



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده مهندسی برق - گروه مهندسی کنترل

درس سیستم‌های کنترل خطی پاسخ تمرین سری چهارم

نام و نام خانوادگی	آنایس گل بوداغیانس
شماره دانشجویی	۴۰۱۲۲۱۱۳
تاریخ	آذرماه ۱۴۰۳



فهرست مطالب

۵	۱ سوال اول: نایکوییست و پایداری
۸	۲ سوال دوم: خطای حالت ماندگار
۱۰	۳ سوال سوم: رسم نمودار بودی
۱۶	۴ سوال چهارم: رسم نمودار نایکوییست
۲۳	۵ سوال پنجم: رسم نایکوییست با بودی داده شده



فهرست تصاویر

۵ نمودار بودی بهره ثابت	۱
۵ نمودار بودی انتگرال گیر	۲
۶ نمودار بودی Lag ناپایدار	۳
۶ نمودار بودی سیستم G	۴
۷ رسم دستی نمودار نایکویست	۵
۷ رسم کامپیوتری	۶
۸ رسم دستی کامل نمودار نایکویست	۷
۹ نمودار بودی تقریبی	۸
۱۱ نمودار بودی PD	۹
۱۱ نمودار بودی بهره ثابت	۱۰
۱۲ نمودار بودی انتگرال گیر	۱۱
۱۲ نمودار بودی Lag مرتبه اول	۱۲
۱۳ نمودار بودی رسم دستی و مرحله به مرحله با ترکیب (جمع) چهار شکل	۱۳
۱۵ نمودار بودی سیستم $G(s)$ بدون استفاده از تقریب و تابع Pade	۱۴
۱۵ تقریب مرتبه اول نمودار بودی $G(s)$	۱۵
۱۶ تقریب مرتبه دوم نمودار بودی $G(s)$	۱۶
۱۶ مقایسه تقریب‌ها و افزودن مرتبه‌های تقریب نمودار بودی $G(s)$	۱۷
۱۷ نمودار بودی سیستم	۱۸
۱۸ کانتور نایکویست	۱۹
۱۹ نمودار نایکویست به ازای شعاع بی نهایت	۲۰
۲۱ نمودار نایکویست	۲۱
۲۱ نمودار نایکویست	۲۲
۲۱ نمودار نایکویست	۲۳
۲۲ نمودار نایکویست با جزئیات	۲۴
۲۲ نمودار نایکویست با نقاط قطع شده محور حقیقی	۲۵
۲۳ نمودار نایکویست با جزئیات	۲۶
۲۴ نمودار بودی با اطلاعات به دست آمده	۲۷
۲۴ نمودار نایکویست متلب	۲۸



فهرست جداول



فهرست برنامه‌ها

۸	Q۱ for codes MATLAB	۱
۸	Q۲ for codes MATLAB	۲
۱۴	Q۳ for codes MATLAB	۳
۲۰	Q۴ for codes MATLAB	۴
۲۳	Q۵ for codes MATLAB	۵

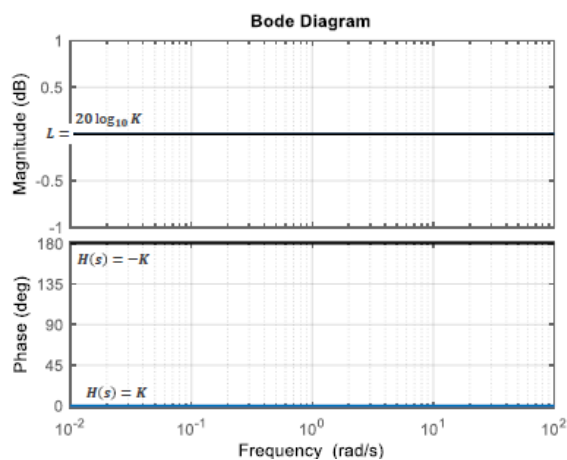


۱ سوال اول: نایکویست و پایداری

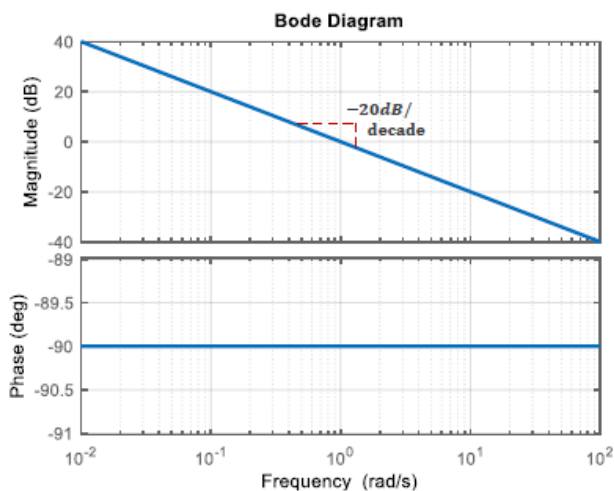
برای رسم نمودار نایکویست، ابتدا نمودار بودی را رسم می‌کنیم. اول نگاه می‌کنیم که سیستم ما، متشکل از چه سیستم‌های معروف است.

$$G(s) = -k \times \frac{1}{s} \times \frac{1}{1 - Ts}$$

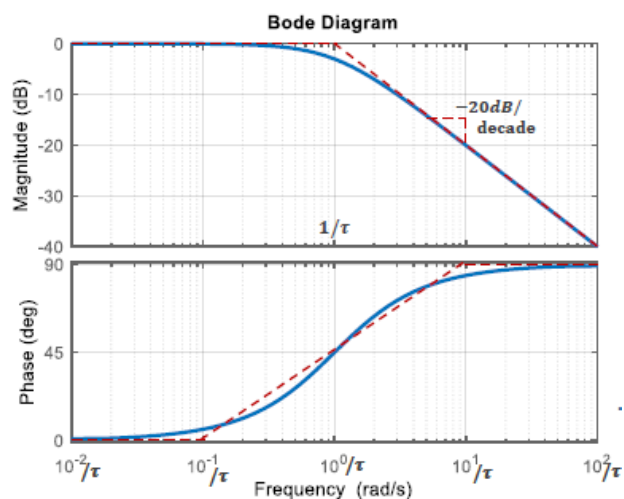
سیستم متشکل از اتصال سری یک سیستم بهره ثابت منفی، انتگرال‌گیر و Lag ناپایدار است. با توجه به جزوه، نمودارهای بودی‌شان را در نظر می‌گیریم. با ترکیب سه شکل بالا، شکل زیر به دست می‌آید:



شکل ۱: نمودار بودی بهره ثابت

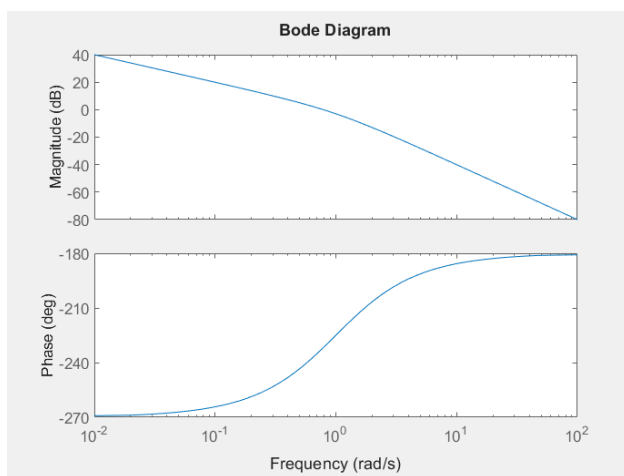


شکل ۲: نمودار بودی انتگرال‌گیر



شکل ۳: نمودار بودی Lag ناپایدار

البته باید توجه داشت که با ترکیب سه شکل بالا، تغییرات فاز از ۹۰ تا ۱۸۰ درجه درمی‌آید، که با کم کردن ۳۶۰ درجه می‌توان به شکل



شکل ۴: نمودار بودی سیستم G



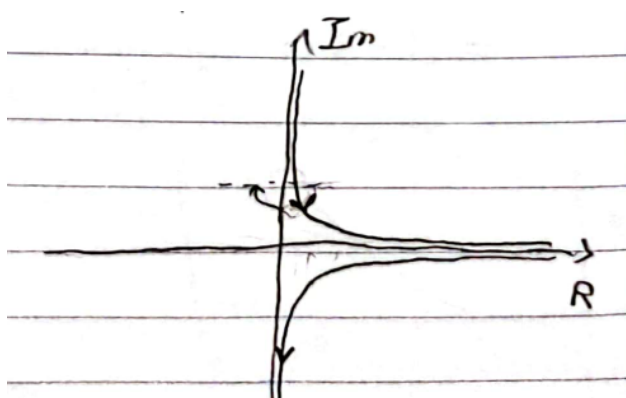
بالا رسید. تغییر 360° درجه کم‌تر یا بیشتر، تغییری در ماهیت سیستم ایجاد نمی‌کند. پس در رسم نمودار نایکویست، اگر خطی از مبدا به منحنی وصل کنیم، می‌دانیم که این خط با زاویه -270° درجه تا -180° تغییر می‌کند. برای ادامه مراحل رسم، تابع پاسخ فرکانسی سیستم را می‌نویسیم.

$$G(j\omega) = \frac{k}{j\omega(-1 + Tj\omega)} = -\frac{k}{j\omega + \omega^2}$$

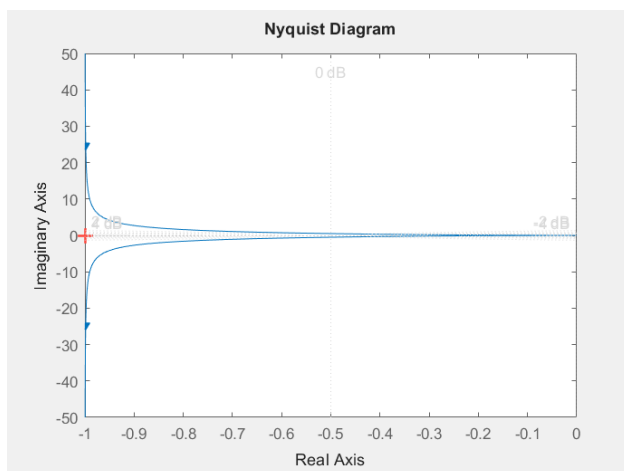
صفر و بی‌نهایت را در عبارت بالا جایگذاری می‌کنیم.

$$\omega = 0 \rightarrow G(j\omega) = \infty, \omega = \infty \rightarrow G(j\omega) = 0$$

با اطلاعات به‌دست آمده، نمودار نایکویست را رسم می‌کنیم.

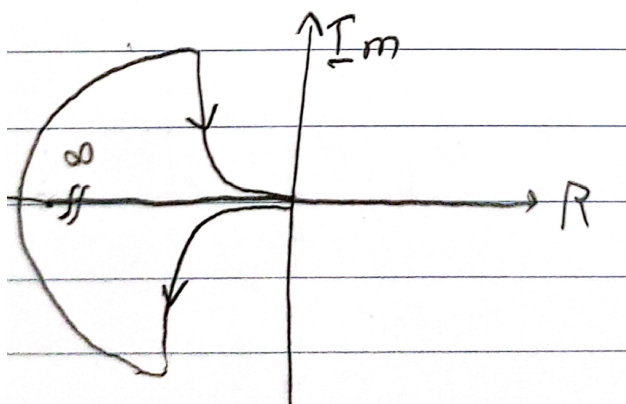


شکل ۵: رسم دستی نمودار نایکویست



شکل ۶: رسم کامپیوتری

رسم با تصور آن‌که در بی‌نهایت منحنی به هم می‌رسد این شکلی خواهد شد. محدوده پایداری نمی‌توان یافت و نمی‌توان نقطه‌ای $-\frac{1}{k}$ یافت که نمودار نایکویست آن را دور بزند پس سیستم ناپایدار است.



شکل ۷: رسم دستی کامل نمودار نایکوئیست

```
1 clc; clear; close all
2
3 num = 1;
4 den = [1 -1 0];
5 g = tf(num,den);
6 figure
7 bode(g);
8 figure
9 nyquist(g);
10 grid on
```

Code 1: MATLAB codes for Q1

۲ سوال دوم: خطای حالت ماندگار

حد بهره، بهره تابع تبدیل به ازای فرکانسی است که فاز به -180 درجه می‌رسد. برای به دست آوردن فرکانس مورد نظر « ω_p » باید رابطه فاز $G(j\omega)$ به دست بیاوریم و آن را مساوی $-\pi$ قرار دهیم. راه دیگر این است نمودار بودی را به ازای $k=1$ ، نمودار بودی را رسم می‌کنیم.

```
1 clc; clear; close all
2
3 num = 1;
4 den = [1 11 10 0];
```



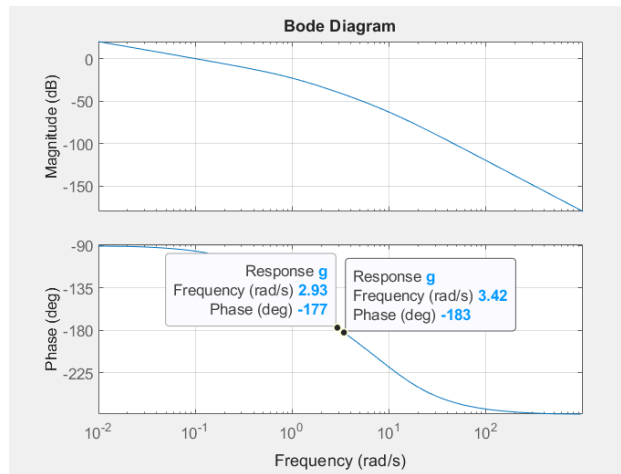
```

5 g = tf(num, den);
6 bode(g);
7 grid on

```

Code 2: MATLAB codes for Q2

نقاط مشخص شده را در متلب در نظر می‌گیریم و درونیابی خطی می‌کنیم:



شکل ۸: نمودار بودی تقریبی

$$\omega_p = -\frac{-180 + 183}{-177 + 183}(2.93 - 3.42) = 3.175$$

حال رابطه اندازه را به دست می‌آوریم.

$$|G(j\omega)| = \frac{|k|}{|j\omega||j\omega + 1||j\omega + 10|} = \frac{k}{\omega(\sqrt{\omega^2 + 1})(\sqrt{\omega^2 + 100})}$$

$$1.1 = -20 \log |G(3.175)|$$

$$|G(3.175)| = 0.8810$$

$$\rightarrow k = 94.5778$$

ورودی داده شده، مجموع ورودی پله و شیب است.

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p} + \frac{1}{K_v}$$

محاسبه ثابت خطای موقعیت:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \infty$$

پس خطای ورودی پله صفر خواهد شد. داریم:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v}$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = 9.45778$$

$$e_{ss} = 0.1057$$



۳ سوال سوم: رسم نمودار بودی

تابع تبدیل حلقه‌باز:

$$G(s) = \frac{5e^{-2s}(s+1)}{s(5s+1)}$$

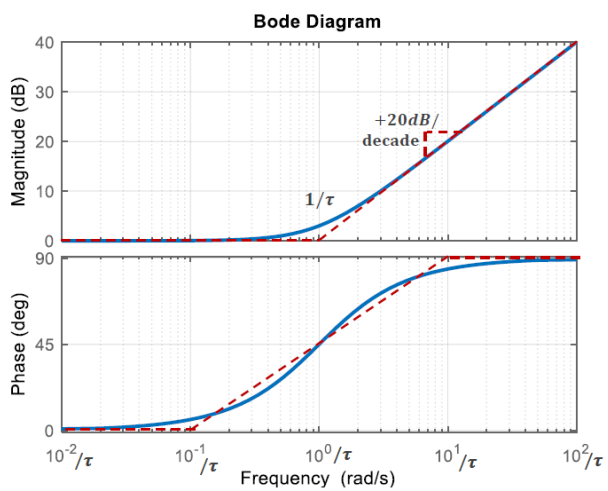
با کمک بسط تیلور، عبارت نمایی را به صورت مرتبه اول تخمین می‌زنیم و تابع تبدیل به شکل زیر درمی‌آید:

$$e^{-2s} = \frac{e^{-s}}{e^s} = \frac{1-s}{1+s}$$

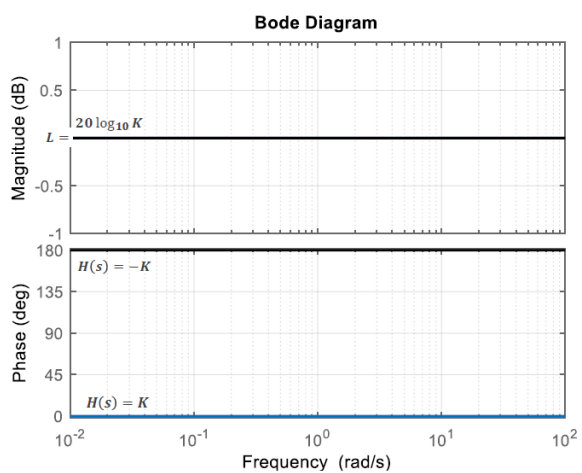
$$G(s) = \frac{5(1-s)}{s(5s+1)}$$

$$= 5 \times (1-s) \times \frac{1}{s} \times \frac{1}{5s+1}$$

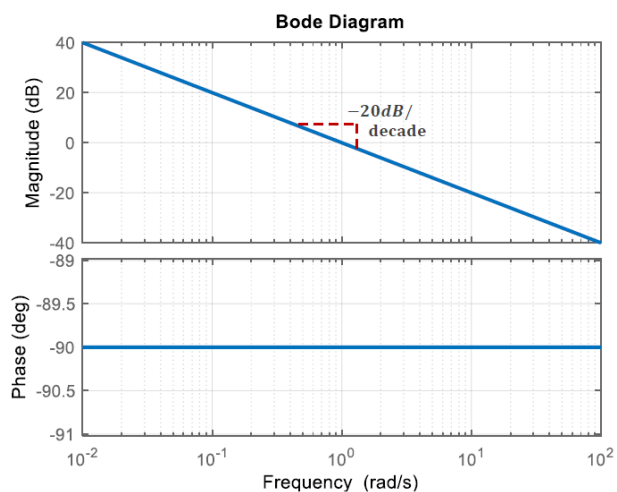
سیستم ترکیبی از سیستم بهره ثابت مثبت، انتگرال گیر، Lag مرتبه اول و PD با صفر غیرکمینه‌فاز است. با در نظر گرفتن نمودار بودی هرکدام، نمودار بودی مورد نظر را رسم می‌کنیم.



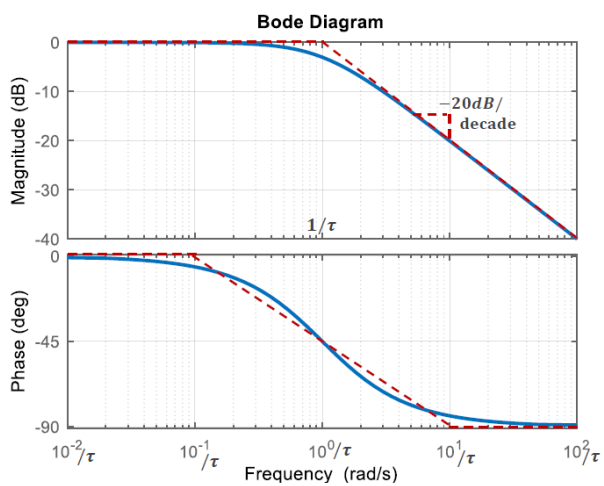
شکل ۹: نمودار بودی PD



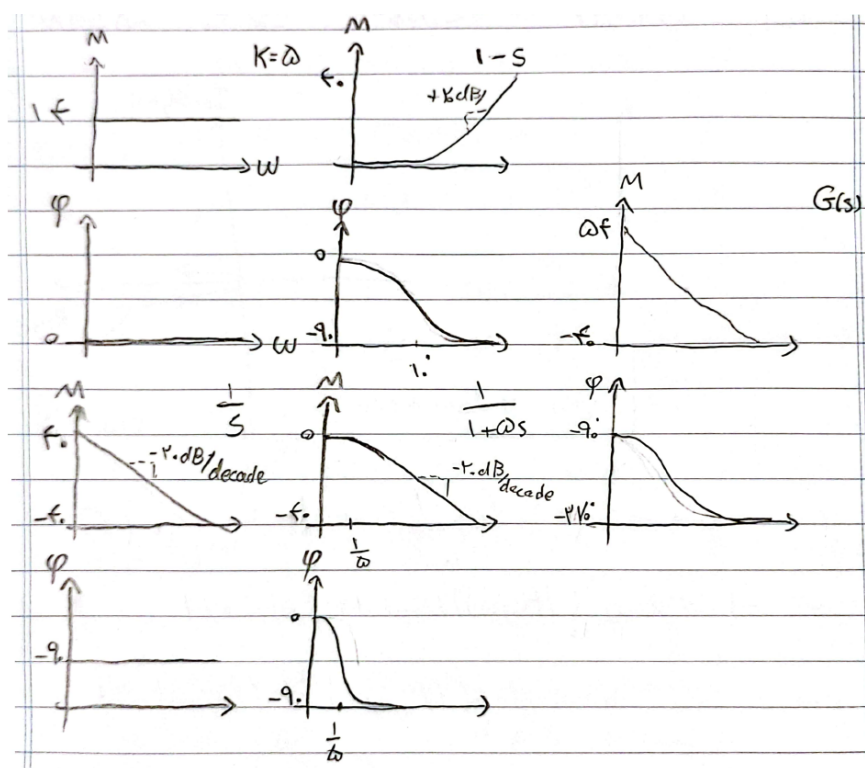
شکل ۱۰: نمودار بودی بهره ثابت



شکل ۱۱: نمودار بودی انتگرال‌گیر



شکل ۱۲: نمودار بودی Lag مرتبه اول



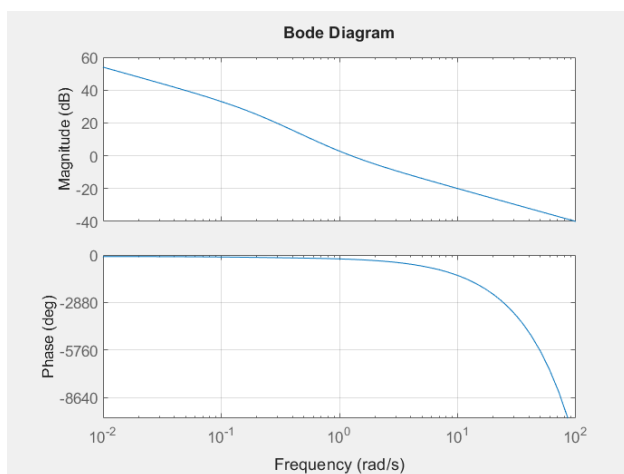
شکل ۱۳: نمودار بودی رسم دستی و مرحله به مرحله با ترکیب (جمع) چهار شکل



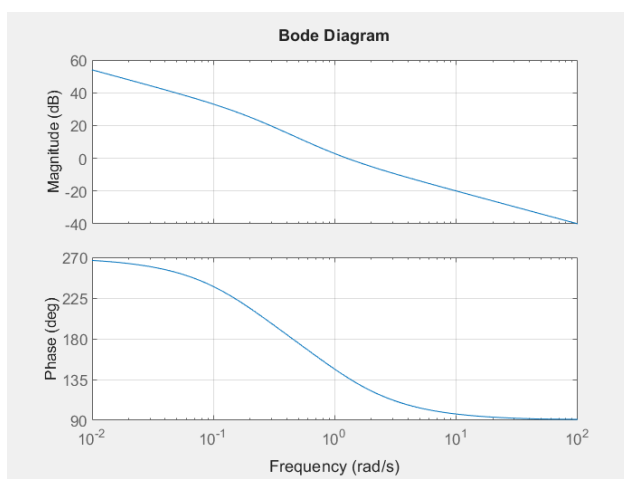
حال با متلب صحت‌سنجی می‌کنیم.

```
1 clc; clear; close all
2 %
3 figure
4 s = tf('s');
5 g = (5*exp(-2*s)*(s+1))/(((5*s)+1)*s);
6 bode(g);
7 grid on
8 %
9 figure
10 gx1 = pade(g,1);
11 bode(gx1);
12 grid on
13 %
14 figure
15 gx2 = pade(g,2);
16 bode(gx2);
17 grid on
18
19 figure
20 for i=1:50
21     gxn = pade(g,i);
22     bode(gxn);
23     grid on
24     hold on
25 end
```

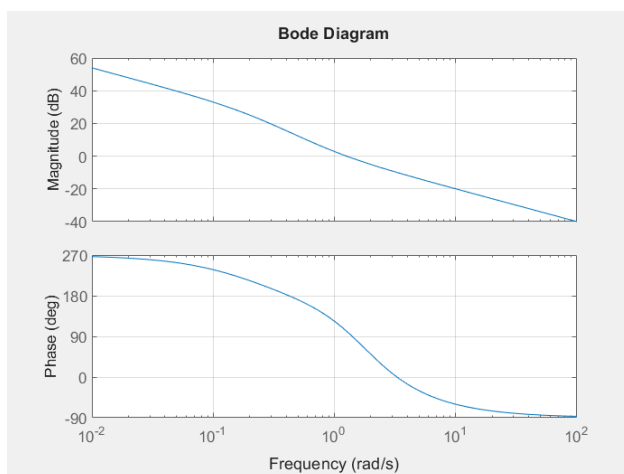
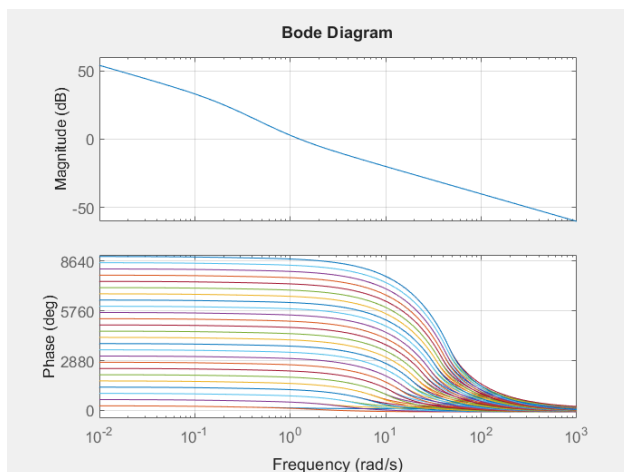
Code 3: MATLAB codes for Q3



شکل ۱۴: نمودار بودی سیستم $G(s)$ بدون استفاده از تقریب و تابع Pade

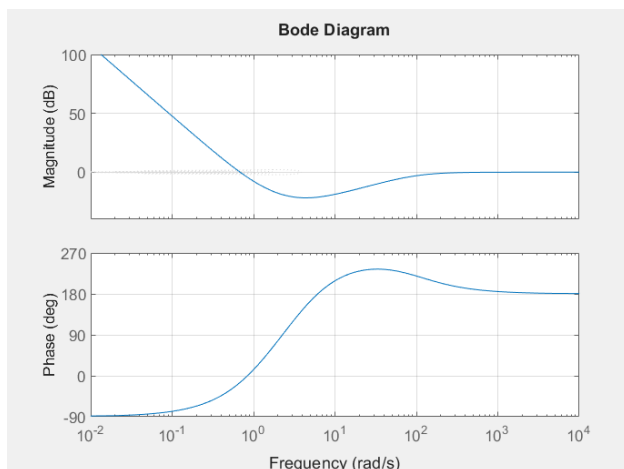


شکل ۱۵: تقریب مرتبه اول نمودار بودی $G(s)$

شکل ۱۶: تقریب مرتبه دوم نمودار بودی $G(s)$ شکل ۱۷: مقایسه تقریب‌ها و افزودن مرتبه‌های تقریب نمودار بودی $G(s)$

۴ سوال چهارم: رسم نمودار نایکویست

سیستم متشکل از سه انتگرال‌گیر، یک سیستم بهره ثابت منفی، یک سیستم مرتبه اول Lag و چهار سیستم مرتبه اول PD است. سیستم بهره ثابت منفی فاز 180- درجه دارد. سیستم انتگرال‌گیر فاز 90- درجه دارد. پس سه‌تای آن، فاز 270- درجه ثابت به وجود می‌آورد. سیستم Lag از صفر تا 90- درجه تغییر می‌کند. سیستم PD از صفر تا 90 درجه تغییر می‌کند. پس در مجموع فاز سیستم از 450- تا 180- یا 90- تا 180 درجه تغییر می‌کند. برای اطمینان نمودار بودی را با متلب رسم می‌کنیم. از این تغییر فاز در رسم نایکویست استفاده خواهیم کرد.



شکل ۱۸: نمودار بودی سیستم

حال باید پاسخ فرکانسی سیستم را بنویسیم.

$$G(j\omega) = \frac{-(j\omega + 1)(j\omega + 2)(j\omega + 3)(j\omega + 4)}{(j\omega)^3(j\omega + 100)}$$

$$\omega = 0 \rightarrow G(0) = \infty$$

$$\omega = \infty \rightarrow G(\infty) = -1$$

از بی نهایت شروع می کنیم و با اعمال زاویه تغییرات فاز، به نقطه -1 می رسیم. برای به دست آوردن نقاطی که محور حقیقی قطع می شود، بخش موهومی پاسخ فرکانسی را به دست می آوریم. ریشه های آن بخش را به دست می آوریم و در رابطه اندازه جایگذاری می کنیم.

$$G(j\omega) = \frac{(-\omega^5 - 965\omega^3 + 4976) + (-90\omega^4 + 345\omega^2 - 2400)j}{\omega^3(10000 + \omega^2)}$$

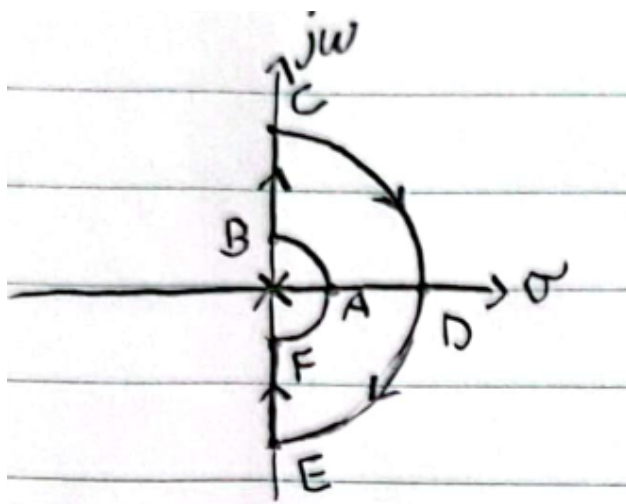
$$Im(G(j\omega)) = \frac{-90\omega^4 + 345\omega^2 - 2400}{\omega^3(10000 + \omega^2)}$$

معادله بالا را برابر صفر قرار می دهیم و با متلب ریشه ها را به دست می آوریم:

$$\omega = \pm 6.1339, \pm 0.8419$$

در رابطه اندازه می گذاریم و اعداد 0.0867 و 0.6055 به دست می آیند.

حال کانتور نایکویست را در نظر می گیریم، چون در مبدأ قطب داریم، کانتور آن جا را دور می زند. حال با استفاده از تابع G ، کانتور را



شکل ۱۹: کانتور نایکوئیست

نگاشت می‌دهیم. درواقع نگاشت بعضی از نقاط خاص یعنی $ABCDEF$ را پیدا می‌کنیم.

$$FAB : s = \epsilon e^{j\theta}, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$s = \epsilon \angle \theta \rightarrow G(\epsilon e^{j\theta})_{\epsilon \rightarrow 0} = \frac{-24}{\epsilon^3 e^{j3\theta} \times 100} \rightarrow R \angle \pi - 3\theta$$

$$A : \epsilon \angle 0 \rightarrow A' : R \angle \pi$$

$$B : \epsilon \angle \frac{\pi}{2} \rightarrow B' : R \angle \frac{-\pi}{2}$$

$$F : \epsilon \angle -\frac{\pi}{2} \rightarrow F' : R \angle \frac{\pi}{2}$$

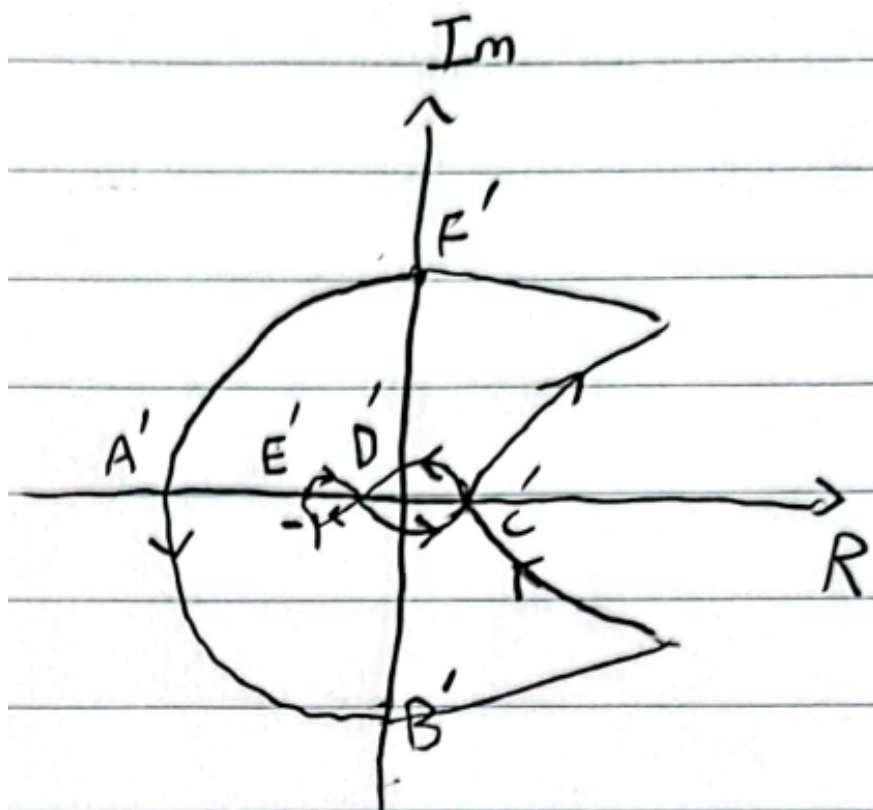
$$CDE : s = R e^{j\phi}, -\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$$

$$s = R \angle \phi \rightarrow G(R e^{j\phi})_{R \rightarrow \infty} = -1$$

$$C : R \angle \frac{\pi}{2} \rightarrow C' : \epsilon \angle \pi$$

$$D : R \angle 0 \rightarrow D' : \epsilon \angle \pi$$

$$E : R \angle -\frac{\pi}{2} \rightarrow E' : \epsilon \angle \pi$$



شکل ۲۰: نمودار نایکویست به ازای شعاع بی‌نهایت

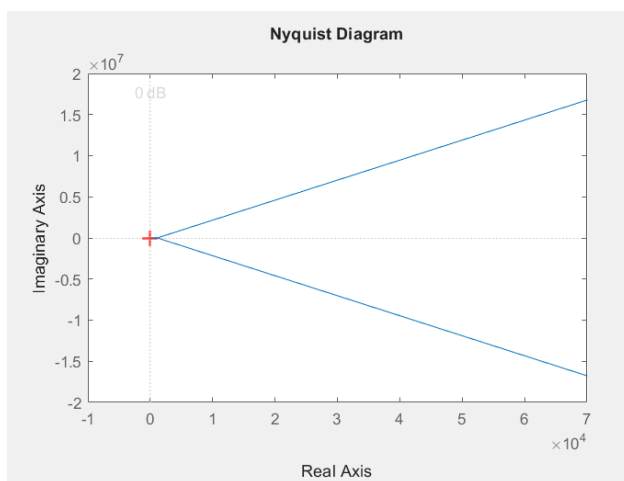


در گام بعدی با متلب صحت‌سنجی می‌کنیم. برای به‌دست آوردن ریشه‌ها از کدهای زیر استفاده شده بود.

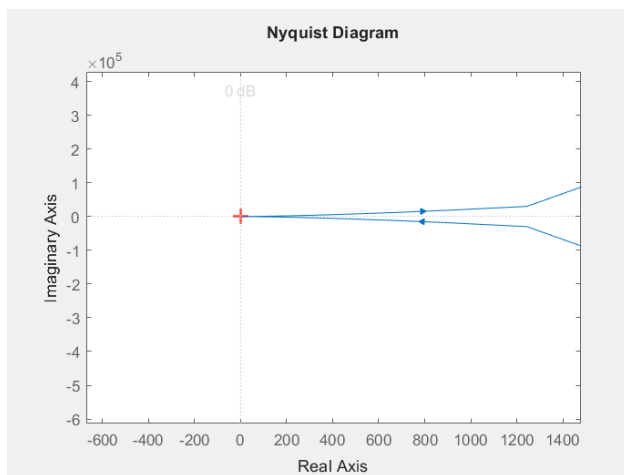
```
1 clc; clear; close all
2
3 s = tf("s");
4 g = -((s+1)*(s+2)*(s+3)*(s+4))/((s^3)*(s+100));
5 figure
6 nyquist(g)
7 grid on
8 figure
9 bode(g)
10 grid on
11 %coefficients of Imaginary part of frequency response.
12 coef_im = [-90 0 3450 0 -2400];
13 roots_of_im = roots(coef_im);
14 syms jw
15 RealAxis_inter = [0 0 0 0];
16 g_abs = @(w)(sqrt(w^2+1)*sqrt(w^2+4)*sqrt(w^2+9)*sqrt(w^2+16))/(abs(w^3)*sqrt(
    w^2+10000));
17 for i=1:4
18     RealAxis_inter(i) = g_abs(roots_of_im(i));
19 end
```

Code 4: MATLAB codes for Q4

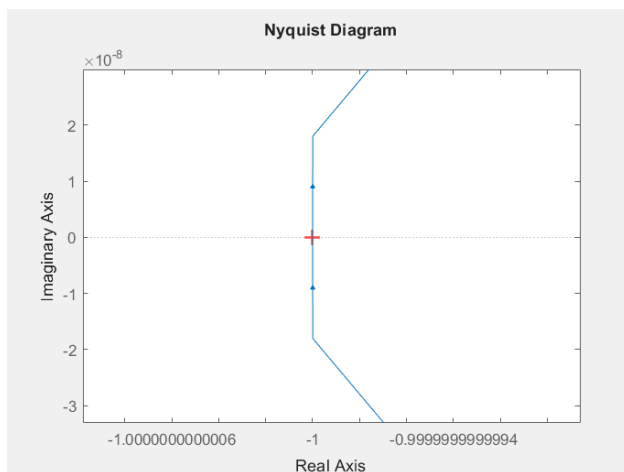
هرچه در متلب، شکل را زوم می‌کنیم جزئیات بیشتری آشکار می‌شود.



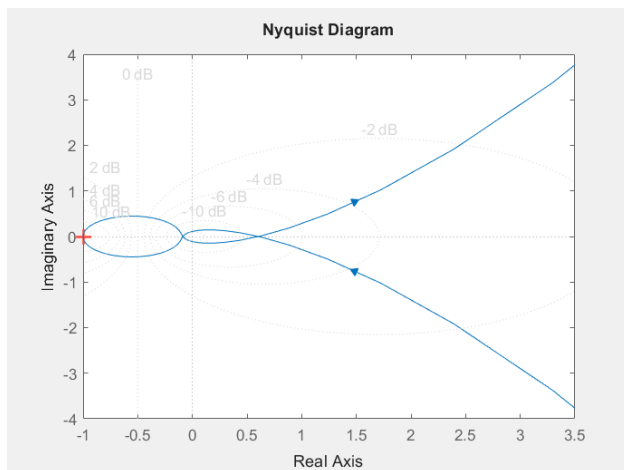
شکل ۲۱: نمودار نایکوئیست



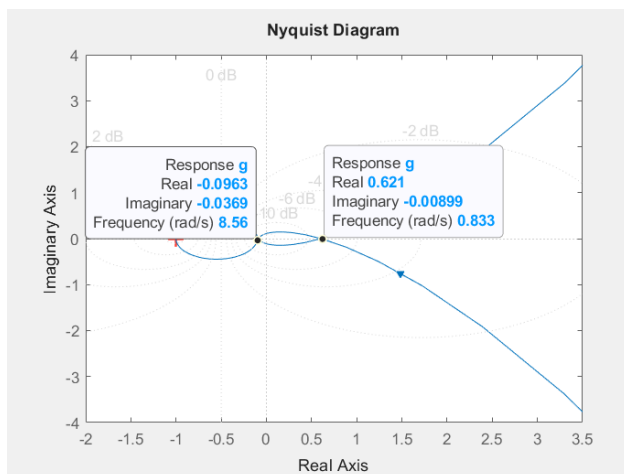
شکل ۲۲: نمودار نایکوئیست



شکل ۲۳: نمودار نایکوئیست



شکل ۲۴: نمودار نایکوئیست با جزئیات



شکل ۲۵: نمودار نایکوئیست با نقاط قطع شده محور حقیقی



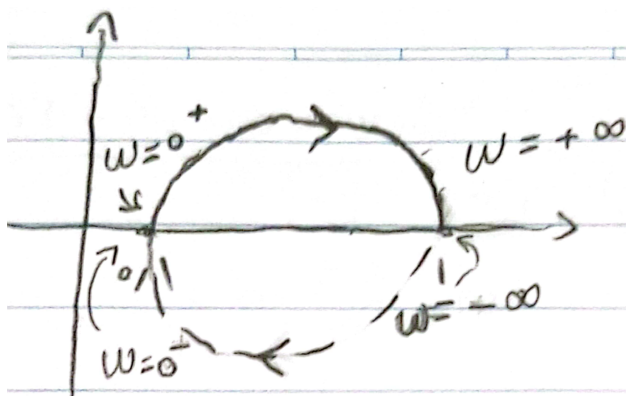
۵ سوال پنجم: رسم نایکویست با بودی داده شده

با توجه به بهره نمودار بودی، می‌فهمیم در فرکانسی که به صفر و بی نهایت میل می‌کند:

$$\omega = 0 \rightarrow -20 = 20 \log |H(j\omega)| \rightarrow |H(j\omega)| = 0.1 \rightarrow k = 0.1$$

$$\omega = \infty \rightarrow 0 = 20 \log |H(j\omega)| \rightarrow |H(j\omega)| = 1$$

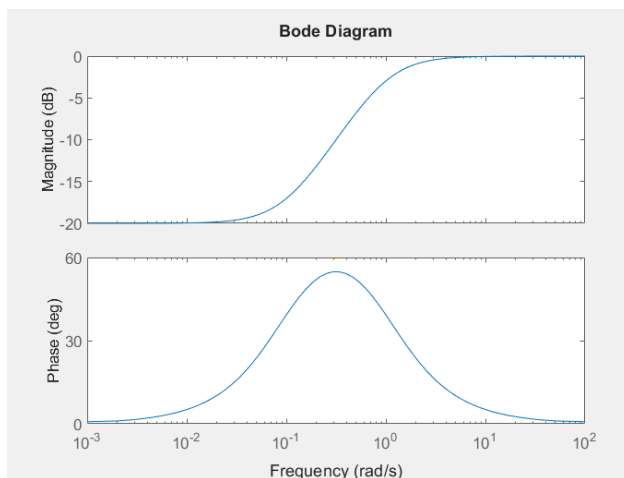
چون فاز در هر دو حالت صفر است، مقدار پاسخ فرکانسی به دست آمده علامت منفی نمی‌گیرد. هم‌چنین از نمودار بودی می‌توان فهمید که با کنترلر Lead سروکار داریم.



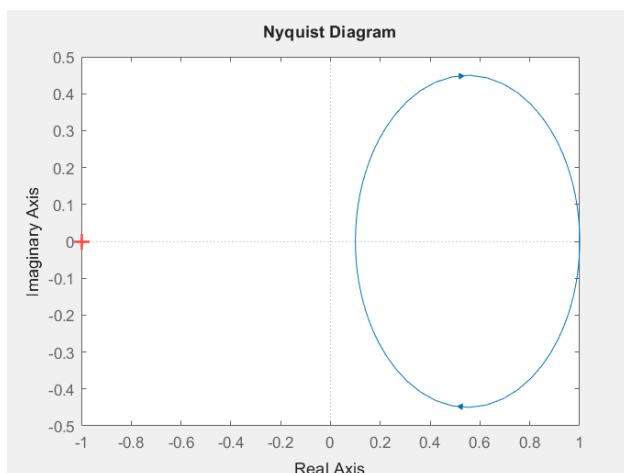
شکل ۲۶: نمودار نایکویست با جزئیات

```
1 clc; clear; close all
2 %Lead controller
3 num = [1 0.1];
4 den = [1 1];
5 g = tf(num, den);
6 figure
7 bode(g);
8 figure
9 nyquist(g);
```

Code 5: MATLAB codes for Q5



شکل ۲۷: رسم مجدد نمودار بودی با اطلاعات به دست آمده



شکل ۲۸: نمودار نایکوئیست متلب