CAPÍTULO 1

# ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

## 1.1 Definiciones y notaciones

**Definición 1.1.** *Una ecuación en derivadas parciales (EDP) es una relación de la forma*

$$F\left(x, u, \partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u\right) = 0, \tag{1.1}$$

*en la que intervienen un conjunto de variables independientes* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *y una función* $u = u(x)$ *junto con sus derivadas parciales.*

En la anterior definición, $\partial^j u$ denota el conjunto de todas las derivadas parciales de $u$ con respecto a $x$ de orden $j$, esto es, $\frac{\partial^j u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_j}} = u_{i_1 i_2 \cdots i_j}$, con $i_j = 1, 2, \ldots, n$ y $j = 1, 2, \ldots, k$.

Por ejemplo, si $u$ es una función en las variables $x$ e $y$, $u = u(x, y)$, una EDP puede venir dada por la relación

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, u_{xxx}, \ldots) = 0$$

**Definición 1.2.** *Se llama orden de una EDP al orden más elevado de las derivadas parciales que intervienen en la EDP* (1.1).

Por ejemplo,

$$u_{xxy} + 3u_{xx} + x u_{yy} + u_x + u + c = 0$$

es de orden 3.

**Definición 1.3.** *Se dice que una EDP es lineal si es lineal respecto de la función $u$ y de todas sus derivadas parciales. En otro caso, se dice que es no lineal.*

A continuación, introducimos un caso particular muy importante de la EDP (1.1):

**Definición 1.4.** *Una EDP lineal de segundo orden en la función desconocida $u$ y en las variables independientes $(x, y)$, es una EDP de la forma*

$$a_1 u_{xx} + a_2 u_{xy} + a_3 u_{yy} + a_4 u_x + a_5 u_y + a_6 u = a_7,$$

*donde los coeficientes $a_i$ son funciones de $(x, y)$. Cuando $a_7(x, y) = 0$, la ecuación se llama homogénea; en cualquier otro caso es no homogénea. Además, si las funciones $a_i$ son todas constantes, se dice que es una EDP lineal de segundo orden con coeficientes constantes.*

**Ejemplo 1.1.**

1. *Una EDP lineal de primer orden: $u_x + 2u_y - u = 4x$.*
2. *Una EDP no lineal de primer orden: $u_x u_y + u_x - u_y = 0$.*
3. *EDPs lineales de segundo orden:*
   a) *$u_t - u_{xx} = 0$ (Ecuación del calor).*
   b) *$u_{tt} - u_{xx} = 0$ (Ecuación de ondas).*
   c) *$u_{xx} + u_{yy} = 0$ (Ecuación de Laplace).*
4. *Una EDP no lineal de tercer orden: $u_t + uu_x + u_{xxx} = u$.*

## 1.2 Clasificación de las EDPs lineales de orden 2

Consideremos

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G, \tag{1.2}$$

con $u$ y los coeficientes funciones de $(x, y)$. Suponemos que los coeficientes son funciones de clase $\mathscr{C}^2$ (dos veces continuamente diferenciables) y que A, B y C no se anulan simultáneamente en una región $W \subset \mathbb{R}^2$. El análisis de la ecuación lineal dada por (1.2) puede conseguirse mediante un cambio de variables adecuado que haga desaparecer algunos términos de (1.2). Esta forma más simple de la ecuación se denomina forma canónica. Realicemos el cambio de variables $u(x, y) = U(\xi, \tau)$ donde

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y), \\ \tau = \tau(x, y), \end{cases}$$

con $\xi$ y $\tau$ de $\mathscr{C}^2$ y con jacobiano no nulo en $W$.

Entonces:

$$\begin{aligned}
u_x &= U_\xi \xi_x + U_\tau \tau_x,\\
u_y &= U_\xi \xi_y + U_\tau \tau_y,\\
u_{xx} &= U_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2U_{\xi\tau}\xi_x\tau_x + U_{\tau\tau}\tau_x^2 + U_\xi \xi_{xx} + U_\tau \tau_{xx},\\
u_{yy} &= U_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2U_{\xi\tau}\xi_y\tau_y + U_{\tau\tau}\tau_y^2 + U_\xi \xi_{yy} + U_\tau \tau_{yy},\\
u_{xy} &= U_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + U_{\xi\tau}\left(\xi_x\tau_y + \xi_y\tau_x\right) + U_{\tau\tau}\tau_x\tau_y + U_\xi \xi_{xy} + U_\tau \tau_{xy}.
\end{aligned}$$

Con lo que (1.2) queda en función de las nuevas variables:

$$\begin{aligned}
&\left(A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2\right)U_{\xi\xi} + \left(2A\xi_x\tau_x + B\left(\xi_x\tau_y + \xi_y\tau_x\right) + 2C\xi_y\tau_y\right)U_{\xi\tau}\\
&\quad + \left(A\tau_x^2 + B\tau_x\tau_y + C\tau_y^2\right)U_{\tau\tau} + \left(A\xi_{xx} + B\xi_{xy} + C\xi_{yy} + D\xi_x + E\xi_y\right)U_\xi\\
&\quad + \left(A\tau_{xx} + B\tau_{xy} + C\tau_{yy} + D\tau_x + E\tau_y\right)U_\tau + FU = \widehat{G},
\end{aligned} \tag{1.3}$$

donde $\widehat{G}$ es la función $G$ expresada en las nuevas variables. La ecuación (1.3) toma la forma

$$A^* U_{\xi\xi} + B^* U_{\xi\tau} + C^* U_{\tau\tau} = G^*\left(\xi, \tau, U, U_\xi, U_\tau\right), \tag{1.4}$$

con

$$\begin{aligned}
A^* &= A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2,\\
B^* &= 2A\xi_x\tau_x + B\left(\xi_x\tau_y + \xi_y\tau_x\right) + 2C\xi_y\tau_y,\\
C^* &= A\tau_x^2 + B\tau_x\tau_y + C\tau_y^2,
\end{aligned} \tag{1.5}$$

y $G^*$ es una función que incluye a todas las derivadas hasta primer orden.

Observemos que $A^*$ y $C^*$ tienen la misma forma. Por consiguiente, trataremos de encontrar un cambio de variables de forma que $A^* = C^* = 0$. Esto es análogo a encontrar dos soluciones independientes de la EDP de primer orden (no lineal):

$$A\gamma_x^2 + B\gamma_x\gamma_y + C\gamma_y^2 = 0. \tag{1.6}$$

Si dividimos ecuación (1.6) por $\gamma_y^2$

$$A\left(\frac{\gamma_x}{\gamma_y}\right)^2 + B\frac{\gamma_x}{\gamma_y} + C = 0.$$

Si $\gamma(x,y)$ es solución de la ecuación (1.6), a la curva $\gamma(x,y) = c$, $c$ constante, se le denomina curva de nivel. A lo largo de la curva de nivel se tiene que

$$d\gamma = \gamma_x\,dx + \gamma_y\,dy = 0,$$

y con ello $\frac{dy}{dx} = -\frac{\gamma_x}{\gamma_y}$. Por lo tanto, ecuación (1.6) se transforma en

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - B\frac{dy}{dx} + C = 0. \tag{1.7}$$

Considerando $\frac{dy}{dx}$ como variable se tiene que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}. \tag{1.8}$$

Estas EDOs (1.7) son normalmente denominadas como ecuaciones características relativas a la EDP (1.2). El hecho de que existan dos curvas características para cada punto $(x, y)$ del plano dependerá del signo del discriminante, $B^2 - 4AC$, por lo que a partir de este momento es necesario distinguir los siguientes casos

**Definición 1.5.** *Si en todos los puntos $(x, y)$ de una región $W \subset \mathbb{R}^2$ se cumple que:*

- $B^2(x, y) - 4A(x, y)C(x, y) > 0$*, entonces la EDP (1.2) se dice hiperbólica.*
- $B^2(x, y) - 4A(x, y)C(x, y) = 0$*, entonces la EDP (1.2) se dice parabólica.*
- $B^2(x, y) - 4A(x, y)C(x, y) < 0$*, entonces la EDP (1.2) se dice elíptica.*

Por otra parte, es fácil verificar que $(B^*)^2 - 4A^*C^* = \left(B^2 - 4AC\right)J^2$, con $J = \xi_x\tau_y - \xi_y\tau_x$ (jacobiano del cambio). Por tanto, el signo de $B^2 - 4AC$ es invariante bajo cambios de coordenadas.

La razón de esta denominación: hiperbólica, parabólica o elíptica, se debe al hecho de que la cónica

$$A(x_0, y_0)x^2 + B(x_0, y_0)xy + C(x_0, y_0)y^2 = 1,$$

con $(x_0, y_0) \in W$, es una hipérbola, una parábola o una elipse según

$$B^2(x_0, y_0) - 4A(x_0, y_0)C(x_0, y_0) > 0, = 0, \text{ o bien, } < 0.$$

### 1.2.1 Caso hiperbólico

Si la EDP (1.2) es de tipo hiperbólico, se tienen dos soluciones $\gamma_1 = c_1$ y $\gamma_2 = c_2$ de (1.6) independientes, $c_1$ y $c_2$ constantes arbitrarias. Por consiguiente, pueden elegirse

$$\xi = \gamma_1(x, y), \quad \tau = \gamma_2(x, y),$$

para conseguir que $A^* = C^* = 0$ en (1.4). De esta forma, la ecuación (1.4) puede escribirse como

$$U_{\xi\tau} = G^{**}, \tag{1.9}$$

con $G^{**} = \dfrac{G^*}{B^*}$. La ecuación (1.9) se denota como primera forma canónica.

Por otro lado, si realizamos cambio de variables $U(\xi,\tau) = Z(\eta,\phi)$, donde

$$\eta = \xi + \tau, \quad \phi = \xi - \tau,$$

llegamos a la ecuación

$$Z_{\eta\eta} - Z_{\phi\phi} = H, \tag{1.10}$$

con $H = H\left(\eta,\phi,Z,Z_\eta,Z_\phi\right)$ la cual es lineal es $\left(Z,Z_\eta,Z_\phi\right)$. A (1.10) se le llama segunda forma canónica.

### 1.2.2 Caso parabólico

Supongamos ahora que la EDP (1.2) es de tipo parabólico. En este caso, solamente obtenemos una solución, $\gamma(x,y) = c$, de (1.6). Elegimos pues $\xi = \gamma(x,y)$ (de igual forma se hubiera podido elegir $\tau = \gamma(x,y)$). La cuestión es como elegir $\tau$. Para ello, basta con tomar $\tau = \tau(x,y)$ de manera que sea independiente de $\xi$, así pues intentamos tomar la forma más sencilla posible, por ejemplo $\tau(x,y) = x$ o bien $\tau(x,y) = y$. Por consiguiente, $A^* = 0$ y $C^* \neq 0$. No obstante, se tiene que $B^2 - 4AC = 0$ por lo que $B = \pm 2\sqrt{AC}$. Entonces

$$A^* = A\xi_x^2 \pm 2\sqrt{AC}\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = \left(\sqrt{A}\xi_x \pm \sqrt{C}\xi_y\right)^2,$$

y de aquí

$$B^* = 2A\xi_x\tau_x \pm 2\sqrt{AC}\left(\xi_x\tau_y + \xi_y\tau_x\right) + 2C\xi_y\tau_y = 2\left(\sqrt{A}\xi_x \pm \sqrt{C}\xi_y\right)\left(\sqrt{A}\tau_x \pm \sqrt{C}\tau_y\right),$$

por lo que $B^* = 0$ para cualquier elección de $\tau$. Por lo tanto, la ecuación (1.4) toma la forma

$$U_{\tau\tau} = G_1^{**}, \tag{1.11}$$

con $G_1^{**} = \dfrac{G^*}{C^*}$. De igual forma, si tomamos $\tau = \gamma(x,y)$ obtenemos

$$U_{\xi\xi} = G_2^{**}, \tag{1.12}$$

con $G_2^{**} = \dfrac{G^*}{A^*}$. Las ecuaciones (1.11) y (1.12) se conocen como formas canónicas de la ecuación parabólica.

### 1.2.3 Caso elíptico

Por último, supongamos que la EDP (1.2) es de tipo elíptico, por lo que (1.6) admite dos soluciones complejas

$$\gamma_1(x,y) = \eta(x,y) + \phi(x,y)i = c_1,$$
$$\gamma_2(x,y) = \eta(x,y) - \phi(x,y)i = c_2,$$

con $c_1$ y $c_2$ constantes arbitrarias. De esta forma, tomamos

$$\xi = \gamma_1(x,y), \quad \tau = \gamma_2(x,y),$$

independientes y con ello $A^* = C^* = 0$. Para evitar trabajar con soluciones complejas tomamos

$$\eta = \frac{\xi + \tau}{2}, \quad \phi = \frac{\xi - \tau}{2i}, \tag{1.13}$$

las cuales son también independientes. De manera análoga al caso hiperbólico, realizamos cambio de variables $U(\xi,\tau) = Z(\eta,\phi)$ con $\eta$ y $\phi$ dadas por (1.13).

En términos de las coordenadas (1.13) se tiene que

$$\begin{aligned} U_{\xi\xi} &= \frac{1}{4}\left(Z_{\eta\eta} + \frac{2}{i}Z_{\eta\phi} - Z_{\phi\phi}\right), \\ U_{\xi\tau} &= \frac{1}{4}\left(Z_{\eta\eta} + Z_{\phi\phi}\right), \\ U_{\tau\tau} &= \frac{1}{4}\left(Z_{\eta\eta} - \frac{2}{i}Z_{\eta\phi} - Z_{\phi\phi}\right). \end{aligned}$$

Además, las funciones (1.5) toman la forma

$$\begin{aligned} A^* &= A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2 - \left(A\phi_x^2 + B\phi_x\phi_y + C\phi_y^2\right) \\ &\quad + i\left(2A\eta_x\phi_x + B(\eta_x\phi_y + \eta_y\phi_x) + 2C\eta_y\phi_y\right), \\ B^* &= 2\left(A(\eta_x^2 + \phi_x^2) + B(\eta_x\eta_y + \phi_x\phi_y) + C(\eta_y^2 + \phi_y^2)\right), \\ C^* &= A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2 - \left(A\phi_x^2 + B\phi_x\phi_y + C\phi_y^2\right) \\ &\quad - i\left(2A\eta_x\phi_x + B(\eta_x\phi_y + \eta_y\phi_x) + 2C\eta_y\phi_y\right). \end{aligned} \tag{1.14}$$

Por lo tanto, la ecuación (1.4) se transforma en

$$A^{**}Z_{\eta\eta} + B^{**}Z_{\eta\phi} + C^{**}Z_{\phi\phi} = H\left(\eta,\phi,Z,Z_\eta,Z_\phi\right), \tag{1.15}$$

donde

$$\begin{aligned} A^{**} &= A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2, \\ B^{**} &= 2A\eta_x\phi_x + B(\eta_x\phi_y + \eta_y\phi_x) + 2C\eta_y\phi_y, \\ C^{**} &= A\phi_x^2 + B\phi_x\phi_y + C\phi_y^2, \end{aligned} \tag{1.16}$$

Por otro lado, las ecuaciones $A^* = 0$ y $C^* = 0$ en términos de las nuevas funciones (1.16) quedan de la forma

$$\begin{aligned} A^{**} - C^{**} + B^{**} i &= 0, \\ A^{**} - C^{**} - B^{**} i &= 0. \end{aligned} \tag{1.17}$$

De (1.17) se tiene que $A^{**} = C^{**}$ y $B^{**} = 0$. Por consiguiente, la ecuación (1.15) se convierte en

$$Z_{\eta\eta} + Z_{\phi\phi} = H\left(\eta, \phi, Z, Z_\eta, Z_\phi\right). \tag{1.18}$$

Esta ecuación (1.18) se conoce como forma canónica de la ecuación elíptica.