

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده مهندسی برق - گروه مهندسی کنترل

درس سیستم‌های کنترل خطی

پاسخ تمرین سری سوم

| | |
|--------------------|--------------------|
| نام و نام خانوادگی | آنایس گل بوداغیانس |
| شماره دانشجویی | ۴۰۱۲۲۱۱۳ |
| تاریخ | آذرماه ۱۴۰۳ |



فهرست مطالب

| | |
|----|---------------------------------------|
| ۵ | ۱ سوال اول: پایداری سیستم |
| ۶ | ۲ سوال دوم: رسم مکان هندسی |
| ۸ | ۳ سوال سوم: مکان هندسی و فرکانس نوسان |
| ۱۲ | ۴ سوال چهارم: خطای ماندگار |
| ۱۲ | ۵ سوال پنجم: متلب و سیمولینک |



فهرست تصاویر

| | | |
|----|------------------------|----|
| ۶ | حل دستی | ۱ |
| ۷ | حل دستی | ۲ |
| ۸ | رسم متلب | ۳ |
| ۹ | حل دستی | ۴ |
| ۱۰ | حل دستی | ۵ |
| ۱۱ | رسم متلب | ۶ |
| ۱۳ | صفر و قطب های حلقه باز | ۷ |
| ۱۴ | پاسخ پله | ۸ |
| ۱۵ | مکان هندسی | ۹ |
| ۱۶ | پارامترهای سیستم | ۱۰ |
| ۱۷ | سیمولینک | ۱۱ |
| ۱۷ | خروجی سیمولینک | ۱۲ |
| ۱۸ | tuner PID | ۱۳ |
| ۱۹ | پارامترهای محاسبه شده | ۱۴ |



فهرست جداول

| | | |
|---|-----|---|
| ۱ | راث | ۵ |
|---|-----|---|



فهرست برنامه‌ها

۱۲ solution code MATLAB ۱



۱ سوال اول: پایداری سیستم

در این سوال سیستم حلقه بسته داده شده و با به دست آوردن معادله مشخصه وارد جدول راث می‌شویم. معادله مشخصه ساده شده به شکل زیر می‌باشد:

$$\Delta(s) = s^4 + (8 + b)s^3 + (20 + 8b)s^2 + (16 + 20b)s + 16b$$

اکنون جدول را رسم می‌کنیم:

جدول ۱: راث

| | | | |
|-------|------------|--|-------|
| $16b$ | $20 + 8b$ | 1 | s^4 |
| 0 | $16 + 20b$ | $8 + b$ | s^3 |
| 0 | $16b$ | $\frac{8b^2 + 64b + 144}{8 + b}$ | s^2 |
| 0 | 0 | $\frac{144b^3 + 1152b^2 + 2880b + 2304}{8b^2 + 64b + 144}$ | s^1 |
| 0 | 0 | $16b$ | s^0 |

معیار پایداری این است که تمام عناصر ستون اول (در اینجا از راست) و تمام ضرایب معادله مشخصه هم علامت باشد.

$$1 > 0$$

$$8 + b > 0 \rightarrow b > -8$$

$$20 + 8b > 0 \rightarrow b > -2.5$$

$$16b > 0 \rightarrow b > 0$$

در نهایت باتوجه به عناصر جدول، به دست می‌آوریم که مقدار b باید بزرگتر از صفر باشد. فقط درباره b می‌توانیم اظهار نظر کنیم.



۲ سوال دوم: رسم مکان هندسی

Date : / / Subject :

$$\theta = \frac{(1+2K)180^\circ}{n-m} = \frac{(1+2K)180^\circ}{3-1} = 90^\circ, 270^\circ, \dots \quad (۲)$$

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m} = \frac{-4+1}{3-1} = -1/2$$

$$z_1 = -1$$

$$s^3 + 4s^2 + \omega s = 0 \rightarrow s(s^2 + 4s + \omega) = 0$$

$$p_1 = 0 \quad p_{2,3} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - \omega}}{2} = -2 \pm j$$

$$\sum_{i=1}^3 p_i = 0 - 2 - j - 2 + j = -4$$

تعداد نقاط: ۳
نقطه شکست

$$G_{\text{closed-loop}}(s) = \frac{K G(s)}{1 + K G(s)} = \frac{K(s+1)}{s^3 + 4s^2 + (\omega + K)s + K}$$

$$\frac{dK}{ds} = \left(-\frac{1}{G(s)} \right) \frac{1}{ds} = \left(\frac{s^3 + 4s^2 + \omega s}{s+1} \right)' = \frac{(s^3 + 4s^2 + \omega s)'(s+1) - (s^3 + 4s^2 + \omega s)(s+1)'}{(s+1)^2}$$

$$= \frac{3s^2 + 8s + \omega - s^3 - 4s^2 - \omega s}{(s+1)^2} = \frac{-s^3 + 4s^2 + (8-\omega)s + \omega}{(s+1)^2} = 0$$

$$-s^3 + 4s^2 + (8-\omega)s + \omega = 0 \quad s = \begin{cases} -2.197 \\ -4.01 \pm 0.145i \end{cases}$$

نقطه شکست
تعداد: ۳
حل تلافی با محور موهومی

$$s^3 + 4s^2 + (\omega + K)s + K = \Delta(s)$$

شکل ۱: حل دستی



$$\begin{array}{lcl}
 s^3 & | & \omega + K \quad \frac{1.0 + 4K - K}{s} = 0 \\
 s^2 & | & K \quad 1.0 + 3K = 0 \rightarrow K = -\frac{1.0}{3} \\
 s^1 & | & \frac{1.0 + 4K}{s} \quad 4s^2 + (-\frac{1.0}{3}) = 0 \\
 s^0 & & s^2 = \frac{\omega}{3} \rightarrow s = \pm \sqrt{\frac{\omega}{3}}
 \end{array}$$

با محور موهومی تلافی ندارد.

$$\sum_{i=1}^m \theta_{z_i} - \sum_{j=1}^n \theta_{p_j} = (2K+1) \pi \quad K \geq 0$$

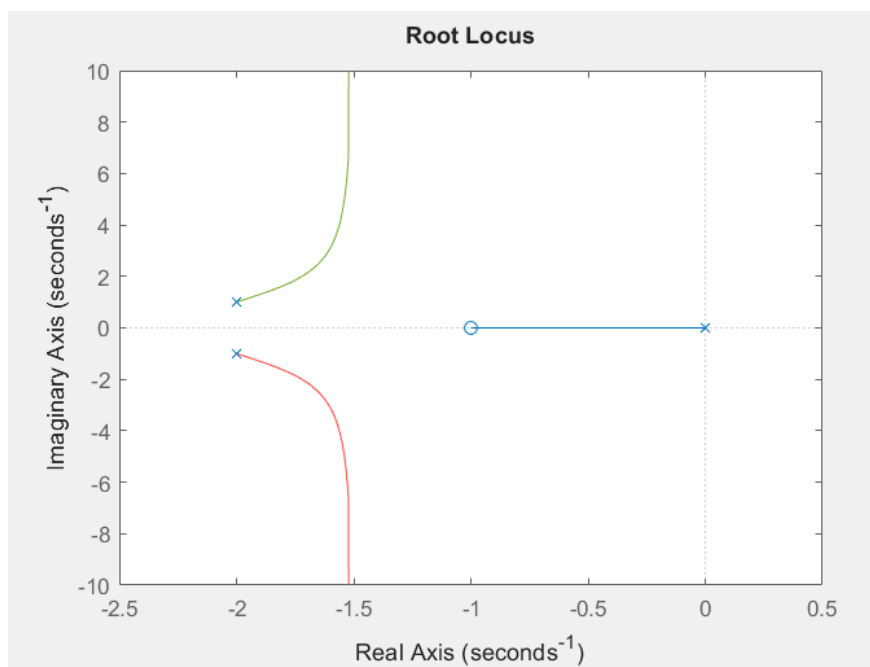
$$9^\circ - (\theta_p + 9^\circ + 9^\circ + \angle(\frac{1}{s})) = -18^\circ$$

$$-\theta_p - 9^\circ - \angle(\frac{1}{s}) = -18^\circ \rightarrow -\theta_p - 9^\circ - 24^\circ = -18^\circ$$

$$\theta_p = 44^\circ$$

شکل ۲: حل دستی

اکنون در محیط متلب با دستورهای tf و rlocus رسم می‌کنیم:



شکل ۳: رسم متلب

۳ سوال سوم: مکان هندسی و فرکانس نوسان



(۴) قطب‌های حلقه بسته برای $k=0$ همان قطب‌های حلقه باز هستند.

$$k=0 \quad \Delta(s) = q(s) + kp(s) = 0$$

$$q(s) = s(s+5)(s+6)(s^2+2s+2)$$

قطب‌های حلقه باز:

$$p_1 = 0 \quad p_2 = -5 \quad p_3 = -6 \quad p_{4,5} = -1 \pm j$$

قطب‌های حلقه بسته برای $k=\infty$ همان صفرهای حلقه باز هستند.

$$\Delta(s) = q(s) + kp(s) = 0 \Rightarrow \Delta(s) = p(s) = 0$$

صفرهای حلقه باز:

$$z_1 = -3$$

$$G(s) = \frac{K(s+3)}{s(s+5)(s+6)(s^2+2s+2)}$$

$$\frac{dG}{ds} = 0$$

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m} = \frac{-13 + 3}{5 - 1} = -2.5$$

زاویه مجانب‌ها

$$k > 0 \rightarrow \theta = \frac{(n+1)\pi}{\omega-1} = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

شکل ۴: حل دستی

مقدار بهره:

$$K = 35.51$$

با این مقدار، محور موهومی در نقاط زیر قطع می‌شود:

$$s = \pm 1.35j$$

اکنون در محیط متلب با دستورهای tf و rlocus رسم می‌کنیم:



Date: / /

Subject:

$$G(s) = \frac{K(s+3)}{s(s^2+11s+30)(s^2+2s+2)} = \frac{K(s+3)}{s^5+13s^4+15s^3+17s^2+6s}$$

$$\frac{dG}{ds} = \frac{K(s+13s^4+15s^3+17s^2+6s) - K(s+3)(5s^4+52s^3+45s^2+34s+6)}{(s^5+13s^4+15s^3+17s^2+6s)^2} = 0$$

$$s = \begin{cases} -5/15/17 \\ \dots \end{cases} \quad \text{نقطه شکست}$$

$$-180^\circ = \angle_g^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) - 135^\circ - \angle_g\left(\frac{1}{s}\right) - \angle_g\left(\frac{1}{s}\right) - (\theta_p + 90^\circ) \rightarrow$$

$$s^0 \quad 1 \quad 15 \quad 17 \quad 3K \quad \theta_p = -43.71^\circ$$

$$s^4 \quad 13 \quad 15 \quad 17 \quad 3K$$

$$s^3 \quad \frac{42}{13} \quad \frac{170+10K}{13}$$

$$s^2 \quad \frac{17 \times 42 - 170 - 10K}{13} \quad 3K$$

$$s^1$$

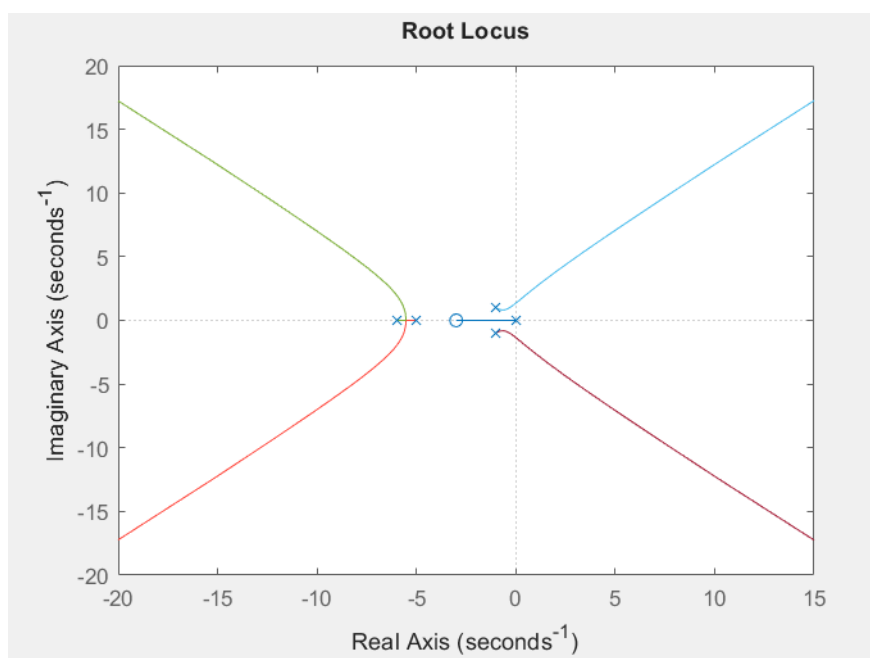
$$s^0$$

مقدار K را از معادله زیر پیدا می‌کنیم

$$\frac{17 \times 42 - 170 - 10K}{13} \times \frac{170+10K}{13} - \frac{3(42)K}{13} = 0$$

K را در سطر s جایگزین می‌کنیم تا محل قطع محور حزن و فرکانس در یکجا قرار بگیرد

شکل ۵: حل دستی



شکل ۶: رسم متلب



۴ سوال چهارم: خطای ماندگار

$$L(s) = \frac{k(s+1)}{s^2(s+5)(s+2)}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{K_a} = \frac{1}{s^2 L(s)} = 0.1$$

$$k = 100$$

۵ سوال پنجم: متلب و سیمولینک

```
1 close all; clear; clc
2 num = [5 10];
3 den = [1 4 5];
4 g = tf(num,den);
5 zs = roots(num);
6 ps = roots(den);
7 gl=g/(g+1);
8 figure
9 step(gl);
10 infos = stepinfo(gl);
11 figure
12 rlocus(g);
```

Code 1: MATLAB code solution



Command Window

```
>> zs
```

```
zs =
```

```
-2
```

```
>> ps
```

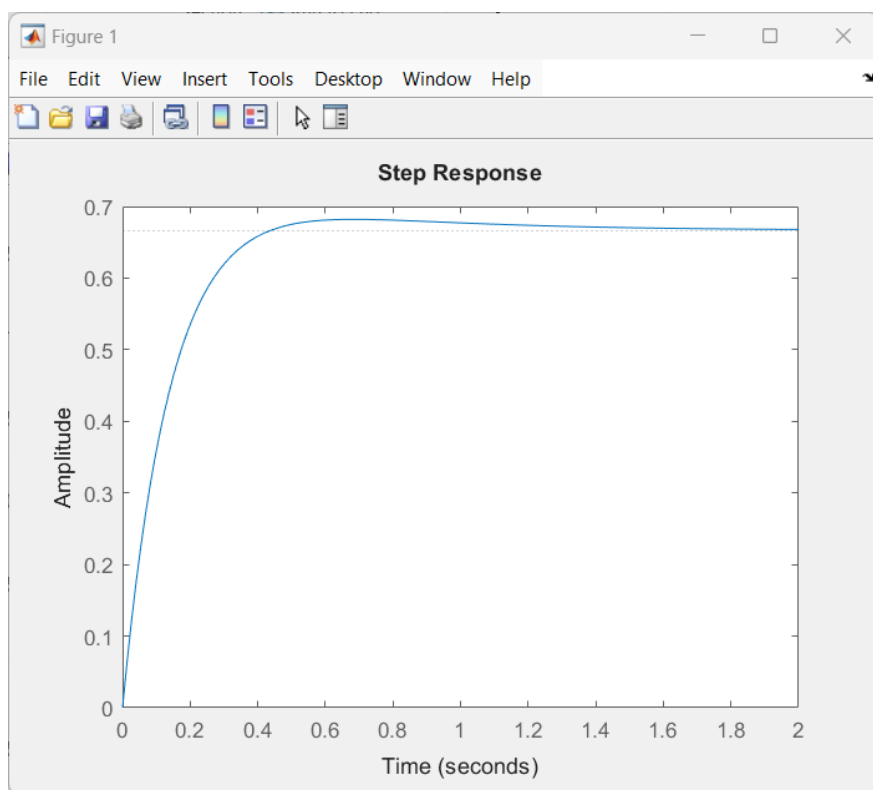
```
ps =
```

```
-2.0000 + 1.0000i
```

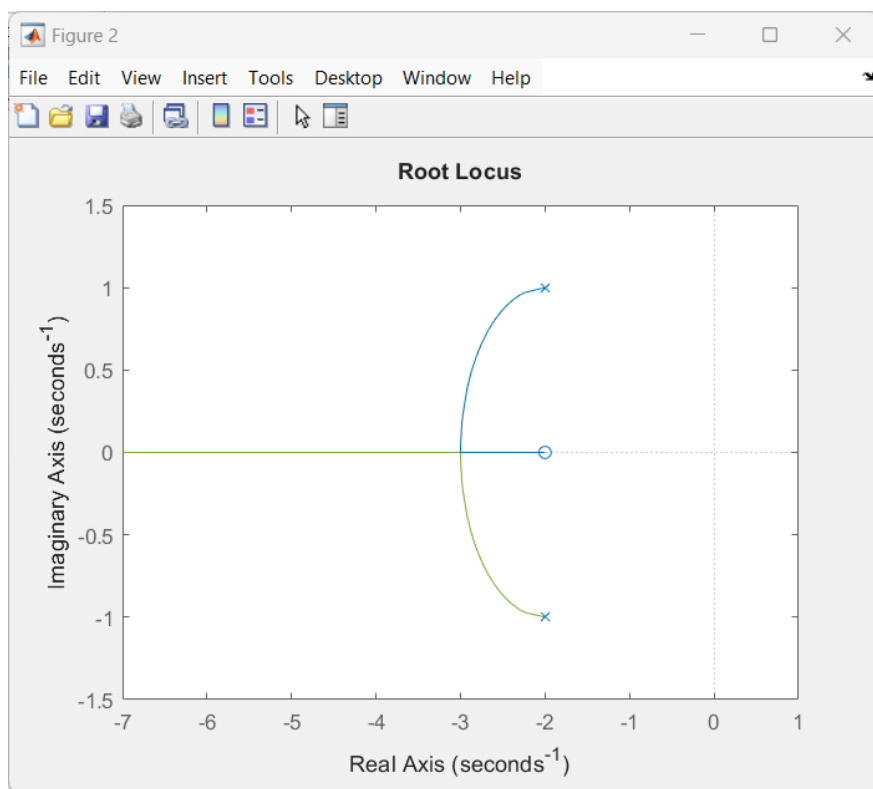
```
-2.0000 - 1.0000i
```

```
fx >>
```

شکل ۷: صفر و قطب‌های حلقه باز



شکل ۸: پاسخ پله



شکل ۹: مکان هندسی



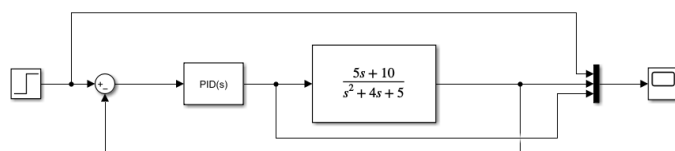
Variables - infos

infos

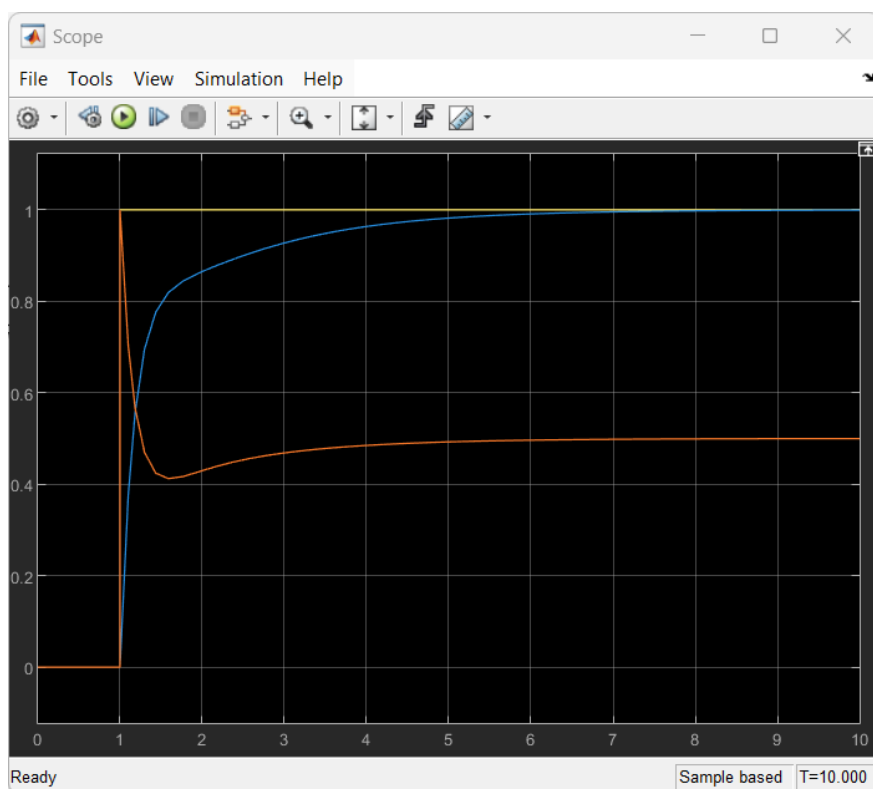
1x1 struct with 9 fields

| Field ▲ | Value |
|---------------|--------|
| RiseTime | 0.2555 |
| TransientTime | 0.8524 |
| SettlingTime | 0.8524 |
| SettlingMin | 0.6013 |
| SettlingMax | 0.6820 |
| Overshoot | 2.3040 |
| Undershoot | 0 |
| Peak | 0.6820 |
| PeakTime | 0.6781 |

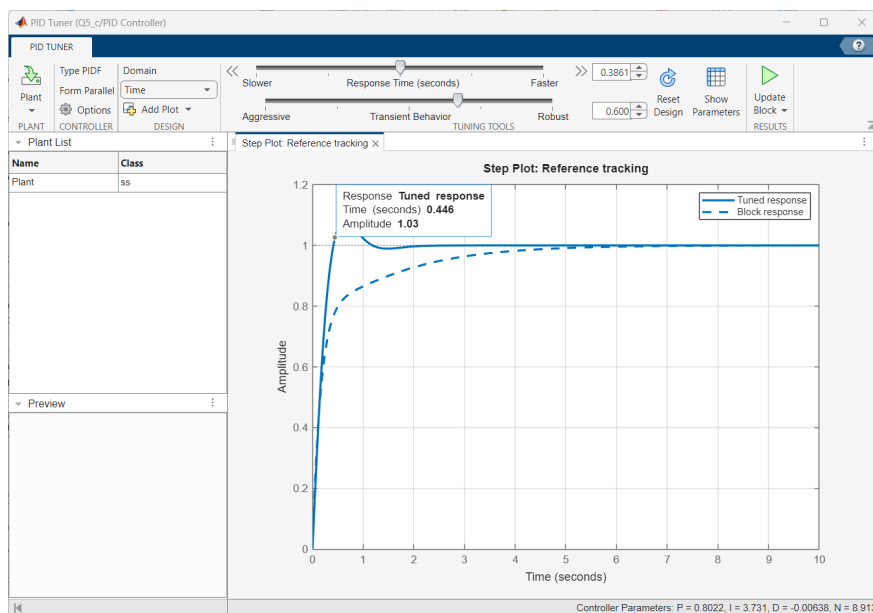
شکل ۱۰: پارامترهای سیستم



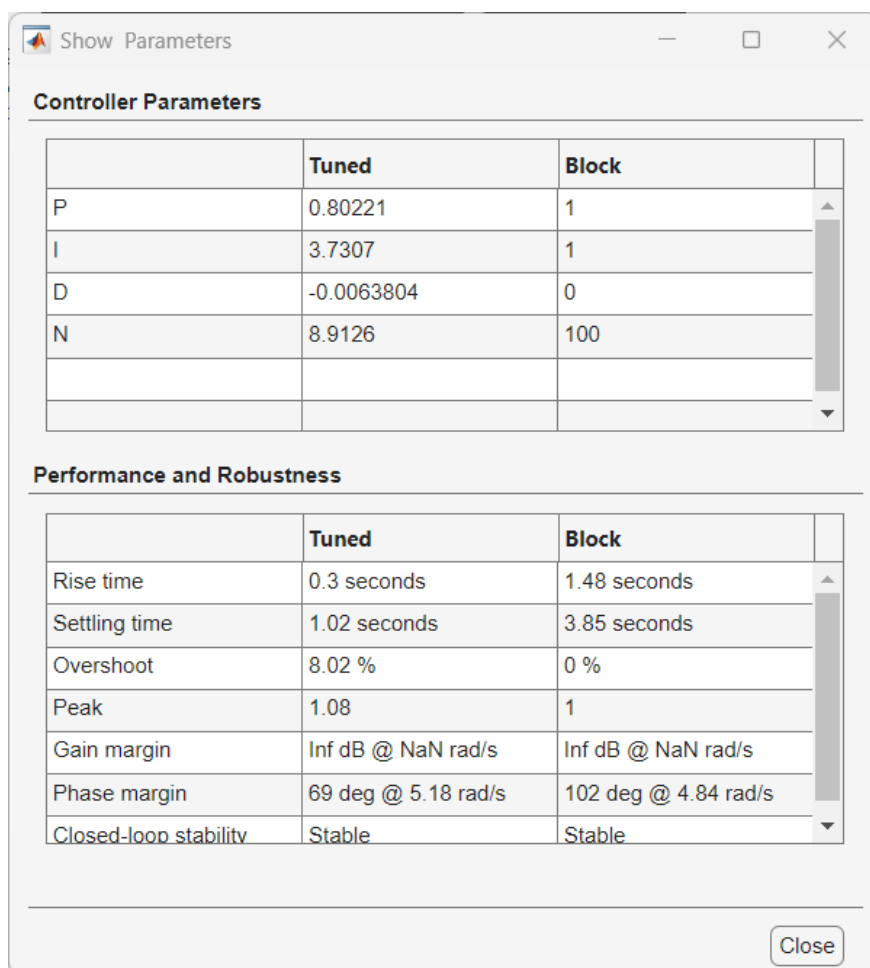
شکل ۱۱: سیمولینک



شکل ۱۲: خروجی سیمولینک



شکل ۱۳: PID tuner



شکل ۱۴: پارامترهای محاسبه شده