

UNIVERSIDAD DE CÁDIZ

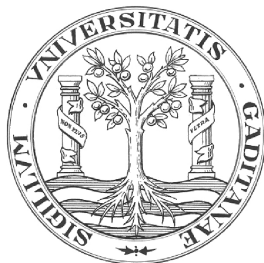
FACULTAD DE CIENCIAS

GRADO EN MATEMÁTICAS

MÉTODOS DE VOLÚMENES FINITOS PARA ECUACIONES HIPERBÓLICAS

Gloria Almozara Sainz

Tutor: Dr. D. José Rafael Rodríguez Galván



UNIVERSIDAD DE CÁDIZ

FACULTAD DE CIENCIAS

GRADO EN MATEMÁTICAS

MÉTODOS DE VOLÚMENES FINITOS PARA ECUACIONES HIPERBÓLICAS

Trabajo de fin de grado presentado por

Gloria Almozara Sainz

Tutor: Dr. D. José Rafael Rodríguez Galván

Firma de la alumna

Firma del tutor



J. Rafael Rodríguez Galván.

Puerto Real, Cádiz, 24 de junio de 2020

Abstract

This project is focused on studying finite volume methods for finding numerical solutions of hyperbolic problems. We introduce some partial differential equations called conservation laws. These equations describe a wide range of wave propagation and transport phenomena arising in nearly every scientific discipline. Afterwards, we study finite volume methods, focusing on one step methods for the transport equation, and besides, the convergence of these methods is analyzed. Finally, we conclude with several numerical tests in order to validate the theoretical results obtained. Also we introduce a new model for cell migration in the brain.

A mi familia.

Resumen

Este trabajo se centra en el estudio de los métodos de volúmenes finitos para la resolución numérica de problemas hiperbólicos. Se introducen las ecuaciones en derivadas parciales para las leyes de conservación, en el caso de problemas unidimensionales y lineales. Estas ecuaciones describen una amplia gama de fenómenos de propagación de ondas y transporte, presentes en gran parte de las disciplinas científicas. Posteriormente, se estudia el método de volúmenes finitos centrándonos en los métodos de un paso para la ecuación de transporte, y se analiza la convergencia de estos métodos. Por último, se concluye con una serie de simulaciones numéricas. Las primeras se realizan con el objetivo de validar experimentalmente los resultados teóricos y por último, se introduce un nuevo modelo para el fenómeno de migración celular en el cerebro.

Agradecimientos

Quisiera expresar mi agradecimiento a todas las personas que me han ayudado en la realización de este trabajo.

En primer lugar, a mi tutor José Rafael Rodríguez Galván, por haber confiado en mí desde el principio, siempre le estaré eternamente agradecida. Su esfuerzo y su dedicación, siempre con la misma ilusión, me ha ayudado a obtener la versión definitiva de este trabajo, pero sobre todo, me ha enseñado a disfrutar de este camino.

Me gustaría agradecer el apoyo incondicional de mis padres, entendiendo mis malos momentos y siempre con vuestro sabio y justo consejo. Mi agradecimiento nunca será suficiente y sin olvidar a mi hermana, pequeña, pero aún así aportándome siempre la motivación que me pudiera faltar. También me gustaría mostrar todo mi agradecimiento a mi novio, Diego, por la confianza, por los consejos y por todos los ánimos dados por el camino, eso siempre ayuda.

Asimismo, todos mis compañeros que han experimentado conmigo estos cuatro años, para mí, son amigos. Con ellos hasta los momentos duros no fueron tan amargos y todos los recuerdos se han convertido en memoria.

Por último, mención especial a una compañera y gran amiga, Alba María Navarro Izquierdo, siempre dispuesta a solventar cualquier duda y lo más importante, a plantear nuevas con proyectos de mejora.

Por no hacer de cada uno de estos cuatro años, una obligación, sino una oportunidad de aprender. A todos, gracias.

Gloria Almozara Sainz

24 de junio de 2020

Índice

1	Introducción	1
2	Fundamentos básicos	5
2.1	Ley de conservación	5
2.2	Sistemas lineales de leyes de conservación hiperbólicas	6
2.3	Problema de Cauchy	7
2.4	Problema de Riemann	10
2.5	Velocidad de propagación en algunos problemas evolutivos	14
2.5.1	Problemas parabólicos	14
2.5.2	Problemas hiperbólicos	15
3	Método de Volúmenes Finitos	19
3.1	Método de Volúmenes Finitos	19
3.2	Métodos descentrados	23
3.3	Método de Godunov	25
3.3.1	Primera versión	26
3.3.2	Segunda versión	27
4	Convergencia, precisión y estabilidad	29
4.1	Convergencia	29

Índice

4.2	Error de truncamiento local y consistencia	32
4.3	Estabilidad	33
4.3.1	Condición CFL	36
4.3.2	Análisis de la estabilidad de Von Neumann	37
5	Simulaciones numéricas	43
5.1	Condiciones de contorno	43
5.2	Lenguaje de programación Julia	44
5.3	Test numéricos	45
5.3.1	Primeros test	46
5.3.2	Migración celular en el cerebro	50
6	Conclusiones y proyectos futuros	55
A	Códigos empleados	59
A.1	Test numéricos	59
A.1.1	Método descentrado con flujo aguas arriba	59
A.1.2	Método descentrado con flujo aguas abajo	61
A.1.3	Método de Lax-Friedrichs	62
A.1.4	Método de Lax-Wendroff	63
A.2	Migración celular en el cerebro	64
A.2.1	Migración de las células gliales	64
A.2.2	Migración de los neuroblastos	65
	Bibliografía	67

Introducción

El Análisis Numérico es una disciplina que contempla el desarrollo y evolución de métodos para calcular, a partir de ciertos datos numéricos, los resultados requeridos. En definitiva, es una herramienta fundamental en el campo de las ciencias que trata de diseñar métodos que aproximen, de forma eficiente, las soluciones de problemas prácticos previamente formulados matemáticamente. Sin embargo, no siempre es fácil reproducir un problema matemático que conlleve un buen planteamiento de los modelos. Muchas de las ideas básicas en que se apoyan las técnicas numéricas actuales se conocen desde hace tiempo y ha sido la capacidad de cálculo aportada por los ordenadores las que les ha dado mayor vigencia e importancia.

Las Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP) se usan habitualmente para la modelización de fenómenos de evolución en los que se describe la dinámica de determinada magnitud a lo largo del tiempo. Las EDP, según qué fenómeno modelen, se pueden clasificar a partir de distintas características matemáticas. Dos de las grandes distinciones se producen entre las EDP parabólicas e hiperbólicas donde la información se propaga a velocidad infinita y finita, respectivamente (ver sección 2.5).

En general es muy difícil o imposible obtener las soluciones exactas de las EDP entonces tenemos que recurrir a técnicas basadas en los métodos numéricos para hallar una aproximación de las mismas. Son numerosas las posibilidades que encontramos para abarcar el

1. Introducción

problema pero los más utilizados son: el método de elementos finitos, el método de las diferencias finitas y el método de volúmenes finitos. Este último es el estudiado en este trabajo, en concreto, para problemas hiperbólicos. Muchos conceptos con respecto al método de volúmenes finitos pueden entenderse más fácilmente modelando sistemas hiperbólicos lineales. Así, se pueden abarcar muchos problemas de propagación de ondas en los cuales estos métodos tienen un gran potencial.

Los Métodos de Volúmenes Finitos (MVF) son técnicas de Análisis Numérico que provienen inicialmente de la forma integral de una ley de conservación sobre distintos volúmenes o celdas del dominio espacial discretizado. Puede encontrarse una introducción básica a las leyes de conservación en [11, 13, 16]. Estas ecuaciones expresan el hecho de que cierta cantidad se equilibra a lo largo de un proceso. Históricamente, según Charles Hirsch en [8], el MVF fue introducido en el ámbito del cálculo numérico de la mecánica de fluidos por P. McDonald en 1971 y en 1972, R. Mac-Cormack y A. Paullay lo introdujeron para las ecuaciones de Euler bidimensionales. Posteriormente, en 1973, fue introducida a casos tridimensionales por A. Rizzi y M. Inouye.

La comparación entre los métodos de diferencias finitas y los MVF está presente en algunos trabajos (por ejemplo, ver [9]). En el caso de una dimensión espacial, el MVF puede verse como una aproximación en diferencias finitas derivada directamente de la ley de conservación en su forma diferencial. Pero en lugar de realizar aproximaciones en los puntos de la malla como se hace para el método de diferencias finitas, para el MVF se divide el dominio en celdas y se aproxima el promedio de la integral de la variable conservativa sobre cada celda de la malla.

El estudio de las soluciones de las EDP despierta un mayor interés cuando se emplea para modelizar matemáticamente fenómenos reales y esta fue una motivación desde el principio de este trabajo. Presentamos el suceso de la neurogénesis adulta, proceso que involucra la generación de nuevas neuronas y su migración hacia otras zonas del cerebro. Hasta el siglo pasado se sostenía que este fenómeno no ocurría en etapas de la vida adulta. Sin embargo, en la década de los sesenta, el biólogo estadounidense Joseph Altman demostró la existencia de neurogénesis en algunas áreas del cerebro postnatal y adulto de la rata, específicamente en el bulbo olfatorio (ver [2]). Antes de generarse nuevas neuronas en el bulbo olfatorio, se produce una migración celular hacia el mismo, es decir, movimientos celulares sincronizados en una dirección particular debido a un estímulo percibido; este

proceso se denomina quimiotaxis. Ejemplos del fenómeno quimiotaxis son muy variados y cada vez más con el avance de la ciencia, pero uno de los propósitos de este trabajo será modelar el movimiento producido por la migración celular desde la zona subventricular del cerebro hacia el bulbo olfatorio. Consecuentemente, se producirá la neurogénesis adulta y las neuronas se harán maduras para desempeñar su función. Este problema de migración celular se modela expresamente para esta memoria y, hasta donde conocemos, no ha sido publicado hasta el momento.

En este trabajo, se pretende conseguir el análisis y la posterior resolución numérica de los MVF para problemas hiperbólicos. En concreto, aproximamos soluciones de ecuaciones lineales de leyes de conservación hiperbólicas y a su vez consolidamos numerosos conceptos que conciernen al MVF. En particular estudiamos la teoría necesaria para analizar el error cuando se aproxima a la solución exacta para distintos esquemas numéricos considerados.

Para entender los MVF para problemas hiperbólicos es necesario el desarrollo de una parte teórica que comprende conceptos de la teoría de este tipo de EDP que se estudiarán en el Capítulo 2. Comenzaremos definiendo una ley de conservación en su forma diferencial e integral y un sistema de leyes de conservación pero de tipo hiperbólico. Se verá que este sistema se podrá descomponer en leyes de conservación independientes. Estas ecuaciones se completarán con unas condiciones iniciales dando lugar al problema de Cauchy y como caso particular, al problema de Riemann. Así, se realiza un estudio de las soluciones de ambos problemas. Luego, se demostrará que para la ecuación del calor, problema parabólico, la información se propaga a velocidad infinita, y para la ecuación de ondas, problema hiperbólico, la información se propaga a velocidad finita.

Posteriormente, en el Capítulo 3 estudiaremos el MVF para resolver numéricamente leyes de conservación, materia central de estudio en este trabajo. Se verá como el punto de partida es la forma integral de las leyes de conservación y entonces, se deducirá la forma general de un esquema de volúmenes finitos, métodos numéricos de un paso. Luego, nos centraremos en el estudio de los métodos descentrados basado en el comportamiento de las soluciones del problema de Cauchy a lo largo de las curvas características, y en el estudio de los métodos de Godunov basado en la solución del problema de Riemann.

Seguiremos estudiando en el Capítulo 4 la precisión y las propiedades de convergencia del MVF. En relación a ello introduciremos conceptos previos y estudiaremos para distintos esquemas numéricos con qué grado de precisión se aproxima cada respectiva solución

1. Introducción

numérica a la solución exacta, siempre para la ecuación de transporte. Estos esquemas numéricos considerados son el método descentrado, con flujos aguas arriba y aguas abajo, el método de Lax-Friedrichs y el método de Lax-Wendroff.

En el Capítulo 5 introduciremos brevemente las condiciones de contorno del MFV que vamos a implementar. Luego, se realiza una introducción al reciente lenguaje de programación Julia en el cual se han programado los esquemas numéricos contenidos en esta memoria. Tanto los estudiados en el capítulo anterior, como la simulación numérica que modela el transporte de las células desde la zona subventricular del cerebro hasta el bulbo olfatorio.

Por último, en el Capítulo 6 planteamos las conclusiones y proyectos futuros de este trabajo que han surgido en la realización del mismo.

Fundamentos básicos

En este capítulo se introducen los sistemas de leyes de conservación hiperbólicas lineales, focalizando el caso unidimensional aunque los resultados se pueden extender a dimensiones mayores. Se definen ciertos tipos de soluciones que pueden aparecer en estas leyes de conservación, conocimiento que será usado para determinar las soluciones aproximadas de la resolución numérica. Como problema modelo, los conceptos se ilustran sobre la ecuación de transporte escalar. Finalmente, se estudiará la velocidad de propagación en algunos problemas de evolución.

2.1 Ley de conservación

En esta sección, nos centramos en el caso de un dominio espacial unidimensional. Las ecuaciones correspondientes se denominan leyes de conservación escalares unidimensionales y se definen como sigue.

Definición 2.1. Sea Ω un subconjunto de \mathbb{R} y sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función regular de clase $C^1(\Omega)$. La forma general de una **ley de conservación unidimensional** es

$$u_t(x, t) + f(u(x, t))_x = 0, \quad (2.1)$$

2. Fundamentos básicos

donde u es una función

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R} \times [0, +\infty) &\longrightarrow \Omega \\ (x, t) &\longmapsto u(x, t), \end{aligned}$$

que se denomina **variable conservativa**. Al conjunto Ω se le denomina **conjunto de los estados** y a la función f , **función flujo**.

Observación 2.1. La ecuación (2.1) se corresponde con la forma diferencial de la ley de conservación. La forma integral de la ley de conservación viene dada por la ecuación.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_a^b u(x, t) dx = F(a, t) - F(b, t). \quad (2.2)$$

Se puede ver que ambas son equivalentes, para más detalle consultar [12]. La ecuación (2.2) refleja la base de la conservación, la variación de unas magnitudes en una región se debe solo a los flujos a través de los puntos extremos.

2.2 Sistemas lineales de leyes de conservación hiperbólicas

En esta sección, se estudia la estructura característica de los sistemas lineales de leyes de conservación hiperbólicas de dimensión $n \times n$ y se verá cómo se descompone en n leyes de conservación dadas por la ecuación (2.1). De ahora en adelante, denotaremos $\mathbf{u} = u(x, t)$.

Definición 2.2. Un sistema lineal de la forma

$$\mathbf{u}_t + A\mathbf{u}_x = 0, \quad (2.3)$$

se denomina **sistema de leyes de conservación hiperbólicas** si A es una matriz de orden $n \times n$ diagonalizable con autovalores reales.

En concreto, supongamos que la matriz A tiene n autovalores reales

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

Al ser diagonalizable existen n autovectores no nulos $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ linealmente independientes asociados a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, se sabe que la matriz de paso $P = [v_1|v_2|\dots|v_n]$ es invertible y se verifica la relación

$$A = PDP^{-1},$$

donde

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \equiv \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

Multiplicando por P^{-1} el sistema (2.3), tenemos

$$P^{-1}\mathbf{u}_t + P^{-1}A\mathbf{u}_x = 0,$$

y teniendo en cuenta que $A = PDP^{-1}$ se tiene

$$P^{-1}\mathbf{u}_t + DP^{-1}\mathbf{u}_x = 0. \quad (2.4)$$

Si definimos $\mathbf{w}(x, t) \equiv P^{-1}\mathbf{u}(x, t)$ y sustituimos en la ecuación (2.4) obtenemos

$$\mathbf{w}_t + D\mathbf{w}_x = 0. \quad (2.5)$$

Dado que D es una matriz diagonal, el sistema (2.5) se descompone en n ecuaciones independientes, en concreto, n leyes de conservación unidimensionales dadas por

$$w_t^p + \lambda_p w_x^p = 0, \quad p = 1, 2, \dots, n. \quad (2.6)$$

En el siguiente apartado, veremos que estas n ecuaciones junto con condiciones iniciales dadas, dan solución al sistema original (2.3). De forma que calcular la solución de este sistema se reduce a conocer la solución de la ley de conservación.

Observación 2.2. *Se dice que el sistema original (2.3) es estrictamente hipérbolico si los n autovalores reales de la matriz A son todos distintos. En particular, si el sistema (2.3) es estrictamente hiperbólico implica que dicho sistema sea hiperbólico.*

2.3 Problema de Cauchy

Para que la ecuación (2.1) o cada una de las ecuaciones (2.6) estén bien planteadas (en concreto, para garantizar la existencia y unicidad de solución), deben ser completadas con unas condiciones iniciales y, en dominios finitos, con condiciones de contorno. El problema más sencillo es el problema de valores iniciales o de Cauchy en el que se especifican solamente las condiciones iniciales.

2. Fundamentos básicos

Problema 2.1. El problema de Cauchy consiste en encontrar una función

$$u : \mathbb{R} \times [0, +\infty) \longrightarrow \Omega$$

que sea solución de la ecuación (2.1) y que verifique la condición inicial

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.7)$$

donde $u_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \Omega$ es una función dada.

Entonces, introducimos la solución al problema de Cauchy.

Definición 2.3. Una función $u : \mathbb{R} \times [0, +\infty) \rightarrow \Omega$ es una **solución clásica** del problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t(x, t) + f(u(x, t))_x = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2.8)$$

si u es una función de clase C^1 que verifica el problema (2.8) puntualmente.

Definición 2.4. Sea $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ una solución clásica. Definimos las **curvas características** en $\mathbb{R} \times [0, T]$ como las curvas $t \mapsto (X(t), t)$ dadas por la ecuación diferencial

$$\frac{dX(t)}{dt} = f'(u(X(t), t)). \quad (2.9)$$

Una de las particularidades de estas curvas características es que la solución u , denominada variable característica, es constante a lo largo de ellas ya que se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(X(t), t) &= u_x(X(t), t) \cdot X'(t) + u_t(X(t), t) \\ &= u_x(X(t), t) \cdot f'(u(X(t), t)) + u_t(X(t), t) \\ &= f_x(u(X(t), t)) + u_t(X(t), t) = 0, \end{aligned}$$

por ser u solución de (2.1).

En el caso lineal, la función flujo de la ley de conservación viene dada por $f(u) = cu$, con $c \in \mathbb{R}$. Por tanto, tenemos que $f'(u) = c$ y de la ecuación (2.9) se deduce que las curvas características son rectas dadas por $X(t) = x_0 + ct$. Como la solución u es constante a lo largo de estas rectas, la solución en el punto (x, t) es igual a la solución en el punto $(x_0, 0)$. De forma que $(x, t) = (X(t), t) = (x_0 + ct, t)$, de donde $x_0 = x - ct$. Entonces, se obtiene

$$u(x, t) = u(x_0, 0) = u(x - ct, 0) = u_0(x - ct), \quad (2.10)$$

que es la única solución del problema (2.8). Luego, para todos los valores iniciales existe una única solución que tiene la misma regularidad. A continuación, vemos un ejemplo de este tipo de problemas.

Ejemplo 2.1. Consideremos la siguiente ecuación en derivadas parciales

$$u_t + \lambda u_x = 0,$$

donde x es la coordenada espacial y t representa el tiempo. Esta es la llamada **ecuación de transporte** o de advección en una dimensión. Asumimos que la velocidad de propagación es positiva, $\lambda > 0$. Como condición inicial, tomamos $u(x, 0) = u_0(x)$ para $x \in \mathbb{R}$. Generalmente, se suele elegir para la condición inicial el instante inicial, $t = 0$.

La solución al problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t(x, t) + \lambda u_x(x, t) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

viene dada por la expresión (2.10), es decir, $u(x, t) = u_0(x - \lambda t)$. Entonces, la solución u simplemente se transporta con velocidad constante λ con la evolución del tiempo, como se muestra en la figura 2.1. En este caso, se transporta hacia la derecha, puesto que anteriormente asumimos que $\lambda > 0$. En particular, definimos $\lambda = 1$ y la condición inicial dada por $u_0(x) = e^{-50(x-0.3)^2}$.

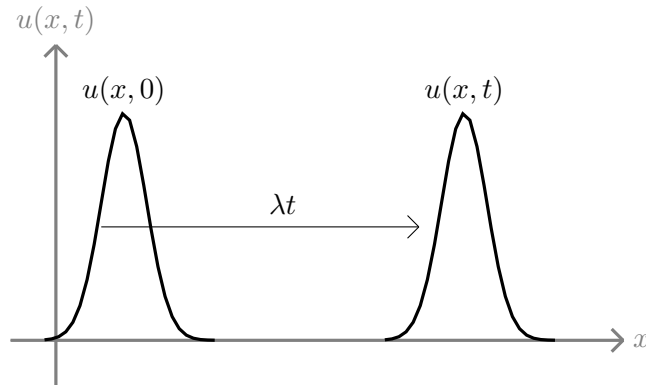


Figura 2.1: Evolución de la solución de la ecuación de transporte con el tiempo.

Observación 2.3. La expresión (2.10) es la solución al problema de valores iniciales unidimensional (2.8), con la condición inicial dada. Extendiéndonos a una dimensión mayor, tenemos un sistema hipérbolico de leyes de conservación unidimensionales de dimensión $n \times n$ con condición inicial $\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x)$ dada. Según la notación utilizada en el apartado 2.2, tenemos que $\mathbf{w}_0(x) \equiv P^{-1}\mathbf{u}_0(x)$, luego, la solución del sistema viene dada

2. Fundamentos básicos

por

$$\mathbf{u}(x, t) = P\mathbf{w}(x, t), \quad (2.11)$$

donde cada componente del vector $\mathbf{w}(x, t)$ son las respectivas soluciones de las p -ésimas ecuaciones de leyes de conservación unidimensionales, $w_t^p + \lambda^p w_x^p = 0$, para $p = 1, \dots, n$. Además, como $P = [v_1 | v_2 | \dots | v_n]$, la expresión (2.11) se puede escribir como

$$\mathbf{u}(x, t) = \sum_{p=1}^n w^p(x, t) v_p. \quad (2.12)$$

Es decir, la solución de un sistema lineal de leyes de conservación hiperbólicas se puede escribir como combinación lineal de los autovectores asociados a la matriz que define al sistema, donde los coeficientes coinciden con los escalares $w^p(x, t)$, es decir, con las respectivas soluciones de las leyes de conservación unidimensionales para $p = 1, \dots, n$.

2.4 Problema de Riemann

El problema de Cauchy correspondiente a una ley de conservación con unas condiciones iniciales dadas por una función constante a trozos con una discontinuidad se conoce como problema de Riemann. Para consultar más detalles acerca de este problema se recomienda ver [7, 12].

Problema 2.2. El problema de Riemann consiste en encontrar una función

$$u : \mathbb{R} \times [0, +\infty) \longrightarrow \Omega$$

solución de la ecuación (2.1) que verifica la condición inicial

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & \text{si } x < x_0, \\ u_r & \text{si } x > x_0, \end{cases} \quad (2.13)$$

donde $u_l, u_r \in \mathbb{R}$ vienen dados. A este problema se le denota por $PR(u_l, u_r)$ centrado en x_0 .

Para una ecuación unidimensional, $u_t + cu_x = 0$, la solución al problema de Riemann centrado en el x_0 y con datos iniciales (u_l, u_r) viene dada por $u(x, t) = u_0(x - ct)$, es decir,

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l & \text{si } x - ct < x_0, \\ u_r & \text{si } x - ct > x_0. \end{cases} \quad (2.14)$$

A continuación, consideremos el sistema lineal de leyes de conservación hipérbolica (2.3), de dimensión $n \times n$. Asumimos que el sistema es estrictamente hipérbolico, esto es, los autovalores de la matriz A son reales y distintos. Cada p -ésima ecuación (2.6) del sistema tiene la condición inicial (2.13) dada por

$$w_0^p(x) = \begin{cases} w_l^p & \text{si } x < x_0, \\ w_r^p & \text{si } x > x_0, \end{cases} \quad (2.15)$$

donde $w_l^p, w_r^p \in \mathbb{R}$ son constantes. Esta discontinuidad se propaga con velocidad λ_p , luego

$$w^p(x, t) = \begin{cases} w_l^p & \text{si } x - \lambda_p t < x_0, \\ w_r^p & \text{si } x - \lambda_p t > x_0. \end{cases} \quad (2.16)$$

De la misma forma que razonamos en la observación 2.3 para obtener la expresión (2.12), escribimos la solución al problema de Riemann de la forma

$$\mathbf{u}(x, t) = \sum_{p=1}^{P(x,t)} w_l^p(x, t) v_p + \sum_{p=P(x,t)+1}^n w_r^p(x, t) v_p,$$

donde $P(x, t)$ es el máximo valor de p para el cual $x - \lambda_p t < x_0$. También, se puede escribir más concretamente como

$$\mathbf{u}(x, t) = \sum_{p: x - \lambda_p t < x_0} w_l^p(x, t) v_p + \sum_{p: x - \lambda_p t > x_0} w_r^p(x, t) v_p, \quad (2.17)$$

denotando

$$\mathbf{u}_l(x, t) = \sum_{p: x - \lambda_p t < x_0} w_l^p(x, t) v_p,$$

$$\mathbf{u}_r(x, t) = \sum_{p: x - \lambda_p t > x_0} w_r^p(x, t) v_p,$$

para simplificar la notación.

Por tanto, en cada porción del plano, limitada por las respectivas rectas características, la solución es constante. En el siguiente ejemplo se muestra, en particular, para un sistema lineal de dos componentes.

Ejemplo 2.2. Consideremos el sistema de leyes de conservación hipérbolicas lineal de dimensión 2×2 , dado por $\mathbf{u}_t + A\mathbf{u}_x = 0$. Como A es diagonalizable, tenemos dos ecuaciones de la forma $w_t^p + \lambda_p w_x^p = 0$, para $p = 1, 2$, donde λ_p son los autovalores de la matriz A . Por ejemplo, supongamos $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. La solución al problema de Riemann con datos

2. Fundamentos básicos

iniciales (w_l^p, w_r^p) , donde $p = 1, 2$ para cada ecuación, y centrado en el punto $x_0 = 0$, se ilustra en la figura 2.2.

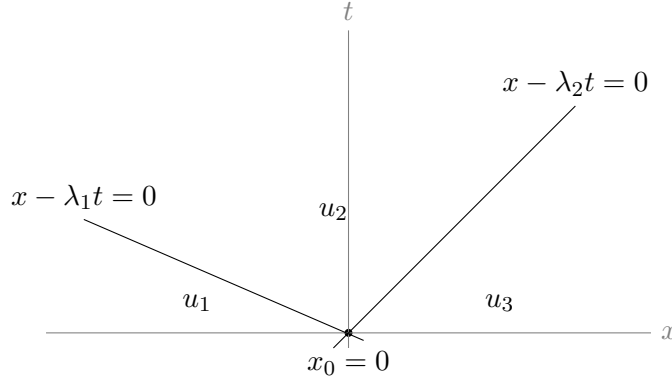


Figura 2.2: Solución del problema de Riemann para un sistema de dos ecuaciones.

De forma que la solución al problema original considerado se puede escribir como

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 = w_l^1 v_1 + w_l^2 v_2 & \text{si } \frac{x}{t} < \lambda_1, \\ u_2 = w_r^1 v_1 + w_l^2 v_2 & \text{si } \lambda_1 < \frac{x}{t} < \lambda_2, \\ u_3 = w_r^1 v_1 + w_r^2 v_2 & \text{si } \frac{x}{t} > \lambda_2. \end{cases}$$

En la siguiente proposición, se muestra lo que ocurre a través de las discontinuidades en el caso lineal y unidimensional. En la sección 11.8 de [12], se generaliza y se demuestra para el caso no lineal.

Proposición 2.1. Condición de salto Rankine-Hugoniot. El salto, $u_r - u_l$, a través de la discontinuidad, es un múltiplo escalar del autovector asociado al autovalor λ de la ecuación $u_t + \lambda u_x = 0$.

Demostración. Sabemos que λ es la velocidad con la que se propaga esta discontinuidad, asumimos que es negativa. Estudiémosla en un intervalo concreto de tiempo $(t_1, t_1 + \Delta t)$ y de espacio $(x_1, x_1 + \Delta x)$, es decir, en el rectángulo $[x_1, x_1 + \Delta x] \times [t_1, t_1 + \Delta t]$. Como se muestra en la figura 2.3.

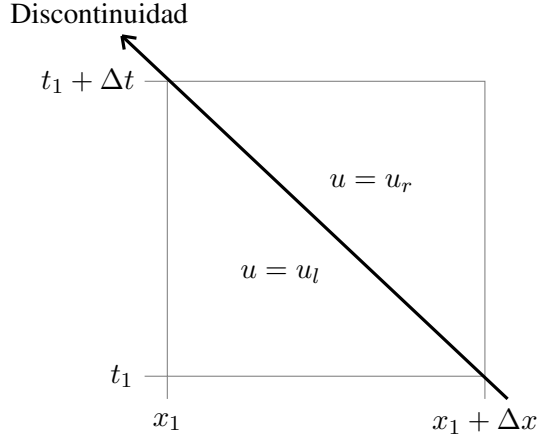


Figura 2.3: Región infinitesimal rectangular en el plano xt .

Aplicamos la forma integral de la ley de conservación (2.2) a esta región, entonces obtenemos

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} u(x, t) dx = f(u(x_1, t)) - f(u(x_1 + \Delta x, t))$$

Integrando en tiempo en el intervalo $[t_1, t_1 + \Delta t]$ tenemos

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} u(x, t_1 + \Delta t) dx - \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} u(x, t_1) dx = \\ & = \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} f(u(x_1, t)) dt - \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} f(u(x_1 + \Delta x, t)) dt. \end{aligned}$$

Entonces, como la función flujo es lineal y u es constante en cada porción del plano,

$$\Delta x u_r - \Delta x u_l = \Delta t f(u_l) - \Delta t f(u_r). \quad (2.18)$$

Dado que λ es la velocidad de propagación, negativa, entonces $\Delta x = -\lambda \Delta t$. Dividiendo la igualdad (2.18) entre $-\Delta t$, y como $\Delta x = -\lambda \Delta t$, obtenemos

$$\lambda(u_r - u_l) = f(u_r) - f(u_l), \quad (2.19)$$

y por lo tanto el salto $u_r - u_l$ es múltiplo del autovector asociado a λ como queríamos ver. Esta ecuación se denomina *condición de salto de Rankine-Hugoniot*. \square

La deducción de la ecuación (2.19) para un sistema lineal, se especifica con más detalle en el capítulo 11.9 de [12], en cuyo caso el flujo del sistema viene dado por $f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$.

2. Fundamentos básicos

Si sustituimos en la ecuación de salto (2.19), obtenemos

$$\lambda(\mathbf{u}_r - \mathbf{u}_l) = A\mathbf{u}_r - A\mathbf{u}_l = A(\mathbf{u}_r - \mathbf{u}_l),$$

de donde, $(A - \lambda Id)(\mathbf{u}_r - \mathbf{u}_l) = \mathbf{0}$. Por definición, queda probado que el salto $\mathbf{u}_r - \mathbf{u}_l$ es un autovector de la matriz A , siendo λ la velocidad de propagación de la discontinuidad correspondiente.

Aplicando esta proposición, se puede descomponer el salto $u_r - u_l$ en una suma de saltos

$$\mathbf{u}_r - \mathbf{u}_l = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n,$$

donde $\alpha_p \mathbf{v}_p$ es el salto de \mathbf{u} a través de la p -ésima recta característica y que de ahora en adelante lo denotaremos por $W^p := \alpha_p v_p$.

2.5 Velocidad de propagación en algunos problemas evolutivos

En esta sección, veremos que los problemas parabólicos se propagan a velocidad infinita. En concreto, se verá para la ecuación del calor. Por el contrario, los problemas hiperbólicos se propagan a velocidad finita, se verá para la ecuación de ondas.

2.5.1 Problemas parabólicos

La ecuación del calor es una EDP de tipo parabólica dada por:

$$u_t - \Delta u = 0, \quad t > 0, \quad x \in U,$$

con $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto. La función

$$\phi(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & (x \in \mathbb{R}^n, t > 0), \\ 0, & (x \in \mathbb{R}^n, t < 0). \end{cases}$$

se denomina **solución fundamental** de la ecuación del calor, ya que es la solución empleada para crear una solución al problema de valores iniciales visto en [6] dado por

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u_0(x, 0) &= g(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

La solución a dicho PVI viene dada por

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0. \quad (2.20)$$

De forma que si $g \geq 0$ y $g \equiv 0$, está acotada y es continua, entonces la función (2.20) es positiva para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $t > 0$. Partiendo de que $u_0(x)$ es positiva con soporte compacto, consecuentemente $u(x, t)$ es positiva en todo \mathbb{R}^n para todo tiempo $t > 0$. Esto implica velocidad de propagación infinita de la ecuación del calor.

2.5.2 Problemas hiperbólicos

Supongamos que $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0, +\infty))$ es solución de la ecuación de ondas dada por

$$u_{tt} - \Delta u = 0.$$

Sean $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n) \in \mathbb{R}^n$ y $t_0 > 0$, fijados. Consideremos el conjunto dado por

$$C(x_0, t_0) = \{(x, t) : 0 \leq t \leq t_0, |x - x_0| \leq t_0 - t\}.$$

Este conjunto es el cono de vértice (x_0, t_0) mostrado en la figura 2.4, formado por la unión de los discos de centro x_0 y radio $t_0 - t$, para $t \in [0, t_0]$, denotados por $B(x_0, t_0 - t)$.

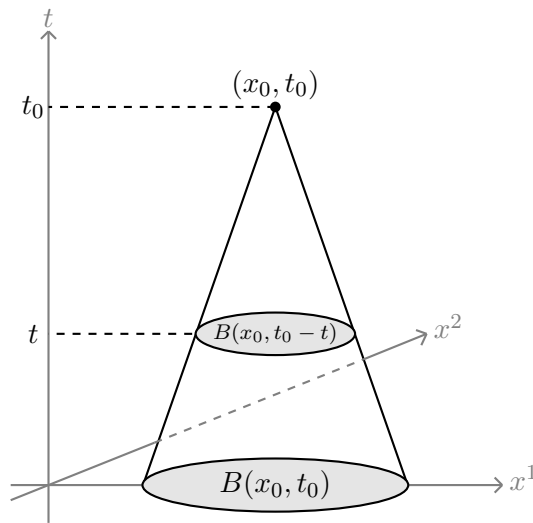


Figura 2.4: Cono de vértice (x_0, t_0) .

2. Fundamentos básicos

Cualquier perturbación originada fuera del disco $B(x_0, t_0)$ (base del cono de la figura 2.4) no afecta a la solución dentro del cono $C(x_0, t_0)$, y por eso se dice que la ecuación de ondas tiene velocidad de propagación finita. Véase en el siguiente resultado.

Teorema 2.1. Si $u \equiv u_t \equiv 0$ en el disco $B(x_0, t_0)$ entonces $u \equiv 0$ dentro del cono $C(x_0, t_0)$.

Demostración. Se define la función energía local por

$$e(t) := \frac{1}{2} \int_{B(x_0, t_0-t)} \left(u_t^2(x, t) + |Du(x, t)|^2 \right) dx \quad (0 \leq t \leq t_0).$$

La región $B(x_0, t_0 - t) \subset \mathbb{R}^n$ depende del parámetro $t \in \mathbb{R}$, el tiempo. Entonces, por el teorema (fórmula de diferenciación para dominios que varían con el tiempo) que puede verse en [6], al derivar la energía local con respecto al tiempo, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e(t) &= \frac{1}{2} \int_{B(x_0, t_0-t)} \frac{d}{dt} \left(u_t^2(x, t) + |Du(x, t)|^2 \right) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\partial B(x_0, t_0-t)} \left(u_t^2(x, t) + |Du(x, t)|^2 \right) v \cdot n \, dS, \end{aligned} \quad (2.21)$$

siendo n el vector normal exterior, y v , el vector velocidad, opuesto al vector velocidad de ondas. Ambos vectores, n y v , unitarios, y opuestos entre sí como se muestra en la figura 2.5.

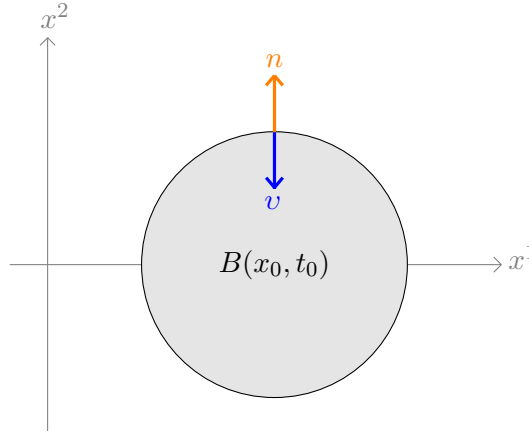


Figura 2.5: Disco de centro x_0 y radio t_0 , $B(x_0, t_0)$, base del cono $C(x_0, t_0)$.

Por tanto, aplicando la definición de producto escalar se tiene que

$$n \cdot v = |n| |v| \cos(180^\circ) = -1. \quad (2.22)$$

Sustituyendo la igualdad (2.22) en la ecuación (2.21), obtenemos

$$\begin{aligned}
 e'(t) &= \frac{1}{2} \int_{B(x_0, t_0-t)} (2 u_t(x, t) u_{tt}(x, t) + 2 Du(x, t) Du_t(x, t)) dx \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_{\partial B(x_0, t_0-t)} \left(u_t^2(x, t) + |Du(x, t)|^2 \right) dS \\
 &= \int_{B(x_0, t_0-t)} u_t(x, t) u_{tt}(x, t) dx + \int_{B(x_0, t_0-t)} Du(x, t) Du_t(x, t) dx \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_{\partial B(x_0, t_0-t)} \left(u_t^2(x, t) + |Du(x, t)|^2 \right) dS. \tag{2.23}
 \end{aligned}$$

A continuación, aplicamos la Fórmula de Green vista en [6], entonces el segundo sumando del segundo miembro de la ecuación (2.23) viene dado por

$$\begin{aligned}
 \int_{B(x_0, t_0-t)} Du(x, t) Du_t(x, t) dx &= \int_{\partial B(x_0, t_0-t)} u_t(x, t) \frac{\partial u}{\partial n} dS \\
 &\quad - \int_{B(x_0, t_0-t)} u_t(x, t) \Delta u dx. \tag{2.24}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo la igualdad (2.24) en la ecuación (2.23), resulta que

$$\begin{aligned}
 e'(t) &= \int_{B(x_0, t_0-t)} u_t(x, t) (u_{tt}(x, t) - \Delta u) dx \\
 &\quad + \int_{\partial B(x_0, t_0-t)} \left(u_t(x, t) \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{1}{2} u_t^2(x, t) - \frac{1}{2} |Du(x, t)|^2 \right) dS \\
 &= \int_{\partial B(x_0, t_0-t)} \left(u_t(x, t) \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{1}{2} u_t^2(x, t) - \frac{1}{2} |Du(x, t)|^2 \right) dS. \tag{2.25}
 \end{aligned}$$

La derivada direccional de la función u en la dirección del vector unitario n se define por

$$\frac{\partial u}{\partial n} := n \cdot Du. \tag{2.26}$$

Luego, por la igualdad (2.26) se tiene que

$$u_t \frac{\partial u}{\partial n} \leq \left| u_t \frac{\partial u}{\partial n} \right| = |u_t| |n| |Du| = |u_t| |Du|,$$

y aplicando la desigualdad $|u_t| |Du| \leq \frac{1}{2} |u_t|^2 + \frac{1}{2} |Du|^2$, se deduce que

$$u_t \frac{\partial u}{\partial n} \leq \frac{1}{2} |u_t|^2 + \frac{1}{2} |Du|^2. \tag{2.27}$$

Aplicando la desigualdad (2.27) en la ecuación (2.25), resulta que $e'(t) \leq 0$, para todo

2. Fundamentos básicos

$t \in [0, t_0]$. Entonces, $e(t)$ es una función decreciente y por tanto,

$$e(t) \leq e(0), \text{ para todo } t \in [0, t_0]. \quad (2.28)$$

Por otro lado, por hipótesis del teorema, $u(x, 0) = 0$ y $u_t(x, 0) = 0$ para todo $x \in B(x_0, t_0)$, así pues,

$$e(0) = \frac{1}{2} \int_{B(x_0, t_0)} \left(u_t^2(x, 0) + |Du(x, 0)|^2 \right) dx = 0. \quad (2.29)$$

Inmediatamente, sustituyendo la igualdad (2.29) en la desigualdad (2.28), $e(t) \leq 0$ para todo $t \in [0, t_0]$, y además como por la propia definición de la función $e(t)$ se tiene que $e(t) \geq 0$, entonces $e(t) = 0$ para todo $t \in [0, t_0]$, es decir,

$$\int_{B(x_0, t_0 - t)} \left(u_t^2(x, t) + |Du(x, t)|^2 \right) dx = 0,$$

y como $u_t^2(x, t) + |Du(x, t)|^2 \geq 0$ resulta que $u_t^2(x, t) + |Du(x, t)|^2 = 0$, para todo $t \in [0, t_0]$ y $x \in B(x_0, t_0 - t)$. De donde se deduce que $u_t^2(x, t) = 0$ y $|Du(x, t)|^2 = 0$, por ello, $u_t(x, t) = 0$ y $Du(x, t) = 0$. En otros términos, u es independiente de t y de x , es decir, u es constante dentro del cono $C(x_0, t_0)$.

Sea $(x', 0) \in B(x_0, t_0) \times \{t = 0\}$. Por hipótesis del teorema, $u(x', 0) = 0$ y como u es constante dentro del cono definido, resulta que $u(x, t) = u(x', 0) = 0$ para todo $(x, t) \in C(x_0, t_0)$, esto es, $u \equiv 0$ dentro del cono $C(x_0, t_0)$.

□

Método de Volúmenes Finitos

En este capítulo comenzaremos el estudio de los métodos de volúmenes finitos para resolver leyes de conservación, derivados de su forma integral, como punto de partida. Nos centraremos en los métodos de primer orden para ecuaciones lineales, en concreto, en los métodos descentrados basados en la solución del problema de Cauchy y en el método de Godunov basado en la solución del problema de Riemann.

3.1 Método de Volúmenes Finitos

El Método de Volúmenes Finitos en una dimensión espacial consiste en dividir el dominio espacial en intervalos, los **volúmenes finitos**, también denominados **celdas**, y calcular en cada uno de ellos una aproximación de la integral de la variable conservativa u . En cada paso de tiempo, se actualizan estos valores utilizando aproximaciones del flujo a través de las fronteras de los volúmenes finitos. Por tanto, este método numérico permite la resolución de leyes de conservación haciendo uso de dicha conservación en las distintas celdas en las que podemos dividir el dominio. En esta sección vamos a ver cómo se lleva a cabo este método numérico.

Comenzamos definiendo una partición del espacio $\Omega \in \mathbb{R}$, es decir, se define un conjunto

3. Método de Volúmenes Finitos

de celdas o volúmenes finitos,

$$c_i = \left(x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right), \quad i = 1, \dots, N_x$$

cuyos puntos extremos serían,

$$x_{\frac{1}{2}} < x_{1+\frac{1}{2}} < \dots < x_{N_x-\frac{1}{2}} < x_{N_x+\frac{1}{2}},$$

y pertenecen al intervalo (a, b) . Por simplicidad, asumimos que la longitud de las celdas es constante, es decir, $\Delta x = |c_i| = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$. En la figura 3.1, se muestran dos ejemplos de celdas.

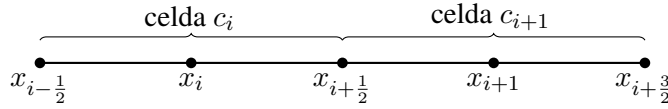


Figura 3.1: Celdas c_i y c_{i+1} en una dimensión espacial.

En esta memoria, denotamos por u_i^n a la aproximación del valor medio de u sobre la celda c_i en el tiempo t_n , es decir:

$$u_i^n \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{c_i} u(x, t_n) dx = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x, t_n) dx.$$

El hecho de centrarnos en estos valores promedios nos facilita deducir métodos numéricos que mimeticen propiedades importantes de las leyes de conservación. En particular, se puede asegurar que el método numérico es conservativo en un sentido que imite a la solución exacta. Esto es debido a que $\sum_{i=1}^N \Delta x \cdot u_i^n$ aproxima la integral de u sobre el dominio espacial $[a, b]$, es decir,

$$\int_a^b u(x, t_n) dx \approx \sum_{i=1}^N \Delta x \cdot u_i^n.$$

Veremos que si expresamos un método numérico en la forma conservativa, la suma discreta anterior, $\sum_{i=1}^N \Delta x \cdot u_i^n$, cambiará solamente debido a los valores en las fronteras $x = a$ y $x = b$. En concreto, la identidad (3.7) que aparece más adelante, cuando el rango de valores de celdas definido por I, J recubre toda la partición, puede interpretarse como la conservación de la solución discreta.

Ahora podemos expresar la forma integral de la ley de conservación en la celda c_i como

$$\frac{d}{dt} \int_{c_i} u(x, t) dx = f(u(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) - f(u(x_{i+\frac{1}{2}}, t)). \quad (3.1)$$

Una vez que se ha discretizado el dominio espacial, procedemos a hacerlo con el temporal. Consideremos una partición uniforme en el tiempo,

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N_t} = T,$$

siendo $\Delta t = t_{n+1} - t_n$. El paso en tiempo lo consideraremos constante. Ahora, integramos la expresión (3.1) en cada intervalo de tiempo $[t_n, t_{n+1}]$:

$$\int_{c_i} u(x, t_{n+1}) dx - \int_{c_i} u(x, t_n) dx = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[f(u(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) - f(u(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) \right] dt \quad (3.2)$$

Dividiendo la expresión (3.2) entre Δx y reordenando los términos, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} \int_{c_i} u(x, t_{n+1}) dx &= \frac{1}{\Delta x} \int_{c_i} u(x, t_n) dx \\ &\quad - \frac{1}{\Delta x} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[f(u(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) - f(u(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) \right] dt. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Debido a que, en general, no podemos evaluar exactamente las integrales del segundo miembro de la expresión (3.3), ya que $u(x_{i+\frac{1}{2}}, t)$ y $u(x_{i-\frac{1}{2}}, t)$ varían con el tiempo a lo largo de cada lado de la celda, y a que no conocemos la solución exacta, vamos a estudiar métodos numéricos de la forma

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n \right), \quad (3.4)$$

donde $F_{i+\frac{1}{2}}^n$ es una aproximación del valor medio del flujo en el plano xt a lo largo de la recta $x = x_{i+\frac{1}{2}}$ con t variando entre t_n y t_{n+1} , es decir,

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n \approx \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) dt. \quad (3.5)$$

Como se ha podido comprobar la expresión (3.1) ha sido utilizada para el desarrollo de un método explícito en tiempo: dado u_i^n , es decir, dadas las aproximaciones promedios en las celdas en el tiempo t_n , aproximamos u_i^{n+1} que son los valores promedios en las celdas

3. Método de Volúmenes Finitos

en el tiempo t_{n+1} , esto es, después de un paso de tiempo de longitud $\Delta t = t_{n+1} - t_n$.

Una consideración interesante es que, reordenando los términos en la expresión 3.4, obtenemos

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} = 0,$$

de forma que este método puede verse como una aproximación en Diferencias Finitas de la ley de conservación $u_t + f(u)_x = 0$.

Dado que en los problemas hiperbólicos la información se propaga a velocidad finita, parece razonable suponer que podemos obtener $F_{i+\frac{1}{2}}^n$ basándonos únicamente en los valores de u_{i-1}^n y u_i^n , valores promedios de u^n en las celdas c_{i-1} y c_i que tienen extremo común $x_{i-\frac{1}{2}}$. Entonces, podríamos escribir

$$F_{i-\frac{1}{2}}^n = \phi(u_{i-1}^n, u_i^n),$$

donde ϕ es una cierta función flujo numérico. Por tanto, el esquema numérico (3.4) lo podemos expresar de la siguiente manera

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\phi(u_i^n, u_{i+1}^n) - \phi(u_{i-1}^n, u_i^n)). \quad (3.6)$$

En las secciones posteriores, se estudiarán distintos métodos numéricos y se verá que todos ellos pueden expresarse según la elección de la expresión de ϕ . Algunas de las propiedades que deberían verificar este tipo de flujo numérico son las siguientes:

- El flujo numérico debería aproximar la integral (3.5). En particular, si la variable conservativa es constante en x , esto es, $u(x, t) \equiv \bar{u}$ con $\bar{u} \in \mathbb{R}$, entonces la integral (3.5) se reduce a $f(\bar{u})$. Por lo tanto, se tiene que $\phi(\bar{u}, \bar{u}) = f(\bar{u})$.
- La función flujo numérico, $\phi(u_i^n, u_i^{n+1})$, tiene que ser continua en función de la variación de u_i^n y u_i^{n+1} , esto es,

$$\lim_{u_i^n, u_{i+1}^n \rightarrow \bar{u}} \phi(u_i^n, u_i^{n+1}) = f(\bar{u}).$$

El principio básico de una ley de conservación es que la cantidad total de una variable conservada solamente cambia en función del flujo en la frontera. A continuación, vamos a comprobar que los esquemas en forma conservativa también cumplen una propiedad

análoga. Partiendo del esquema (3.4) sumemos u_i^{n+1} sobre cualquier subconjunto de celdas $i = I, \dots, J$ y multipliquemos por Δx :

$$\Delta x \sum_{i=I}^J u_i^{n+1} = \Delta x \sum_{i=I}^J u_i^n - \Delta t \left(\sum_{i=I}^J F_{i+\frac{1}{2}}^n - \sum_{i=I}^J F_{i-\frac{1}{2}}^n \right).$$

Como la suma de los flujos se cancela salvo los flujos extremos $x = x_{I-\frac{1}{2}}$ y $x = x_{J+\frac{1}{2}}$, obtenemos que

$$\Delta x \sum_{i=I}^J u_i^{n+1} = \Delta x \sum_{i=I}^J u_i^n - \Delta t \left(F_{J+\frac{1}{2}}^n - F_{I-\frac{1}{2}}^n \right), \quad (3.7)$$

razón por la cual decimos que el método de volúmenes finito es conservativo.

3.2 Métodos descentrados

La solución del Problema de Valores Iniciales (2.8) es constante a lo largo de curvas características. En el caso lineal, a lo largo de rectas características, pudiéndose diferenciar dos casos en función del signo de la velocidad de propagación (figuras 3.2 y 3.3).

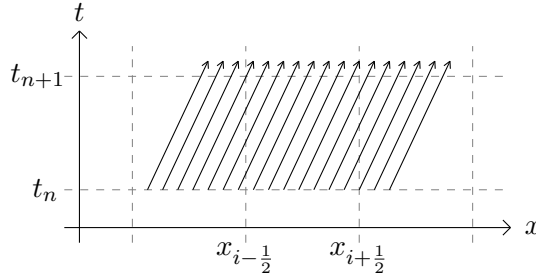


Figura 3.2: Velocidad de propagación positiva, $c > 0$.

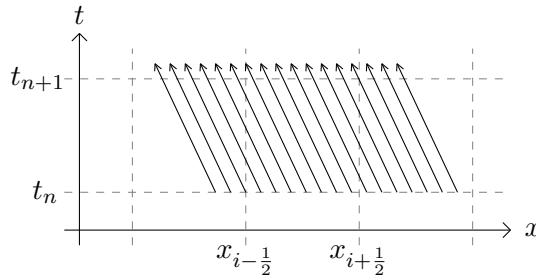


Figura 3.3: Velocidad de propagación negativa, $c < 0$.

3. Método de Volúmenes Finitos

Las rectas características son usadas para determinar mejores funciones de flujo numérico, dando lugar a los **métodos descentrados**. Veamos un ejemplo de este tipo de método en la ecuación de transporte.

Método descentrado para la ecuación de transporte

La ecuación de transporte viene dada por $u_t + c u_x = 0$. En primer lugar, supongamos que la información se propaga con velocidad positiva, $c > 0$. Como se muestra en la figura 3.2, el flujo a través del extremo izquierdo de la celda c_i está completamente determinado por el valor u_{i-1}^n . Por tanto, el flujo numérico a lo largo de la recta $x = x_{i-\frac{1}{2}}$ se define como

$$F_{i-\frac{1}{2}}^n = c u_{i-1}^n.$$

En cambio, el flujo a través del extremo derecho de la celda c_i está completamente determinado por el valor u_i^n en esta misma celda. Luego, el flujo numérico a lo largo de la recta $x = x_{i+\frac{1}{2}}$ se define como

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n = c u_i^n.$$

Sustituyendo en la ecuación (3.4), el método descentrado para la ecuación de transporte con velocidad de propagación positiva, $c > 0$, viene dado por

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c \Delta t}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n), \quad (3.8)$$

denominado **método descentrado con flujo aguas arriba**.

Por otro lado, en el caso de que la información se propague con velocidad negativa $c < 0$, como se muestra en la figura 3.3, siguiendo el mismo razonamiento que para el caso anterior, resulta que el método descentrado viene dado por el siguiente esquema numérico

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c \Delta t}{\Delta x} (u_{i+1}^n - u_i^n), \quad (3.9)$$

donde $F_{i+\frac{1}{2}}^n = c u_{i+1}^n$ y $F_{i-\frac{1}{2}}^n = c u_i^n$, denominado **método descentrado con flujo aguas abajo**.

A medida que el tiempo evoluciona, como la solución es constante a lo largo de las rectas

características, se tiene que

$$u_i^{n+1} \approx u(x_i, t_{n+1}) = u(x_i - c(t_{n+1} - t_n), t_n) = u(x_i - c \Delta t, t_n).$$

Asumiendo que $c > 0$, el salto $W_{i-\frac{1}{2}} := u_i^n - u_{i-1}^n$ en cada uno de los bordes de las celdas, c_i , será el mismo a medida que el tiempo evolucione pero desplazado una distancia $c \Delta t$ en cada paso de tiempo. Por tanto, el esquema (3.8) se puede escribir de esta otra forma

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c \Delta t}{\Delta x} W_{i-\frac{1}{2}}.$$

Por otro lado, en el caso que $c < 0$, definimos el salto $W_{i+\frac{1}{2}} := u_{i+1}^n - u_i^n$, resultando el esquema (3.9) como

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c \Delta t}{\Delta x} W_{i+\frac{1}{2}}.$$

En la figura 3.4, se muestra lo estudiado en esta sección asumiendo que $c > 0$. Obsérvese que el uso de los mismos colores a medida que el tiempo evoluciona, representa la solución constante para cada celda considerada, esto es, $u(x_i, t_{n+1}) = u(x_i - c \Delta t, t_n)$. Por tanto, el salto producido en cada borde entre celdas será el mismo en cada uno de los instantes de tiempo.

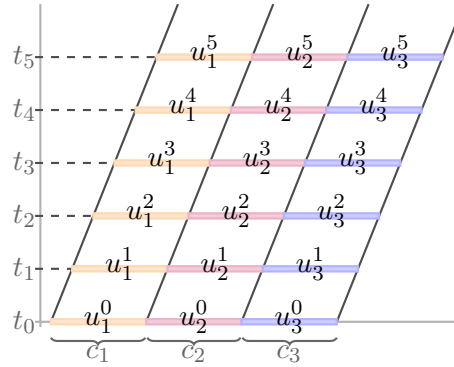


Figura 3.4: Representación gráfica de la solución aproximada del método descentrado con flujo aguas arriba.

3.3 Método de Godunov

En esta sección, se presenta el método de Godunov en sus dos versiones y se explica detalladamente cómo puede aplicarse en el caso lineal. La particularidad de dicho método

3. Método de Volúmenes Finitos

es el uso de la estructura de ondas determinada por la solución del problema de Riemann.

3.3.1 Primera versión

Se describe el método en tres pasos, pudiéndose referenciar cada uno de ellos con una palabra, respectivamente: *reconstruir*, *evolucionar* y *promediar*.

Paso 1: Se *reconstruye* una función constante a trozos definida por:

$$\tilde{u}(x, t_n) = u_i^n,$$

para x en cada celda c_i , entendiéndose como el promedio de la solución en cada celda, en el tiempo t_n , como se muestra en la figura 3.5.

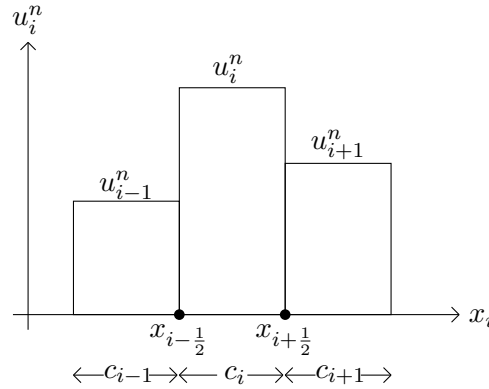


Figura 3.5: Reconstrucción de una función constante a trozos.

Paso 2: En el nivel de tiempo n , en cada frontera $x_{i+\frac{1}{2}}$ entre las celdas c_i y c_{i+1} , tenemos el problema local de Riemann centrado en la frontera $x_{i+\frac{1}{2}}$ y con datos iniciales (u_i^n, u_{i+1}^n) . El objetivo es encontrar la solución del problema global en un nivel de tiempo posterior $n + 1$, es decir, *evolucionar* en el tiempo. Para ello, Godunov propone resolver dos problemas de Riemann locales, por un lado, el problema de Riemann centrado en $x_{i-\frac{1}{2}}$ con datos iniciales (u_{i-1}^n, u_i^n) y, por otro lado, el problema de Riemann centrado en $x_{i+\frac{1}{2}}$ con datos iniciales (u_i^n, u_{i+1}^n) . Denotamos $\tilde{u}(x_{i-\frac{1}{2}}, t_{n+1})$ y $\tilde{u}(x_{i+\frac{1}{2}}, t_{n+1})$, respectivamente, las soluciones citadas.

Paso 3: Se obtiene u_i^{n+1} como el *promedio* de las soluciones de los problemas de Riemann correspondientes en la celda c_i , es decir:

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_i} \tilde{u}(x_{i-\frac{1}{2}}, t_{n+1}) dx + \frac{1}{\Delta x} \int_{x_i}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \tilde{u}(x_{i+\frac{1}{2}}, t_{n+1}) dx. \quad (3.10)$$

Todo este proceso se repite en el siguiente paso de tiempo. Proceso correspondido a la primera versión del método de Godunov, en el cual se ha definido un nuevo valor promedio u_i^{n+1} en el tiempo $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ dentro de cada celda c_i . Pero para realizar el promedio, ninguna onda puede tener interacción con otra dentro de cada celda c_i en el tiempo $t \in [t_n, t_{n+1}]$. Esto implica que el paso de tiempo Δt sea lo suficientemente pequeño para que las ondas de dos problemas de Riemann adyacentes no interactúen entre sí. Este es uno de los principales inconvenientes de esta versión debido a que la condición CFL, que estudiaremos en la sección 4.3.1, tiene que ser muy restringida, tomar Δt muy pequeño. Además, tener que realizar la evaluación de las integrales (3.10), puede ser complicado. Luego, estas dos desventajas conllevan la introducción de una segunda versión del método.

3.3.2 Segunda versión

En esta versión, se desarrolla un método de volúmenes finitos basado en la función constante por partes reconstruida en el paso 1 de la versión anterior. Resulta fácil determinar la función flujo numérico correspondiente al método de Godunov.

Como ya sabemos $F_{i+\frac{1}{2}}^n$ es una aproximación del valor medio del flujo en el plano xt a lo largo de la recta $x = x_{i+\frac{1}{2}}$ con t variando entre t_n y t_{n+1} , es decir,

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n \approx \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) dt$$

Ahora, se reemplaza $u(x, t)$ por la función $\tilde{u}(x, t_n)$, que era la reconstrucción constante por partes de Godunov, definida en el paso 1 de la versión anterior. De esta forma, el integrando $f(u(x_{i+\frac{1}{2}}, t))$ en cada frontera depende de la solución exacta $\tilde{u}(x_{i+\frac{1}{2}}, t)$ del problema de Riemann correspondiente en el intervalo de tiempo $[t_n, t_{n+1}]$. Entonces, la solución se evalúa a lo largo del límite entre celdas. Si denotamos $u^\downarrow(u_i, u_{i+1}) := \tilde{u}(x_{i+\frac{1}{2}}, t)$, el

3. Método de Volúmenes Finitos

flujo numérico $F_{i+\frac{1}{2}}^n$ viene dado por:

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u^\downarrow(u_i, u_{i+1})) dt = f(u^\downarrow(u_i, u_{i+1})) \quad (3.11)$$

Razonando de igual forma, el flujo numérico $F_{i-\frac{1}{2}}^n$ viene dado por:

$$F_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u^\downarrow(u_{i-1}, u_i)) dt = f(u^\downarrow(u_{i-1}, u_i)). \quad (3.12)$$

Por tanto, el esquema numérico 3.4 para el método de Godunov resulta:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f(u^\downarrow(u_i, u_{i+1})) - f(u^\downarrow(u_{i-1}, u_i))).$$

En esta última versión, han sido resueltos los problema de Riemann centrados en $x_{i-\frac{1}{2}}$ y $x_{i+\frac{1}{2}}$ para obtener $u^\downarrow(u_{i-1}, u_i)$ y $u^\downarrow(u_i, u_{i+1})$, respectivamente. Entonces, son definidos los flujos $F_{i-\frac{1}{2}}^n$ y $F_{i+\frac{1}{2}}^n$ por las expresiones (3.12) y (3.11) respectivamente, y se obtiene u_i^{n+1} mediante el esquema numérico 3.4.

Convergencia, precisión y estabilidad

El uso de un método numérico para resolver una ecuación diferencial conlleva el estudio de la precisión y las propiedades de convergencia del método. En esta sección, se realizará un análisis teórico centrándonos únicamente en el problema de Cauchy, esto es, sin considerar condiciones de contorno. Esto está por ejemplo justificado por el hecho de que consideramos dominios infinitos (y datos iniciales con soporte compacto).

4.1 Convergencia

Para valorar si un esquema numérico proporciona una buena aproximación de una ley de conservación, el método numérico resultante debe ser convergente. Tenemos que u_i^n es una aproximación del valor medio de u sobre la celda c_i en el tiempo t_n y de ahora en adelante, denotaremos por

$$\hat{u}_i^n := \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x, t_n) dx,$$

a la media de la solución exacta de la ecuación en derivadas parciales en la celda c_i en el tiempo t_n .

4. Convergencia, precisión y estabilidad

Usaremos n para indicar el nivel de tiempo correspondiente al instante $t_n = n\Delta t$. En ese momento, para cada celda c_i , interesa conocer que tan bien u_i^n aproxima a \hat{u}_i^n . Entonces, definimos el siguiente concepto.

Definición 4.1. El **error global** en el instante t_n de un método numérico viene dado por la diferencia

$$\mathbf{E}^n = \mathbf{u}^n - \hat{\mathbf{u}}^n.$$

Para cuantificar el error en un instante de tiempo fijo, debemos elegir alguna norma. Para ello, introducimos el siguiente concepto previo visto en [1].

Definición 4.2. Sea $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un abierto. Se define el conjunto

$$L^2(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ es medible y } \int_{\Omega} |f|^2 < \infty \right\}.$$

Si $f \in L^2(\Omega)$ se define la norma

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.1)$$

Para funciones discretas, como el error E^n , introducimos la norma definida por

$$\|E^n\|_2 = \left(\Delta x \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |E_i^n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.2)$$

denominada la norma discreta L^2 . Obsérvese que se introduce el factor Δx , permitiendo que la serie converja a medida que la malla se refine, esto es, a medida que Δx disminuye. Este factor Δx hace que ambas normas definidas (4.1) y (4.2) sean análogas.

Con el objetivo de simplificar la notación, asumimos que Δt y Δx están relacionadas de manera fija. Para problemas hiperbólicos, es razonable asumir que la razón $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ es fija y de hecho es usual definir Δt en función de Δx de forma que se verifique la condición CFL que estudiaremos en la sección 4.3.1. De esta forma, cuando $\Delta t \rightarrow 0$ nos referiremos a que la malla se refina. Entonces, introducimos el siguiente concepto.

Definición 4.3. Se dice que el método numérico es **convergente** en el instante de tiempo t_n para la norma $\|\cdot\|_2$ si

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \|E^n\|_2 = 0.$$

Se dirá que tiene **orden de convergencia** s si

$$\|E^n\|_2 = \mathcal{O}(\Delta t^s), \quad \text{cuando } \Delta t \rightarrow 0.$$

De forma general, después de una discretización en tiempo, es imposible obtener una expresión simple para el error global. Por tanto, en lugar de estudiar la convergencia de los métodos numéricos mediante el cálculo directo del error global, procederemos a estudiarla a partir de verificar las dos propiedades de los métodos numéricos que se enuncian a continuación.

- El método numérico debe ser **consistente** con la ecuación diferencial. En cada paso de tiempo, se estudia que existe una buena aproximación local.
- El método numérico debe ser **estable**: los errores locales que se producen en cada paso de tiempo no deben crecer demasiado rápido en los pasos de tiempos posteriores.

El estudio de estas dos propiedades depende del tipo de ecuación y método. En los dos apartados siguientes, estudiaremos cada una de ellas de forma genérica y las analizaremos, siempre para la ecuación de transporte, para los esquemas numéricos presentados a continuación:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n) \quad (4.3)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{i+1}^n - u_i^n) \quad (4.4)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - c \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \quad (4.5)$$

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2} (u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) - c \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \quad (4.6)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - c \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + c^2 \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \quad (4.7)$$

Los esquemas (4.3) y (4.4) son métodos descentrados, con flujo aguas arriba y aguas abajo, respectivamente. El esquema numérico (4.5) veremos que es inestable y es a partir del cual se introdujo el esquema (4.6), denominado esquema de Lax-Friedrichs. Finalmente, el esquema numérico (4.7) es el conocido por Lax-Wendroff.

4. Convergencia, precisión y estabilidad

En estos esquemas numéricos, la incógnita, u^{n+1} , se calcula mediante el valor conocido, u^n , asociado a un paso de tiempo previo. Este tipo de esquemas numéricos se denominan **esquemas numéricos de un paso**. Por tanto, podemos definir la solución numérica en el instante de tiempo t_{n+1} como

$$u^{n+1} = \mathcal{N}(u^n),$$

donde $\mathcal{N}(\cdot)$ representa el operador numérico que resulta la solución numérica en un instante de tiempo a partir del instante de tiempo previo. En esta memoria, nos centraremos en el estudio de este tipo de esquemas numéricos.

4.2 Error de truncamiento local y consistencia

Recordemos que \hat{u}^n y u^n representan la media de la solución exacta y de la solución aproximada de la ecuación diferencial, respectivamente, en el paso de tiempo n . Introducimos ahora conceptos necesarios para el estudio de la consistencia.

Definición 4.4. *El error de truncamiento local o de consistencia en el paso n -ésimo de tiempo, $n = 0, \dots, N - 1$, es el número τ^n dado por*

$$\tau^n = \frac{1}{\Delta t} (\mathcal{N}(u^n) - \hat{u}^{n+1}).$$

Definición 4.5. *Se dice que el método numérico es **consistente** si*

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \max_{0 \leq n \leq N-1} |\tau^n| = 0.$$

*Se dirá que tiene **orden de consistencia** s si*

$$\tau^n = \mathcal{O}(\Delta t^s).$$

Observación 4.1. *El error de consistencia indica la magnitud del error global siempre que el método numérico sea estable (concepto que introduciremos en la sección 4.3) y que no existan errores iniciales o bien estos sean suficientemente pequeños. Este tipo de razonamiento es usual en análisis numérico. Para más detalles ver por ejemplo [12] (capítulo 8).*

En el siguiente ejemplo, estudiaremos la consistencia del método descentrado con flujo aguas arriba para la ecuación de transporte.

Ejemplo 4.1. Calculamos el error de consistencia del esquema descentrado con flujo aguas arriba para la ecuación de transporte $u_t + cu_x = 0$. Dicho esquema viene dado por la expresión (3.8). Teniendo en cuenta los desarrollos de Taylor correspondientes, cancelando términos comunes y sabiendo que u es la solución exacta de la ecuación de transporte, es decir, $u_t + cu_x = 0$, el error de consistencia viene dado por

$$\tau^n = \frac{1}{2} c \Delta x u_{xx}(x_i, t_n) - \frac{1}{2} \Delta t u_{tt}(x_i, t_n) + \mathcal{O}(\Delta t^2). \quad (4.8)$$

Dado que $u_t + cu_x = 0$, entonces $u_t = -cu_x$ y derivando dicha igualdad con respecto a t y a x , obtenemos que $u_{tt} = -cu_{xt}$ y $u_{tx} = -cu_{xx}$, respectivamente. De aquí, $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ y sustituyendo en el error de consistencia (4.8), se tiene que

$$\tau^n = \frac{1}{2} c \Delta x \left(1 - c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) u_{xx}(x_i, t_n) + \mathcal{O}(\Delta t^2).$$

Asumiremos que $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ y que u'' está acotada. Además, $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ permanece constante. Entonces tenemos que $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \tau^n = 0$, y así queda probado que el esquema descentrado con flujo aguas arriba para la ecuación de transporte es consistente, siendo el orden de convergencia $s = 1$, pues el término de menor orden es Δx .

De forma similar, hallamos el error de consistencia del esquema (4.6), esquema de Lax-Friedrichs y del esquema (4.7), esquema de Lax-Wendroff, ambos, para la ecuación de transporte. Respectivamente, vienen dados por

$$\tau^n = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta x^2}{\Delta t} - c^2 \Delta t \right) u_{xx}(x_i, t_n) + \mathcal{O}(\Delta t^2),$$

$$\tau^n = \frac{1}{6} c (c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2) u_{xxx}(x_i, t_n) + \mathcal{O}(\Delta t^3).$$

Observamos que ambos métodos son consistentes si la solución exacta es suficientemente regular. Además, se tiene que el orden de convergencia del método de Lax-Friedrichs es $s = 1$ y el del método de Lax-Wendroff es $s = 2$.

4.3 Estabilidad

El análisis de estabilidad es una evaluación fundamental del esquema numérico a ser estudiado. Si se determina que el esquema es inestable, debe buscarse otro método numérico alternativo como solución. Asumiendo que estamos estudiando leyes de conservación sin

4. Convergencia, precisión y estabilidad

término fuente, esto es, tratamos problemas de valores iniciales homogéneos, introducimos el siguiente concepto de estabilidad.

Definición 4.6. *Un esquema numérico de un paso (3.6) para una ecuación en derivadas parciales de primer orden es **estable** si existe una constante K tal que*

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |u_i^n|^2 \leq K \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |u_i^0|^2. \quad (4.9)$$

Multiplicando la desigualdad (4.9) por Δx y aplicando la norma discreta L^2 dado por la expresión (4.2), tenemos que la definición anterior es equivalente a

$$\|u^n\|_2^2 \leq K \|u^0\|_2^2, \quad (4.10)$$

para alguna constante K . En particular, cada esquema numérico que estudiemos requerirá un análisis de estabilidad. En algunos casos podemos determinar condiciones suficientes que garantizan directamente la estabilidad a partir de la expresión (4.9). Veámoslo en el siguiente ejemplo para el esquema numérico (4.3).

Ejemplo 4.2. *Consideramos el esquema numérico con con flujo aguas abajo (4.4), esto es,*

$$u_i^{n+1} = \left(1 + c \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) u_i^n - c \frac{\Delta t}{\Delta x} u_{i+1}^n. \quad (4.11)$$

Denotemos $\alpha = 1 + c \frac{\Delta t}{\Delta x}$ y $\beta = -c \frac{\Delta t}{\Delta x}$, sustituyendo en la expresión (4.11) obtenemos que el esquema numérico viene dado por

$$u_i^{n+1} = \alpha u_i^n + \beta u_{i+1}^n.$$

A continuación, vamos a demostrar que el esquema numérico es estable si $|\alpha| + |\beta| \leq 1$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |u_i^{n+1}|^2 &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |\alpha u_i^n + \beta u_{i+1}^n|^2 \\ &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |\alpha^2 (u_i^n)^2 + 2\alpha\beta u_i^n u_{i+1}^n + \beta^2 (u_{i+1}^n)^2| \\ &\leq \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (\alpha^2 |u_i^n|^2 + 2|\alpha||\beta| |u_i^n| |u_{i+1}^n| + \beta^2 |u_{i+1}^n|^2). \end{aligned}$$

A continuación, vamos a aplicar la desigualdad $2|u_i^n||u_{i+1}^n| \leq |u_i^n|^2 + |u_{i+1}^n|^2$ para separar, por un lado, los sumandos con aproximación de la solución en la celda c_i y por otro lado, los sumandos con aproximación de la solución en la celda c_{i+1} . Finalmente, tomamos en todos los sumandos, la aproximación de la solución en la celda c_i :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |u_i^{n+1}|^2 &\leq \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (\alpha^2 |u_i^n|^2 + |\alpha||\beta| (|u_i^n|^2 + |u_{i+1}^n|^2) + \beta^2 |u_{i+1}^n|^2) \leq \\
 &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (\alpha^2 |u_i^n|^2 + |\alpha||\beta| |u_i^n|^2) + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (|\alpha||\beta| |u_{i+1}^n|^2 + \beta^2 |u_{i+1}^n|^2) = \\
 &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (\alpha^2 |u_i^n|^2 + |\alpha||\beta| |u_i^n|^2) + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (|\alpha||\beta| |u_i^n|^2 + \beta^2 |u_i^n|^2) = \\
 &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (\alpha^2 + 2|\alpha||\beta| + \beta^2) |u_i^n|^2 = (|\alpha| + |\beta|)^2 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |u_i^n|^2.
 \end{aligned}$$

Entonces, hemos obtenido que

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |u_i^{n+1}|^2 \leq (|\alpha| + |\beta|)^2 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |u_i^n|^2.$$

De forma recursiva, concluimos que

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |u_i^{n+1}|^2 \leq (|\alpha| + |\beta|)^{2(n+1)} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |u_i^0|^2.$$

Por lo tanto, si $|\alpha| + |\beta| \leq 1$ entonces el esquema numérico es estable. Sustituyendo los valores de α y β y aplicando propiedades de la función valor absoluto, concluimos que si $-1 \leq c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 0$ entonces el esquema numérico (4.11) es estable, como queríamos ver.

Hemos visto que a partir de la definición de estabilidad podemos determinar condiciones suficientes que garantizan la estabilidad de un esquema numérico. A continuación, usaremos métodos del análisis de Fourier para demostrar que además son condiciones necesarias. En concreto, nos centramos en un procedimiento denominado el análisis de Von Neumann, a partir del cual determinar la estabilidad de un esquema numérico se reduce a consideraciones algebraicas. Pero antes, introducimos la condición CFL, condición necesaria que debe cumplirse en cualquier método de volumen finito si esperamos que sea estable y que converja a la solución de la ecuación en derivadas parciales a medida que se refine la malla.

4. Convergencia, precisión y estabilidad

4.3.1 Condición CFL

La condición CFL es una condición necesaria que debe cumplirse en cualquier método de volumen finito para garantizar la estabilidad, pero no es suficiente como veremos en el ejemplo 4.3.

Sea (x, t) un punto fijo en el espacio-tiempo. Como se vio en la expresión (2.10) la solución $u(x, t)$ del problema de Cauchy depende solo del dato inicial u_0 en $x - ct$ siendo c la velocidad de propagación de la ecuación diferencial, originándose el siguiente concepto.

Definición 4.7. *El dominio de dependencia analítico o de una ecuación en derivadas parciales en el punto (x, t) está definido por el conjunto*

$$D(x, t) = \{(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^2 : x_0 - ct_0 = x - ct, 0 \leq t_0 < t\}.$$

Se considera la ecuación de transporte, $u_t + cu_x = 0$, con $c > 0$, y se aproxima su solución mediante un método explícito, por ejemplo, el método descentrado. Este esquema numérico viene dado por la ecuación (4.3), por tanto, cada nuevo valor u_i^{n+1} se calcula en función de las aproximaciones de la solución asociadas a un paso de tiempo previo, todas estas dentro de una región. A esta región se le denomina el **dominio de dependencia de un método numérico**, definido como el conjunto de datos iniciales que pueden afectar a la solución numérica en el nivel de tiempo $n + 1$.

En esta memoria, estudiamos esquemas numéricos de un paso. Por lo tanto, la solución exacta que se traslada con velocidad positiva c , se propaga una distancia $c\Delta t$, en un solo paso de tiempo. Para que en el esquema influyan solo las celdas adyacentes, se tiene que cumplir que $c\Delta t \leq \Delta x$, esto es, $c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$, que es condición necesaria para que la recta característica esté dentro del dominio de dependencia numérico. Además, incluyendo el caso en el que la velocidad de propagación sea negativa, $c < 0$, se tiene que cumplir que

$$\left| c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1, \quad (4.12)$$

donde $\left| c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right|$ se denomina **número de Courant** y mide la fracción de una celda de la malla por la que se propaga la información en un paso de tiempo. En general, veremos que una condición necesaria para la estabilidad de un método de volúmenes finitos es que el dominio de dependencia numérico contenga el dominio de dependencia analítico. Esto se

traduce en que la estabilidad requerirá una condición CFL del tipo (4.12). Así, en el ejemplo 4.2 vimos que el esquema numérico considerado es estable si se verifica $-1 \leq c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 0$.

La condición CFL debe su nombre a los matemáticos Courant, Friedrichs y Lewy que la introdujeron en el transcurso de la demostración de la convergencia de un método numérico, en concreto, el método de diferencias finitas. Se puede consultar dicho estudio en [5].

4.3.2 Análisis de la estabilidad de Von Neumann

En este apartado, emplearemos el subíndice j para denotar $x_j = j\Delta x$ en lugar del subíndice i para que no haya confusión con el número complejo $i = \sqrt{-1}$. En la celda c_j y para el tiempo t_n , u_j^n representa una función definida sobre una malla para el problema de Cauchy. Sea Δx la longitud de las celdas de la malla, entonces su transformada de Fourier visto en [15] viene dada por

$$\bar{u}^n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi j\Delta x} u_j^n \Delta x, \quad (4.13)$$

donde $\xi \in \left[-\frac{\pi}{\Delta x}, \frac{\pi}{\Delta x}\right]$ y $\bar{u}^n\left(-\frac{\pi}{\Delta x}\right) = \bar{u}^n\left(\frac{\pi}{\Delta x}\right)$. Y la transformada de Fourier inversa viene dada por

$$u_j^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\pi}{\Delta x}}^{\frac{\pi}{\Delta x}} e^{i\xi j\Delta x} \bar{u}^n(\xi) d\xi. \quad (4.14)$$

Tomando la norma L^2 como fue definida en la expresión (4.1) para funciones continuas y en la expresión (4.2) para funciones discretas, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 4.1 (Identidad de Parseval). *Sea $\bar{u}^n : \left[-\frac{\pi}{\Delta x}, \frac{\pi}{\Delta x}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ una función de periodo $\frac{2\pi}{\Delta x}$, dada por la serie (4.13) con coeficientes u_j^n dados por la igualdad (4.14). Entonces*

$$\|\bar{u}^n(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \|u^n\|_2^2. \quad (4.15)$$

Demostración. Apliquemos la norma $L^2(\mathbb{R})$ a la función periódica \bar{u}^n en el sentido de la

4. Convergencia, precisión y estabilidad

definición 4.2, y usando propiedades de los números complejos, obtenemos

$$\begin{aligned}
\|\bar{u}^n(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \int_{-\frac{\pi}{\Delta x}}^{\frac{\pi}{\Delta x}} |\bar{u}^n(\xi)|^2 d\xi \\
&= \int_{-\frac{\pi}{\Delta x}}^{\frac{\pi}{\Delta x}} \overline{\bar{u}^n(\xi)} \bar{u}^n(\xi) d\xi \\
&= \int_{-\frac{\pi}{\Delta x}}^{\frac{\pi}{\Delta x}} \overline{\bar{u}^n(\xi)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi j \Delta x} u_j^n \Delta x d\xi \\
&= \Delta x \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\pi}{\Delta x}}^{\frac{\pi}{\Delta x}} e^{-i\xi j \Delta x} \overline{\bar{u}^n(\xi)} d\xi u_j^n \\
&= \Delta x \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\pi}{\Delta x}}^{\frac{\pi}{\Delta x}} e^{i\xi j \Delta x} \bar{u}^n(\xi) d\xi u_j^n \\
&= \Delta x \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \overline{u_j^n} u_j^n \\
&= \|u^n\|_2^2.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

□

De esta forma, por la desigualdad (4.10) y por la identidad de Parseval (4.16), si se demuestra la estabilidad para la transformada de Fourier, inmediatamente, está demostrada para la función original.

De forma genérica, sabemos que un esquema de volúmenes finitos de un paso se define como

$$u_j^{n+1} = u_j^n - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (\phi(u_j^n, u_{j+1}^n) - \phi(u_{j-1}^n, u_j^n)). \tag{4.17}$$

Para simplificar notación, denotamos $\mu = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$. Centrándonos en nuestro estudio de problemas lineales podemos escribir el esquema (4.17) como sigue

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \mu (\alpha u_{j-1}^n + \beta u_j^n + \gamma u_{j+1}^n) = (1 - \mu\beta)u_j^n - \mu\alpha u_{j-1}^n - \mu\gamma u_{j+1}^n, \tag{4.18}$$

donde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, y sustituyendo la ecuación (4.14) en la expresión (4.18), se obtiene que

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\pi}{\Delta x}}^{\frac{\pi}{\Delta x}} e^{i\xi j \Delta x} \left[(1 - \mu\beta) - \mu\alpha e^{-i\xi \Delta x} - \mu\gamma e^{i\xi \Delta x} \right] \bar{u}^n(\xi) d\xi. \tag{4.19}$$

Aplicando la definición de la transformada de Fourier inversa, dada por la ecuación (4.14),

en el tiempo t_{n+1} , de la ecuación (4.19) resulta que

$$\bar{u}^{n+1}(\xi) = \left[(1 - \mu\beta) - \mu\alpha e^{-i\xi\Delta x} - \mu\gamma e^{i\xi\Delta x} \right] \bar{u}^n(\xi).$$

Denotando $g(\xi\Delta x) = (1 - \mu\beta) - \mu\alpha e^{-i\xi\Delta x} - \mu\gamma e^{i\xi\Delta x}$, entonces

$$\bar{u}^{n+1}(\xi) = g(\xi\Delta x) \bar{u}^n(\xi). \quad (4.20)$$

La ecuación (4.20) muestra que para esquemas numéricos de un paso, la solución en un tiempo concreto es igual a multiplicar la solución en el instante de tiempo previo por un factor denominado **factor de amplificación**, que corresponde con la magnitud en la que avanza la solución en un paso de tiempo. De la ecuación (4.20) de forma recursiva, se obtiene que

$$\bar{u}^{n+1}(\xi) = g(\xi\Delta x)^n \bar{u}^0(\xi).$$

En esta memoria, el factor de amplificación g es una función que depende exclusivamente de $\xi\Delta x$. Entonces, se tiene el siguiente teorema demostrado y visto con más detalle para métodos de diferencias finitas en [15], cuya demostración se podría extender a los esquemas de volúmenes finitos que estamos estudiando.

Teorema 4.2. *Un esquema de volúmenes finitos de un paso es estable si y solo si $|g(\xi\Delta x)|^n \leq 1$.*

Este teorema muestra que para determinar la estabilidad de un esquema de volúmenes finitos de un paso, sólo se necesita considerar el correspondiente factor de amplificación. En ello consiste el análisis de la estabilidad de Von Neumann.

Consideremos algunos ejemplos de esquemas numéricos para determinar su estabilidad mediante el análisis de Von Neumann.

Ejemplo 4.3. *Consideremos el esquema numérico (4.5). Sustituimos la ecuación (4.14) en el esquema numérico considerado y se obtiene que*

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\pi}{\Delta x}}^{\frac{\pi}{\Delta x}} e^{i\xi j\Delta x} \left(1 - c \frac{\Delta t}{\Delta x} e^{i\xi\Delta x} + c \frac{\Delta t}{\Delta x} e^{-i\xi\Delta x} \right) \bar{u}^n(\xi) d\xi.$$

Por tanto, resulta que

$$\bar{u}^{n+1}(\xi) = \left(1 - c \frac{\Delta t}{\Delta x} e^{i\xi\Delta x} + c \frac{\Delta t}{\Delta x} e^{-i\xi\Delta x} \right) \bar{u}^n(\xi),$$

4. Convergencia, precisión y estabilidad

donde el factor de amplificación viene dado por

$$\begin{aligned} g(\xi \Delta x) &= 1 - c \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(e^{i\xi \Delta x} - e^{-i\xi \Delta x} \right) \\ &= 1 - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (2i \sin(\xi \Delta x)). \end{aligned}$$

Como el factor de amplificación es un número complejo, consideremos $|g(\xi \Delta x)|^2$, esto es,

$$|g(\xi \Delta x)|^2 = 1 + 4c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2(\xi \Delta x).$$

De donde, concluimos que $|g(\xi \Delta x)| > 1$ aún cumpliéndose la confción CFL. Entonces, concluimos que este esquema numérico para la ecuación de transporte es inestable.

En el siguiente ejemplo, consideramos el esquema numérico dado por la expresión (4.6).

Ejemplo 4.4. Consideremos el esquema numérico de Lax-Friedrichs dado por la expresión (4.6). Sustituimos la ecuación (4.14) en el esquema numérico considerado y se obtiene que

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\pi}{\Delta x}}^{\frac{\pi}{\Delta x}} e^{i\xi j \Delta x} \left[\left(\frac{1}{2} - c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) e^{i\xi \Delta x} + \left(\frac{1}{2} + c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) e^{-i\xi \Delta x} \right] \bar{u}^n(\xi) d\xi.$$

Por tanto, resulta que

$$\bar{u}^{n+1}(\xi) = \left[\left(\frac{1}{2} - c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) e^{i\xi \Delta x} + \left(\frac{1}{2} + c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) e^{-i\xi \Delta x} \right] \bar{u}^n(\xi),$$

donde el factor de amplificación viene dado por

$$\begin{aligned} g(\xi \Delta x) &= \left(\frac{1}{2} - c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) e^{i\xi \Delta x} + \left(\frac{1}{2} + c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) e^{-i\xi \Delta x} \\ &= \frac{1}{2} \left(e^{i\xi \Delta x} + e^{-i\xi \Delta x} \right) - c \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(e^{i\xi \Delta x} - e^{-i\xi \Delta x} \right) \\ &= \cos(\xi \Delta x) - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (2i \sin(\xi \Delta x)). \end{aligned}$$

Como el factor de amplificación es un número complejo, consideremos $|g(\xi \Delta x)|^2$, esto es,

$$\begin{aligned} |g(\xi \Delta x)|^2 &= \cos^2(\xi \Delta x) + 4c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2(\xi \Delta x) \\ &= (1 - \sin^2(\xi \Delta x)) + 4c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2(\xi \Delta x) \\ &= 1 + \left(4c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} - 1 \right) \sin^2(\xi \Delta x). \end{aligned}$$

De donde deducimos que $|g(\xi\Delta x)|^2 \leq 1$ si y solo si $4c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \leq 1$. Luego, se concluye que el esquema de Lax-Friedrichs es estable si y solo si

$$-\frac{1}{4} \leq c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{4}.$$

En el siguiente ejemplo estudiamos la estabilidad del esquema numérico de Lax-Wendroff dado por la expresión (4.7).

Ejemplo 4.5. Consideremos el esquema numérico de Lax-Wendroff dado por la expresión (4.7). Sustituimos la ecuación (4.14) en el esquema numérico considerado y se obtiene que

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\pi}{\Delta x}}^{\frac{\pi}{\Delta x}} e^{i\xi j\Delta x} \left[\left(1 - \frac{c^2\Delta t^2}{\Delta x^2}\right) + \left(\frac{c^2\Delta t^2}{2\Delta x^2} - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}\right) e^{i\xi\Delta x} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{c^2\Delta t^2}{2\Delta x^2} + \frac{c\Delta t}{2\Delta x}\right) e^{-i\xi\Delta x} \right] \bar{u}^n(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Por tanto, resulta que

$$\bar{u}^{n+1}(\xi) = \left[\left(1 - \frac{c^2\Delta t^2}{\Delta x^2}\right) + \left(\frac{c^2\Delta t^2}{2\Delta x^2} - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}\right) e^{i\xi\Delta x} + \left(\frac{c^2\Delta t^2}{2\Delta x^2} + \frac{c\Delta t}{2\Delta x}\right) e^{-i\xi\Delta x} \right] \bar{u}^n(\xi)$$

donde el factor de amplificación viene dado por

$$\begin{aligned} g(\xi\Delta x) &= \left(1 - \frac{c^2\Delta t^2}{\Delta x^2}\right) + \left(\frac{c^2\Delta t^2}{2\Delta x^2} - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}\right) e^{i\xi\Delta x} + \left(\frac{c^2\Delta t^2}{2\Delta x^2} + \frac{c\Delta t}{2\Delta x}\right) e^{-i\xi\Delta x} \\ &= 1 - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} (e^{i\xi\Delta x} - e^{-i\xi\Delta x}) + \frac{c^2\Delta t^2}{2\Delta x^2} (e^{i\xi\Delta x} - 2 + e^{-i\xi\Delta x}) \\ &= 1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x} (i \sin(\xi\Delta x)) + \frac{c^2\Delta t^2}{\Delta x^2} (\cos(\xi\Delta x) - 1). \end{aligned}$$

A continuación, denotamos $r = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$, luego, se obtiene que

$$g(\xi\Delta x) = 1 - ir \sin(\xi\Delta x) + r^2 (\cos(\xi\Delta x) - 1).$$

Además, también denotamos

$$\begin{aligned} x &= 1 + r^2 (\cos(\xi\Delta x) - 1), \\ y &= -r \sin(\xi\Delta x). \end{aligned}$$

De esta forma, el factor de amplificación viene dado por $g(\xi\Delta x) = x + iy$, número com-

4. Convergencia, precisión y estabilidad

plejo expresado en su forma binómica. Luego, operando tenemos que

$$\begin{aligned} x^2 + r^2 y - 2(1 - r^2)x &= r^4 \cos^2(\xi \Delta x) + 2r^2(1 - r^2) \cos(\xi \Delta x) + (1 - r^2)^2 \\ &\quad + r^4 \sin^2(\xi \Delta x) - 2r^2(1 - r^2) \cos(\xi \Delta x) - 2(1 - r^2)^2 \\ &= r^4 - (1 - r^2)^2, \end{aligned}$$

esto es,

$$x^2 + r^2 y - 2(1 - r^2)x - r^4 + (1 - r^2)^2 = 0,$$

o equivalentemente,

$$\frac{(x - (1 - r^2))^2}{r^4} + \frac{y}{r^2} = 1. \quad (4.21)$$

Así, hemos obtenido que la ecuación (4.21) es una elipse en el plano complejo de centro $(1 - r^2, 0)$, semieje en x de longitud r^2 y semieje en y de longitud $|r|$.

Para garantizar la estabilidad del esquema numérico considerado se tiene que cumplir que $|g(\xi \Delta x)| \leq 1$ y como el factor de amplificación es un número complejo, consideramos $|g(\xi \Delta x)|^2 \leq 1$, esto es, $x^2 + y^2 \leq 1$. Entonces, para obtener la condición que garantiza la estabilidad del esquema numérico, la elipse tiene que estar contenida en su totalidad dentro de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. Para ello, veamos en que puntos intersecan la elipse (4.21) y la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 1, es decir, los puntos (x, y) que satisfacen las dos ecuaciones siguientes.

$$\begin{aligned} x^2 + r^2 y - 2(1 - r^2)x - r^4 + (1 - r^2)^2 &= 0, \\ x^2 + y^2 &= 1. \end{aligned}$$

Resolviendo, obtenemos una única raíz $(x, y) = (1, 0)$. Este punto de intersección tiene que ser un punto de la frontera de la elipse y así, se obtiene la condición

$$p^2 \leq 1,$$

siendo p^2 la longitud del semieje x de la elipse. Equivalentemente,

$$|p| \leq 1.$$

Por tanto, el esquema numérico es estable si y solo si $-1 \leq r \leq 1$, esto es, $-1 \leq c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$. Entonces, el esquema de Lax-Wendroff es estable si se verifica exactamente la condición CFL vista en el apartado 4.3.1.

Simulaciones numéricas

En este capítulo presentaremos varios experimentos numéricos y comprobaremos que los resultados concuerdan con la teoría estudiada en los capítulos anteriores. Introduciremos las condiciones de contorno que posteriormente serán empleadas para implementar estos experimentos numéricos, resueltos mediante simulaciones numéricas con el ordenador. Para ello, haremos uso del lenguaje de programación Julia, dentro del entorno de ejecución Jupyter Notebook.

5.1 Condiciones de contorno

Las condiciones de contorno deben especificarse de forma adecuada para que un problema formulado en términos de EDP esté bien planteado. Como norma general, el saber cuál es la estructura de las rectas características, nos proporciona cuantas condiciones de contorno se necesitan en función del método numérico empleado. Un enfoque sería extender el dominio computacional para incluir celdas adicionales en cada extremo, denominadas **celdas fantasmas**, cuyos valores se establecen al comienzo de cada paso de tiempo y que en general dependen de los datos sobre la frontera y de las soluciones interiores. En esta memoria, se van a estudiar solamente esquemas numéricos de un paso. Por ello, no será necesario más de una celda fantasma en cada extremo.

5. Simulaciones numéricas

Supongamos que $[a, b]$ es el dominio computacional del problema, subdividido en las celdas c_1, c_2, \dots, c_N donde $c_i = (x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}})$, para $i = 1, \dots, N$. La figura 5.1 muestra una malla con una celda fantasma en cada extremo.

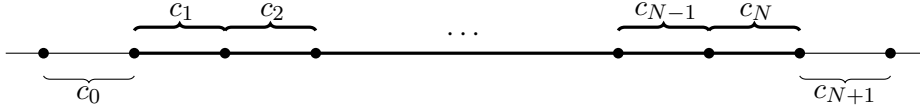


Figura 5.1: El dominio computacional $[a, b]$ junto con una celda fantasma en cada extremo.

En principio, usaremos condiciones de contorno **periódicas**, esto es, para cada instante de tiempo t_n , impondremos la condición $u_0^n = u_N^n$ si las rectas características tienen pendiente positiva o la condición $u_{N+1}^n = u_1^n$, en caso contrario.

Además, usaremos condiciones de contorno **Neumann** homogéneas, donde impondremos que la derivada direccional de la función u , variable conservativa, en la dirección del vector normal unitario n , tal y como fue definida en (2.26), sea conocida, por ejemplo igual a cero. Luego, esta condición de contorno viene dada por

$$\frac{\partial u}{\partial n} = n \cdot Du = 0, \text{ para todo } x \in \partial\Omega,$$

donde $\partial\Omega$ es la frontera del dominio espacial.

5.2 Lenguaje de programación Julia

Julia es un lenguaje de programación de código abierto desde el año 2012 que comenzó a desarrollarse en el Instituto Tecnológico de Massachusetts en 2009. Impulsado por la necesidad y creado con el objetivo de englobar en un único lenguaje de programación: la velocidad de C, la notación matemática obvia de Matlab, la programación genérica de Python, la facilidad para la estadística de R... A día de hoy, es uno de los lenguajes de programación más rápidos de su especie, con rendimiento cercano al lenguaje C. Este rendimiento se debe al empleo de un compilador JIT ("Just In Time") en lugar de un intérprete, que se hace notar significativamente en el aumento de la velocidad de los bucles, funciones recursivas... Además, Julia es un programa dinámico, lo que conlleva una mayor comodidad y productividad del programador. En definitiva, Julia es un lenguaje construido desde

cero para un alto rendimiento, incluso las operaciones básicas de bajo nivel están implementadas en el propio lenguaje. En [14], se muestra cómo usar Julia para aprovechar su máximo rendimiento y algunas de las herramientas integradas en Julia con este propósito.

Julia y Python

La sintaxis del lenguaje Julia es similar a la usada por otros como Matlab o Python. Julia tiene un rendimiento netamente superior a éstos. Además es muy flexible e incluso si fuese necesario, se puede usar Python dentro de Julia. Quizás, no es buena idea con lo que respecta a la velocidad y la eficiencia pero puede emplearse. Para ello, el paquete *PyCall*, permite importar código Python en Julia, para más detalle sobre este paquete consultar [10] (capítulo 6).

Por otro lado, Julia tiene una mayor sintaxis matemática, esto es, se parece más a la forma en que se escriben las fórmulas matemáticas fuera del mundo de la informática. Ambos lenguajes pueden realizar operaciones en paralelo, pero la paralelización de Julia es más perfeccionista, la sintaxis es menos pesada. Estas son algunas de las diferencias entre Julia y Python pero por supuesto, Julia está muy influenciada por Python, fue diseñada posteriormente e intenta unir lo mejor de otros muchos idiomas.

Jupyter Notebook es un entorno de trabajo interactivo implementado en Python, pero no solo se puede escribir y ejecutar en este idioma: también se puede ejecutar código en cualquier otro lenguaje siempre que éste disponga de un núcleo al que Jupyter pueda acceder. El núcleo por defecto es *IPython*, un intérprete de líneas de comandos que permite trabajar con Python. Pero gracias a núcleos adicionales, es posible trabajar también con otros lenguajes como Julia, C++ o R. Por ejemplo, para usar Julia desde Jupyter Notebook, se necesita instalar el paquete *IJulia* desde el administrador de paquetes de Julia y una vez instalada, seleccionamos el núcleo desde la barra de menú de Jupyter.

5.3 Test numéricos

En esta sección procederemos a resolver los esquemas numéricos estudiados en el capítulo anterior mediante simulaciones numéricas para distintos ejemplos. También, se introducirá una simulación numérica específicamente desarrollada con la intención de modelar

5. Simulaciones numéricas

el movimiento de células a través de una vía migratoria en el cerebro. Todos estos test numéricos son implementados en una dimensión. Aunque serían generalizables al caso n -dimensional (por ejemplo, $n = 2$), esto requeriría un esfuerzo adicional que excede a los propósitos de este trabajo.

5.3.1 Primeros test

En esta sección vamos a realizar experimentos que ratifican algunos resultados vistos en la teoría. Estos experimentos van a ser aplicados a la ecuación de transporte dada por

$$u_t(x, t) + c u_x(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (5.1)$$

siendo c es la velocidad de propagación. En el primer ejemplo, nos centraremos en el problema de Cauchy cuya condición inicial viene dada por la ecuación (2.7), para un dato inicial no regular (infinitamente derivable). En el segundo ejemplo, nos centraremos en el problema de Riemann cuya condición inicial viene dada por la ecuación (2.13), ambos problemas estudiados en el capítulo 2. Además, a partir de estas condiciones iniciales, obtenemos la solución exacta en cualquier instante de tiempo posterior, dada por la expresión (2.10) para el problema de Cauchy genérico y por la expresión (2.14) para el problema de Riemann. Entonces, comparamos en cada instante de tiempo la solución exacta con la solución aproximada obtenida para cada uno de los esquemas numéricos estudiados en el capítulo 4.

Ejemplo 1

En este ejemplo consideramos el dominio espacial $\Omega = [0, 20]$, el paso en espacio $\Delta x = 0.1$, el paso en tiempo $\Delta t = 0.02$, la velocidad de propagación negativa $c = -1$ (para los que se verifica la condición CFL) y la condición inicial dada por

$$u_0(x) = e^{-(x-15)^2}.$$

Para estos datos calculamos las soluciones numéricas de la ecuación de transporte (5.1) con condiciones de contorno periódicas, aplicando el método descentrado con flujo aguas abajo, el método de lax-Friedrichs y por último, el método de Lax-Wendroff. Para ello, hemos empleado el lenguaje de programación Julia. Así, obtenemos los resultados de las

figuras 5.2 y 5.3, para cada uno de los métodos estudiados junto con la solución exacta para cada instante de tiempo considerado.

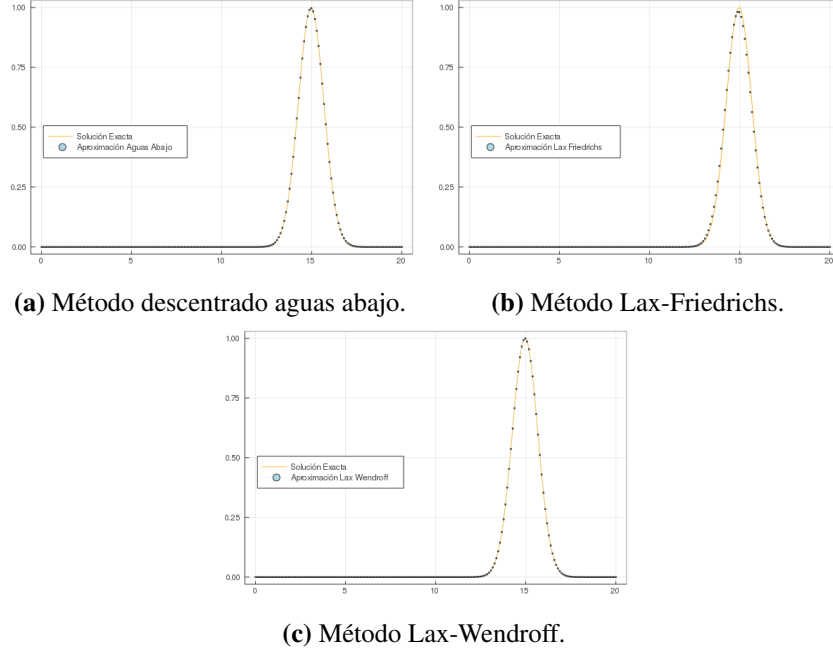


Figura 5.2: Simulación numérica en el tiempo $t_2 = 2\Delta t$.

Observamos cómo, efectivamente, los resultados teóricos concuerdan con las simulaciones numéricas como era de esperar. En el capítulo anterior, vimos que el método descentrado y el de Lax-Friedrichs, ambos, tienen orden de convergencia uno, en cambio, el método de Lax-Wendroff tiene orden de convergencia dos. Por lo tanto, como se puede apreciar en las figuras 5.2 y 5.3 (donde se reproduce el mismo experimento pero en los instantes de tiempo $t_2 = 0.04$ y $t_{40} = 0.8$), el método de Lax-Wendroff es el que proporciona una mejor aproximación de la solución de la ecuación (5.1) a medida que el tiempo evoluciona. Por otra parte, también es destacable resaltar el adelanto que presenta la solución numérica del método de Lax-Friedrichs respecto a la solución exacta en el instante de tiempo $t_{40} = 0.8$.

Ejemplo 2

En este ejemplo consideramos el dominio espacial $\Omega = [0, 30]$, el paso en espacio $\Delta x = 0.12$, el paso en tiempo $\Delta t = 0.02$, la velocidad de propagación positiva $c = 1$ (para los

5. Simulaciones numéricas

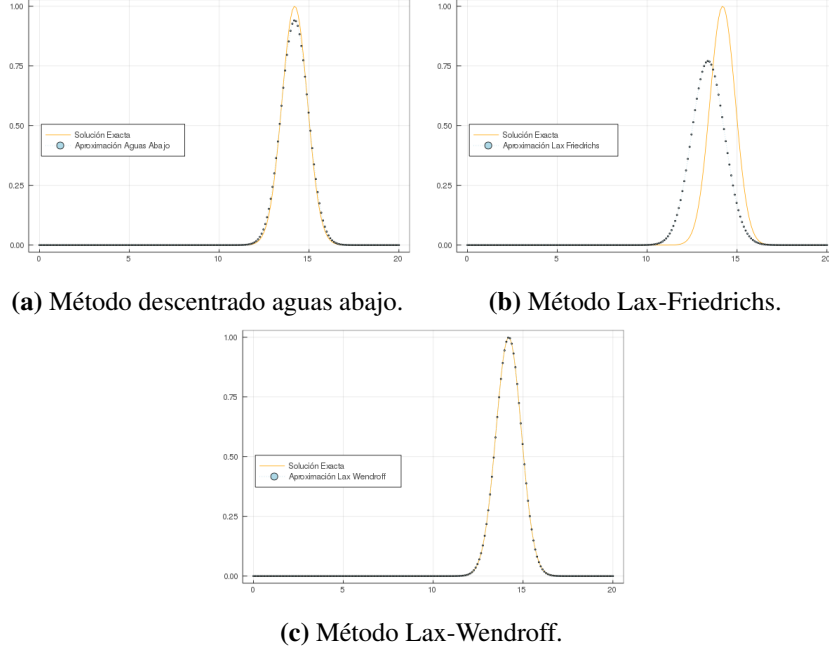


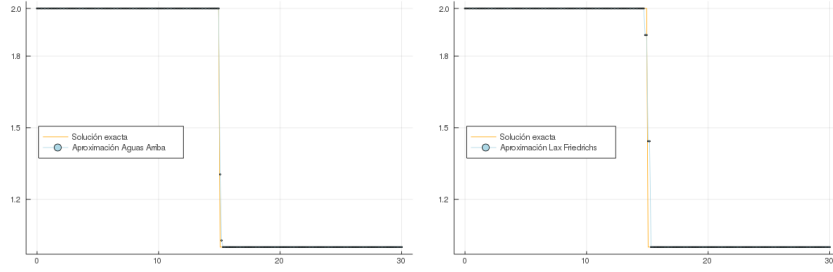
Figura 5.3: Simulación numérica en el tiempo $t_{40} = 40\Delta t$.

que se verifica la condición CFL) y la condición inicial dada por la función discontinua

$$u_0(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 15, \\ 1 & \text{si } x > 15. \end{cases}$$

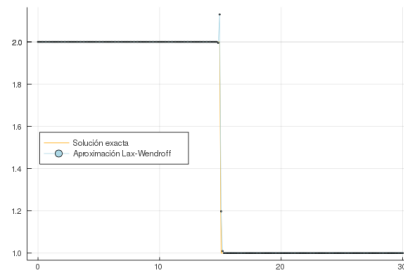
Para estos datos calculamos las soluciones numéricas de la ecuación de transporte (5.1) con condiciones de contorno Neumann homogéneas, aplicando el método descentrado con flujo aguas arriba, el método de Lax-Friedrichs y por último, el método de Lax-Wendroff. Al igual que en el ejemplo anterior, hemos empleado el lenguaje de programación Julia. Entonces, obtenemos los resultados de las figuras 5.4 y 5.5 (donde se reproduce el mismo experimento pero en los instantes de tiempo $t_2 = 0.04$ y $t_{10} = 0.2$), para cada uno de los métodos nombrados junto con la solución exacta y para cada instante de tiempo considerado.

En la figura 5.5 (experimento en el instante de tiempo $t_{10} = 0.2$), se puede apreciar que el método aguas arriba aproxima bien la solución pero contiene una pequeña disipación numérica entorno a la discontinuidad, en donde disminuye la precisión. Aunque mayor es la disipación numérica que provoca el método de Lax-Friedrichs en dicha discontinuidad. Por otra parte, es destacable resaltar el hecho de que el método de Lax-Wendroff provoque las



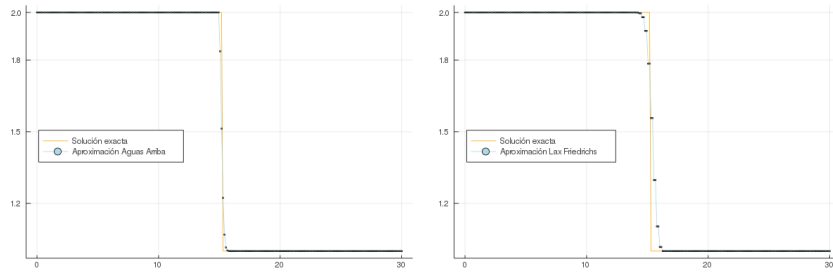
(a) Método descentrado aguas arriba.

(b) Método Lax-Friedrichs.



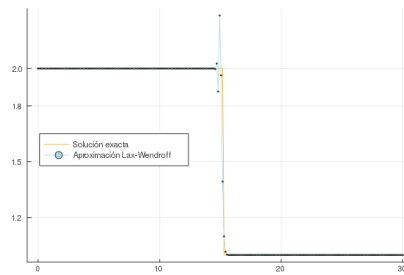
(c) Método Lax-Wendroff.

Figura 5.4: Simulación numérica en el tiempo $t_2 = 2\Delta t$.



(a) Método descentrado aguas arriba.

(b) Método Lax-Friedrichs.



(c) Método Lax-Wendroff.

Figura 5.5: Simulación numérica en el tiempo $t_{10} = 10\Delta t$.

5. Simulaciones numéricas

denominadas oscilaciones espurias en las regiones próximas a la discontinuidad. Este hecho es bien conocido y está documentado en [12]. Sin embargo, es más preciso en aquellos puntos donde la solución es más regular.

5.3.2 Migración celular en el cerebro

El descubrimiento de la neurogénesis en la etapa adulta abre puertas hacia un nuevo campo de investigación para proporcionar mejores tratamientos ante enfermedades cerebrales. Ciertas áreas del cerebro tienen una mayor actividad neurogénica, por ejemplo, la zona subventricular, delimitadora de los ventrículos. Desde esta zona del cerebro se inicia una larga ruta de migración, denominada la vía rostral migratoria. Entre otras, las células que migran por esta vía se denominan células gliales y se dirigen al bulbo olfatorio. Estas células colaboran a generar precursores neuronales, los neuroblastos (ver [3]). En definitiva, las células gliales son el soporte de la migración de los neuroblastos hacia el bulbo olfatorio, les proporcionan factores de crecimiento que favorecen su proceso de migración. Para conocer más consultar [4].

Según [4], el movimiento de los neuroblastos a través de la vía rostral migratoria depende de la densidad de células gliales. A continuación, presentamos un modelo matemático que se ajusta a esa idea y que hemos desarrollado específicamente con la intención de reproducir computacionalmente este fenómeno de migración de las células gliales y neuroblastos hacia el bulbo olfatorio.

El bulbo olfatorio lo representamos por la función

$$B(x) = e^{-10(x-1)^2}.$$

El movimiento de las células gliales y los neuroblastos hacia dicho bulbo olfatorio se registran por las ecuaciones de transporte dadas por

$$v_t(x, t) + c_g(x) v_x(x, t) = 0, \quad x \in [0, 1], \quad t \in [0, T], \quad (5.2)$$

$$u_t(x, t) + c_n(x) u_x(x, t) = 0, \quad x \in [0, 1], \quad t \in [0, T], \quad (5.3)$$

donde v y u representan la densidad de células gliales y de neuroblastos, respectivamente, en cada punto del dominio espacial $\Omega = [0, 1]$ y para cada instante de tiempo. Además, c_g y c_n representan la velocidad de transporte de las glías y de los neuroblastos, datos conocidos.

En concreto, la de las glías está dada por el gradiente de la función que representa al bulbo olfatorio:

$$c_g(x) = B'(x) = -20(x-1)e^{-10(x-1)^2}.$$

Para los neuroblastos, la velocidad será inferior a la velocidad de las células gliales, luego, introduciremos un término del tipo $p c_g(x)$, para $p \in [0, 1]$. Pero además, sabemos que la velocidad de propagación de los neuroblastos aumenta en función de la densidad de glías presentes. Luego, finalmente, teniendo en cuenta estas dos consideraciones, la velocidad de los neuroblastos vendrá dada por la combinación convexa

$$c_n(x) = \lambda (p c_g(x)) + (1 - \lambda)(v(x, t) - u(x, t)), \quad (5.4)$$

para $p, \lambda \in [0, 1]$. En el segundo sumando, en lugar de considerar únicamente la densidad de las glías, implementamos la diferencia entre las densidades de ambas células para que en el bulbo olfatorio, la densidad de las gliales no sea superada por la de los neuroblastos.

Entonces, aproximamos la solución de ambas ecuaciones de transporte mediante el método de volúmenes finitos, en particular, el método descentrado, con flujos aguas arriba si la velocidad de propagación es positiva y con flujo aguas abajo, en el caso contrario. Para ello, hemos empleado el lenguaje de programación Julia. A continuación, especificaremos la condición inicial empleada y además, usaremos condiciones de contorno Neumann homogéneas para cada ecuación.

En los siguientes ejemplos vamos a considerar los siguientes datos. El dominio espacial $\Omega = [0, 1]$ con paso en espacio $\Delta x = 0.025$. El paso en tiempo $\Delta t = 0.0005$ con un total de $N_t = 300$ instantes, luego el transporte de las células se produce en 0.15 unidades de tiempo. La densidad inicial de las glías será igual a $v(x, 0) = 1$ y la de los neuroblastos $u(x, 0) = 0.7$, para $x \in \Omega$.

En primer lugar, para estos datos resolvemos numéricamente la ecuación de transporte de glías (5.2) para cada uno de los instantes de tiempo considerado. La solución obtenida se utilizará para posteriormente, calcular la densidad de los neuroblastos resolviendo la ecuación (5.3). De esta forma, en una misma gráfica para cada caso considerado, observamos la variación de la densidad de glías y de neuroblastos hacia el bulbo olfatorio a medida que el tiempo evoluciona, que nos puede servir para conocer el movimiento que siguen ambos tipos de células.

5. Simulaciones numéricas

En el primer ejemplo, consideramos $p = 0.2$ y $\lambda = 0.1$. Esto significa que la velocidad de los neuroblastos está impulsada en mayor parte por la diferencia de densidades. Se puede apreciar en la figura 5.6 que se alcanza en la región del bulbo olfatorio un valor máximo para la densidad de las glías de 3.983 unidades y para la densidad de los neuroblastos de 3.958 unidades.

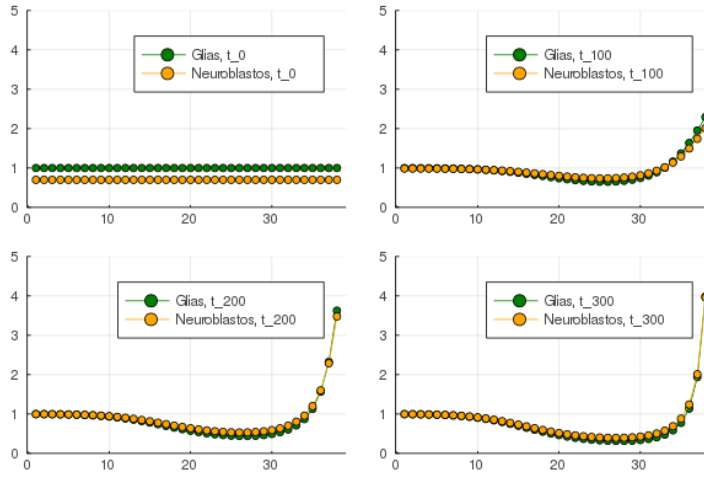


Figura 5.6: Simulación numérica para $p = 0.2$ y $\lambda = 0.1$.

En cambio, en el segundo ejemplo, consideramos el mismo valor del parámetro $p = 0.2$ pero con el valor de $\lambda = 0.9$, entonces la velocidad de los neuroblastos se ve afectada mayoritariamente por el primer sumando de la combinación convexa (5.4), $p c_g(x) = 0.2 c_g(x)$. Por tanto, esto provoca una velocidad de propagación de los neuroblastos muy lenta y en consecuencia, el bulbo olfatorio es alcanzado por una cantidad pequeña de neuroblastos. Como se puede apreciar en la figura (5.7), que se alcanza en la región del bulbo olfatorio un valor máximo para la densidad de las glías de 3.983 unidades y para la densidad de los neuroblastos de 2.921 unidades.

Por último, consideramos $\lambda = 0.9$. De esta forma, sobre la velocidad de propagación de los neuroblastos actúa muy poco la diferencia entre las densidades de las células, como se considero en el ejemplo de la figura 5.7. Pero en este caso, a diferencia del segundo ejemplo, consideramos $p = 0.9$, por tanto, se produce una propagación rápida de los neuroblastos. Así pues, el bulbo olfatorio es alcanzado por una cantidad elevada de neuroblastos. Como se puede apreciar en la gráfica de la figura 5.8, que se alcanza en la región del bul-

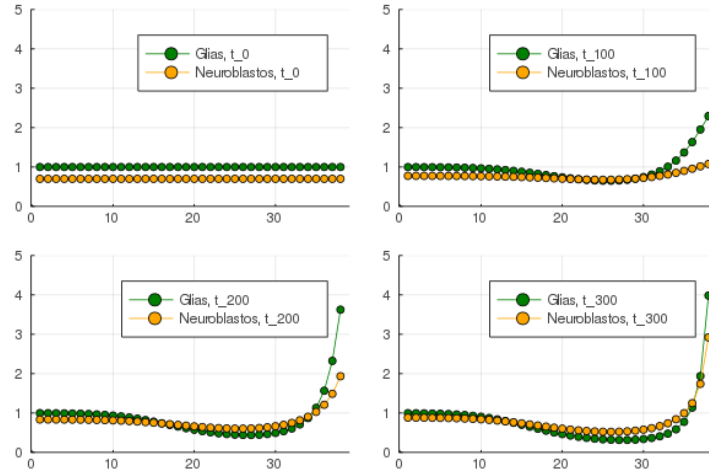


Figura 5.7: Simulación numérica para $p = 0.2$ y $\lambda = 0.9$.

bo olfatorio un valor máximo para la densidad de las glías de 3.983 unidades y para la densidad de los neuroblastos de 3.960 unidades.

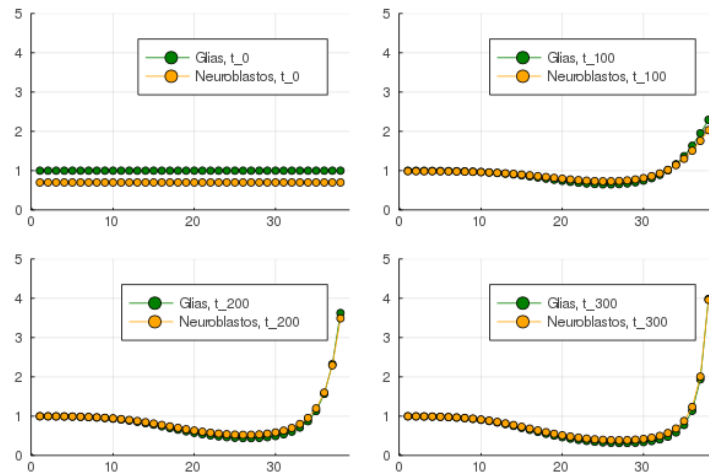


Figura 5.8: Simulación numérica para $p = 0.9$ y $\lambda = 0.9$.

Entonces, en el primer y tercer caso implementado, ejemplos correspondientes a las gráficas de las figuras 5.6 y 5.8, respectivamente, se ha conseguido que la región del bulbo olfatorio sea alcanzada por una densidad alta de neuroblastos. Objetivo de esta simulación numérica ya que recordemos que los neuroblastos son las células precursoras de las neuronas que son las que van a permitir que se efectúen las funciones deseadas. Por contra, en el

5. Simulaciones numéricas

segundo ejemplo, la densidad de neuroblastos en la misma región ha resultado ser inferior en el último instante de tiempo considerado, notándose una diferencia destacable con la densidad de glías.

Conclusiones y proyectos futuros

En este trabajo hemos estudiado un método numérico que no tiene cabida en los contenidos del Grado en Matemáticas: el método de volúmenes finitos para problemas hiperbólicos. Para ello, en el capítulo 2, se han definido las leyes de conservación que al ser completadas con unas condiciones iniciales dan lugar al problema de Cauchy genérico y de Riemann en particular. Para ambos problemas, se ha estudiado su solución. Asimismo, se ha demostrado que la información se propaga a velocidad infinita para la ecuación del calor, problema parabólico, y a velocidad finita para la ecuación de ondas, problema hiperbólico, en el sentido definido en cada caso.

Posteriormente, en el capítulo 3, comenzamos con el estudio de los métodos de volúmenes finitos derivados de la forma integral de las leyes de conservación, como punto de partida. Nos hemos centrado en los métodos de un paso para problemas hiperbólicos lineales. Más concretamente en los esquemas descentrados, deducidos por conocer el comportamiento de la solución del problema de Cauchy a lo largo de las curvas características. Además del método de Godunov, que nos permite también conectar con los resultados estudiados en el capítulo anterior, basado en la solución del problema de Riemann.

Una vez estudiado el método de volúmenes finitos, se han introducido una variedad de esquemas numéricos y hemos estudiado con qué grado de precisión se aproximan a la solución de la ecuación de transporte, ley de conservación, para cada uno de ellos (capítulo

6. Conclusiones y proyectos futuros

4). Entonces, se establecieron propiedades importantes que un método numérico eficiente debe verificar, como lo son el error de consistencia, la consistencia, la estabilidad y consecuentemente, la convergencia. Estas propiedades han sido de interés a la hora de realizar los distintos experimentos numéricos. Pero antes de implementarlos se han introducido dos tipos de condiciones de contorno (capítulo 5), condiciones de contorno periódicas y Neumann homogéneas.

Por último, una vez finalizado el marco teórico de este trabajo, comenzamos su aplicación práctica para resolver ciertos problemas. En primer lugar se resolvieron los esquemas numéricos, para la ecuación de transporte, que fueron introducidos en el capítulo 4 y luego, se modeló un problema real, la migración celular a través de una vía migratoria situada en el cerebro (capítulo 5). Este problema de migración celular ha sido modelado expresamente para esta memoria y, hasta donde conocemos, no ha sido publicado hasta el momento. Todos estos experimentos numéricos son programados usando un entorno informático novedoso, concretamente el lenguaje de programación Julia dentro del entorno interactivo de ejecución Jupyter Notebook.

En los test numéricos presentados, comparamos la solución exacta de la ecuación del transporte y su solución numérica mediante cada uno de los esquemas numéricos estudiados. En el primer ejemplo, resolviendo un problema de Cauchy con dato inicial muy regular y en el segundo, un problema de Riemann, entonces se muestra la ventaja que tienen cada uno de los esquemas. Finalmente, se realizó una serie de simulaciones numéricas que modelan el problema de transporte, de las células glías y posterior de los neuroblastos, hacia el bulbo olfatorio. Estas simulaciones obtuvieron el objetivo de este estudio: una densidad abundante de los neuroblastos en el bulbo olfatorio.

Trabajos futuros

En este trabajo se han introducido unas ecuaciones en derivadas parciales, las leyes de conservación, y posteriormente, el método de volúmenes finitos para aproximar su solución, incluyendo únicamente problemas unidimensionales y lineales. Nuestro objetivo era consolidar un buen entendimiento de conceptos respecto al método de volúmenes finitos que pueden comprenderse mejor cuando se modelan problemas hiperbólicos de este tipo.

Nos gustaría realizar un estudio teórico para otros tipos de problemas hiperbólicos. En un primer lugar, extendernos a dimensiones mayores, y en segundo lugar, para casos no lineales. El objetivo de este estudio sería obtener conclusiones sobre como de bien aproxima el método de volúmenes finitos a este tipo de problemas hiperbólicos. Entonces, esto nos permitiría estudiar un mayor número de ecuaciones en derivadas parciales hiperbólicas que modelen múltiples disciplinas en las que por ejemplo intervienen el transporte de cierto fluido.

Finalmente, en cuanto al modelo matemático que estudia la migración de las células hacia el bulbo olfatorio, nos planteamos introducir variantes. Esto sería, por ejemplo, introducir modelos 2D o 3D y modelar que el bulbo olfatorio se alimente de células que migran por otras vías. Otra de las variantes sería que al mismo tiempo, las células que parten de la zona subventricular se transporten hacia otras zonas del cerebro que también necesiten una regeneración de neuronas, como por ejemplo una zona donde se haya producido una pérdida de neuronas a causa de una lesión cerebral. Todas estas variantes han sido planteadas en la realización del trabajo pero por motivos de tiempo no se han incluido.

Todas estas cuestiones son solo una pequeña parte de las que actualmente numerosos grupos de investigadores se plantean. Además, hasta hace relativamente poco se creía que no se producía una regeneración de neuronas en la etapa adulta y por tanto, no se producía una migración de células para generarlas. Por tanto, a día de hoy, es un campo de investigación muy amplio y muy activo.



Códigos empleados

En este apéndice mostraremos los códigos fuente empleados para realizar las simulaciones numéricas del capítulo 5 con el lenguaje de programación Julia en el entorno de ejecución Jupyter Notebook.

A.1 Test numéricos

Primero, veremos los códigos correspondientes a los test numéricos de la sección 5.3.1. Para la resolución numérica se han empleado los métodos descentrados con flujos aguas abajo para el problema de Cauchy, y con flujos aguas arriba para el problema de Riemann. También se ha calculado la solución numérica de ambos problemas mediante el método de Lax-Friedrichs y el de Lax-Wendroff. Entonces, se presentan los códigos fuente de la resolución numérica para cada uno de estos métodos numéricos empleados. Para el problema de Cauchy se imponen condiciones de contorno periódicas y para el problema de Riemann, condiciones de contorno Neumann homogéneas.

A.1.1 Método descentrado con flujo aguas arriba

En esta sección, encontraremos el código fuente empleado para la resolución numérica de la ecuación de transporte mediante el método descentrado aguas arriba.

A. Códigos empleados

```
1  using OffsetArrays
2  """
3  Ecuación de transporte. MVF. Método descentrado con flujo
    aguas arriba.
4  Dominio espacial : [a,b] intervalo -> celdas: c_1,c_2,...,
    c_nx
5
6  xi : array de nx valores entre a y b espaciados
    uniformemente
7  c : velocidad de propagación
8  u0: array de valores iniciales [u_1^0, u_2^0..., u_{nx}^0]
9  dx, dt: paso en espacio y paso en tiempo
10 nt: número de iteraciones de tiempo
11
12 c_0: celda fantasma
13 Condición de contorno:  $u_0^n = u_1^n$  para cada instante de
    tiempo  $t_n$ 
14
15 """
16 function advection1D_UpwindRiemann_FVM(xi, nx, dt, nt, c, u0
    )
17     dx = xi[2]-xi[1]
18     u = OffsetArray(zeros( (nx+1, nt+1) ), 0:nx, 0:nt)
19     u[1:nx,0] = u0
20     r = c*dt/dx
21     for n=0:nt-1
22         u[0,n] = u[1,n]
23         for i=1:nx
24             u[i,n+1] = u[i,n] - r*(u[i,n]-u[i-1,n])
25         end
26     end
27     return u[1:nx,:]
28 end
```

A.1.2 Método descentrado con flujo aguas abajo

En esta sección, encontraremos el código fuente empleado para la resolución numérica de la ecuación de transporte mediante el método descentrado aguas abajo.

```

1  using OffsetArrays
2  """
3  Ecuación de transporte. MVF. Método descentrado con flujo
    aguas abajo.
4  Dominio espacial : [a,b] intervalo -> celdas: c_1,c_2,...,
    c_nx
5
6  xi : array de nx valores entre a y b espaciados
    uniformemente
7  c : velocidad de propagación
8  u0: array de valores iniciales [u_1^0, u_2^0..., u_{nx}^0]
9  dx, dt: paso en espacio y paso en tiempo
10 nt: número de iteraciones de tiempo
11
12 c_0: celda fantasma
13 Condición de contorno: u_{nx+1}^n = u_1^n para cada instante
    de tiempo t_n
14
15 """
16 function advection1D_AguasAbajo_FVM(xi, dt, nt, c, u0)
17     nx = length(u0)
18     dx = xi[2]-xi[1]
19     u = OffsetArray(zeros( (nx+1, nt+1) ), 1:nx+1, 0:nt)
20     u[1:nx,0] = u0
21     r = c*dt/dx
22     for n=0:nt-1
23         u[nx+1,n] = u[1,n]
24         for i=1:nx
25             u[i,n+1] = u[i,n] - r*(u[i+1,n]-u[i,n])
26         end
27     end
28     return u[1:nx,:]
29 end

```

A. Códigos empleados

A.1.3 Método de Lax-Friedrichs

En esta sección, encontraremos el código fuente empleado para la resolución numérica de la ecuación de transporte mediante el método de Lax-Friedrichs.

```
1  using OffsetArrays
2  """
3  Ecuación de transporte. MVF. Método Lax-Friedrichs.
4  Dominio espacial : [a,b] intervalo -> celdas: c_1,c_2,...,
    c_nx
5
6  xi : array de nx valores entre a y b espaciados
    uniformemente
7  c : velocidad de propagación
8  u0: array de valores iniciales [u_1^0, u_2^0..., u_{nx}^0]
9  dx, dt: paso en espacio y paso en tiempo
10 nt: número de iteraciones de tiempo
11
12 c_0,c_nx+1: celdas fantasmas
13 Condición de contorno: u_0^n = u_nx^n para cada instante de
    tiempo t_n
14 u_nx+1^n = u_1^n para cada instante de tiempo t_n
15
16 """
17 function advection1D_MLF_FVM(xi, dt, nt, c, u0)
18 nx = length(u0)
19 dx = xi[2]-xi[1]
20 u = OffsetArray(zeros( (nx+2, nt+1) ), 0:nx+1, 0:nt)
21 u[1:nx,0] = u0
22 r = c*dt/dx
23 for n=0:nt-1
24 u[0,n] = u[nx,n]
25 u[nx+1,n] = u[1,n]
26 for i=1:nx
27 u[i,n+1] = (1/2)*(u[i+1,n]+u[i-1,n]) - r*(u[i+1,n]-u[i-1,n])
28 end
29 end
30 return u[1:nx,:]
31 end
```

A.1.4 Método de Lax-Wendroff

En esta sección, encontraremos el código fuente empleado para la resolución numérica de la ecuación de transporte mediante el método de Lax-Wendroff.

```

1  using OffsetArrays
2  """
3  Ecuación de transporte. MVF. Método Lax-Wendroff.
4  Dominio espacial : [a,b] intervalo -> celdas: c_1,c_2,...,
    c_nx
5
6  xi : array de nx valores entre a y b espaciados
    uniformemente
7  c : velocidad de propagación
8  u0: array de valores iniciales [u_1^0, u_2^0..., u_{nx}^0]
9  dx, dt: paso en espacio y paso en tiempo
10 nt: número de iteraciones de tiempo
11
12 c_0,c_nx+1: celdas fantasmas
13 Condición de contorno: u_0^n = u_nx^n para cada instante de
    tiempo t_n
14 u_nx+1^n = u_1^n para cada instante de tiempo t_n
15
16 """
17 function advection1D_MLW_FVM(xi, dt, nt, c, u0)
18 nx = length(u0)
19 dx = xi[2]-xi[1]
20 u = OffsetArray(zeros( (nx+2, nt+1) ), 0:nx+1, 0:nt)
21 u[1:nx,0] = u0
22 r = c*dt/dx
23 for n=0:nt-1
24 u[0,n] = u[nx,n]
25 u[nx+1,n] = u[1,n]
26 for i=1:nx
27 u[i,n+1] = u[i,n] - (r/2)*(u[i+1,n]-u[i-1,n]) + ((r^2)/2)*(u
    [i+1,n]-2*u[i,n]+u[i-1,n])
28 end
29 end
30 return u[1:nx,:]

```

A. Códigos empleados

31 | end

A.2 Migración celular en el cerebro

En esta sección presentamos los códigos fuente correspondientes a los resultados obtenidos en la sección 5.3.2.

A.2.1 Migración de las células gliales

A continuación encontramos el código fuente empleado para obtener la resolución numérica correspondiente al problema que modela la migración de las células gliales hacia el bulbo olfatorio.

```
1  using OffsetArrays
2
3  """
4  MVF. Método descentrado.
5  Dominio espacial : [a,b] intervalo -> celdas: c_1,c_2,...,
    c_nx
6
7  xi : array de nx valores entre a y b espaciados
    uniformemente
8  ci : velocidad de propagación en cada celda 1,...,nx
9  v0: array de valores iniciales [v_1^0, v_2^0..., v_{nx}^0]
10 dx, dt: paso en espacio y paso en tiempo
11 nt: número de iteraciones de tiempo
12
13 c_0, c_nx+1: celdas fantasmas
14 Condición de contorno: v_0^n = v_1^n para cada instante de
    tiempo t_n
15 v_nx+1^n = v_nx^n para cada instante de tiempo t_n
16
17 """
18 function advection_glias_1D_FVM(xi, dt, nt, v0, ci)
19 nx = length(v0)
20 dx = xi[2]-xi[1]
21 v = OffsetArray(zeros( (nx+2, nt+1) ), 0:nx+1, 0:nt)
```

```

22 v[1:nx,0] = v0
23 r = dt/dx
24 for n=0:nt-1
25 v[0,n] = v[1,n] # (c. c. Neumann homog)
26 v[nx+1,n] = v[nx,n] # Idem
27 for i=1:nx
28 if ci[i]>=0
29 v[i,n+1] = v[i,n] - r*(ci[i]*v[i,n] - ci[i-1]*v[i-1,n])
30 else
31 v[i,n+1] = v[i,n] - r*(ci[i+1]*v[i+1,n] - ci[i]*v[i,n])
32 end
33 end
34 end
35 return v[1:nx,:]
36 end

```

A.2.2 Migración de los neuroblastos

A continuación encontramos el código fuente empleado para obtener la resolución numérica correspondiente al problema que modela la migración de los neuroblastos hacia el bulbo olfatorio, cuya velocidad de propagación depende de la densidad y de la velocidad de propagación de las células gliales.

```

1 using OffsetArrays
2
3 """
4 MVF. Método descentrado.
5 Dominio espacial : [a,b] intervalo -> celdas: c_1,c_2,...,
   c_nx
6
7 xi : array de nx valores entre a y b espaciados
   uniformemente
8 ci : velocidad de propagación en cada celda 1,...,nx
9 v0 : array de valores iniciales [v_1^0, v_2^0..., v_{nx}^0]
10 dx, dt : paso en espacio y paso en tiempo
11 nt : número de iteraciones de tiempo
12 g : array de valores de la densidad de las glías en cada
   celda e instante de tiempo

```

A. Códigos empleados

```
13 p : coeficiente de la combinación convexa
14
15 c_0, c_nx+1: celdas fantasmas
16 Condición de contorno:  $v_0^n = v_1^n$  para cada instante de
    tiempo  $t_n$ 
17  $v_{nx+1}^n = v_{nx}^n$  para cada instante de tiempo  $t_n$ 
18
19 """
20 function advection_neuroblastos_1D_FVM(xi, dt, nt, v0, ci, g
    , p)
21 nx = length(v0)
22 dx = xi[2]-xi[1]
23 v = OffsetArray(zeros( (nx+2, nt+1) ), 0:nx+1, 0:nt)
24 v[1:nx,0] = v0
25 r = dt/dx
26 for n=0:nt-1
27 v[0,n] = v[1,n] # (c. c. Neumann homog)
28 v[nx+1,n] = v[nx,n] # Idem
29 for i=1:nx
30 if ci[i]>=0
31 t1 = r*p*(ci[i]*v[i,n]-ci[i-1]*v[i-1,n])
32 if i==1
33 v[i,n+1] = v[i,n] - t1 + r*(1-p)*((g[i,n]-v[i,n])*v[i,n]+(g[
    i,n]-v[i,n])*v[i-1,n])
34 else
35 v[i,n+1] = v[i,n] - t1 + r*(1-p)*((g[i,n]-v[i,n])*v[i,n]+(g[
    i-1,n]-v[i-1,n])*v[i-1,n])
36 end
37 else
38 v[i,n+1] = v[i,n] - r*(ci[i+1]*v[i+1,n] - ci[i]*v[i,n])
39 end
40 end
41 end
42 return v[1:nx,:]
43 end
```


Bibliografía

- [1] Allaire, G. *Numerical analysis and optimization: an introduction to mathematical modelling and numerical simulation*. Oxford university press, 2007.
- [2] Altman, J., y Das, G. D. Autoradiographic and histological evidence of postnatal hippocampal neurogenesis in rats. *Journal of Comparative Neurology* 124 (1965), 319–335.
- [3] Alvarez-Buylla, A., García-Verdugo, J. M., y Tramontin, A. D. A unified hypothesis on the lineage of neural stem cells. *Nature Reviews Neuroscience* 2 (2001), 287–293.
- [4] Arias-Carrión, O., Olivares-Bañuelos, T., y Drucker-Colín, R. Neurogénesis en el cerebro adulto. *Rev Neurol* 44 (2007), 541–50.
- [5] Courant, R., Friedrichs, K., y Lewy, H. On the partial difference equations of mathematical physics. *IBM journal of Research and Development* 11 (1967), 215–234.
- [6] Evans, L. C. *Partial differential equations*. American Mathematical Soc., 2010.
- [7] Guinot, V. *Godunov-type schemes: an introduction for engineers*. Elsevier, 2003.
- [8] Hirsch, C. *Numerical computation of internal and external flows: The fundamentals of computational fluid dynamics*. Elsevier, 2007.
- [9] Idelsohn, S. R., y Onate, E. Finite volumes and finite elements: two good friends. *International journal for numerical methods in engineering* 37 (1994), 3323–3341.
- [10] Joshi, A., y Lakhanpal, R. *Learning Julia: Build high-performance applications for scientific computing*. Packt Publishing Ltd, 2017.

Bibliografía

- [11] Lax, P. D. *Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves*. SIAM, 1973.
- [12] LeVeque, R. J., et al. *Finite volume methods for hyperbolic problems*. Cambridge university press, 2002.
- [13] Logan, J. D. *An introduction to nonlinear partial differential equations*. John Wiley & Sons, 2008.
- [14] Sengupta, A. *Julia High Performance*. Packt Publishing Ltd, 2016.
- [15] Strikwerda, J. C. *Finite difference schemes and partial differential equations*. Siam, 2004.
- [16] Toro, E. F. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [17] Vázquez-Cendón, M. E. *Solving hyperbolic equations with finite volume methods*. Springer, 2015.