Facultad de Ciencias

CÁLCULO NUMÉRICO

Grado en Matemáticas

FACULTAD DE CIENCIAS

CURSO 2020/2021

UCA Universidad de Cádiz

APLICACIONES DE LA ECUACIÓN DE ONDAS

1. Ejemplos prácticos

En física muchos modelos vienen representados por la ecuación de ondas. Veamos en esta sección algunos ejemplos:

- En una línea de transmisión eléctrica de longitud l, que conduce una corriente alterna de alta frecuencia , el voltaje V y la corriente i se describen por medio de las ecuaciones
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= LC\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \qquad 0 < x < l,\ t > 0, \\ \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} &= LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}, \qquad 0 < x < l,\ t > 0, \end{aligned}$$
donde L y C son constantes físicas que representan respectivamente la inductancia y capacitancia por unidad de medida.

- Las ecuaciones de ondas electromagnéticas homogéneas
$$\begin{aligned} \left(v_p^2\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)E &= 0, \\ \left(v_p^2\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)B &= 0, \end{aligned}$$
describen la propagación de ondas electromagnéticas a través de un medio o en el vacío y se derivan de las ecuaciones de Maxwell. En estas ecuaciones, Δ representa el laplaciano, E el campo eléctrico, B el campo magnético, también conocido como densidad del flujo magnético, y $v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ la velocidad de fase, siendo μ y ε la permeabilidad y permitividad del medio respectivamente.

2. Presión del aire en un tubo

En un tubo de órgano, la presión del aire $p(x,t)$ se rige por la ecuación de onda

$$p_{tt} - c^2 p_{xx} = 0, \quad \text{en } (0,\ell) \times (0,\infty), \tag{1}$$

donde l es la longitud del tubo y c representa una constante física. Si el tubo se encuentra abierto por sus extremos, las condiciones de frontera vienen dadas por

$$p(0,t) = p_0, \quad \text{y} \quad p(l,t) = p_0,$$

con p_0 una constante dada.

Si el tubo está cerrado por uno de sus extremos, pongamos que en $x = \ell$, las condiciones de frontera vienen dadas por

$$p(0,t) = p_0, \quad \text{y} \quad \frac{\partial p}{\partial x}(l,t) = 0.$$

Consideremos el siguiente ejemplo:

$$\begin{cases} p_{tt} = p_{xx}, & \text{en } (0,1) \times (0,1), \\ p(x,0) = 0.9\cos(2\pi x), & \text{en } [0,1], \\ p_t(x,0) = 0, & \text{en } [0,1], \\ p(0,t) = 0.9, & \text{en } [0,1], \\ p_x(1,t) = 0, & \text{en } [0,1]. \end{cases} \tag{2}$$

Usa un total de 11 puntos en ambos ejes y un esquema explícito para aproximar la solución numérica.

Analicemos la condición

$$p_x(1,t) = 0, \quad \text{en } [0,1],$$

la cual no aparece en problemas considerados anteriormente. Dado que esta condición se aplica en los nodos del extremo derecho $x = 1$, podemos usar, por ejemplo, una aproximación regresiva para p_x, es decir,

$$p_x(1,t_j) = \frac{p(1,t_j) - p(1-h,t_j)}{h} = \frac{p_{m,j} - p_{m-1,j}}{h} = 0.$$

De aquí se deduce que

$$p_{m,j} = p_{m-1,j}, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Esto nos permitirá tener el mismo número de ecuaciones que de incógnitas. Usamos Mathematica para proceder a su resolución.