

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده مهندسی برق - گروه مهندسی کنترل

درس سیستم‌های کنترل خطی پاسخ تمرین سری پنجم

نام و نام خانوادگی	آنایس گل بوداغیانس
شماره دانشجویی	۴۰۱۲۲۱۱۳
تاریخ	دی ماه ۱۴۰۳



فهرست مطالب

۴	سوال اول: به‌دست آوردن حد بهره و فاز، بحث شرایط پایداری	۱
۴	۱.۱ به‌دست آوردن حد فاز	۱.۱
۴	۲.۱ به‌دست آوردن حد بهره	۲.۱
۵	سوال دوم: تنظیم k	۲
۵	سوال سوم: رسم نمودار بودی، به‌دست آوردن حاشیه‌ها و بحث پایداری	۳
۵	۱.۳ رسم نمودار بودی	۱.۳
۷	۲.۳ به‌دست آوردن حاشیه فاز	۲.۳
۸	۳.۳ به‌دست آوردن حاشیه بهره	۳.۳
۸	سوال چهارم: به‌دست آوردن حد فاز و بهره با استفاده از تابع تبدیل	۴
۸	۱.۴ به‌دست آوردن حد فاز	۱.۴
۸	۲.۴ به‌دست آوردن حد بهره	۲.۴



فهرست تصاویر

۶ رسم دستی نمودار بودی با تخمین مرتبه اول	۱
۷ رسم متلب نمودار بودی	۲



فهرست برنامه‌ها

۶ solution code MATLAB ۱



۱ سوال اول: به دست آوردن حد بهره و فاز، بحث شرایط پایداری

سیستم حلقه‌بازی که داریم، یک سیستم تاخیردار است. اگر تابع تبدیل آن را بدون تاخیر بنویسیم به شکل زیر خواهد شد:

$$G(s) = \frac{k}{s}$$

$$G_{delay}(s) = \frac{ke^{-sT}}{s}$$

می‌دانیم که اندازه سیستم تاخیردار با اندازه سیستم بدون تاخیر متناظر آن برابر است.

$$|G(j\omega)| = |G_{delay}(j\omega)|$$

اما درباره‌ی فاز باید گفت:

$$\angle G_{delay}(j\omega) = \angle G(j\omega) - T\omega$$

البته باید توجه داشت که رابطه‌ی بالا برحسب rad/s است.

۱.۱ به دست آوردن حد فاز

$$|G_{delay}(j\omega_c)| = \frac{k}{|\omega_c|} = 1 \rightarrow \omega_c = k$$

$$\angle G_{delay}(j\omega_c) = 0 - \frac{\pi}{2} - T\omega_c = -\frac{\pi}{2} - kT$$

$$PM = \angle G_{delay}(j\omega_c) + \pi = \frac{\pi}{2} - kT$$

شرط پایداری:

$$PM > 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} - kT > 0 \rightarrow kT < \frac{\pi}{2} \rightarrow k < \frac{\pi}{2T}$$

۲.۱ به دست آوردن حد بهره

$$\angle G_{delay}(j\omega_p) = -\pi \rightarrow -\frac{\pi}{2} - T\omega_p = -\pi$$

$$\omega_p = \frac{\pi}{2T}$$

$$GM = -20\log|G_{delay}(j\omega_p)| = -20\log\left(\frac{2kT}{\pi}\right)$$

شرط پایداری:

$$GM > 0 \rightarrow -20\log\left(\frac{2kT}{\pi}\right) > 0$$

$$\log\left(\left(\frac{2kT}{\pi}\right)^{-20}\right) > 0 \rightarrow 0 < \frac{2kT}{\pi} < 1$$

$$0 < k < \frac{\pi}{2T}$$

اگر از دو شرط پایداری به دست آمده اشتراک بگیریم، داریم:

$$0 < k < \frac{\pi}{2T}$$

۲ سوال دوم: تنظیم k

$$PM = \frac{\pi}{4} = \angle G(j\omega_c) - \pi$$

$$\angle G(j\omega_c) = \frac{5\pi}{4} = \arctan\left(\frac{\omega_c}{2}\right)$$

از طرفین تانژانت می‌گیریم.

$$\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 1 = \frac{\omega_c}{2} \rightarrow \omega_c = 2$$

برای اندازه داریم:

$$G(s) = \frac{k(s+2)}{s^2}$$

$$G(j\omega) = \frac{k(j\omega+2)}{-\omega^2}$$

$$|G(j\omega_c)| = \frac{k\sqrt{\omega_c^2+4}}{\omega_c^2} = 1$$

$$k^2(\omega_c^2+4) = \omega_c^4$$

$$k^2 = \frac{\omega_c^2+4}{\omega_c^4}$$

$$k^2 = \frac{2^4}{2^2+4} = 2$$

$$k = \sqrt{2}$$

۳ سوال سوم: رسم نمودار بودی، به دست آوردن حاشیه‌ها و بحث پایداری

۱.۳ رسم نمودار بودی

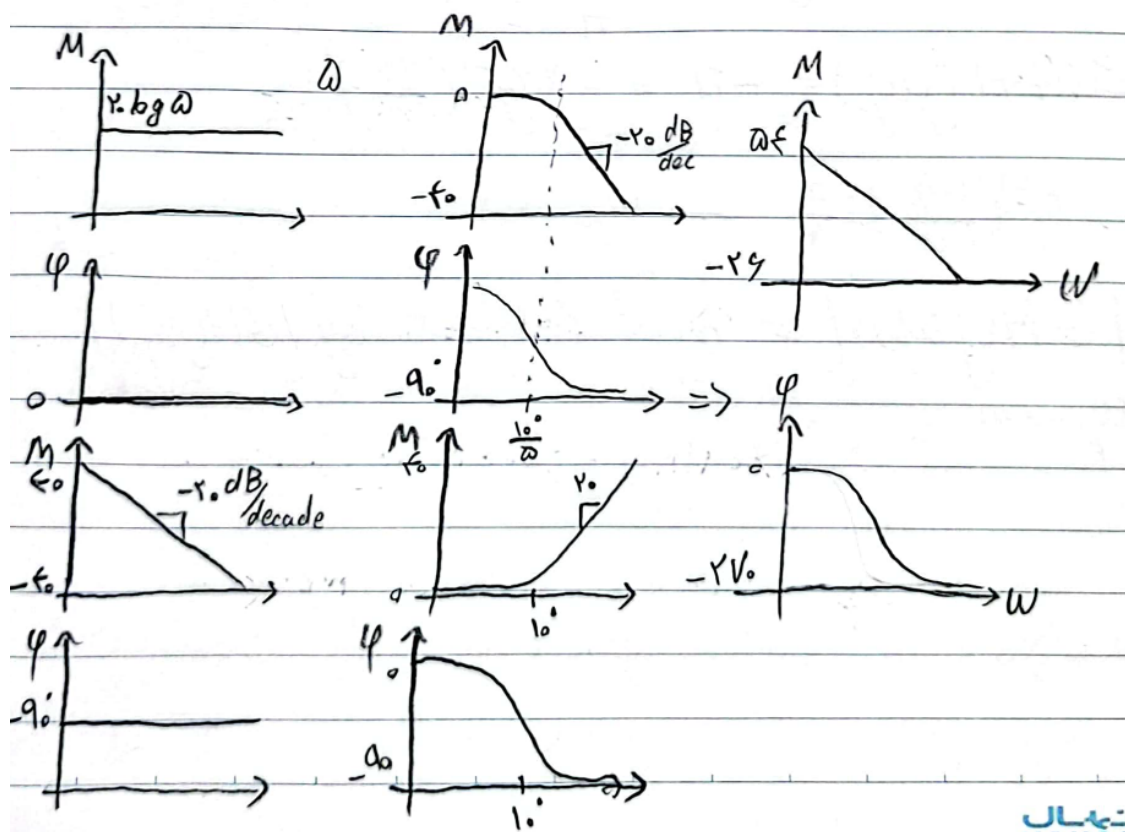
برای رسم نمودار بودی، از تخمین مرتبه ۱ استفاده می‌کنیم.

$$G(s) = \frac{5(s+1)e^{-2s}}{s(5s+1)}$$

$$e^{-2s} = \frac{e^{-s}}{e^s} = \frac{1-s}{1+s}$$

$$G(s) = \frac{5(1-s)}{s(5s+1)}$$

این تابع تبدیل متشکل از سیستم بهره ثابت، انتگرال‌گیر، مرتبه اول Lag و PD با صفر غیرکمینه‌فاز است. پس از ترکیب چهار نمودار می‌توانیم رسمش کنیم.

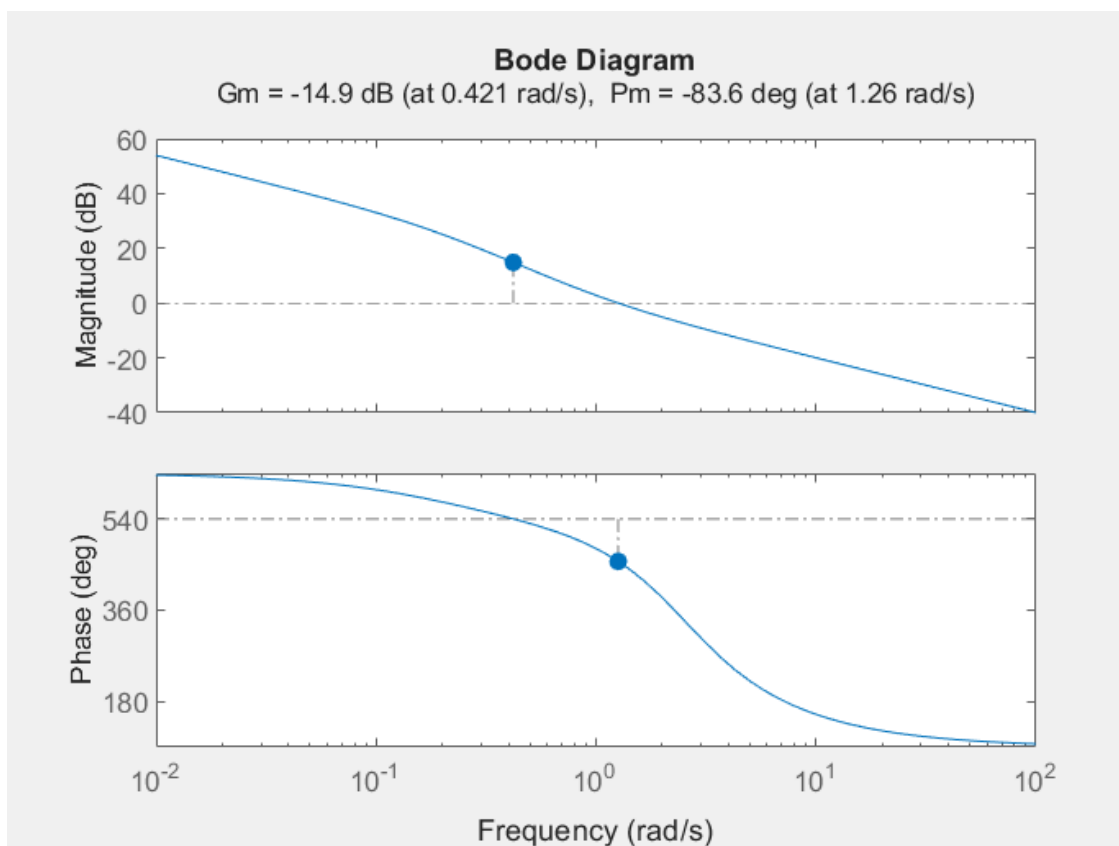


شکل ۱: رسم دستی نمودار بودی با تخمین مرتبه اول

حال در مطلب (با تخمین مرتبه ۳) رسم می‌کنیم و حاشیه‌ها را به دست می‌آوریم.

```
1 clear; clc; close all
2
3 s = tf('s');
4 g = (5*(s+1)*exp(-2*s))/(s*((5*s)+1));
5 gx = pade(g,3);
6 bode(gx);
7 margin(gx);
```

Code 1: MATLAB code solution



شکل ۲: رسم متلب نمودار بودی

۲.۳ به دست آوردن حاشیه فاز

$$|G(j\omega_c)| = \frac{5\sqrt{\omega^2 + 1}}{\omega\sqrt{1 + 25\omega^2}}$$

$$\angle G(j\omega_c) = \arctan(\omega) - \frac{\pi}{2} - \arctan(5\omega) - 2\omega$$

$$|G(j\omega_c)| = 1 \rightarrow 25(\omega_c^2 + 1) = \omega_c^2(1 + 25\omega_c^2)$$

$$25\omega_c^4 - 24\omega_c^2 - 25 = 0$$

$$\omega_c^2 = \frac{24 + 2\sqrt{769}}{50} = 1.5892$$

$$\omega_c = 1.2607$$

$$PM = \angle G(j\omega_c) + \pi = -1.4639 \text{ rad/s} < 0$$

یعنی شرط پایداری را ندارد.



۳.۳ به دست آوردن حاشیه بهره

$$\angle G(j\omega_p) = \arctan(\omega) - \frac{\pi}{2} - \arctan(5\omega) - 2\omega = -\pi$$

با روش نیوتون-رافسون ریشه (فرکانس عبور فاز) را به دست آوردیم.

$$\omega_p = 0.4210$$

$$GM = -20\log|G(j\omega_p)| = -14.8536dB < 0$$

پس سیستم ناپایدار است.

۴ سوال چهارم: به دست آوردن حد فاز و بهره با استفاده از تابع تبدیل

$$GH(j\omega) = \frac{4a^2}{(j\omega + a)^2}$$

$$|GH(j\omega)| = \frac{4a^2}{\sqrt{\omega^2 + a^2} \times \sqrt{\omega^2 + a^2}} = \frac{4a^2}{\omega^2 + a^2}$$

$$\angle GH(j\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{a}\right) = -2\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

۱.۴ به دست آوردن حد فاز

$$|GH(j\omega_c)| = \frac{4a^2}{\omega_c^2 + a^2} = 1$$

$$\rightarrow \omega_c = \sqrt{3}a$$

$$PM = \angle G(j\omega_c) + \pi = \frac{\pi}{3}$$

حد فاز بزرگتر از صفر است و شرط پایداری را داراست.

۲.۴ به دست آوردن حد بهره

$$\angle G(j\omega_p) = -2\arctan\left(\frac{\omega_p}{a}\right) = -\pi$$

اگر از طرفین تانژانت بگیریم، فرکانس عبور فاز به مثبت بی نهایت میل خواهد کرد.

$$\omega_p \rightarrow \infty$$

$$GM = -20\log|G(j\omega_p)| = -\infty$$

حد بهره نیز به منفی بی نهایت میل می کند و در نتیجه سیستم پایدار نیست.