

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده مهندسی برق - گروه مهندسی کنترل

درس سیستم‌های کنترل خطی پروژه پایانی

نام و نام خانوادگی	آناییس گل بوداغیانس
شماره دانشجویی	۴۰۱۲۲۱۱۳
تاریخ	بهمن ماه ۱۴۰۳



فهرست مطالب

۵	۱ سوال اول: رسم بودی	
۵	۱.۱ کد
۵	۲.۱ خروجی
۶	۲ سوال دوم: مشخصات سیستم	
۶	۱.۲ نوع سیستم
۶	۲.۲ مرتبه سیستم
۶	۳.۲ میزان تاخیر
۷	۴.۲ کمینه‌فاز بودن
۷	۳ سوال سوم: برازش تابع تبدیل	
۷	۱.۳ برازش با دستورات متلب
۸	۲.۳ برازش با <i>SystemIdentification</i>
۱۲	۴ سوال چهارم: معیار پایداری راث	
۱۲	۵ سوال پنجم: تعیین کنترل‌کننده مناسب برای پایداری	
۱۲	۱.۵ مکان هندسی و کنترل‌کننده تناسبی
۱۴	۲.۵ کنترل‌کننده صنعتی
۱۴	۶ سوال ششم: طراحی کنترلر	
۲۵	۷ سوال هفتم: طراحی کنترلر	
۲۵	۱.۷ بخش اول: خطای ماندگار
۲۹	۲.۷ بخش دوم: تحلیل حساسیت



فهرست تصاویر

۶	رسم بودی از داده‌های موجود	۱
۷	محاسبه تاخیر	۲
۸	بودی تابع تبدیل تخمین یافته	۳
۸	تابع تبدیل به دست آمده	۴
۹	وارد کردن داده‌ها	۵
۱۰	مرحله دوم	۶
۱۰	مرحله سوم	۷
۱۱	مرحله چهارم	۸
۱۱	تابع تخمین زده شده	۹
۱۳	رسم مکان هندسی	۱۰
۱۳	پاسخ پله	۱۱
۱۵	پاسخ پله	۱۲
۱۵	مشخصات پاسخ پله	۱۳
۱۷	پاسخ پله با کنترلر بهره ثابت	۱۴
۱۸	نمودار بودی	۱۵
۱۹	پاسخ پله با کنترلر پس فاز	۱۶
۱۹	کنترلر پس فاز	۱۷
۲۰	نمودار بودی	۱۸
۲۱	پاسخ پله کنترلر پس فاز و پیش فاز	۱۹
۲۱	کنترلر پیش فاز بدون بهره ثابت	۲۰
۲۴	پاسخ پله با کنترلر پس فاز بهبود یافته	۲۱
۲۴	پاسخ پله با کنترلر پس فاز و پیش فاز	۲۲
۲۵	کنترلر پیش-پس فاز نهایی	۲۳
۲۶	پاسخ سیستم با کنترلر بهره ثابت به ورودی شیب	۲۴
۲۷	<i>PIDtuner</i>	۲۵
۲۸	<i>sisotool</i>	۲۶
۲۹	مکان هندسی	۲۷
۳۰	پاسخ پله به ازای بهره 5.8-	۲۸
۳۲	بلوک دیاگرام سیستم با ورودی پله	۲۹
۳۲	پاسخ پله	۳۰
۳۲	بلوک دیاگرام سیستم با ورودی شیب	۳۱
۳۳	پاسخ شیب	۳۲



فهرست جداول



فهرست برنامه‌ها

۵ Bode plotting	۱
۷ function transfer	۲
۱۲ function transfer	۳
۱۴ (0, 0) in pole the and zeros Removing	۴
۱۶ controller K Q۶	۵
۲۲ controller lag Q۶	۶
۲۲ controller lead Q۶	۷
۲۵ controller K QV	۸
۳۰ controller K B) (part QV	۹



۱ سوال اول: رسم بودی

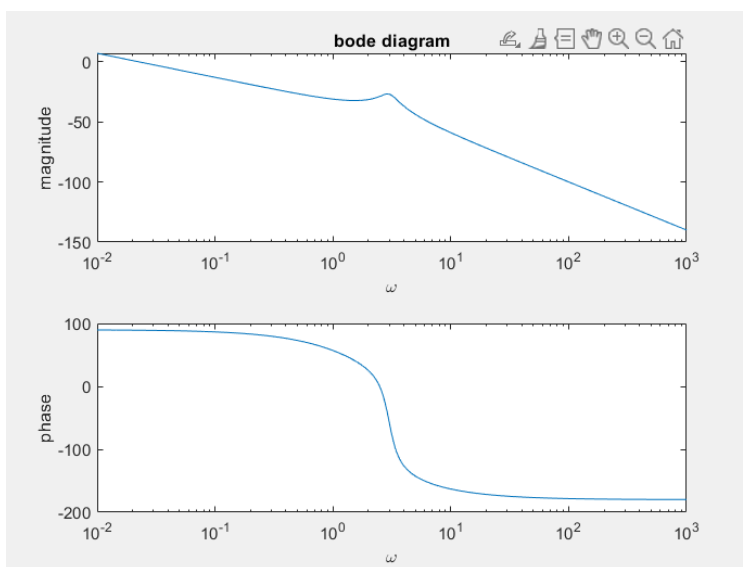
۱.۱ کد

```
1 clc;close all hidden;clear
2 %% Q1
3 data = load("Data.mat");
4 myStruct = data.Data;
5 magnitude = myStruct.magnitude;
6 phase = myStruct.phase;
7 omega = myStruct.omega;
8
9 figure
10 subplot(2,1,1)
11 semilogx(omega,20*log10(magnitude));
12 title('bode diagram')
13 xlabel('\omega')
14 ylabel('magnitude')
15 subplot(2,1,2)
16 semilogx(omega,phase);
17 xlabel('\omega')
18 ylabel('phase')
```

Code 1: plotting Bode

از دستور load برای خواندن فایل استفاده کردیم. فایل داده شده از نوع struct می باشد و برای خواندن مجدد دوبار struct می شوند؛ یعنی برای استفاده باید مطابق خط ۴، آن را تعریف کرد و مقادیر اندازه و فاز را خواند. با توجه به این که مقادیر اندازه خطی هستند، باید برای رسم بودی آن‌ها را به فرم دسی بل آورد. با دستور logx بردار لگاریتمی برای x در نظر می گیریم.

۲.۱ خروجی



شکل ۱: رسم بودی از داده‌های موجود

۲ سوال دوم: مشخصات سیستم

۱.۲ نوع سیستم

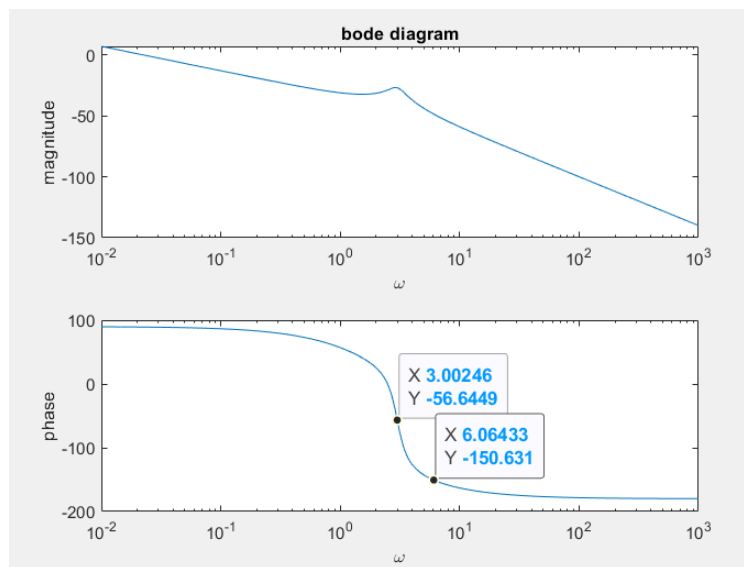
اندازه و فاز سیستم را که می‌بینیم، با سیستم مرتبه دوم پایدار شباهت دارد؛ اما اندازه آن در اول شیب -20 دارد پس گواه از وجود یک انتگرال‌گیر، علاوه بر سیستم مرتبه ۲ پایدار در سیستم است. اگر فقط این دو بودند، در ادامه شیب باید 60- می‌شد درحالی‌که 40- است؛ پس یک صفری به سیستم اضافه شده است. از آنجایی که فاز تشدید شده، این صفر غیرکمینه‌فاز است که به سیستم اضافه شده و شیب را به اندازه ۲۰ افزایش داده است. سیستم تیپ یک است و حتی در حالت حلقه بسته نیز ناپایدار است.

۲.۲ مرتبه سیستم

با تفاسیر بالا، سیستم مرتبه ۳ می‌باشد.

۳.۲ میزان تاخیر

$$T_d = \frac{\Delta\phi(rad)}{\Delta\omega} = \frac{-56.6449 + 150.631}{3.00246 - 6.06433} \times \frac{\pi}{180} = -0.53574$$



شکل ۲: محاسبه تاخیر

۴.۲ کمینه‌فاز بودن

چون سیستم صفر غیرکمینه‌فاز داشت پس سیستم کمینه‌فاز نیست.

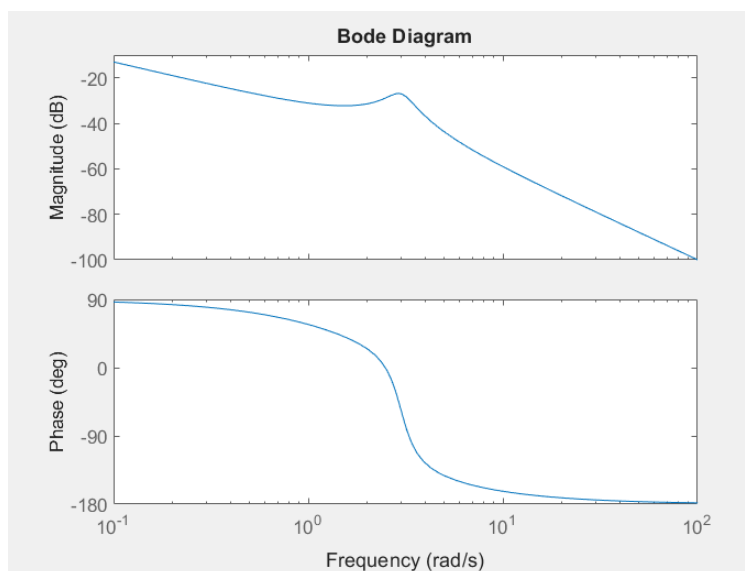
۳ سوال سوم: برازش تابع تبدیل

۱.۳ برازش با دستورات متلب

```
1 %% Q3
2 H = magnitude.*exp(1j.*deg2rad(phase));
3 G = tfest(idfrd(H,omega,0),3,1);
4 figure
5 bode(G)
6 extra = frd(H,omega,'FrequencyUnit','rad/s'); %for extra part
```

Code 2: transfer function

با ضرب اندازه در e^{ϕ} که فاز را با تابع $\deg \rightarrow \text{rad}$ به رادیان تبدیل می‌کنیم، مقادیر مختلط پاسخ فرکانسی را به دست می‌آوریم. با تفاسیری که در بخش قبل داشتیم، پارامترهای دستور سطر سوم را تعیین می‌کنیم و بودی تابع تبدیلی که تخمیل زدیم رسم می‌کنیم. در شکل زیر خروجی را می‌بینیم، اگر شکل را عقب جلو کنیم می‌بینیم که نتیجه با داده، مقدار خیلی جزئی تفاوت دارد و تقریب بسیار خوبی است.



شکل ۳: بودی تابع تبدیل تخمین یافته

$$G = \frac{0.1 s - 0.2}{s^3 + 0.9 s^2 + 9 s}$$

شکل ۴: تابع تبدیل به دست آمده

۲.۳ برآزش با *SystemIdentification*

خط آخری که در کد سوال سه زده شده بود برای این بخش می باشد. ابتدا باید داده ها را به نوعی تبدیل کنیم که قابل پردازش با این ابزار باشد. داده را ایمپورت می کنیم و در بخش estimate تابع تبدیل یا function transfer را انتخاب می کنیم و قطب ها را روی ۳ و صفرها را روی ۱ عدد تنظیم می کنیم. تصاویر مرحله به مرحله به شرح زیر می باشد.



Import Data

Data Format for Signals

Data Object (IDDATA, FRD/IDFRD) ▾

Workspace Variable

Object: extra

Type: FRD

Data Information

Data Name: extra

Frequency unit: rad/s

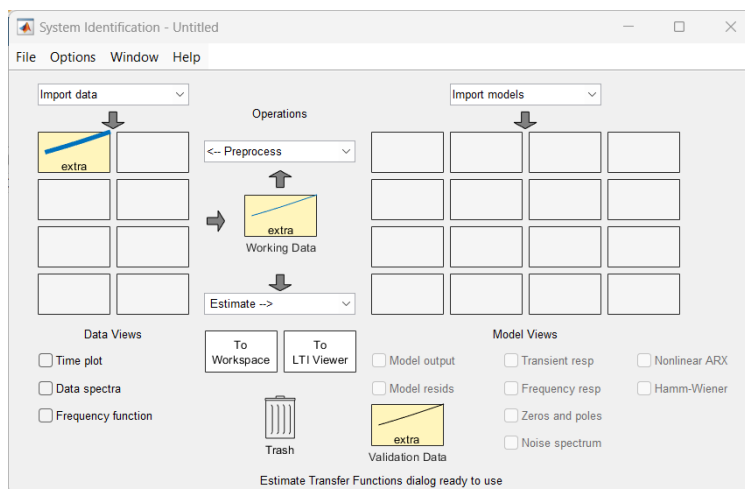
Sample time: 0

More

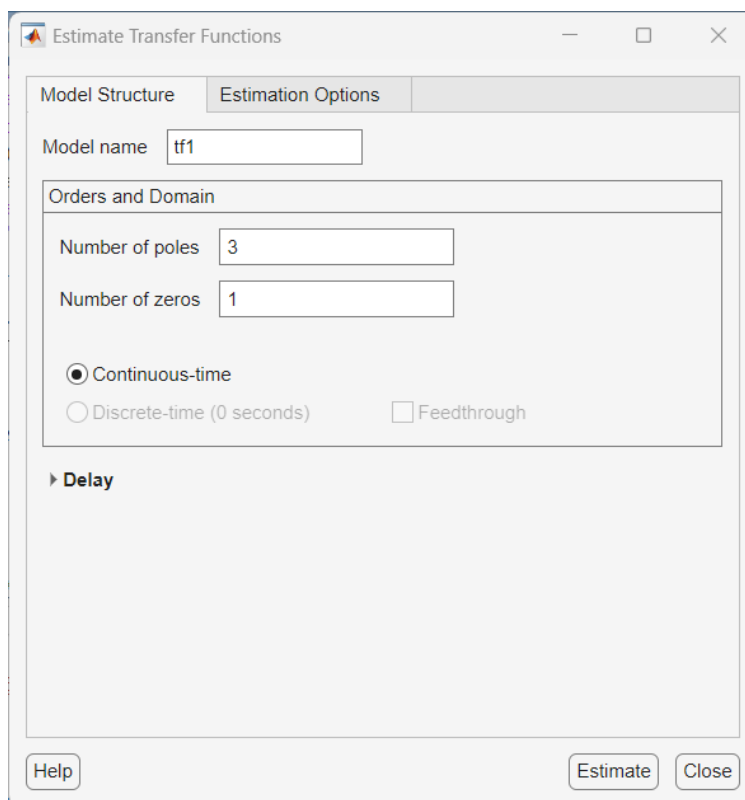
Import Reset

Close Help

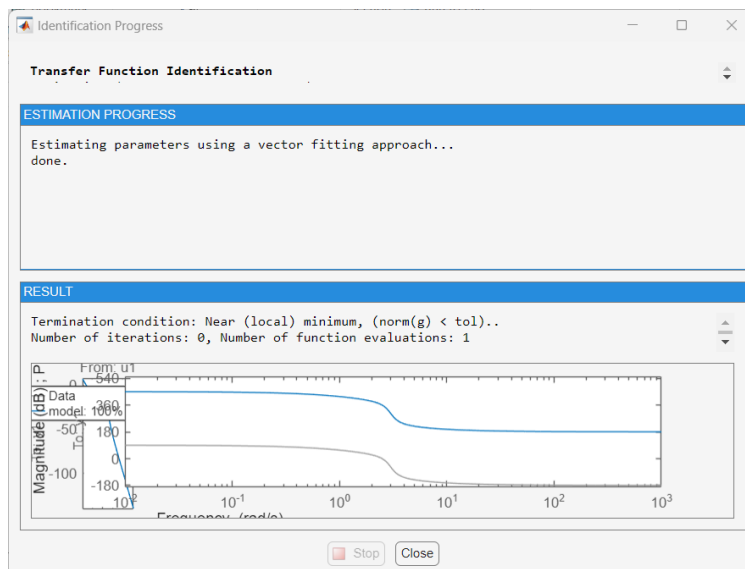
شکل ۵: وارد کردن داده‌ها



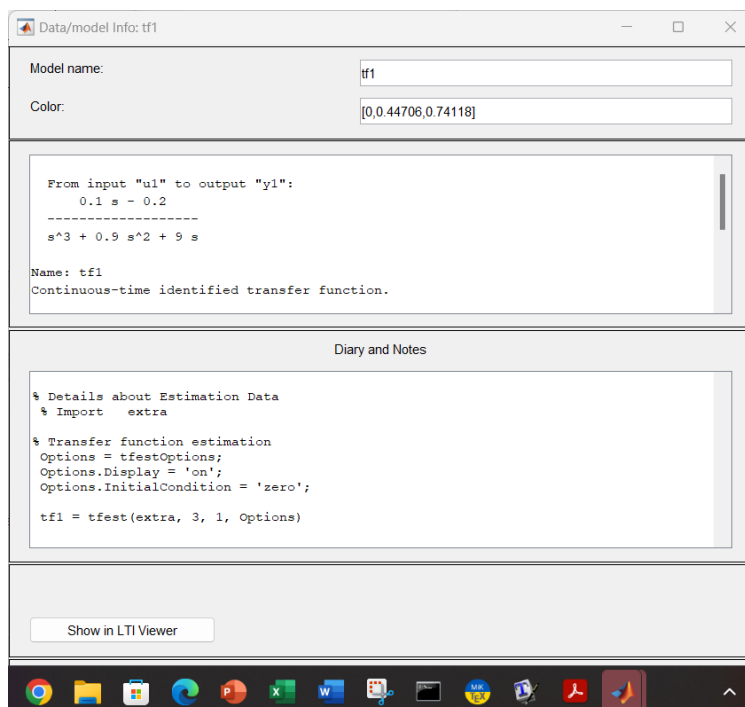
شکل ۶: مرحله دوم



شکل ۷: مرحله سوم



شکل ۸: مرحله چهارم



شکل ۹: تابع تخمین زده شده



۴ سوال چهارم: معیار پایداری راث

ابتدا تابع تبدیل حلقه بسته را به دست می آوریم.

$$\frac{kG(s)}{1+kG(s)} = k \frac{0.1s - 0.2}{s^3 + 0.9s^2 + (9 + 0.1k)s - 0.2k} \Rightarrow \Delta(s) = s^3 + 0.9s^2 + (9 + 0.1k)s - 0.2k$$

s^3	1	$9 + 0.1k$
s^2	0.9	$-0.2k$
s^1	$\frac{8.1+0.09k-(-0.2k)}{0.9} = 8.1 + 0.29k$	0
s^0	$-0.2k$	0

ابتدا باید ضرایب چندجمله مشخصه همگی هم علامت باشند:

$$-0.2k > 0 \Rightarrow k < 0$$

$$9 + 0.1k > 0 \Rightarrow k > -90$$

اشتراک دو شرط بالا:

$$-90 < k < 0$$

حال به جدول راث می پردازیم. تمامی مقادیر ستون اول باید هم علامت باشند. اما این امر ممکن نیست زیرا اگر در سطر اول تا سوم مقدار مثبت داشته باشیم، در سطر چهارم مقدار منفی می شود پس یک بار تغییر علامت و در نتیجه یک قطب ناپایدار حتماً داریم.

$$8.1 + 0.29k > 0 \Rightarrow k > -27.931$$

با اشتراک کل شرایط بالا داریم:

$$-27.931 < k < 0$$

۵ سوال پنجم: تعیین کنترل کننده مناسب برای پایداری

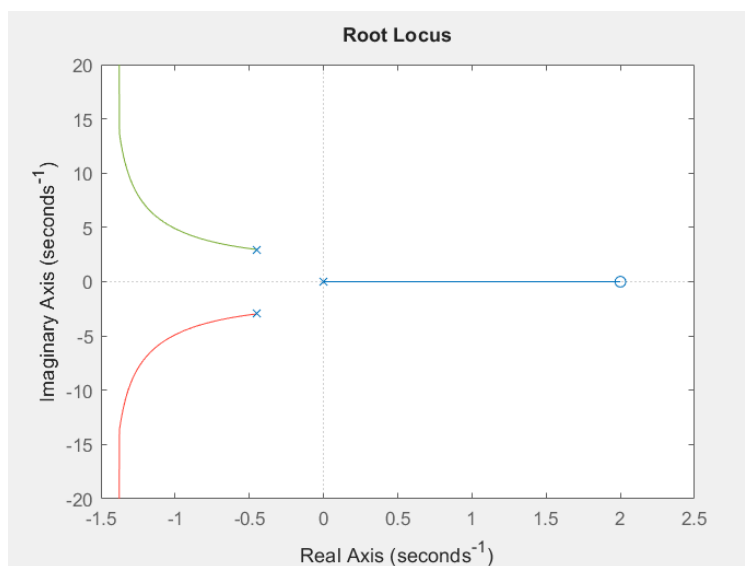
۱.۵ مکان هندسی و کنترل کننده تناسبی

```
1 %% Q5 Part 1
2 figure
3 rlocus(G);
4 K = -11;
5 figure
6 step((K*G)/(K*G + 1))
```

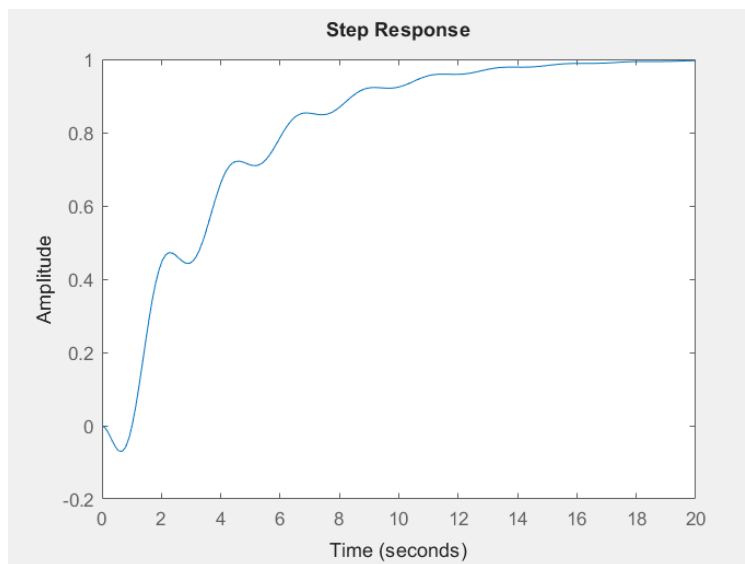
Code 3: transfer function



با انتخاب مقداری بین ۰ و ۹۰ و دیدن پاسخ پله آن، توانستیم با سرعت خوبی به پایداری برسیم. در مورد مقدار k آزمون و خطا کردیم.



شکل ۱۰: رسم مکان هندسی



شکل ۱۱: پاسخ پله



۲.۵ کنترل‌کننده صنعتی

چون در عرض بیست ثانیه به پایداری رسیدیم و با بهره ثابت توانستیم این کار را انجام دهیم، الان بهتر است دنبال افزایش سرعت سیستم باشیم. برای افزایش سرعت بهتر است از کنترل‌کننده PD استفاده کنیم. اما درواقعیت، برای تحقق‌پذیری این نوع کنترلر باید قطب نیز اضافه کنیم. با آزمون و خطا می‌توانیم مشاهده کنیم که نمی‌توان به سرعت بهتر دست یافت و همان کنترلر بهره‌ثابت، خواسته را برآورده می‌کند.

۶ سوال ششم: طراحی کنترلر

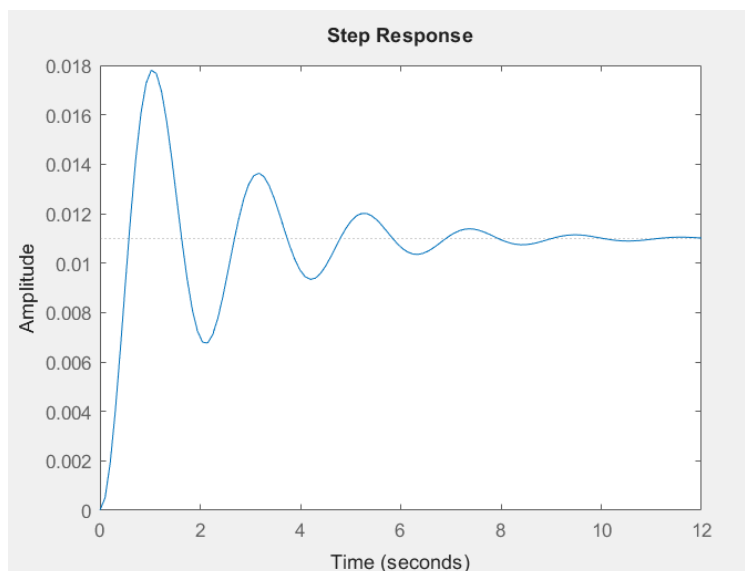
تابع تبدیل به شکل زیر درمی‌آید:

$$G(s) = \frac{0.1}{s^2 + 0.9s + 9}$$

ابتدا پاسخ پله و مشخصاتش را بدون کنترلر بررسی می‌کنیم.

```
1 %% Q6
2 s = tf('s');
3 L = 0.1/((s^2)+(0.9*s)+9);
4 figure
5 step(L/(L+1));
6 stepinfo(L/(L+1))
7
8 figure
9 margin(L)
```

Code 4: Removing zeros and the pole in (0,0)



شکل ۱۲: پاسخ پله

```
RiseTime: 0.3895
TransientTime: 8.5866
SettlingTime: 8.5866
SettlingMin: 0.0068
SettlingMax: 0.0178
Overshoot: 61.9998
Undershoot: 0
Peak: 0.0178
PeakTime: 1.0234
```

شکل ۱۳: مشخصات پاسخ پله



خطای حالت ماندگار آن می‌بینیم که بسیار نامطلوب است (اختلاف مقدار حالت ماندگار با ۱) پس در مرحله اول باید با افزودن بهره ثابت خطا را بهبود دهیم. بهره‌ای که اضافه می‌کنیم باید حداکثر مقدار معقول باشد؛ مثلاً در ترانزیستور BJT می‌توان جریان را ۲۵۰ برابر کرد. با این اوصاف گین ۲۴۰ را انتخاب می‌کنم.

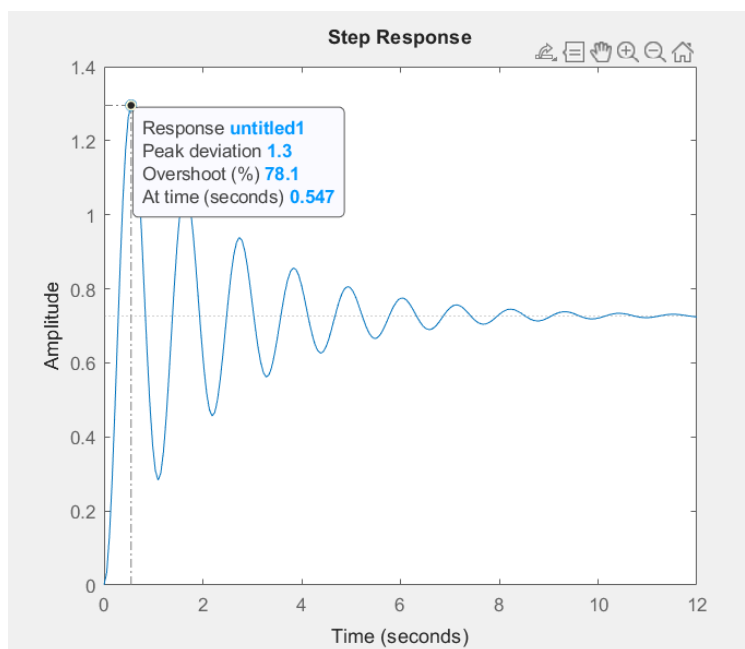
$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} KL(s) = K\left(\frac{0.1}{9}\right) = 240\left(\frac{0.1}{9}\right) = 2.667$$

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p} = 0.2727$$

خطا به مقدار قابل قبولی می‌رسد.

```
1 %% Q6 K
2 K = 240;
3 H = L*K;
4 figure
5 margin(H);
6 figure
7 step(H/(1+H));
8 stepinfo(H/(1+H))
```

Code 5: Q6 K controller



شکل ۱۴: پاسخ پله با کنترلر بهره ثابت

می‌بینیم که فراجاهش آن بسیار بیشتر از چیز است که مد نظر ماست. برای بهبود آن، باید ζ مورد نظرم‌ان را پیدا کنیم.

$$0.11 = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$-2.072 = \frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$4.872 = \frac{(\zeta\pi)^2}{1-\zeta^2}$$

$$0.497 = \frac{\zeta^2}{1-\zeta^2}$$

$$0.497 = 1.497\zeta^2$$

$$\Rightarrow \zeta = 0.574$$

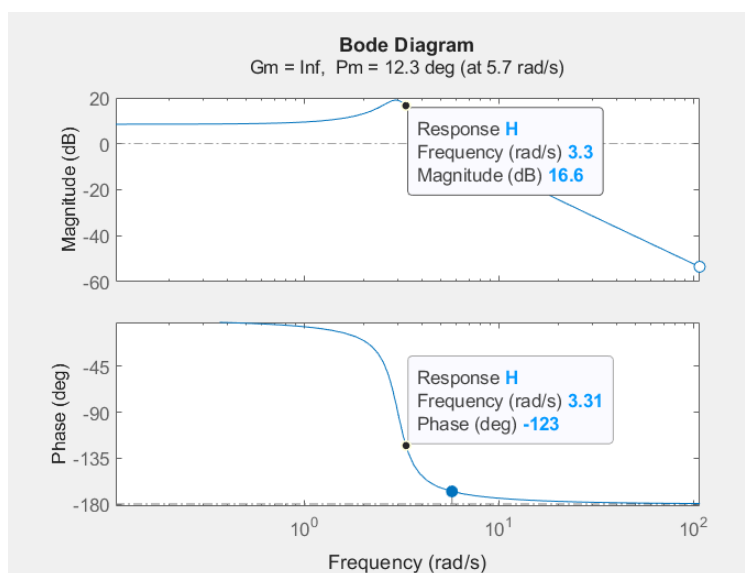
فازی که به سیستم اضافه می‌شود را محاسبه می‌کنیم.

$$\phi_d = 100\zeta = 57.4^\circ$$

برای کاهش فراجاهش در درس پیشنهاد شده که از کنترلر پس‌فاز استفاده کنیم.

باید بودی را رسم کنیم و در نقطه -122.6° فرکانس را مشخص کنیم. این فاز از اختلاف ϕ_m با 180° درجه به دست آمده. فعلاً محافظه‌کارانه

عمل نمی‌کنیم و در نظر داریم: $\phi_m = \phi_d$



شکل ۱۵: نمودار بودی



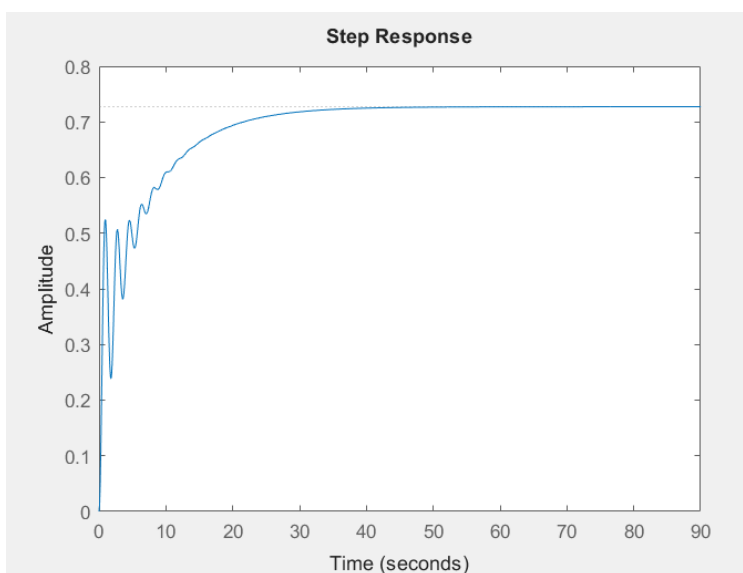
حال مقدار به دست آمده را در رابطه زیر می‌گذاریم.

$$20\log\alpha + |L(j\omega_m)|_{dB} = 0$$

$$20\log\alpha = -16.6$$

$$\alpha = 0.148$$

کافی است با دادن فرکانس و بهره مورد نظر، به متلب، کنترلر را آنجا طراحی کنیم.



شکل ۱۶: پاسخ پله با کنترلر پس فاز

$$C =$$

$$725.1 s + 240$$

$$-----$$

$$20.43 s + 1$$

شکل ۱۷: کنترلر پس فاز

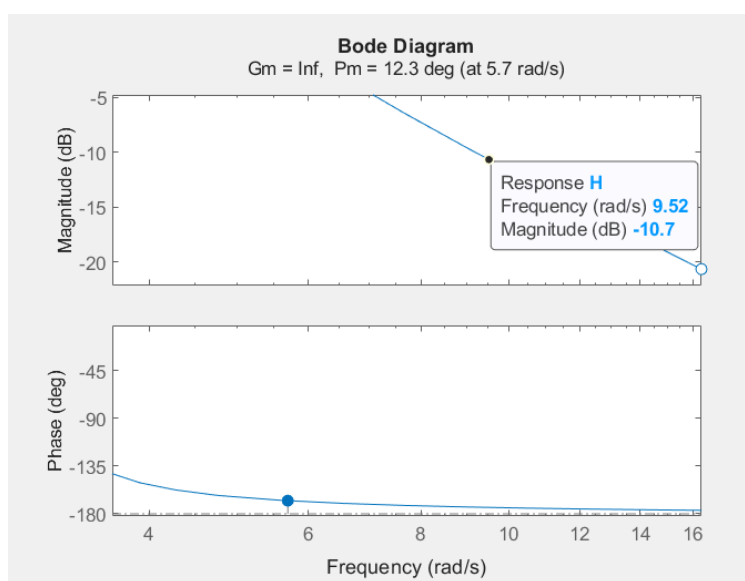


کنترلری که طراحی کردیم، فراجاهش را کاملاً از بین برد که این مد نظر نبود. علت این اتفاق تفاوت زیاد ضریب s صورت و مخرج می‌باشد. علاوه بر آن سیستم کند هم شد. پس باید سرعت آن را نیز افزایش دهیم. با یک کنترلر پیش‌فاز انجام می‌دهیم. طراحی پیش‌فاز:

$$\phi_m = 100\zeta = 57.4^\circ$$

$$\alpha = \frac{1 + \sin\phi_m}{1 - \sin\phi_m} = 11.695$$

$$|KL(j\omega_m)|_{dB} = -10\log(\alpha) = -10.68$$

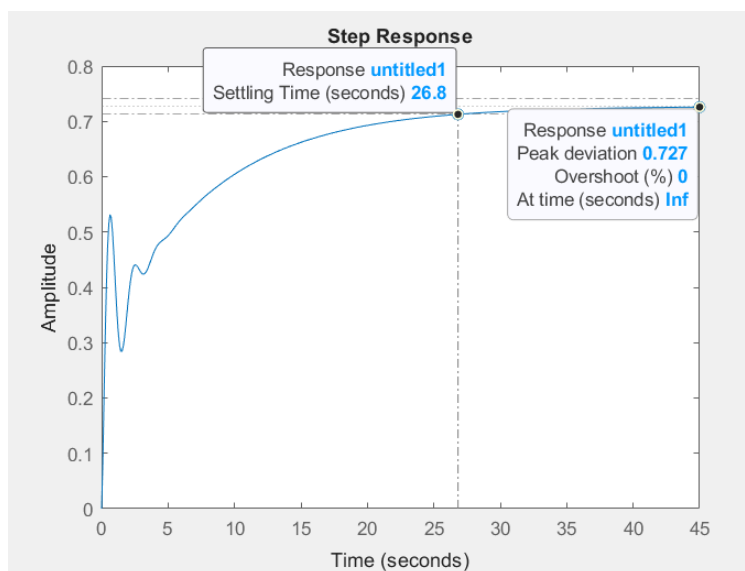


شکل ۱۸: نمودار بودی



$$\omega_m = 9.52 \text{ rad/s}$$

$$T = \frac{1}{\omega_m \sqrt{\alpha}} = 0.0307$$



شکل ۱۹: پاسخ پله کنترلر پس فاز و پیش فاز

$$C2 =$$

$$0.3592 s + 1$$

$$-----$$

$$0.03072 s + 1$$

شکل ۲۰: کنترلر پیش فاز بدون بهره ثابت



سیستم تا حدی تند شد اما نه فراجش آن و نه سرعت آن مقداری که می‌خواستیم نشد. گفتیم که کنترلر پس‌فاز تمام فراجش را از بین برد. پس باید در طراحی آن تجدید نظر کنیم. می‌دانیم که کنترلر پس‌فاز، به مقدار قابل توجهی فراجش را کم می‌کند؛ پس برای آنکه در پارامتر T تغییر ایجاد کنیم، به جای آن که در رابطه‌اش ۱۰ قرار دهیم، با آزمون و خطا دریافتیم که مقدار ۱.۱۵ در آن فرمول جایگزین مناسب‌تر است و خواسته‌های سوال را ارضا می‌کند.

$$\frac{1}{\alpha T} = \frac{\omega_c}{1.15}$$

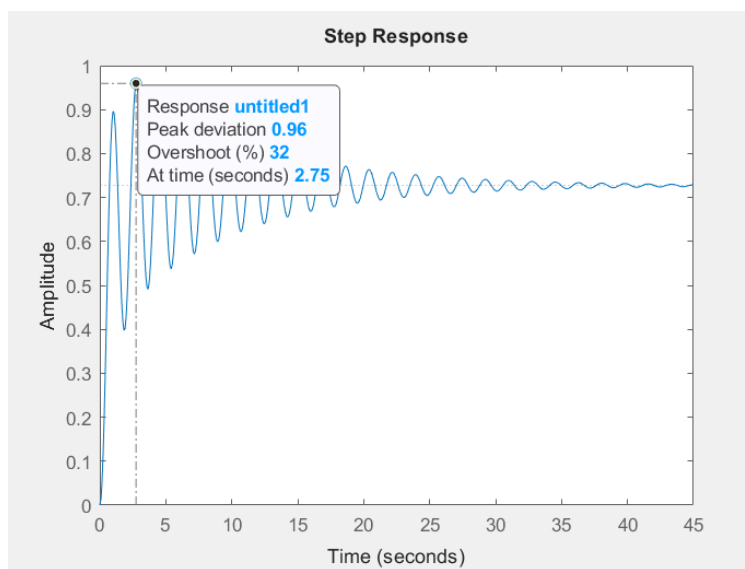
```
1 %% Q6 lag
2 wc = 3.31;
3 gn = 16.6;
4 a = 10^(-gn/20);
5 T = 1.15/(a*wc);
6 C = K*(1+(a*T*s))/(1+(T*s));
7 H = L*C;
8 figure
9 margin(H);
10 figure
11 step(H/(1+H));
12 stepinfo(H/(1+H))
```

Code 6: Q6 lag controller

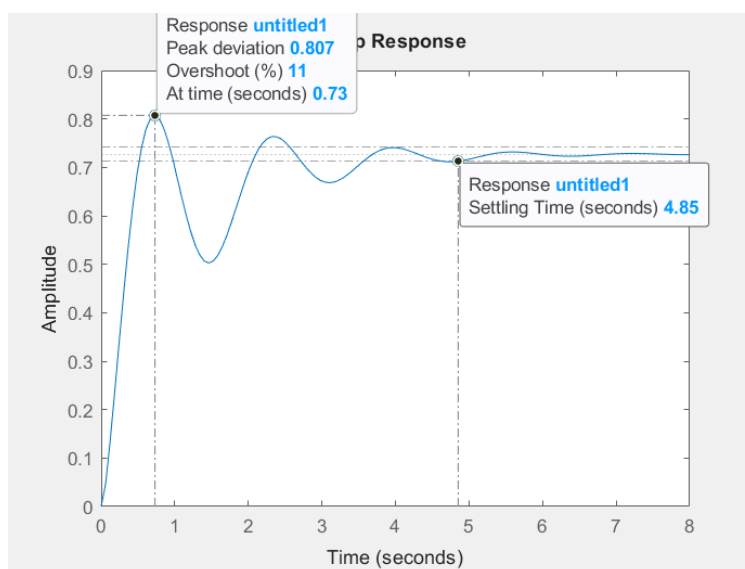
```
1 %% Q6 controller Lead
2 phim = 57.4;
3 a = (1+sin(deg2rad(phim)))/(1-sin(deg2rad(phim)));
4 wm = 9.52;
5 T = 1/(wm*sqrt(a));
6 C2 = (1+(a*T*s))/(1+(T*s));
7 H = L*(C)*(C2);
8 figure
9 margin(H);
10 figure
11 step(H/(1+H));
12 stepinfo(H/(1+H))
```

Code 7: Q6 lead controller





شکل ۲۱: پاسخ پله با کنترلر پس فاز بهبودیافته



شکل ۲۲: پاسخ پله با کنترلر پس فاز و پیش فاز



```
>> C*C2
```

```
ans =
```

```
29.95 s^2 + 169.6 s + 240
```

```
-----
```

```
0.07215 s^2 + 2.38 s + 1
```

شکل ۲۳: کنترلر پیش-پس فاز نهایی

۷ سوال هفتم: طراحی کنترلر

۱.۷ بخش اول: خطای ماندگار

همواره برای تنظیم خطای ماندگار از کنترلر بهره‌ثابت استفاده می‌کردیم.

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = 0.02$$

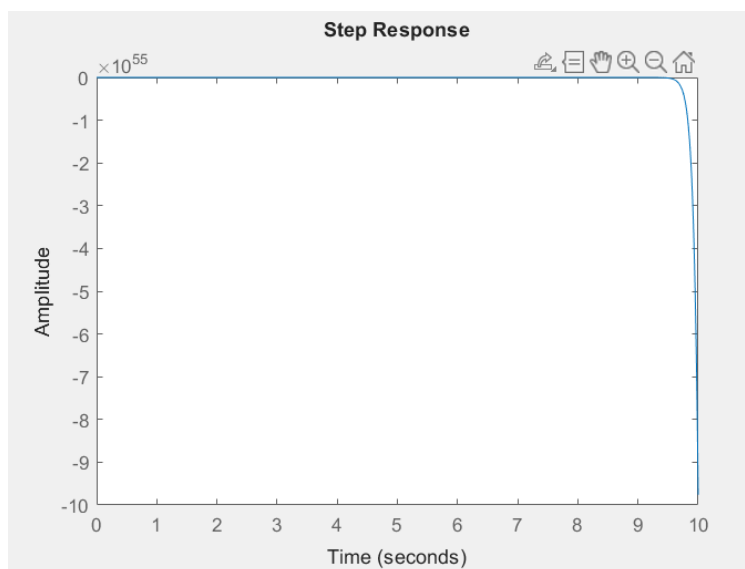
$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sKG(s)$$

$$K_v = 50 = K \frac{-0.2}{9} \Rightarrow K = -2250$$

پس مقدار کنترلر بهره‌ثابت باید حداقل به مقدار بالا باشد (با فاز ۱۸۰ درجه). اما در این شرایط سیستم ناپایدار می‌شود و علاوه بر آن دست یافتن به چنین مقدار بهره‌ای در واقعیت ممکن نیست.

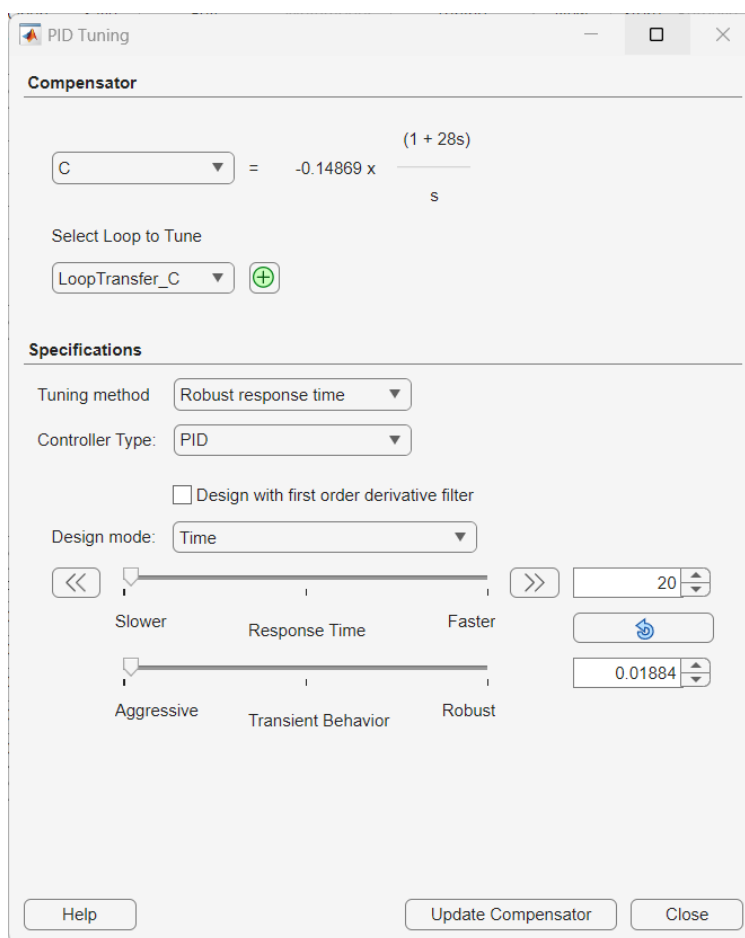
```
1 %% Q7 part A, K
2 K7 = -2250;
3 H = K7*G;
4 t = 0:0.01:10;
5 figure
6 step(H/(s*(1+H)),t);
```

Code 8: Q7 K controller



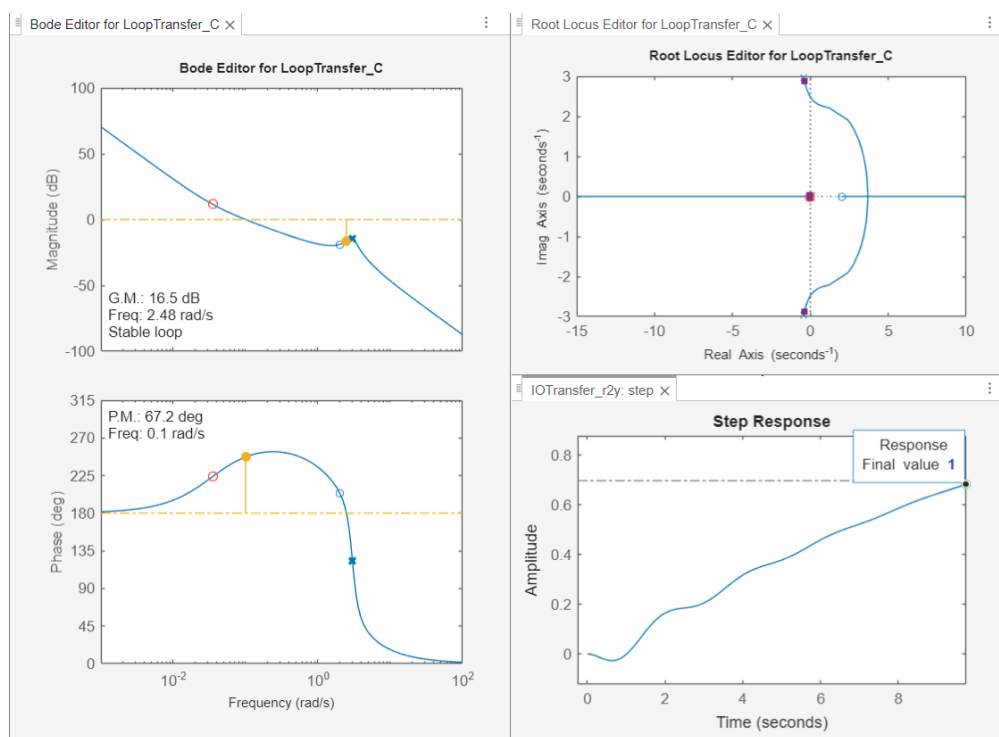
شکل ۲۴: پاسخ سیستم با کنترلر بهره ثابت به ورودی شیب

پس باید کنترلر دیگری طراحی کرد؛ می‌توانیم با اضافه کردن تیپ سیستم، خطای ماندگار آن را به ورودی شیب، به صفر برسانیم. برای این کار کفایت از کنترلر PI استفاده کنیم. برای افزایش سرعت آن یک PD اضافه می‌کنیم و در نتیجه یک PID طراحی می‌کنیم. می‌توان به راحتی با sisotool و PID tuner کنترلر را طراحی کرد.



شکل ۲۵: *PIDtuner*

البته نمایش پاسخ پله را باید برای شیب تنظیم کرد. می‌بینیم که شیب پاسخ به مقدار ثابتی دارد میل می‌کند و این نشانه‌ی پایداریست.



شکل ۲۶: sisotool



۲.۷ بخش دوم: تحلیل حساسیت

ابتدا باید به خود سیستم اصلی نگاه کنیم. درجه سیستم یعنی اختلاف قطب و صفر ۲ می‌باشد پس مرتبه سیستم تابع متمم حساسیت ۳ می‌شود. هم‌چنین در سمت راست صفحه صفر داریم یعنی صفر غیرکمیته‌فاز پس این صفر باید در متمم تابع حساسیت صدق کند. این صفر در نقطه ۲ قرار دارد پس پهنای باند باید کم‌تر از دو و فرکانس گذر بهره را یک می‌گیریم.

$$T_d(s) = \frac{\frac{s}{\tau} + 1}{(s + 1)^3}$$

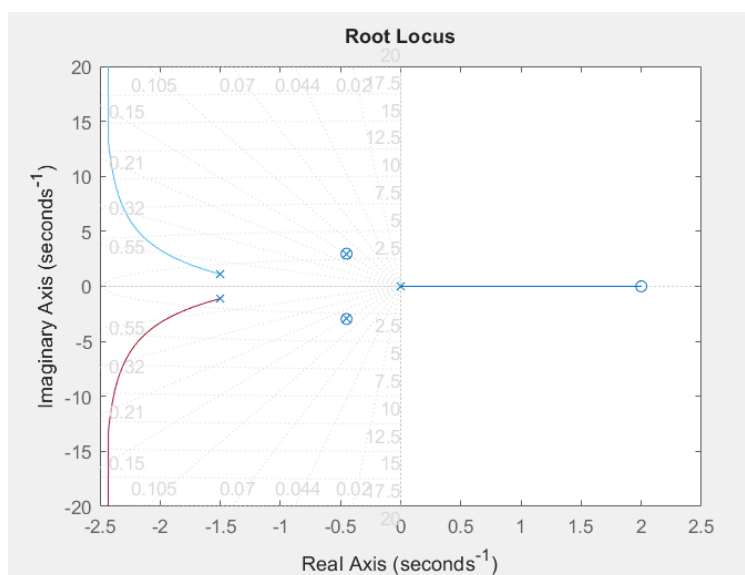
$$\frac{\frac{2}{\tau} + 1}{(2 + 1)^3} = 0 \Rightarrow \tau = -2$$

$$S_d = 1 - T_d$$

ساده شده عبارت بالا به شکل زیر درمی‌آید:

$$C(s) = k \frac{T}{P.S} = k \frac{s^3 + 0.9s^2 + 9s}{s^3 + 3s^2 + 3.5s}$$

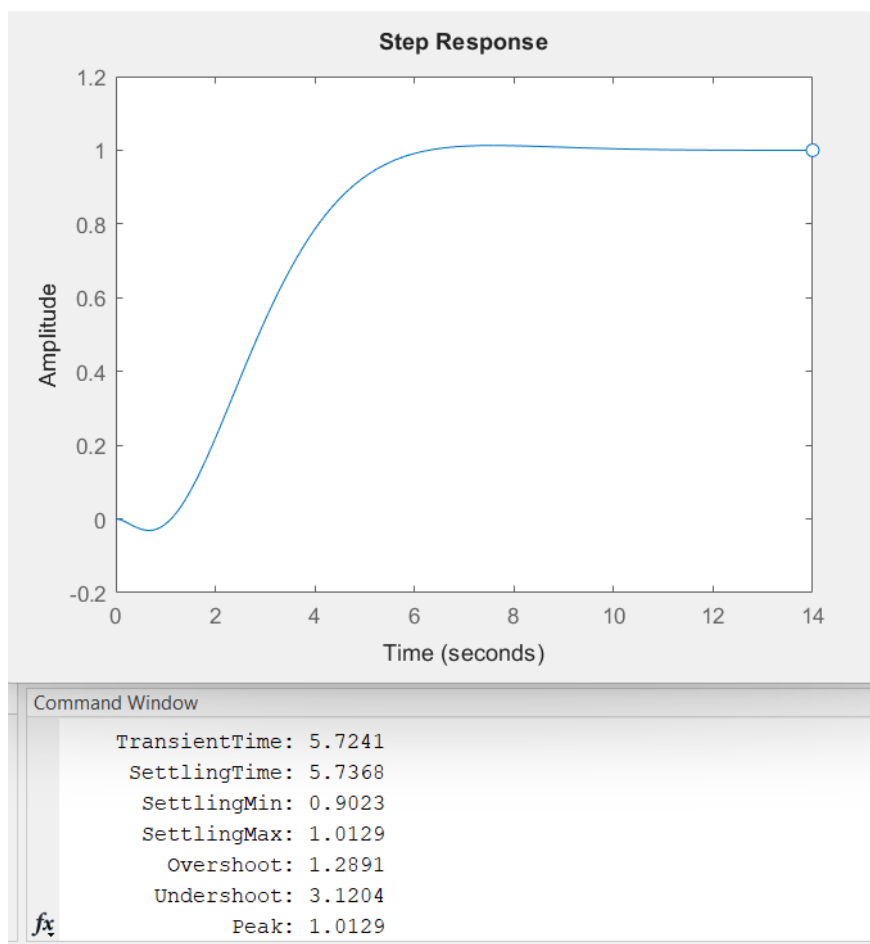
برای تنظیم بهره ثابت آزمون و خطا می‌کنیم. با توجه به مکان هندسی، متوجه می‌شویم به ازای بهره‌های منفی سیستم پایدار می‌شود.



شکل ۲۷: مکان هندسی



به‌ازای بهره 5.8- شرایط مسئله ارضا شد.



شکل ۲۸: پاسخ پله به ازای بهره 5.8-

```
1 %% Q7 part B
2 s = tf('s');
3 C_HS = (s^3 + 0.9*s^2 + 9*s)/(s^3 + 3*s^2 + 3.5*s);
4 figure
5 rlocus(C_HS*G)
6 grid on
7 H = C_HS*G;
8 figure
9 step(H/(1+H));
10
11 H = -5*C_HS*G;
```

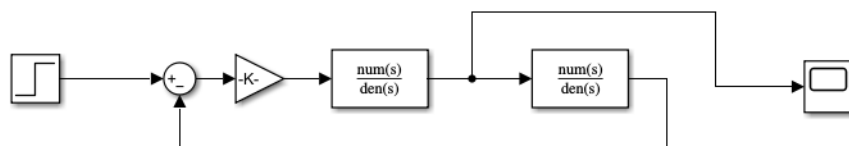


```
12 figure
13 step(H/(1+H));
14 stepinfo(H/(1+H))
15
16 H = -5.8*C_HS*G;
17 figure
18 step(H/(1+H));
19 stepinfo(H/(1+H))
```

Code 9: Q7 (part B) K controller



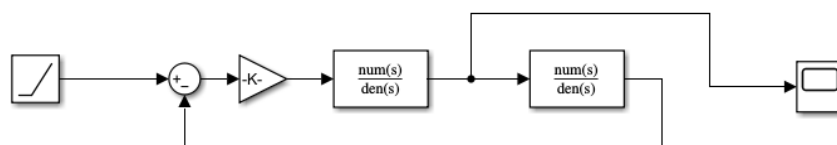
حال با سیمولینک پاسخ به ورودی پله و شیب را به دست می‌آوریم.



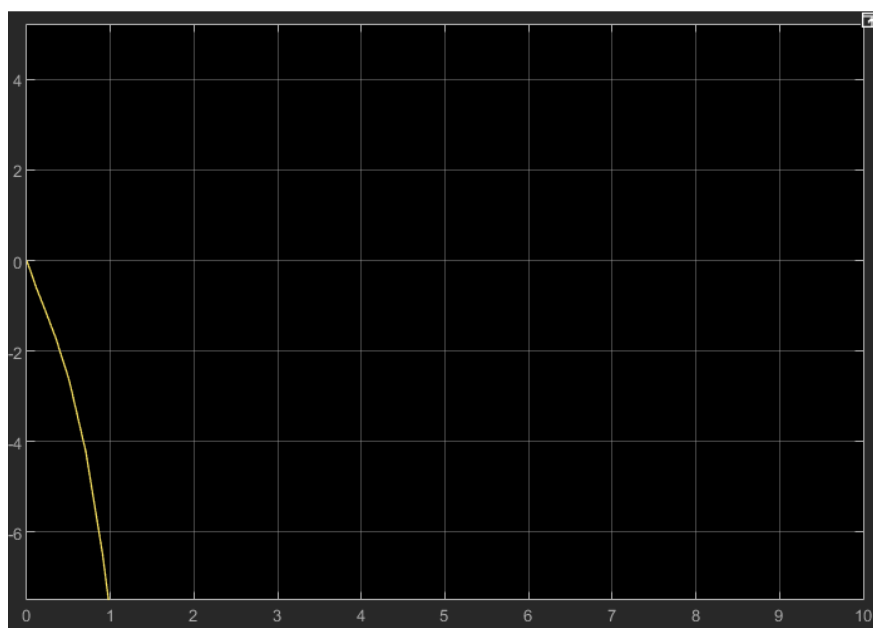
شکل ۲۹: بلوک دیاگرام سیستم با ورودی پله



شکل ۳۰: پاسخ پله



شکل ۳۱: بلوک دیاگرام سیستم با ورودی شیب



شکل ۳۲: پاسخ شیب