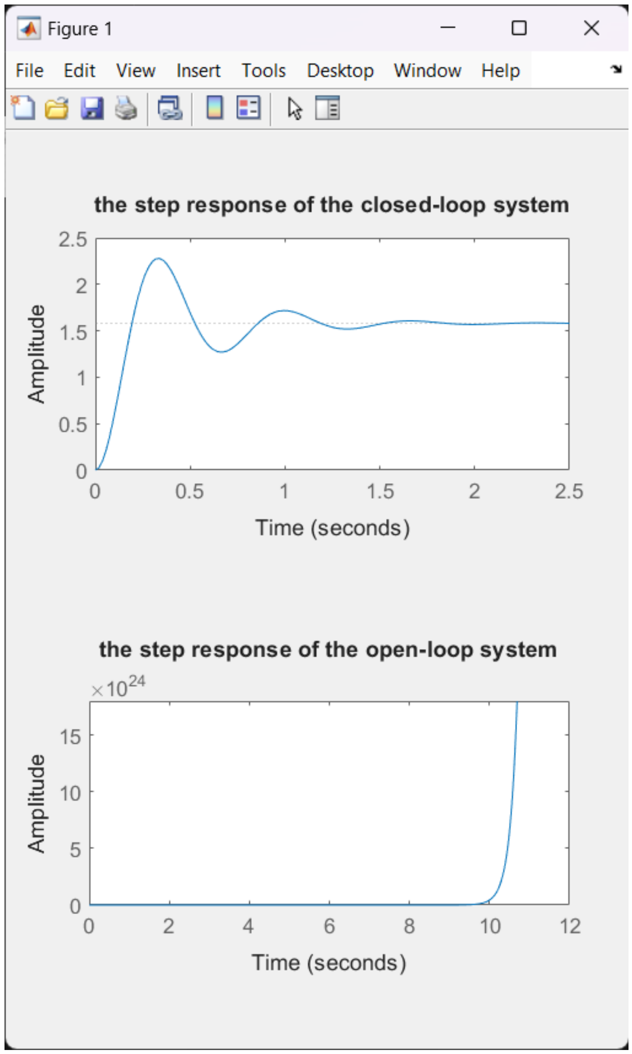
۲.۱ صحت‌سنجی با MATLAB

حال نتایج را با استفاده از متلب تحلیل و صحت‌سنجی می‌کنیم.

```
clc;clear;close all

%Question 1
num = 150.97802;
den_T = [1 4.90483 95.55571];
T = tf(num, den_T);


subplot(2,1,1)
step(T)
title('the step response of the closed-loop system')
T_info = stepinfo(T);

den_G = [1 4.90483 -55.42231];
G = tf(num, den_G);

subplot(2,1,2)
step(G)
title('the step response of the open-loop system')
```

```
G_info = stepinfo(G);
```

Code 1: MATLAB code solution Q1



شکل ۱: خروجی کد سوال اول - نمودارها

مشاهده می‌کنیم که با بسته شدن فیدبک، سیستم پایدار شده است.

T_info

1x1 struct with 9 fields

Field	Value
RiseTime	0.1299
TransientTime	1.4435
SettlingTime	1.4435
SettlingMin	1.2706
SettlingMax	2.2787
Overshoot	44.2237
Undershoot	0
Peak	2.2787
PeakTime	0.3380

شکل ۲: خروجی کد سوال اول – پارامترهای سیستم حلقه‌بسته

G_info

1x1 struct with 9 fields

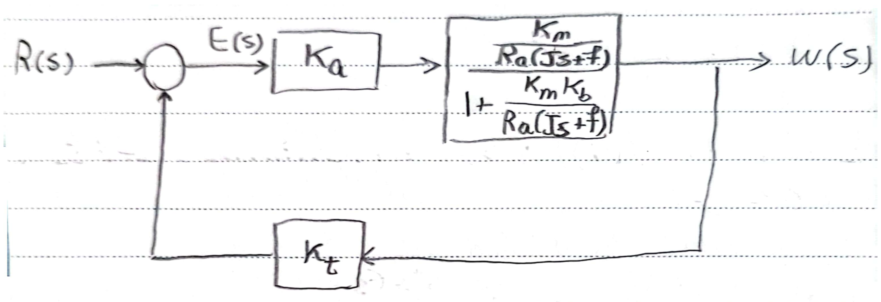
Field	Value
RiseTime	NaN
TransientTime	NaN
SettlingTime	NaN
SettlingMin	NaN
SettlingMax	NaN
Overshoot	NaN
Undershoot	NaN
Peak	Inf
PeakTime	Inf

شکل ۳: خروجی کد سوال اول – پارامترهای سیستم حلقه‌باز

۲ سوال دوم: موتور DC

۱.۲ حل دستی

تابع تبدیل را در حالتی در نظر می‌گیریم که ورودی اغتشاش برابر صفر باشد.
بلوک دیاگرام را به صورت زیر ساده می‌کنیم. سپس با در نظر گرفتن فیدبک منفی با پسخور، تابع تبدیل را ساده‌تر می‌کنیم.



شکل ۴: نمودار بلوکی ساده‌شده سیستم

$$\frac{\omega(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K_a K_m}{R_a(Js+f)+K_m K_b}}{1 + \frac{K_a K_m K_t}{R_a(Js+f)+K_m K_b}}$$

$$\rightarrow \frac{K_a K_m}{R_a(Js+f) + K_m K_b + K_a K_m K_t}$$

حال به‌ازای $K_t = 0$ برای سیستم حلقه‌باز داریم:

$$T_{open-loop} = \frac{0.8}{2(s+0.2)+0.4} = \frac{0.4}{s+0.4}$$

به‌ازای $K_t = 1$:

$$T_{closed-loop} = \frac{0.8}{2(s+0.2)+1.2} = \frac{0.4}{s+0.8}$$

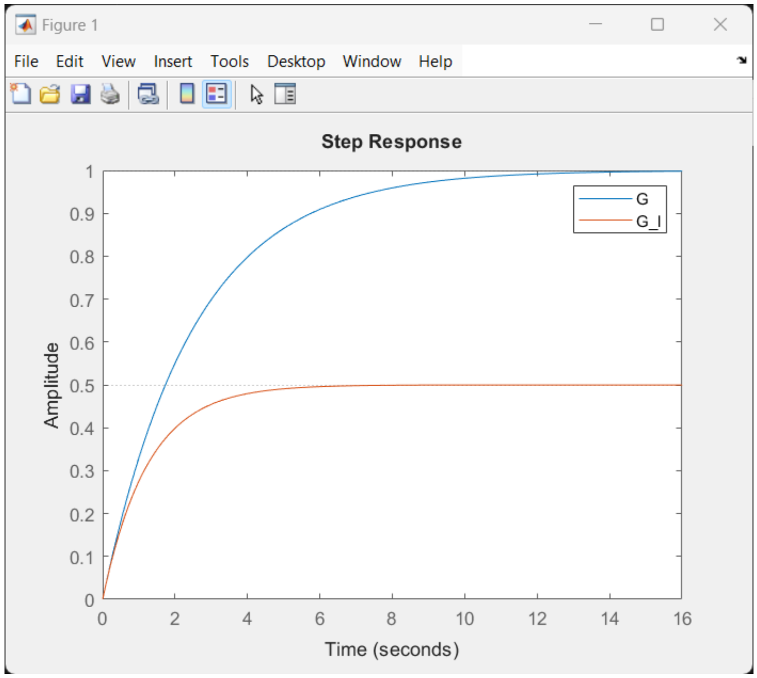
۲.۲ صحت‌سنجی با MATLAB

```
clc;clear;close all

%Question 2, part B
%definig s and the systems
s = tf('s');
G = 0.4/(s + 0.4);
G_1 = 0.4/(s + 0.8);
```

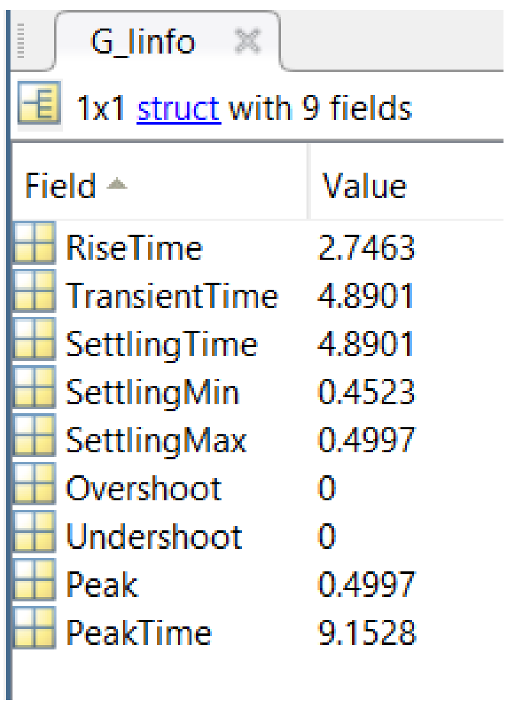
```
%step response of the systems and its information.
hold on
legend
step(G)
Ginfo = stepinfo(G);
step(G_l)
G_linfo = stepinfo(G_l);

%defining a symbolic "s" to calculate the value of E(s) or e_ss.
syms s;
G = 0.8/(2*s + 0.8);
G_l = 0.8/(2*s + 1.6);
u = 1/s;
E = (1-G)*u;
E_loop = (1-G_l)*u;
f=E*s;
f_loop = E_loop*s;
e_ss = limit(f,s,0);
e_ss_loop = limit(f_loop,s,0);
```

Code 2: MATLAB code solution Q2

خروجی کد:



شکل ۵: نمودار پاسخ پله سیستم‌ها

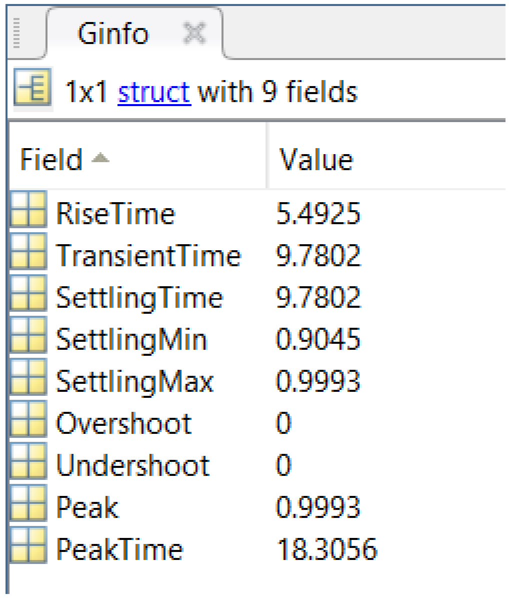


G_Iinfo

1x1 struct with 9 fields

Field	Value
RiseTime	2.7463
TransientTime	4.8901
SettlingTime	4.8901
SettlingMin	0.4523
SettlingMax	0.4997
Overshoot	0
Undershoot	0
Peak	0.4997
PeakTime	9.1528

شکل ۶: پارامترهای سیستم حلقه‌بسته



Ginfo

1x1 struct with 9 fields

Field	Value
RiseTime	5.4925
TransientTime	9.7802
SettlingTime	9.7802
SettlingMin	0.9045
SettlingMax	0.9993
Overshoot	0
Undershoot	0
Peak	0.9993
PeakTime	18.3056

شکل ۷: پارامترهای سیستم حلقه‌باز

مشاهده می‌کنیم که در سیستم حلقه‌بسته مقادیر تمام پارامترها کاهش می‌یابند؛ علاوه‌بر این باید توجه داشت که سیستم مرتبه یک بوده و معیارهای فراجهش ندارد.

خطای حالت ماندگار سیستم حلقه‌باز برابر صفر و برای حلقه‌بسته برابر 0.5 می‌شود.

۳ سوال سوم: سیستمی با نمودار بلوکی و محاسبه پارامترهای آن

۱.۳ بخش الف: محاسبه پارامترها به ازای $K = 16$

ابتدا تابع تبدیل سیستم را می‌نویسیم و ساده می‌کنیم.

$$M(s) = \frac{\frac{16}{s^2+4s}}{1+\frac{16}{s^2+4s}} = \frac{16}{s^2+4s+16}$$

ورودی سیستم پله است.

$$R(s) = \frac{1}{s}$$

محاسبه خطای حالت ماندگار:

$$E(s) = (1 - M(s))R(s) = \frac{s^2+4s}{s(s^2+4s+16)}$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s^2+4s}{s^2+4s+16} = 0$$

محاسبه بیشینه فراجهش:

$$M_p\% = 100e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

با توجه به تابع تبدیل می‌توان فهمید:

$$\omega_n^2 = 16 \to \omega_n = 4$$

$$2\zeta\omega_n = 4 \to \zeta = 0.5$$

$$M_p\% = 100e^{\frac{-0.5\pi}{\sqrt{1-0.5^2}}} = 16.30335\%$$

برای محاسبه زمان نشست از دو فرمول استفاده شده است. فرمول اولی برای $0 < \zeta < 0.69$ است:

$$t_s = \frac{3.2}{\zeta\omega_n} = \frac{3.2}{2} = 1.6$$

اما در حالت کلی داریم:

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{2} = 2$$

در بخش بعدی با توجه به شبیه‌سازی خواهیم دید که استفاده از فرمول کلی برای محاسبه زمان نشست مناسب‌تر است.

۲.۳ بخش ب: مشخص کردن محدوده K

در بخش قبلی مشاهده شد که رابطه K با سیستم به صورت $M(s) = \frac{K}{s^2+4s+K}$است. از M_p می‌توان ζ را محاسبه نمود.

$$M_p = 0.05 = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \to ln(0.05) = \frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} \to \zeta = 0.69011$$

حال برای به‌دست آوردن ω_n دو راه را می‌توان پیش گرفت. می‌توانیم از $2\zeta\omega_n = 4$ یا از زمان فراجهش استفاده کنیم. البته باید توجه داشت که $2\zeta\omega_n = 4$ همیشه مقدار ثابتی دارد و زمان فراجهش مقداری است که امکان تغییر دارد. پس داریم:

$$2\zeta\omega_n = 4 \to 2(0.69011)\omega_n = 4 \to \omega_n = 2.89809$$

$$K = \omega_n^2 = 8.39892$$

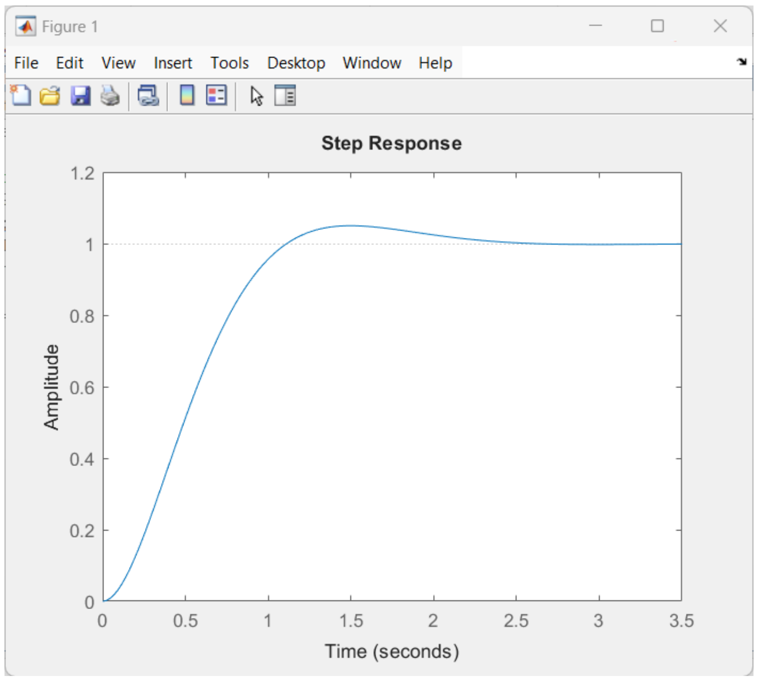
۳.۳ بخش ج: شبیه‌سازی بخش ب با MATLAB

```
clc;clear;close all

%Question 3 part c, defining the system with another method
k = 8.39892;
num = k;
den = [1 4 k];
M = tf(num, den);
step(M)
```

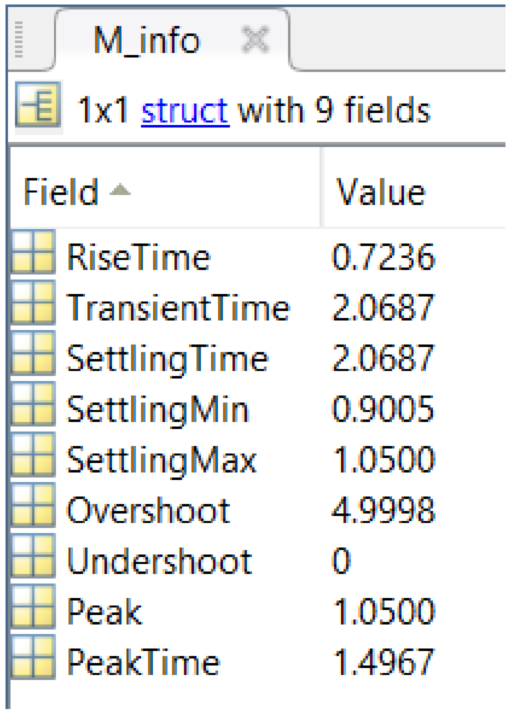
```
M_info = stepinfo(M);
```

Code 3: MATLAB code solution Q3

در شکل زیر مشاهده می‌کنیم که سیستم به مقدار ۱ میرا می‌شود.



شکل ۸: نمودار پاسخ پله سیستم سوال ۳



M_info

1x1 struct with 9 fields

Field	Value
RiseTime	0.7236
TransientTime	2.0687
SettlingTime	2.0687
SettlingMin	0.9005
SettlingMax	1.0500
Overshoot	4.9998
Undershoot	0
Peak	1.0500
PeakTime	1.4967

شکل ۹: پارامترهای سیستم

۴.۳ بخش د: محاسبه مقدار فراجهش به‌ازای $K = 4$

$$K = \omega_n^2 = 4 \rightarrow \omega_n = 2 \rightarrow 2\zeta(2) = 4 \rightarrow \zeta = 1$$

بنابراین فراجهشی صورت نمی‌گیرد. برای مقدار بیشینه فراجهش داریم:

$$M_p = e^{\frac{-\pi}{\sqrt{1-1^2}}} = e^{-\infty} = 0$$

۴ سوال چهارم: محاسبه خطای ماندگار یک سیستم

اگر ورودی اصلی را صفر کنیم، تابع تبدیل خروجی نسبت به ورودی اغتشاش به‌دست خواهد آمد.

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G}{1+KG}$$

$$E(s) = (1 - K\frac{Y(s)}{D(s)})D(s)$$

$$D(s) = \frac{1}{s}$$

خطای ماندگار به ازای ورودی اغشاش برابر $-B$ است.

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0}(1 - \frac{KG}{1+KG}) = -B$$

از رابطه بالا می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{KG(0)}{1+KG(0)} = B+1 \to KG(0) = 1+B+KG(0)+BKG(0) \to BKG(0) = -1-B$$

$$G(0) = -\frac{1+B}{BK}$$

اکنون تابع تبدیل نسبت خروجی به ورودی اصلی را محاسبه می‌کنیم و خطای ماندگار آن را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KG}{1+KG}$$

$$R(s) = \frac{1}{s} \to e_{ss} = \lim_{s\to 0}(1-\frac{KG}{1+KG}) = \lim_{s\to 0}\frac{1}{1+KG} = \frac{1}{1+KG(0)}$$

$$\to e_{ss} = \frac{1}{1+K(-\frac{1+B}{BK})} = -B$$

از جایی که $\frac{Y(s)}{R(s)} = K\frac{Y(s)}{D(s)}$ می‌توانستیم بدون محاسبات بالا به پاسخ نهایی برسیم.

۵ سوال پنجم: محاسبه مقدار یک انتگرال

برای محاسبه مقدار I می‌توان از رابطه لاپلاس یک‌طرفه کمک گرفت.

$$E(s) = \int_0^\infty e(t)e^{-st}dt$$

به‌ازای $s=0$ مقدار I به‌دست می‌آید.

$$I = \int_0^\infty e(t)dt = E(0)$$

$$E(s) = (1-T(s))R(s)$$

$$R(s) = \frac{1}{s} \to E(s) = \frac{(1-T(s))}{s}$$

$$\lim_{s\to 0} E(s) = \frac{1-T(0)}{0} = \frac{0}{0}$$

با توجه به صورت سوال $T(0)=1$ می‌باشد؛ لذا حد مبهم می‌شود و باید رفع ابهام شود. می‌توان با قاعده هوپیتال رفع ابهام کرد.

$$\lim_{s\to 0} E(s) = \lim_{s\to 0}(-T'(s))$$

برای محاسبه عبارت بالا، ابتدا تابع تبدیل و مشتقش را به شکل دیگری می‌نویسیم.

$$T(s) = \frac{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_1 s + 1}{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + ... + b_1 s + 1}$$

$$T'(s) = \frac{(na_n s^{n-1} + (n-1)a_{n-1}s^{n-2} + ... + a_1)(b_m s^m + ... + b_1 s + 1) - (a_n s^n + ... + a_1 s + 1)(mb_m s^{m-1} + (m-1)b_{m-1}s^{m-2} + ... + b_1)}{(b_m s^m + ... + b_1 s + 1)^2}$$

$$\to T'(0) = a_1 - b_1$$

پس:

$$\lim_{s\to 0} E(s) = \lim_{s\to 0}(-T'(s)) = b_1 - a_1$$

می‌توان دقت کرد که با مجموع Aها a_1 را ساخت؛ زیرا a_1 مجموع تمام ضریب‌های s با توان یک هست. همین برای b_1 صادق است.

$$I = \sum_{j=1}^{m} B_j - \sum_{i=1}^{n} A_i$$