دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده مهندسی برق - گروه مهندسی کنترل

درس سیستم‌های کنترل خطی
پاسخ تمرین سری اول

نام و نام خانوادگی	آنائیس گل‌بوداغیانس
شمارهٔ دانشجویی	۴۰۱۲۲۱۱۳
تاریخ	مهرماه ۱۴۰۳

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

فهرست جداول

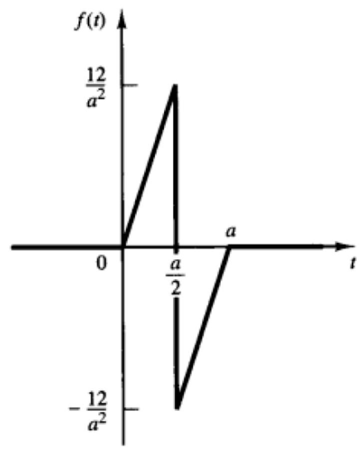
فهرست برنامه‌ها

۱ سوال اول: تبدیل لاپلاس

تعریف لاپلاس دو طرفه:

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

در سوال خواسته شده بود تا لاپلاس نمودار زیر محاسبه شود:



شکل ۱: نمودار حوزه زمان f(t)

ابتدا باید معادله خط تعریف شود؛ داریم:

$$\frac{\frac{12}{a^2} - 0}{\frac{a}{2} - 0} = \frac{24}{a^3}$$

شیب هر دو خط مانند هم است.

$$f(t) = \frac{24}{a^3} t[u(t) - u(t - \frac{a}{2})] + (\frac{24}{a^3} t - \frac{24}{a^2})[u(t - \frac{a}{2}) - u(t - a)]$$

محاسبه لاپلاس:

$$F(s) = \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{24}{a^3} t e^{-st} f(t) dt + \int_{\frac{a}{2}}^{a} \frac{24}{a^3} (\frac{24}{a^3} t - \frac{24}{a^2}) e^{-st} f(t) dt$$

انتگرال جزءبه‌جزء می‌گیریم:

جدول ۱: انتگرال جزءبه‌جزء

مشتق	انتگرال
$\frac{24}{a^3} t$	e^{-st}
$\frac{24}{a^3}$	$+(\frac{-1}{s} e^{-st})$
0	$-(\frac{1}{s^2} e^{-st})$

$$F(s) = [-\frac{24}{a^3 s} t e^{-st} - \frac{24}{a^3 s^2} e^{-st}]_0^{\frac{a}{2}} + [-\frac{24}{a^3 s} t e^{-st} - \frac{24}{a^3 s^2} e^{-st} + \frac{24}{a^2 s} e^{-st}]_{\frac{a}{2}}^{a}$$

جواب ساده شده برابر است با:

$$F(s) = \frac{24}{a^3 s^2}(1 - e^{-as} - ase^{-\frac{a}{2}s})$$

۲ سوال دوم: موتور DC

۱.۲ بخش الف: مدل‌سازی

تحلیل الکتریکی:

در مدار، مقاومت و سلف و خازن باهم به‌صورت موازی بسته شده‌اند؛ پس از آن‌ها می‌توان امپدانس معادلی به‌دست آورد.

$$e(t) = R_1 i(t) + Z_{eq} i(t) + v_e m f(t)$$

داریم $v_e m f = k_v \omega(t)$ پس:

$$e(t) = R_1 i(t) + Z_{eq} i(t) + k_v \omega(t)$$

تحلیل مکانیکی:

$$T(t) = b\omega(t) + J\frac{d}{dt}\omega(t) + k\theta(t) + T_d(s)$$

داریم $T = k_m i$ پس:

$$k_m i(t) = b\omega(t) + J\frac{d}{dt}\omega(t) + k\theta(t) + T_d(s)$$

پس مدل‌سازی به‌این‌صورت می‌شود:

$$e(t) = R_1 i(t) + Z_{eq} i(t) + k_v \omega(t)$$
$$k_m i(t) = b\omega(t) + J\frac{d}{dt}\omega(t) + k\theta(t) + T_d(s)$$

امپدانس معادل را می‌توانیم در حوزه‌ی لاپلاس پیدا کنیم.

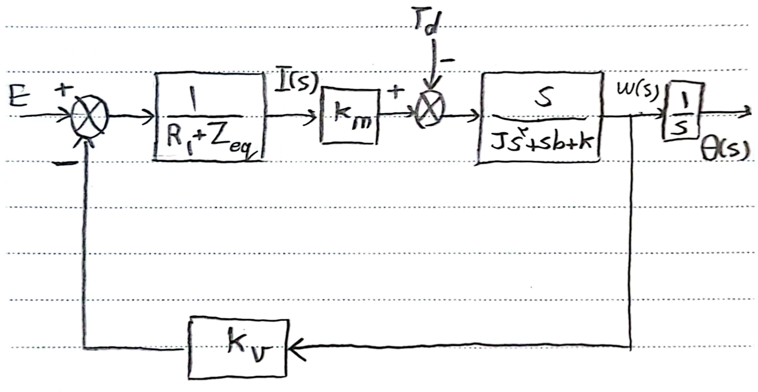
$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{Ls} + Cs$$
$$Z_{eq} = \frac{RLs}{Ls + R + RLCs^2}$$

۲.۲ بخش ب: بلوک دیاگرام

برای درک و رسم بهتر بلوک دیاگرام بهتر است معادله‌ها را به حوزه‌ی لاپلاس ببریم:

$$E(s) = R_1 I(s) + Z_{eq} I(s) + k_v \omega(s)$$
$$k_m I(s) = b\omega(s) + Js\omega(s) + \frac{k}{s}\theta(s) + T_d(s)$$

باید توجه داشته باشیم که $\omega(t) = \frac{d}{dt}\theta(t)$ پس $\omega(s) = s\theta(s)$.



شکل ۲: نمودار بلوکی سیستم

۳.۲ بخش ج: به‌دست آوردن تابع تبدیل

$$E(s) = R_1 I(s) + Z_{eq} I(s) + k_v \omega(s)$$
$$k_m I(s) = b\omega(s) + Js\omega(s) + \frac{k}{s}\theta(s) + T_d(s)$$

از معادلات بالا می‌توان I(s) را از معادله دوم به‌دست آورد و در معادله اول جایگذاری کرد.

$$E(s) = (R_1 + Z_{eq})(\frac{b\omega(s) + Js\omega(s) + \frac{k}{s}\theta(s) + T_d(s)}{k_m}) + k_v \omega(s)$$

با توجه به صورت سوال، داریم:

$$e(t) = v_{in} = u(t)$$
$$E(s) = \frac{1}{s}$$

در این بخش فرض می‌کنیم R_1 متغیر است و $\frac{1}{s}$ را نیز در معادله قرار می‌دهیم:

$$\frac{1}{s} = (R_1(s) + Z_{eq})(\frac{b\omega(s) + Js\omega(s) + \frac{k}{s}\theta(s) + T_d(s)}{k_m}) + k_v \omega(s)$$

پس از ساده‌سازی معادله بالا، خواهیم داشت:

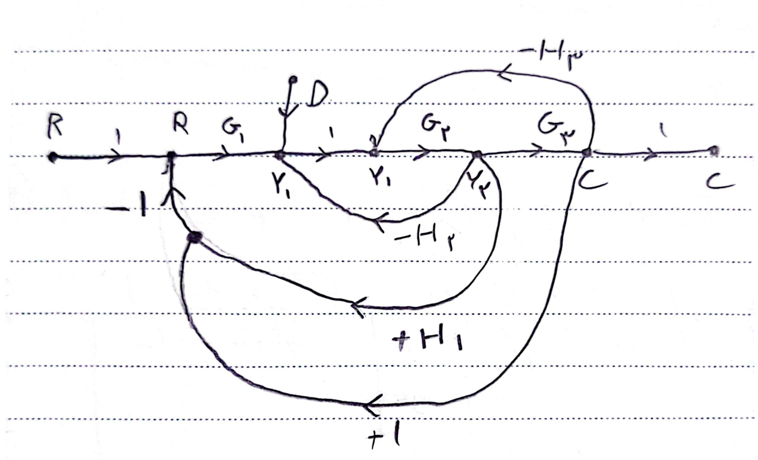
$$\frac{\theta(s)}{R_1} = (\frac{k_m - sR_1(s)T_d(s) - (sb + k + Js^2)sR_1(s)\theta(s) - Z_{eq}sT_d(s)}{R_1 k_m s})(\frac{k_m}{Z_{eq}(sb + k + Js^2) + k_m k_v s})$$

۳ سوال سوم: سیستمی با نمودار بلوکی

۱.۳ بخش الف: ساده‌سازی و به‌دست آوردن بهره

ابتدا SFG را رسم می‌کنیم.

با روش میسون نمودار را ساده و Y(s) را پیدا می‌کنیم.



شکل ۳: نمودار جریان سیگنال

مسیرها:

$$M_1 = G_1G_2G_3$$

حلقه‌ها:

$$L_1 = -G_2H_2$$

$$L_2 = -G_2G_3H_3$$

$$L_3 = -G_1G_2H_1$$

$$L_4 = -G_1G_2G_3$$

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) = 1 + G_2H_2 + G_1G_2H_3 + G_1G_2H_1 + G_1G_2G_3$$

$$\Delta_1 = 1$$

$$Y(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \Sigma\frac{M_k\Delta_k}{\Delta} = \frac{G_1G_2G_3}{1 + G_2H_2 + G_1G_2H_3 + G_1G_2H_1 + G_1G_2G_3}$$

با فرض این‌که $|G_i|$ و $|H_i|$ برابر ۱ هستند داریم:

$$|Y(s)| = \left|\frac{G_1G_2G_3}{1 + G_2H_2 + G_1G_2H_3 + G_1G_2H_1 + G_1G_2G_3}\right| = \frac{1}{5}$$

۲.۳ بخش ب: از بین بردن تاثیر اغتشاش

در بخش قبلی فرض کرده بودیم $D = 0$ است. در این بخش فرض می‌کنیم $R = 0$ است و داریم:
مسیرها:

$$M_1 = G_2G_3$$

حلقه‌ها:

$$L_1 = -G_2H_2$$

$$L_2 = -G_2G_3H_3$$

$$L_3 = -G_1G_2H_1$$

$$L_4 = -G_1G_2G_3$$

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) = 1 + G_2H_2 + G_1G_2H_3 + G_1G_2H_1 + G_1G_2G_3$$

$$\Delta_1 = 1$$

$$\frac{C(s)}{D(s)} = \Sigma\frac{M_k\Delta_k}{\Delta} = \frac{G_2G_3}{1 + G_2H_2 + G_1G_2H_3 + G_1G_2H_1 + G_1G_2G_3}$$

بهره بخش قبلی باید به قدری از بهری این بخش زیاد باشد که تاثیر اغتشاش ناچیز شود.

$$\frac{\frac{C(s)}{R(s)}}{\frac{C(s)}{D(s)}} = \frac{D(s)}{R(s)} = G_1$$

بنابراین می‌توان گفت:

$$|G_1| \to \infty$$

یعنی این مقدار باید اصلاح شود و به بی‌نهایت میل کند.

۴ سوال چهارم: کار با MATLAB

```
clear; clc; close all

s=zpk('s'); % zero-pole format
G1=1/s; % plant
G2 = 2*s + 1;
G3 = 1/(s^2 +1);
G4 = s/(s+1);
H1 = 3/s;
H2 = (s-1)/(s+3);
H3 = s/((s^2) + (3*s) + 1);
H4 = 1/(s+2);
%% Calculating T2 directly
systemnames = 'G1 G2 G3 G4 H1 H2 H3 H4';
inputvar = '[y1]';
outputvar = '[G3 - H4]';
input_to_G1 = '[ y1 - H1 - H3 ]';
input_to_G2 = '[G1]';
input_to_G3 = '[G4 + G2 - H2]';
input_to_G4 = '[y1 - H1 - H3]';
input_to_H1 = '[G1]';
input_to_H2 = '[G3 - H4]';
input_to_H3 = '[G3 - H4]';
input_to_H4 = '[G3 - H4]';
sysoutname = 'T2_direct';
cleanupsysic = 'yes';
sysic
% We can change the properties of the generated plant using
% get and set comands or as following.
T2_direct.InputName={'y1'}; % Set the input names
T2_direct.OutputName={'y5'}; % Set the output names
% We can make sure that our augmented system has its minimal
% realization to avoid un-contrallability for some hidden modes
% Check zero-poles patterns and use minreal
T2_direct = minreal(T2_direct)
poles_T2_direct = pole(T2_direct) %Calculating the poles

```

```
%% Calculating T1
systemnames = 'G1 G2 G3 G4 H1 H2 H3 H4';
inputvar = '[y2]';
outputvar = '[y2 - H3 - H1]';
input_to_G1 = '[ y2 - H1 - H3 ]';
input_to_G2 = '[G1]';
input_to_G3 = '[G4 + G2 - H2]';
input_to_G4 = '[y2 - H1 - H3]';
input_to_H1 = '[G1]';
input_to_H2 = '[G3 - H4]';
input_to_H3 = '[G3 - H4]';
input_to_H4 = '[G3 - H4]';
sysoutname = 'T1';
cleanupsysic = 'yes';
sysic

T1.InputName={'y2'};
T1.OutputName={'y5'};

T1 = minreal(T1)
poles_T1 = pole(T1)



%% Calculating T2 with T1
systemnames = 'T1';
inputvar = '[y1]';
outputvar = '[T1]';
input_to_T1 = '[y1]';
sysoutname = 'T2';
cleanupsysic = 'yes';
sysic

T2.InputName={'y1'};
T2.OutputName={'y5'};
```

```
T2 = minreal(T2)
poles_T2 = pole(T2)
```

Code 1: MATLAB code solution

۱.۴ بخش الف: به دست آوردن توابع T۱ و T۲

در گام اول توابغ سیستم‌ها را با متغیر s تعریف می‌کنیم و سپس به سایر محاسبات می‌پردازیم. ابتدا T۲ را به‌صورت مستقیم محاسبه می‌کنیم. یعنی y۱ و y۵ را به‌ترتیب ورودی و خروجی‌های اصلی در نظر می‌گیریم. البته باید توجه داشت که در خروجی، جمع و تفریق آخرین سیستم‌ها را بایستی نوشت.
در گام بعدی، T۱ را محاسبه می‌کنیم. اگر به شکل گراف T۱ توجه کنیم، می‌توانیم حلقه‌ی بزرگی را ببینیم که خروجی آن، همان محل ورودی است. به‌همین‌خاطر خروجی را با تفریق سیستم‌های فیدبک‌شده و ورودی تعریف می‌کنیم.
در نهایت با جایگذاری T۱ در سیستمی جدید، T۲ جدیدی به‌دست می‌آوریم.

۲.۴ بخش ب: به‌دست آوردن قطب‌ها

در این بخش با دستور pole قطب‌های سیستم را محاسبه می‌کنیم. می‌بینیم که قطب‌های T۲ با روش مستقیم، با قطب‌های آن در روش غیرمستقیم برابر است.
خروجی کد:

```
Command Window

T2_direct =

  From input "y1" to output "y5":

                       3 s (s+3) (s+2.618) (s+2) (s+0.382) (s^2 + s + 0.3333)

  ----------------------------------------------------------------------------------------------------

  (s+2.444) (s+0.9276) (s+0.3896) (s^2 + 6.083s + 9.52) (s^2 + 0.2081s + 0.6491) (s^2 - 0.05238s + 3.847)



Continuous-time zero/pole/gain model.
Model Properties

poles_T2_direct =

  -2.4444 + 0.0000i
  -0.9276 + 0.0000i
  -0.3896 + 0.0000i
   0.0262 + 1.9612i
   0.0262 - 1.9612i
  -3.0414 + 0.5200i
  -3.0414 - 0.5200i
fx -0.1041 + 0.7989i
```

شکل ۴: خروجی T۲ با راه حل مستقیم در محیط MATLAB

```
Command Window
T1 =

  From input "y2" to output "y5":

             s^2 (s+0.382) (s+1) (s+2.618) (s^2 + 5.727s + 8.627) (s^2 + 0.2727s + 0.8114)

  ----------------------------------------------------------------------------------------------------

  (s+2.444) (s+0.9276) (s+0.3896) (s^2 + 6.083s + 9.52) (s^2 + 0.2081s + 0.6491) (s^2 - 0.05238s + 3.847)



Continuous-time zero/pole/gain model.
Model Properties

poles_T1 =

  -2.4444 + 0.0000i
  -0.9276 + 0.0000i
  -0.3896 + 0.0000i
   0.0262 + 1.9612i
   0.0262 - 1.9612i
  -3.0414 + 0.5200i
  -3.0414 - 0.5200i
  -0.1041 + 0.7989i
fx -0.1041 - 0.7989i
```

شکل ۵: خروجی T۱ در محیط MATLAB

```
Command Window
T2 =

  From input "y1" to output "y5":

        (s+2.618) (s+1) (s+0.382) (s^2 + 1.323e-15) (s^2 + 5.727s + 8.627) (s^2 + 0.2727s + 0.8114)

  ----------------------------------------------------------------------------------------------------

  (s+0.3896) (s+0.9276) (s+2.444) (s^2 + 6.083s + 9.52) (s^2 + 0.2081s + 0.6491) (s^2 - 0.05238s + 3.847)



Continuous-time zero/pole/gain model.
Model Properties

poles_T2 =

  -0.3896 + 0.0000i
  -0.9276 + 0.0000i
  -2.4444 + 0.0000i
  -0.1041 + 0.7989i
  -0.1041 - 0.7989i
   0.0262 + 1.9612i
   0.0262 - 1.9612i
  -3.0414 + 0.5200i
fx -3.0414 - 0.5200i
```

شکل ۶: خروجی T۲ با راه حل غیرمستقیم در محیط MATLAB