CÁLCULO NUMÉRICO

Grado en Matemáticas

FACULTAD DE CIENCIAS

CURSO 2020/2021

Facultad de Ciencias

Universidad de Cádiz

LA ECUACIÓN DE ONDAS UNIDIMENSIONAL

1. Ecuación de ondas

La ecuación de ondas homogénea en $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ viene dada por

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R},$$

donde $c > 0$ es una constante denominada velocidad de propagación, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y el operador

$$\Delta u = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2},$$

es conocido como el laplaciano, mientras que su versión no homogénea se define como,

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = f, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R},$$

donde f es una función que devuelve valores reales definida usualmente sobre un conjunto $\Omega \times (0, T)$.

A lo largo de esta tema trabajaremos principalmente con la ecuación de ondas homogénea. Esta ecuación modela la propagación de señales en el espacio. En dimensión uno

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

modela, por ejemplo, las vibraciones de la cuerda de una guitarra, un violín, etc.; mientras que en dimensión 2

$$u_{tt} - c^2 (u_{xx} + u_{yy}) = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R},$$

modela, por ejemplo, las vibraciones de la piel de un tambor.

En lo que sigue nos centramos en la ecuación de ondas unidimensional (1). Esta ecuación modela la propagación de señales en un mundo unidimensional así como las pequeñas vibraciones transversales que se producen en una cuerda tensa y elástica.

2. Solución general de la ecuación de ondas unidimensional

La ecuación de ondas (1) es una ecuación en derivadas parciales de orden dos, lineal y de coeficientes constantes. Por consiguiente, podemos hacer uso de la teoría establecida en el Tema 1 para reducir la ecuación (1) a su forma canónica. Los coeficientes de la ecuación (1) son $A = 1$, $B = 0$ and $C = -c^2$ y con ello $B^2 - 4AC = 4c^2 > 0$. De aquí que la EDP (1) sea hiperbólica y sus curvas características se constituyen por un par de familias de rectas paralelas de pendientes $\pm\frac{1}{c}$.

Recordemos que cuando una ecuación es hiperbólica podemos reducirla a una ecuación de la forma $U_{\xi\tau} = H\left(\xi, \tau, U, U_{\xi}, U_{\tau}\right)$. Recordemos además que las curvas características se obtienen a partir de las soluciones de las ecuaciones características

$$\frac{dx}{dt} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}. \tag{2}$$

Sustituyendo los coeficientes de la ecuación (1) en (2) se tiene

$$\frac{dx}{dt} = \pm c. \tag{3}$$

Las soluciones generales de (3) vienen dadas por

$$x - ct = c_1, \qquad x + ct = c_2, \tag{4}$$

con c_1 y c_2 constantes arbitrarias. De (4), se deduce el cambio de variables

$$U(\xi, \tau) = u(x,t) \tag{5}$$

con

$$\xi = x + ct, \qquad \tau = x - ct. \tag{6}$$

De aquí, se tiene

$$\begin{aligned}
u_x &= U_\xi \xi_x + U_\tau \tau_x = U_\xi + U_\tau, \\
u_t &= U_\xi \xi_t + U_\tau \tau_t = cU_\xi - cU_\tau, \\
u_{xx} &= U_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2U_{\xi\tau}\xi_x\tau_x + U_{\tau\tau}\tau_x^2 + U_\xi \xi_{xx} + U_\tau \tau_{xx} \\
&= U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\tau} + U_{\tau\tau}, \\
u_{tt} &= U_{\xi\xi}\xi_t^2 + 2U_{\xi\tau}\xi_t\tau_t + U_{\tau\tau}\tau_t^2 + U_\xi \xi_{tt} + U_\tau \tau_{tt} \\
&= c^2U_{\xi\xi} - 2c^2U_{\xi\tau} + c^2U_{\tau\tau}.
\end{aligned}$$

el cual nos permite transformar la ecuación (1) en

$$-4c^2U_{\xi\tau} = 0 \Longrightarrow U_{\xi\tau} = 0.$$

Integrando respecto de ξ se tiene

$$U_\tau = g(\tau).$$

Integrando de nuevo pero con respecto a τ se obtiene

$$U = F(\xi) + \int g(\tau)\, d\tau = F(\xi) + G(\tau),$$

con F y G funciones arbitrarias dos veces derivables. Por último, deshaciendo el cambio de variables (5) obtenemos la solución general de la ecuación de ondas (1)

$$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct). \tag{7}$$

Pasemos a interpretar la solución (7). En el instante $t=0$, el perfil de la función $F(x+ct)$ es $F(x)$. A partir de ese instante, $F(x+ct)$ se interpreta como que la señal definida por la función F se desplaza (sin deformarse) hacia la izquierda con velocidad c. Por otro lado, se interpreta $G(x-ct)$ como que la señal definida por la función G se desplaza (sin deformarse) hacia la derecha con velocidad c.

3. Solución del problema de Cauchy para $n=1$. Fórmula de d'Alembert

En la sección anterior hemos obtenido la solución general de la ecuación de ondas para $n=1$. No obstante, esta ecuación suele venir acompañada de dos condiciones iniciales. A continuación, analizaremos el problema de Cauchy para la ecuación de ondas unidimensional homogénea (1) el cual viene dado

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & \text{en } \mathbb{R} \times (0,\infty), \\ u(x,0) = f(x), & \text{en } \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = g(x), & \text{en } \mathbb{R}. \end{cases} \tag{8}$$

donde $f(x)$ representa la posición inicial de la cuerda, mientras que $g(x)$ representa la velocidad inicial. Si $g(x) > 0$ significa que la cuerda está vibrando hacia arriba en el punto x (respectivamente hacia abajo si $g(x) < 0$).

Consideremos de nuevo la solución (7) obtenida en la sección anterior. Si aplicamos las condiciones iniciales del problema de Cauchy (8) obtenemos

$$u(x,0) = F(x) + G(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Por otro lado,

$$u_t(x,t) = cF'(x+ct) - cG'(x-ct),$$

por lo que

$$u_t(x,0) = cF'(x) - cG'(x) = g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Si integramos (10) en el intervalo $[0,x]$ se tiene

$$cF(x) - cG(x) + C = \int_0^x g(v)\, dv,$$

dividiendo entre c

$$F(x) - G(x) + \widetilde{C} = \frac{1}{c}\int_0^x g(v)\, dv, \tag{11}$$

Sumando expresiones (9) y (11)

$$2F(x) + \widetilde{C} = f(x) + \frac{1}{c}\int_0^x g(v)\, dv,$$

de donde

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + \frac{1}{c}\int_0^x g(v)\, dv - \widetilde{C} \right). \tag{12}$$

Análogamente, restando expresiones (9) y (11) se tiene

$$G(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - \frac{1}{c}\int_0^x g(v)\, dv + \widetilde{C} \right). \tag{13}$$

Por último, sustituyendo los valores de $F(x)$ y $G(x)$, dados por (12) y (13) respectivamente, en la expresión (7)

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + \frac{1}{c}\int_0^{x+ct} g(v)\, dv - \widetilde{C} \right) + \frac{1}{2}\left(f(x-ct) - \frac{1}{c}\int_0^{x-ct} g(v)\, dv + \widetilde{C} \right).$$

Concluimos que, la solución general del problema de Cauchy (8) viene dado por

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(f(x+ct) + f(x-ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(v)\,dv. \tag{14}$$

A la expresión (14) se le conoce como fórmula de d'Alembert.

Por otro lado, si las funciones $f(x) \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ y $g(x) \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$, la solución $u(x,t)$ será de clase $\mathscr{C}^2\left(\mathbb{R}^2\right)$. En otras palabras hemos probado:

Teorema 1. ***Solución del problema de Cauchy unidimensional***
Sean $f(x) \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ y $g(x) \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$. Entonces, la función $u(x,t)$ dada por (14) es de clase $\mathscr{C}^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ y además, es la única solución del problema de Cauchy homogéneo (8).

Ejemplo 1. *Resolver el problema de Cauchy dado por*

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & \text{en } \mathbb{R} \times (0,\infty), \\ u(x,0) = \operatorname{sen} x, & \text{en } \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = 0, & \text{en } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Aplicando la fórmula de d'Alembert (14) obtenemos la solución exacta

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\big(\operatorname{sen}(x+t) + \operatorname{sen}(x-t)\big) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} 0\,dv = \frac{1}{2}\big(\operatorname{sen}(x+t) + \operatorname{sen}(x-t)\big) \\ &= \operatorname{sen}(x)\cos(t). \end{aligned}$$

4. Problema de la cuerda vibrante. Método de separación de variables

Consideremos de nuevo el problema de Cauchy (8) con la diferencia de que esta vez trabajaremos con un intervalo acotado de la recta real, el cual puede considerarse, sin pérdida de generalidad, como $[0,\ell]$. Recordemos que la ecuación de ondas modela justamente las pequeñas vibraciones transversales que se producen en una cuerda tensa y elástica, cuya posición de equilibrio es el intervalo $[0,\ell]$, con ℓ la longitud de la cuerda. De aquí que este problema físico se denomine *problema de la cuerda vibrante*.

La situación descrita anteriormente viene dada por el siguiente problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & \text{en } (0,\ell)\times(0,\infty), \\ u(x,0) = f(x), & \text{en } [0,\ell], \\ u_t(x,0) = g(x), & \text{en } [0,\ell], \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0, & \text{en } [0,\infty), \end{cases} \tag{15}$$

donde la última condición representa que la cuerda está sujeta por sus extremos, y por consiguiente, implica que no se producen vibraciones en los extremos.

Teorema 2. *Supongamos que $f(x) \in \mathscr{C}^2\big([0,\ell]\big)$ y $g(x) \in \mathscr{C}^1\big([0,\ell]\big)$, y que además verifican las siguientes condiciones:*

i) $f(0) = f(\ell) = 0$

ii) $f''(0) = f''(\ell) = 0$

iii) $g(0) = g(\ell) = 0$

Entonces, el problema de Cauchy (15) admite una única solución $u(x,t)$ de clase $\mathscr{C}^2\big([0,\ell]\times[0,\infty)\big)$.

El procedimiento que vamos a usar a continuación es un método constructivo para determinar una solución completa particular para ciertos problemas que involucran EDPs como una serie cuyos términos son el producto de funciones que involucran una sola variable, siendo esta variable diferente a la que involucra el resto de funciones.

El método de separación de variables consiste en buscar soluciones de la forma

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t),$$

donde las funciones X_n y T_n satisfacen las condiciones de contorno, esto es

$$\begin{aligned} u_n(0,t) = X_n(0)T_n(t) = 0 \qquad &\Longrightarrow \qquad X_n(0) = 0, \\ u_n(\ell,t) = X_n(\ell)T_n(t) = 0 \qquad &\Longrightarrow \qquad X_n(\ell) = 0, \end{aligned}$$

ya que si $T_n(t) = 0\,\forall t > 0$, entonces $u_n(x,t) \equiv 0$ y por tanto obtendríamos una solución trivial.

Tenemos que la ecuación de ondas es lineal y además estamos considerando que es homogénea, por consiguiente, satisface el principio de superposición. Esto implica que cualquier combinación lineal y finita de funciones u_n resolverá la ecuación de ondas y cumplirá las condiciones de contorno. No obstante, en general, no nos servirá una combinación lineal y finita a no ser que las funciones f y g sean de un tipo muy concreto, como veremos más adelante. La idea por tanto será buscar $u(x,t)$ como una serie

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n X_n(x) T_n(t),$$

donde γ_n serán unos coeficientes a determinar para satisfacer las dos condiciones iniciales $u(x,0) = f(x)$ y $u_t(x,0) = g(x)$.

Además, estamos suponiendo que $u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$ es solución de la ecuación de ondas por lo que debe verificarse que

$$X_n T_n'' = c^2 X_n'' T_n$$

o equivalentemente

$$\frac{X_n''}{X_n} = \frac{1}{c^2}\frac{T_n''}{T_n}.$$

Si prestamos atención a la igualdad anterior se observa que uno de los miembros de la igualdad depende únicamente de x mientras que el otro solamente de t. Dado que x y t son variables independientes entre sí, ambos cocientes deben ser iguales a alguna constante λ, esto es

$$\frac{X_n''}{X_n} = \frac{1}{c^2}\frac{T_n''}{T_n} = \lambda. \tag{16}$$

Por consiguiente X_n junto con λ debe resolver el siguiente problema de contorno de Sturm-Lioville:

$$\begin{cases} X_n''(x) - \lambda X_n(x) = 0, \quad x \in [0,\ell], \\ X_n(0) = X_n(\ell) = 0. \end{cases} \tag{17}$$

El problema (17) viene dado por una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, homogénea y de coeficientes constantes. Para resolverla haremos uso de la ecuación característica la cual viene dada por $\mu^2 - \lambda = 0$. Dependiendo del valor de λ obtenemos distintas soluciones, por ello, distinguimos 3 casos: $\lambda > 0$, $\lambda = 0$

y $\lambda < 0$.

• Caso 1: $\lambda > 0$

El sistema fundamental de soluciones en este caso viene dado por $\{e^{\sqrt{\lambda}x}, e^{-\sqrt{\lambda}x}\}$.

Por tanto:

$$X_n(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x},$$

con c_1 y c_2 constantes arbitrarias. Si recurrimos a las condiciones de contorno nos queda el siguiente sistema:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 e^{\sqrt{\lambda}\ell} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\ell} = 0, \end{cases}$$

cuya única solución es $c_1 = c_2 = 0$, la cual nos conduce a una solución trivial.

• Caso 2: $\lambda = 0$

Ahora $\mu = 0$ es raíz doble de la ecuación característica por lo que el sistema fundamental de soluciones es $\{1, x\}$. De aquí:

$$X_n(x) = c_1 + c_2 x.$$

Imponiendo de nuevo las condiciones de contorno se tiene

$$\begin{cases} c_1 = 0, \\ c_1 + c_2\ell = 0, \end{cases}$$

obteniendo de nuevo una solución trivial.

• Caso 3: $\lambda < 0$

En este caso, la ecuación característica admite dos soluciones complejas $\mu = \pm\sqrt{-\lambda}\, i$ luego el sistema fundamental de soluciones es $\{\cos\left(\sqrt{-\lambda}x\right), \operatorname{sen}\left(\sqrt{-\lambda}x\right)\}$.

Por tanto:

$$X_n(x) = c_1 \cos\left(\sqrt{-\lambda}x\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{-\lambda}x\right).$$

Si recurrimos a las condiciones de contorno nos queda el siguiente sistema:

$$\begin{cases} c_1 = 0, \\ c_1 \cos\left(\sqrt{-\lambda}\ell\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{-\lambda}\ell\right) = 0, \end{cases} \tag{18}$$

lo cual nos lleva a $c_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{-\lambda}\ell\right) = 0$. Si $c_2 = 0$ volvemos a obtener una solución trivial. Suponiendo $c_2 \neq 0$, el sistema (18) admite la solución $\sqrt{-\lambda}\ell = n\pi$ o equivalentemente

$$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{19}$$

Por consiguiente, las soluciones no triviales del problema de Sturm-Liouville $X_n(x)$ asociadas a λ_n para $n \geq 1$ vienen dadas por

$$X_n(x) = c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), \tag{20}$$

donde c_n son constantes arbitrarias distintas de cero. Una vez conocemos las funciones $X_n(x)$ (20) junto con los valores de λ_n (19), podemos proceder a determinar las funciones $T_n(t)$ usando de nuevo ecuación (16) lo que nos lleva a

$$T_n''(t) - \lambda_n c^2 T_n(t) = 0, \Longrightarrow T_n''(t) + \left(\frac{n\pi c}{\ell}\right)^2 T_n(t) = 0, \tag{21}$$

Las funciones $T_n(t)$ no están sometidas a ninguna condición más por lo que solución general de la ecuación lineal de segundo orden (21) es

$$T_n(t) = a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{\ell}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi ct}{\ell}\right). \tag{22}$$

De (20) y (22) se concluye que todas las soluciones son de la forma

$$u_n(x,t) = \left(\alpha_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{\ell}\right) + \beta_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi ct}{\ell}\right)\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right),$$

donde $n \geq 1$, $\alpha_n = a_n c_n$ y $\beta_n = b_n c_n$.

Como dijimos anteriormente podemos aplicar el principio de superposición por lo que la función

$$u_N(x,t) = \sum_{n=1}^{N} \left(\alpha_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{\ell}\right) + \beta_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi ct}{\ell}\right)\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), \tag{23}$$

es solución de la ecuación de ondas (1) y satisface , por construcción, las condiciones de contorno para todo entero $N > 1$.

Ahora necesitamos que la solución (23) satisfaga las dos condiciones iniciales, esto es

$$\begin{aligned}
u_N(x,0) &= \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) &&= f(x), \\
\frac{\partial u_N}{\partial t}(x,0) &= \sum_{n=1}^{N} \frac{n\pi c\beta_n}{\ell} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) &&= g(x).
\end{aligned}$$

En otras palabras, estaríamos diciendo que las funciones f y g son combinaciones lineales y finitas de funciones tipo $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$, lo cual en general no es cierto. En caso de que no puedan conseguirse como una combinación lineal y finita, solamente nos queda considerar $u(x,t)$ como una serie infinita

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n\cos\left(\frac{n\pi ct}{\ell}\right)+\beta_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi ct}{\ell}\right)\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right). \tag{24}$$

La solución a este problema se la debemos a Fourier quien afirmó que cualesquiera condición inicial puede escribirse como una combinación lineal infinita de funciones $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$, lo que se conoce como serie de Fourier.

En nuestro caso

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)=f(x), \tag{25}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi c\beta_n}{\ell}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)=g(x), \tag{26}$$

donde α_n y $\frac{n\pi c\beta_n}{\ell}$ son los coeficientes de Fourier de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ respectivamente. Por tanto, para resolver nuestro problema tan solo necesitamos saber cómo calcular los coeficientes de Fourier de cualquier función dada.

Puede probarse mediante integración elemental que las funciones $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$ satisfacen

$$\int_0^{\ell}\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)dx=\begin{cases}0 & m\neq n,\\ \frac{\ell}{2} & m=n,\end{cases} \tag{27}$$

para todo enteros m, $n\in\mathbb{Z}$.

En general, puede probarse que los pares (X_n,λ_n), $n\geq 1$, soluciones de un problema de Sturm-Liouville satisfacen las siguientes importantes propiedades:

- Las funciones X_n son ortogonales en $L^2(0,\ell)$ (el espacio de funciones medibles y de cuadrado integrable en $(0,\ell)$), i.e.
$$\int_0^{\ell}X_m(x)X_n(x)\,dx=0,\quad m\neq n.$$
- El conjunto de funciones $X_n(x)$, $n\geq 1$ es completo en $L^2(0,\ell)$, por lo que elegida cierta precisión, todo elemento de $L^2(0,\ell)$ puede aproximarse usando una combinación lineal y finita de funciones $X_n(x)$.

Calculemos los valores de α_n y β_n. Multiplicamos la igualdad (25) por sen $\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right)$ e integramos entre $x = 0$ y $x = \ell$ obteniendo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \int_0^{\ell} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx = \int_0^{\ell} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) dx.$$

Haciendo uso de la propiedad (27) se tiene que

$$\frac{\ell}{2}\alpha_m = \int_0^{\ell} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) dx,$$

de donde

$$\alpha_m = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) dx, \quad m \geq 1. \tag{28}$$

Análogamente usando (26),

$$\beta_m = \frac{2}{m\pi c} \int_0^{\ell} g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) dx, \quad m \geq 1. \tag{29}$$

Sustituyendo los valores de α_m y β_m dados por (28)-(29) en la expresión (24) obtenemos la solución del problema de Cauchy (15).