

UNIVERSIDAD DE CÁDIZ

FACULTAD DE CIENCIAS

GRADO EN MATEMÁTICAS

# SOLUCI'ON NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DE BENJAMIN-BONA-MAHONY-BURGERS

Trabajo de fin de grado presentado por

**Paola Contero Aiza**

Tutor: Dr. Rafael de la Rosa Silva

Firma de la alumna

Firma de la tutor

Puerto Real, Cádiz, Septiembre de 2.022



## Abstract

In this project, we study the solitary wave solution of the nonlinear Benjamin-Bona-Mahony Burgers equation based on a Galerkin method using quadratic B-splines.

In Chapter 1, we make a brief introduction about the origin of Soliton Theory, as well as, the emergence of the soliton term.

In Chapter 2, we introduce the equation and provide several historical reviews concerning to the origin of the Benjamin-Bona-Mahony equation.

In Chapter 3, we determined soliton solutions of the Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation by an exact method. Previously, we will define the concepts of travelling wave, solitary wave and soliton. Moreover, soliton solutions are determined for a particular case of the Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation.

In Chapter 4, based on the use of quadratic B-spline functions and Galerkin's method, we will obtain numerical solutions of the equation. Furthermore, we study the stability of the numerical method making use of the von Neumann theory.

In Chapter 5, we will consider two test problems. We will compare the numerical and exact solution, obtaining the errors by using the  $L_2$  and  $L_\infty$  norms. In addition, a fundamental soliton property is studied: the presence of conservation laws. Specifically, we will see that the mass, the momentum and the energy of the waves analyzed in the numerical solution remain almost constant as time increases.

Finally, in the last chapter, the main conclusions which have been observed throughout the project are established.



*A mi madre y mi hermana.*



## Resumen

En este proyecto, estudiamos soluciones tipo onda solitaria de la ecuación no lineal de Benjamin-Bona-Mahony Burgers haciendo uso del método de Galerkin basado en B-spline cuadráticos.

En el Capítulo 1, hacemos una breve introducción al origen de la Teoría de Solitones, así como el surgimiento del término solitón. En el Capítulo 2, introducimos la ecuación y aportamos varias reseñas históricas referentes al origen de la ecuación de Benjamin-Bona-Mahony.

En el capítulo 3, obtendremos soluciones tipo solitón de la ecuación de Benjamin-Bona-Mahony-Burgers. Previamente, definiremos los conceptos de onda viajera, onda solitaria y solitón. Por último, en este capítulo obtendremos la solución tipo solitón de la ecuación para un caso particular.

En el capítulo 4, basándonos en el uso de funciones B-spline cuadráticas y el método de Galerkin, obtendremos soluciones numéricas de la ecuación y estudiaremos la estabilidad de las mismas, haciendo uso de la teoría de von Neumann.

En el Capítulo 5, consideraremos dos problemas test. Realizaremos una comparación entre la solución numérica y exacta, obteniendo los errores mediante el uso de las normas  $L_2$  y  $L_\infty$ . Además, se estudia una propiedad fundamental del solitón: la presencia de leyes de conservación. En concreto, veremos que la masa, el momento y la energía de las ondas analizadas en la solución numérica permanecen casi constantes con el paso del tiempo.

Finalmente, se establecen las principales conclusiones que hemos observado a lo largo del trabajo.





## **Agradecimientos**

En primer lugar, agradecer a mi familia, mi madre y a mi hermana por apoyarme en todo momento. También debo agradecer a mi tutor Rafa, por su esfuerzo y compromiso en hacer todo lo posible para que mi Trabajo Final de Grado quedara lo mejor posible, a pesar de las adversidades sufridas.

Gracias a mis compañeros y a mi pareja, por ayudarme y apoyarme a lo largo de estos años.



# Índice general

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Historia y planteamiento de la ecuación</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Solución exacta</b>	<b>5</b>
3.1	Marco teórico . . . . .	5
3.1.1	Ondas viajeras . . . . .	5
3.1.2	Onda solitaria . . . . .	6
3.1.3	Solitón . . . . .	6
3.2	Cálculo de soluciones tipo onda solitaria . . . . .	7
3.2.1	Ecuación BBMB para $\alpha = 0$ . . . . .	8
3.2.1.1	Resolución de las integrales . . . . .	10
3.2.2	Estudio del comportamiento del solitón . . . . .	11
3.2.2.1	Caso 1: $c > \beta$ . . . . .	11
3.2.2.2	Caso 2: $c < \beta$ y $c < 0$ . . . . .	12
3.2.2.3	Caso 3: $c = \beta$ . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Solución numérica</b>	<b>13</b>
4.1	Marco teórico . . . . .	13
4.1.1	B-spline . . . . .	13
4.1.2	Método de Galerkin . . . . .	14
4.1.2.1	Espacios $L^p$ . . . . .	14
4.1.2.2	Espacios de Hilbert . . . . .	15
4.1.2.3	Espacios de Sobolev . . . . .	16
4.1.3	Método de Weighted Residuals . . . . .	20
4.2	B-splines cuadrático y propiedades . . . . .	22

## ÍNDICE GENERAL

---

4.3	Implementación del método de Galerkin . . . . .	24
4.3.1	Cálculo de $\delta_j(t)$ . . . . .	35
4.3.1.1	Cálculo de los nodos $\delta_m^0$ . . . . .	36
4.3.1.2	Cálculo de los nodos $\delta_m^n$ . . . . .	38
4.4	Análisis de estabilidad mediante von Neumann . . . . .	38
<b>5</b>	<b>Ejemplos y comparaciones</b>	<b>41</b>
5.1	Ejemplo 1 . . . . .	41
5.1.1	Solución Exacta . . . . .	42
5.1.2	Solución Numérica . . . . .	42
5.1.3	Comparaciones . . . . .	43
5.2	Verificación de las leyes de conservación . . . . .	45
5.3	Ejemplo 2 . . . . .	46
<b>6</b>	<b>Conclusión</b>	<b>49</b>

*Las matemáticas son la música de la razón*

James Joseph Sylvester

CAPITULO

# 1

## Introducción

En los últimos años se han desarrollado innumerables contribuciones en el ámbito científico. Uno de los logros más significativos conseguidos en los últimos años, ha sido el desarrollo de la Teoría de Solitones. Estas ondas han llamado la atención de los matemáticos, físicos e ingenieros por su aplicabilidad en física. Los solitones se pueden entender como ondas no lineales, las cuales se propagan sin deformarse.

Aunque los fenómenos no lineales fueron estudiados en sistemas mecánicos, actualmente los encontramos en todo tipo de fenómenos naturales y sociales, tales como una ola aproximándose a la orilla. En la naturaleza los solitones juegan un papel importante en una variedad de fenómenos, como en fibras ópticas, sistemas geológicos, en canales, en ondas gigantes conocidas como Tsunamis, etc.

En el siglo XIX, el ingeniero escocés J.S. Russell dedicó muchos años a comprender este tipo de onda de transmisión conocida como solitón. J.S. Russell mientras se encontraba en el canal Union en Hermiston, Escocia, registró cierta peculiaridad en una onda creada por un bote en las aguas poco profundas. Observó que al detenerse el bote, la onda chocó con este, agitando violentamente durante el choque pero recuperando su forma original y sin reducir su velocidad tras sobrepasarlo. Como podemos observar a continuación en las propias palabras de J.S. Russell:

## 1. INTRODUCCIÓN

---

« Estaba observando el movimiento de un bote el cual era empujado rápidamente a lo largo de un estrecho canal por un par de caballos, cuando el bote se detuvo repentinamente, mas no así la masa de agua justo delante de la proa del bote en el canal, la cual, se había puesto en movimiento en un estado de violenta agitacion: repentinamente esta masa en agitación empezó a salir hacia delante con gran velocidad, tomando la forma de una larga elevación solitaria, redonda, suave y bien definida de una masa de agua, la cual continuó su curso a lo largo del canal aparentemente sin cambio de forma o disminución de velocidad. La seguí montado en un caballo, y aún la vi pasar a una razón de algunas ocho o nueve millas por hora, conservando su figura original algunos treinta pies de largo y entre un pie y pie y medio de altura. Pasado un tiempo, su altura gradualmente disminuyó, y después de seguirla una distancia de dos millas, la perdí en unos recodos del canal. Así que en el mes de agosto de 1834, fue mi primera oportunidad de encontrarme con ese singular y hermoso fenómeno, al cual he llamado Onda de Translación. »

Durante varios años, esta conclusión de J.S. Russell fue cuestionada por reconocidos científicos de la época. No fue hasta 1965 cuando dos físicos-matemáticos americanos, N. Zabusky y M. Kruskal, realizaron los trabajos pioneros en la obtención de soluciones numéricas de la ecuación Korteweg-de Vries, demostrando la existencia de ondas solitarias que no sufrían deformación alguna, dándole el nombre a dichas soluciones no lineales de “solitones”.

## Historia y planteamiento de la ecuación

La dinámica de ondas en aguas poco profundas está modelada por diferentes ecuaciones de evolución no lineal, por ejemplo, la ecuación Korteweg-de Vries (KdV), la ecuación Gardner, la ecuación Peregrine, etc. En Matemáticas Aplicadas, Física Teórica y Ciencias de la Ingeniería, estas ecuaciones desempeñan un papel crucial debido a sus diversas propiedades y estructuras matemáticas y físicas. La obtención de las soluciones exactas de estas ecuaciones son complejas debido a que solo clases restringidas de estas ecuaciones se resuelven por medios analíticos. Las soluciones numéricas de estas ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) no lineales son beneficiosas para examinar diversos fenómenos físicos. La ecuación Benjamin-Bona-Mahony (BBM):

$$u_t + u_x + auu_x - bu_{xxt} = 0$$

es una alternativa a la ecuación de KdV, y describe la propagación unidireccional de ondas largas de pequeña amplitud no lineales en la superficie del agua en un canal. La ecuación BBM no sólo es conveniente para las ondas de aguas poco profundas, sino también para las ondas hidromagnéticas, las ondas acústicas, ondas de presión en burbujas de gas-líquido, y por lo tanto, tiene más ventajas en comparación con la ecuación de KdV. La ecuación BBM fue planteada por primera vez por Peregrine [? ].

## 2. HISTORIA Y PLANTEAMIENTO DE LA ECUACIÓN

---

Para la solución de la ecuación BBM se han utilizado varias técnicas numéricas, en particular, el método de las diferencias finitas [? ], el método de descomposición de Adomian [? ], diferentes métodos de elementos finitos [? ? ], etc.

Realmente, cuando se intenta definir la propagación de ondas largas de pequeña amplitud en un medio dispersivo no lineal, suele ser necesario considerar mecanismos de disipación para reflejar completamente situaciones reales. En la mayoría de casos, los mecanismos que conducen a la degradación de la onda son bastante complejos y no tienen fácil interpretación.

La ecuación de Benjamin-Bona-Mahony-Burgers (BBMB) viene dada por:

$$u_t - u_{xxt} - \alpha u_{xx} + \beta u_x + uu_x = 0, \quad a \leq x \leq b, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.1)$$

con la condición inicial:

$$u(x, 0) = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (2.2)$$

y condiciones de contorno

$$u(a, t) = 0, \quad u(b, t) = 0, \quad (2.3)$$

$$u_x(a, t) = 0, \quad u_x(b, t) = 0. \quad (2.4)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes reales positivas y  $u(x, t)$  es una función de valor real que representa la velocidad del fluido en la dirección horizontal. Esta ecuación describe el avance de ondas largas de pequeña amplitud en medios dispersivos no lineales.

La ecuación BBMB ha sido discutida y analizada numéricamente por muchos autores. Yin y Piao [? ] usaron el método de elementos finitos basado en B-spline cuadráticos para la variable espacial.

En este trabajo, nos centramos en estudiar el método de Galerkin basado en B-spline cuadráticos para la ecuación de BBMB.



## Solución exacta

En este capítulo calcularemos las soluciones tipo solitón de nuestra ecuación BBMB (2.1).

### 3.1 Marco teórico

Vamos a definir algunos conceptos previos necesarios para la obtención de soluciones tipo solitón de nuestra ecuación, la cual es una EDP no lineal.

#### 3.1.1 Ondas viajeras

Una onda viajera es una onda que recorre grandes distancias y se desplaza libremente por el medio, transfiriendo energía sin propagación de la materia. De forma matemática se define como sigue:

**DEFINICIÓN 3.1.1: Onda viajera**

*Una onda viajera es una función que mantiene su forma durante largos periodos de tiempo, la cual viene dada por:*

$$u(x, t) = f(x - ct),$$

*donde  $c$  representa la velocidad de la onda.*

### 3. SOLUCIÓN EXACTA

---

Podemos observar que para el instante  $t = 0$ , la onda tiene la forma de la condición inicial  $f(x)$ , también llamado perfil de la onda. Por tanto, dado un instante de tiempo  $t > 0$ , obtendremos  $f(x - ct)$ , que representa el valor en el tiempo  $t$ , la cual es la condición inicial trasladada a la derecha  $ct$  unidades sin deformarse con velocidad  $c > 0$ . De forma análoga, dada  $c < 0$ , obtendremos  $f(x + ct)$ , que es la condición inicial trasladada a la izquierda  $ct$  unidades sin deformarse con velocidad  $c$ .

La resolución de EDPs no lineales suele ser bastante compleja, por lo que en este trabajo vamos a centrarnos en la búsqueda de soluciones tipo onda viajera, en concreto onda solitaria de tipo solitón, ya que tiene notables aplicaciones físicas. A continuación introducimos el concepto de onda solitaria.

#### 3.1.2 Onda solitaria

##### DEFINICIÓN 3.1.2: Onda solitaria

*Se denomina onda solitaria a aquella onda viajera no lineal localizada espacialmente y estable, además de “suave”, esto es:*

$$u(x, t) \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad x \rightarrow \pm\infty$$

*donde  $c$  representa la velocidad de la onda.*

#### 3.1.3 Solitón

Habitualmente, cuando dos ondas solitarias no lineales con diferentes velocidades interactúan, cambian su forma o adquieren colas. Por el contrario, cuando dos ondas solitarias mantienen su forma y velocidad después de la interacción, se les denomina solitones.

##### DEFINICIÓN 3.1.3: Solitón

*Los solitones se definen como ondas solitarias que al encontrarse, mantienen su velocidad y forma al producirse la interacción en un medio no lineal.*

Desde un punto de vista físico, los solitones pueden tener diferentes longitudes de onda (o frecuencias) en cualquier rango del espectro electromagnético. A mayor frecuencia, mayor energía tendrán los solitones. Pueden ser de diferentes tipos. Los solitones habituales tienen forma suave, es decir, no presentan cambios abruptos. Cuando las crestas presentan

un pico, se llaman peakons. Los kinks son producidos por una perturbación y los lumps, son solitones a medio camino entre los clásicos y los peakons.

Podemos destacar que el choque entre solitones se trata de una colisión elástica, es decir, una colisión en la que los solitones no sufren deformaciones y conservan el momento lineal y la energía cinética del sistema. El choque de los solitones provoca un desplazamiento de fase manteniendo su misma dirección y sentido. Existen muchas EDPs que admiten soluciones tipo onda solitaria, pero habitualmente no son soluciones tipo solitón, ya que presentan una dispersión inelástica.

### 3.2 Cálculo de soluciones tipo onda solitaria

Para calcular soluciones tipo onda solitaria de la ecuación BBMB (2.1) nos apoyaremos en la teoría de grupos de Lie, simetrías y transformaciones infinitesimales. Para profundizar en ello véase [? ?]. Nuestra ecuación no depende explícitamente de las variables  $x$  y  $t$ , luego es invariante ante traslaciones espacio-tiempo. Por consiguiente, podemos considerar los generadores infinitesimales  $X_1 = \partial_x$  y  $X_2 = \partial_t$ , los cuales representan traslaciones en espacio y tiempo respectivamente. Consideramos el grupo de simetría correspondiente a la combinación de estos generadores dado por:

$$X = cX_1 + X_2 = c\partial_x + \partial_t, \quad (3.1)$$

con  $c$  constante arbitraria.

Para obtener  $u(x, t)$  invariante, es equivalente a resolver la EDP de primer orden lineal dada por:  $cu_x + u_t = 0$ , cuyo sistema característico viene dado por las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs):

$$\frac{dx}{c} = \frac{dt}{1} \quad (3.2)$$

$$du = 0 \quad (3.3)$$

Por un lado, resolvemos las ecuación (3.2). Tenemos que:

$$\begin{aligned} dx &= cdt, \\ x &= z + ct, \\ z &= x - ct. \end{aligned}$$

### 3. SOLUCIÓN EXACTA

---

Puesto que  $du = 0$  obtenemos:

$$u = cte = h(z).$$

La solución  $u(x, t)$  que queremos hallar tendrá la forma:

$$u(x, t) = h(x - ct) = h(z). \quad (3.4)$$

Las soluciones obtenidas son invariantes bajo el grupo considerado, al ser  $u$  y  $x - ct$  invariantes. Por la Definición 3.1.1 verificamos que las soluciones que vamos a obtener son del tipo onda viajera con velocidad  $c$ .

Sus derivadas parciales son las siguientes:

- $u_t = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = h'(-c) = -ch'$
- $u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = h'$
- $u_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = h''$
- $u_{xxt} = (u_t)_{xx} = (-ch')_{xx} = -ch'''$

#### 3.2.1 Ecuación BBMB para $\alpha = 0$

Una de las propiedades del solitón es la no dispersión, manteniendo su forma a lo largo del tiempo. Encontramos el término no lineal  $uu_x$ , el término dispersivo  $u_x$  y el término disipativo  $u_{xx}$ . Observamos que se crea un equilibrio entre la dispersión provocada y la interacción no lineal, ya que la no linealidad hace que se *debilite* la dispersión hasta el punto de desaparecer. A continuación, vamos a centrarnos en el caso particular  $\alpha = 0$ :

$$u_t - u_{xxt} + \beta u_x + uu_x = 0 \quad (3.5)$$

Introduciendo las derivadas obtenidas anteriormente en la ecuación (2.1), obtenemos la siguiente EDO no lineal de tercer orden:

$$-ch' + ch''' + \beta h' + hh' = 0. \quad (3.6)$$

### 3.2 Cálculo de soluciones tipo onda solitaria

---

- Integrando respecto a  $z$  la EDO (3.6) obtenemos:

$$ch + ch'' + \beta h + \frac{h^2}{2} + k_1 = 0, \quad (3.7)$$

siendo  $k_1$  la constante de integración.

- Multiplicando la EDO (3.7) por  $h'$  e integrando de nuevo con respecto a  $z$  obtenemos:

$$\frac{-ch^2}{2} + \frac{c(h')^2}{2} + \frac{\beta h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + k_1 h + k_2 = 0,$$

siendo  $k_2$  la constante de integración.

Hemos transformado nuestra EDP no lineal de tercer orden en una EDO de primer orden de variables separadas. Puesto que estamos interesados en determinar ondas viajeras que sean solitarias, nuestras soluciones tienen que ser suaves por lo que debe cumplirse:

$$h, h', h'' \rightarrow 0 \quad \text{para } z \rightarrow \pm\infty$$

Esto implica que  $k_1 = k_2 = 0$ . Por lo que la EDO de variables separadas resultante es:

$$\frac{-ch^2}{2} + \frac{c(h')^2}{2} + \frac{\beta h^2}{2} + \frac{h^3}{6} = 0. \quad (3.8)$$

- A continuación, despejamos  $h'$  de la ecuación (3.8)

$$h' = \pm \sqrt{\frac{c - \beta}{c} h^2 - \frac{h^3}{3c}},$$

la cual puede escribirse como:

$$\frac{dh}{dz} = \pm \sqrt{\frac{3(c - \beta)h^2 - h^3}{3c}},$$

$$\frac{dh}{h\sqrt{3(c - \beta) - h}} = \pm \frac{dz}{\sqrt{3c}}.$$

Mas adelante en la Subsección 3.2.2, analizaremos el comportamiento de la onda en función de los valores de  $c$  y  $\beta$ .

### 3. SOLUCIÓN EXACTA

---

#### 3.2.1.1 Resolución de las integrales

La segunda integral es inmediata por lo que vamos a estudiar la primera integral.

- Aplicamos el cambio de variable  $h = 3(c - \beta)t$  donde  $dh = 3(c - \beta)dt$

$$\int \frac{\cancel{3(c - \beta)} dt}{\cancel{3(c - \beta)} t \sqrt{3(c - \beta)(1 - t)}} = \int \frac{dt}{t \sqrt{3(c - \beta)} \sqrt{(1 - t)}} = \frac{1}{\sqrt{3(c - \beta)}} \int \frac{dt}{t \sqrt{(1 - t)}}$$

- Aplicamos un segundo cambio de variable  $v^2 = 1 - t$  donde  $dt = -2v dv$ :

$$\frac{1}{\sqrt{3(c - \beta)}} \int \frac{-2v dv}{(1 - v^2)^{3/2}} = \frac{-2}{\sqrt{3(c - \beta)}} \int \frac{dv}{1 - v^2} = \frac{-2}{\sqrt{3(c - \beta)}} \operatorname{arctanh}(v)$$

- Deshacemos los cambios:

$$\frac{-2}{\sqrt{3(c - \beta)}} \operatorname{arctanh}(v) = \frac{-2}{\sqrt{3(c - \beta)}} \operatorname{arctanh}(\sqrt{1 - t}) = \frac{-2}{\sqrt{3(c - \beta)}} \operatorname{arctanh}\left(\sqrt{1 - \frac{h}{3(c - \beta)}}\right)$$

Ahora que tenemos la primera integral resuelta, la igualaremos a la segunda y hallaremos la expresión de la función  $h$ , despejándola. Sea  $z_0$  constante de integración, obtenemos:

$$\frac{-2}{\sqrt{3(c - \beta)}} \operatorname{arctanh}\left(\sqrt{1 - \frac{h}{3(c - \beta)}}\right) = \pm \frac{z + z_0}{\sqrt{3c}}$$

$$\operatorname{arctanh}\left(\sqrt{1 - \frac{h}{3(c - \beta)}}\right) = \pm \frac{(-z - z_0)\sqrt{c - \beta}}{2\sqrt{c}}$$

$$\sqrt{1 - \frac{h}{3(c - \beta)}} = \tanh\left(\mp \frac{(z + z_0)\sqrt{c - \beta}}{2\sqrt{c}}\right)$$

$$h(z) = \left(1 - \tanh^2\left(\frac{(z + z_0)\sqrt{c - \beta}}{2\sqrt{c}}\right)\right) 3(c - \beta)$$

Utilizando la identidad trigonométrica:  $\tanh^2(x) + \operatorname{sech}^2(x) = 1$  y sustituyéndola en la expresión, obtenemos:

$$h(z) = 3(c - \beta) \operatorname{sech}^2\left(\frac{z + z_0\sqrt{c - \beta}}{2\sqrt{c}}\right)$$

#### DEFINICIÓN 3.2.1: Onda solitaria para la ecuación BBMB

Como  $u(x, t) = h(z)$  y  $z = x - ct$  obtenemos la siguiente expresión de la solución exacta tipo solitón de la ecuación BBMB (??):

$$u(x, t) = 3(c - \beta) \operatorname{sech}^2 \left( \frac{(x + x_0 - ct)\sqrt{c - \beta}}{2\sqrt{c}} \right) \quad (3.9)$$

cumpliendo que  $u \rightarrow 0$  si  $x \rightarrow \pm\infty$  donde

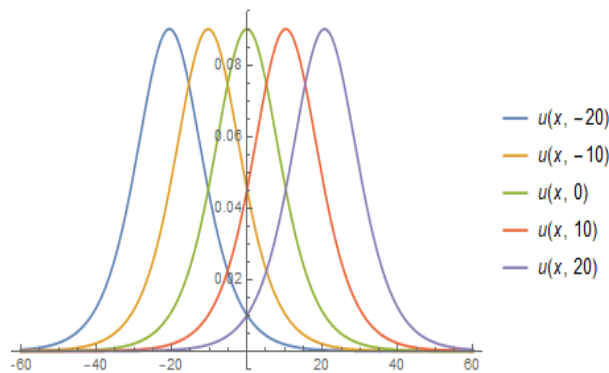
- $c$  es la velocidad de la onda.
- La amplitud de la onda es  $A = 3(c - \beta)$ .
- La anchura es  $\frac{1}{\mu}$  siendo  $\mu = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c - \beta}{c}}$ .

#### 3.2.2 Estudio del comportamiento del solitón

En esta sección vamos a estudiar el comportamiento de los solitones en función de los valores de  $c$  y  $\beta$ . Debe cumplirse, para que la raíz  $\sqrt{\frac{c - \beta}{c}}$  esté bien definida, que  $c - \beta$  y  $c$  tengan el mismo signo. Por tanto diferenciamos tres casos:

##### 3.2.2.1 Caso 1: $c > \beta$

En este caso, para que  $c - \beta$  y  $c$  sean ambos positivos debe cumplirse que  $c > \beta$  y por tanto,  $c > 0$ . El signo de  $c$  es positivo, lo que nos indica que el solitón se desplazará hacia la derecha conforme aumenta el tiempo con velocidad  $c$ . Ver Figura 3.1.



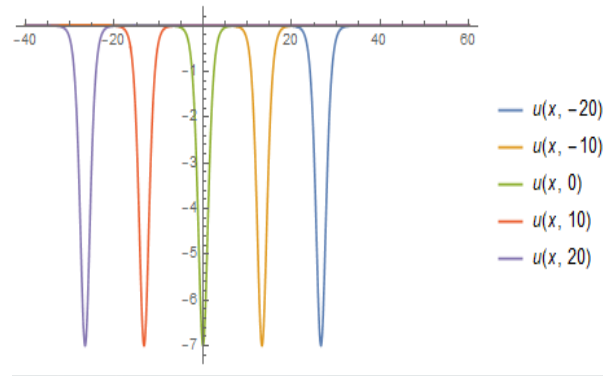
**Figura 3.1:** Representación de la solución para distintos valores de  $t$ , para  $c = 103/100$   $\beta = 1$  y  $z_0 = 0$

### 3. SOLUCIÓN EXACTA

---

#### 3.2.2.2 Caso 2: $c < \beta$ y $c < 0$

En este caso, para que  $c < \beta$  y  $c$  sean ambos negativos, debe cumplirse que  $c < \beta$  y  $c < 0$ . Esto implica que  $c < 0$ , ya que  $\beta$  es una constante real positiva. El signo de  $c$  debe ser negativo, lo que nos indica que el solitón se desplazará hacia la izquierda conforme aumenta el tiempo con velocidad  $c$ . Ver Figura 3.2.



**Figura 3.2:** Representación de la solución para distintos valores de  $t$ , para  $c = -103/100$ ,  $\beta = 1$  y  $z_0 = 0$

#### 3.2.2.3 Caso 3: $c = \beta$

En el caso límite, la amplitud sería 0 por lo que  $u(x, t) = 0$  y se tiene una solución trivial.



## Solución numérica

En este capítulo nuestro objetivo es la resolución numérica de la EDP (2.1) mediante el uso de B-spline cuadráticos y el método de Galerkin. Estos conceptos serán introducidos en el marco teórico. Por otro lado, detallaremos el procedimiento realizado para obtener las soluciones numéricas de la EDP (2.1). Por último, realizaremos un análisis de estabilidad del esquema numérico apoyándonos en la teoría de von Neumann.

### 4.1 Marco teórico

Para hallar la resolución numérica de una EDP, podemos hacerlo utilizando distintas herramientas. En este trabajo utilizaremos el método de Galerkin, basado en el uso de funciones B-spline cuadráticos y funciones peso. En esta sección introduciremos estos conceptos, imprescindibles para el desarrollo.

#### 4.1.1 B-spline

Es bastante común el uso de B-spline, debido a sus buenas características de continuidad y diferenciabilidad entre los nodos. Puede consultar ([? ]) para mayor detalle.

## 4. SOLUCIÓN NUMÉRICA

### DEFINICIÓN 4.1.1: B-Spline

Dado  $m$  valores reales  $t_i$ , denominados nodos, con  $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{m-1}$ . Se define B-spline de grado  $n$  a la curva paramétrica  $S : [t_0, t_{m-1}] \rightarrow \mathbb{R}^2$  compuesta por una combinación lineal de B-splines básicas  $b_{i,n}$  de grado  $n$  dado por :

$$S(t) = \sum_{i=0}^{m-n-2} P_i b_{i,n}(t),$$

para  $t \in [t_{n-1}, t_{m-n}]$

Llamamos  $P_i$  a los puntos de control o puntos de Boor. Las  $m - (n + 1)$  B-splines de grado  $n$  son funciones a trozos que se pueden definir por construcción de forma recursiva con la fórmula de Cox de Boor.

$$b_{i,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } t_i \leq t \leq t_{i+1}, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$b_{i,n}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+n} - t_i} b_{i,n-1}(t) + \frac{t_{j+n+1} - t}{t_{j+n+1} - t_{j+1}} b_{j+1,n-1}(t).$$

Las funciones definidas B-spline son continuas en los nodos y su derivabilidad dependerá de la distribución de los mismos. Cuando son equidistantes se dice que son uniformes.

### 4.1.2 Método de Galerkin

Para realizar la aproximación general de nuestra EDP, continua y con forma bilineal coercitiva vamos a aplicar el Método de Galerkin basado en las funciones peso. En primer lugar, se mostrarán de forma breve aquellos conceptos básicos del análisis funcional necesarios para el desarrollo teórico del método de Galerkin. Para ello, haremos una breve introducción de los espacios de Sobolev.

#### 4.1.2.1 Espacios $L^p$

Denotaremos  $\Omega$  a un abierto acotado no vacío de  $\mathbb{R}^d$ , de frontera regular, donde  $d \in \mathbb{N}$ . Sea  $(\Omega, M, \mu)$  un espacio medible, es decir:

- $M$  es un  $\sigma$ -álgebra en  $\Omega$
- $\mu$  es medible

- $\Omega$  es  $\sigma$ -finito

Definimos  $L^1(\Omega)$  al espacio de funciones  $\Omega$  en  $\mathbb{R}$  que son integrables. En general:

**DEFINICIÓN 4.1.2:**  $L^p$

Sea  $p \in \mathbb{R}$  con  $1 < p < \infty$ . Definimos:

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es medible y } |f|^p \in L^1(\Omega)\}. \quad (4.1)$$

Para todo  $f \in L^p(\Omega)$ , se define  $\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$ .

**4.1.2.2 Espacios de Hilbert**

Sea  $H$  un espacio vectorial. Un producto escalar  $(u, v)$  es una forma bilineal en  $H \times H$  con valores en  $\mathbb{R}$  tal que:

- $(u, v) = (v, u), \quad \forall u, v \in H$  (simétrica).
- $(u, v) \geq 0, \quad \forall u \in H$  (positiva).
- $(u, v) \neq 0, \quad \forall u \neq 0$  (bien definida).

El producto escalar satisface la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|(u, v)| \leq (u, u)^{1/2} (v, v)^{1/2}, \quad \forall u, v \in H. \quad (4.2)$$

Como consecuencia tenemos la siguiente norma inducida por el producto escalar:

$$\|u\| = (u, u)^{1/2}. \quad (4.3)$$

**DEFINICIÓN 4.1.3: Espacio de Hilbert**

Definimos espacio de Hilbert a un espacio vectorial  $H$  dotado de un producto escalar y tal que  $H$  es completo <sup>a</sup> para la norma inducida por este producto escalar.

<sup>a</sup>Definimos que un espacio es completo cuando todas las sucesiones de Cauchy son convergentes.

## 4. SOLUCIÓN NUMÉRICA

### 4.1.2.3 Espacios de Sobolev

A continuación, introduciremos brevemente el concepto de derivada débil, los espacios de Sobolev y el Teorema de Lax-Milgram. Para mayor detalle, el lector puede consultar [? ? ].

#### DEFINICIÓN 4.1.4: Derivada débil $\partial^\alpha u$

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d \in \mathbb{N}$ . Dado  $u, v \in L^1(U)$  para  $U \subset \mathbb{R}^d$  y  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  es un multi-índice, decimos que  $v$  es el  $\alpha$ -ésima derivada débil de  $u$  si y solo si:

$$\int_U u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_U v \varphi. \quad (4.4)$$

donde denotamos  $\varphi(\Omega)$  al espacio de las funciones de  $C^\infty(\Omega)$  con soporte compacto en  $U$

#### DEFINICIÓN 4.1.5: Espacio de Sobolev

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d \in \mathbb{N}$ . Dado  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  y  $1 \leq p \leq +\infty$ ,  $p \in \mathbb{N}$  definimos el espacio de Sobolev como:

$$W^{m,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : \forall \alpha \in \mathbb{N}^d \text{ con } |\alpha| \leq m, \partial^\alpha u \in L^p(\Omega)\}. \quad (4.5)$$

donde  $\partial^\alpha u$  denota, abusando de la notación, la derivada débil de  $u$  de orden  $|\alpha|$ . Además,  $W_0^{m,p}(\Omega)$  se define como la clausura de  $C_0^\infty(\Omega)$  en el espacio  $W^{m,p}(\Omega)$

Podemos observar que  $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$  y si  $1 \leq p < \infty$  entonces  $W_0^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$

#### TEOREMA 4.1.1:

El espacio de Sobolev  $W^{m,p}(\Omega)$  es un espacio de Banach

La norma del espacio de Sobolev se define a partir de la norma  $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$

**DEFINICIÓN 4.1.6: Norma de Sobolev**

Sea  $u \in W^{m,p}(\Omega)$ . Suponemos que la derivada débil  $\partial^\alpha u$  existe  $\forall |\alpha| \leq m$ . Definimos la norma de Sobolev como:

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

cuando  $p < \infty$ . Si  $p = \infty$  entonces :

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} := \max_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Denotamos  $H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega)$ . En consecuencia de lo anterior tenemos entonces:

**PROPOSICION 4.1.1:**

El espacio de Sobolev  $H^m(\Omega)$  es un espacio de Hilbert tal que  $\forall u, v \in H^m(\Omega)$  el producto escalar es dado por:

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_{L^2(\Omega)}.$$

Por tanto, para  $p = 2$  tenemos que:

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} := \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.6)$$

**DEFINICIÓN 4.1.7:  $H_0^1(\Omega)$**

Definimos el espacio  $H_0^1(\Omega)$  como:

$$H_0^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : u|_{\partial(\Omega)} \equiv 0\}.$$

Introduciremos una propiedad fundamental en la teoría varicinal de las EDP.

**DEFINICIÓN 4.1.8: Coercitividad**

Sea  $H$  un espacio de Hilbert y sea  $a(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  una forma bilineal definida sobre el espacio  $H$ . Diremos que la forma bilineal  $a(\cdot, \cdot)$  es coercitiva si  $\exists \iota > 0$  tal que:

$$a(v, v) \geq \iota \|v\|^2 \quad \forall v \in H$$

.

## 4. SOLUCIÓN NUMÉRICA

---

Para poder asegurar la existencia de una solución para la formulación varicional de una EDP vamos a introducir el siguiente resultado:

### TEOREMA 4.1.2: Lax-Milgram (Existencia y unicidad)

Sea  $H$  un espacio de Hilbert,  $L(\cdot)$  una forma lineal continua en  $H$  y la forma bilineal  $a(\cdot, \cdot)$  coercitiva y continua en  $H$ . Luego para la formulación varicional:

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in H,$$

tenemos que existe una única solución  $u \in H$  que depende de la forma lineal  $L$ .

Después de introducir brevemente estos conceptos, vamos a proceder a introducir el **método de Galerkin**.

Sea  $H$  un espacio de Hilbert,  $a(\cdot, \cdot)$  una forma bilineal continua y coercitiva y  $L(\cdot)$  lineal y continua definida sobre  $H$ . Consideramos el problema de formulación varicional de:

$$\text{encontrar } u \in V \text{ tal que } a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in H. \quad (4.7)$$

Este problema variacional se encuentra en las hipótesis del teorema Lax-Milgram 4.1.2.3, por lo que existe una única solución  $u \in H$  de dicho problema.

Aunque se puede ver de forma más general en [? ], la idea principal del método de Galerkin es encontrar una aproximación de  $u \in H$  por un espacio  $H_h$  de dimensión finita, teniendo la misma norma que la definida en  $H$ . Para ello vamos a utilizar la aproximación conocida como proyección de Galerkin tomando un subespacio  $H_h \subseteq H$ . Luego introducimos el siguiente problema:

$$\text{encontrar } u_h \in H_h \text{ tal que } a_h(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in H_h \quad (4.8)$$

Este nuevo problema planteado sigue teniendo una única solución  $u_h \in H_h$  puesto que  $H_h \subseteq H$  y es un espacio de Hilbert <sup>1</sup>. Por lo que se vuelve a cumplir el teorema de Lax-Milgram 4.1.2.3.

---

<sup>1</sup> $H_h \subset H$  es un subespacio de un espacio de Banach, por lo que es un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert. Por ello, podemos considerar la norma inducida.

Para proseguir con el método, tenemos que ver que el problema aproximado (4.8) es equivalente a un sistema lineal. Puesto que  $H_h$  es un espacio de dimensión finita, denotamos  $N = \dim H_h$  y  $\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$  una base de  $H_h$ . Ahora podemos escribir  $u_h$  como combinación de elementos de la base antes definida:

$$u_h = \sum_{i=1}^N U_i \phi_i \quad (4.9)$$

donde  $U = (U_i)_{1 \leq i \leq N} \in \mathbb{R}^N$ , es el vector de coordenadas de  $u_h$ .

**DEFINICIÓN 4.1.9: Matriz de rigidez**

Denotamos como matriz de rigidez  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$  definida como:

$$A_{i,j} = a_h(\phi_i, \phi_j), 1 \leq i, j \leq N$$

Sea  $F \in \mathbb{R}$  y  $F_i = L(\phi_i)$ ,  $1 \leq i \leq N$  podemos escribir nuestro problema entonces como un sistema de ecuaciones lineales de la forma:

$$AU = F \quad (4.10)$$

Llegamos entonces al siguiente resultado:

**PROPOSICION 4.1.2:**

Sea  $H$  un espacio de Hilbert,  $a(\cdot, \cdot)$  una forma bilineal continua y coercitiva en  $H$  y  $L(\cdot)$  forma lineal continua. Si  $H_h$  es un espacio finito dimensional y se tiene que  $H_h \subset H$ , entonces el problema aproximado (4.8) está bien definido y existe una única solución del sistema (4.10).

Presentaremos ahora dos resultados que serán útiles para comprobar que la solución del problema (4.10) aproxima a la solución del problema (4.7).

**Lema 4.1.1:**

El error  $u - u_h$  es  $a$ -ortogonal al espacio  $H_h$

## 4. SOLUCIÓN NUMÉRICA

---

### Lema 4.1.2:

Se verifica que

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\nu} \inf_{v_h \in H_h} \|u - v_h\|, \quad (4.11)$$

donde  $M > 0$  y  $\nu > 0$  son las constantes de continuidad y coercitividad, respectivamente de  $a(\cdot, \cdot)$ .

Este resultado garantiza que si las funciones del espacio  $H_h$  aproximan a  $u$  entonces  $u_h$  tiende a  $u$ .

### 4.1.3 Método de Weighted Residuals

En matemática aplicada, el método de weighted residual (MWR) es un método para resolver ecuaciones diferenciales. Suponemos que las soluciones de estas ecuaciones diferenciales se aproximan correctamente mediante una suma finita de funciones test  $\phi_i$ . En tales casos, el método MWR se usa para encontrar el valor del coeficiente desconocido de cada función test correspondiente. La solución aproximada se sustituye en la ecuación diferencial gobernante que resulta en un error o residuo. Finalmente, en el MWR el residuo desaparece en los puntos medios o se hace lo más pequeño posible, dependiendo de la función peso, para encontrar los coeficientes desconocidos. Para mayor detalle, consultar [? ].

Vamos a considerar una EDO,

$$L(u) = f(x) \quad (4.12)$$

sujeto a condiciones de contorno en un dominio  $\Omega$ . En MWR la solución  $u(x)$  de la ecuación (4.12) es considerada como la aproximación  $\hat{u}(x) = \sum_{i=0}^n \phi_i(x)c_i$ , que satisface las condiciones de contorno. En este caso,  $c_i$  son los coeficientes desconocidos aún por determinar, donde  $\phi_i(x)$  son funciones test linealmente independientes entre sí. La solución asumida se sustituye en la ecuación diferencial gobernante (4.12), lo que da lugar a un error o residuo. Este residuo es entonces minimizado o forzado a desaparecer en el dominio  $\Omega$ , dando lugar a un sistema de ecuaciones algebraicas en términos de coeficientes desconocidos  $c_i$ . Como tal, los MWR consisten principalmente en los siguientes pasos:



- Primero tomamos la solución aproximada

$$u(x) \approx \hat{u}(x) = \sum_{i=0}^n \phi_i(x) c_i, \quad (4.13)$$

donde  $\phi_i(x)$  son las funciones test independientes y tal que  $\hat{u}(x)$  satisfaga las condiciones de contorno.

- Sustituimos  $\hat{u}(x)$  en la ecuación diferencial  $L(\hat{u}) - f(x) \neq 0$  el cual da lugar a un error .
- Definimos el residuo como la medida del error,

$$R(x) = L(\hat{u}) - f(x). \quad (4.14)$$

- Tomamos una función peso  $w_i(x)$  que será multiplicada a la ecuación (4.13) e integrada sobre  $\Omega$ , obteniendo:

$$\int_{\Omega} w_i(x) R(x) dx \neq 0, \quad (4.15)$$

para  $i = 0, 1, \dots, n$ . Hacer el residuo cero en todo el dominio es de gran dificultad, por lo que pretendemos hacerlo lo mas pequeño posible.

- Por último, forzamos que la integral se desvanezca en el dominio  $\Omega$ :

$$\int_{\Omega} w_i(x) R(x) dx = 0, \quad (4.16)$$

obteniendo  $n + 1$  ecuaciones algebraicas independientes para calcular las incógnitas.

En concreto, en el método de Galerkin consideramos las funciones test como:

$$w_k = \phi_k(x) \quad \text{para} \quad k = 0, 1, \dots, n$$

tal que  $\phi_k$  sean  $n + 1$  funciones bases de  $x$  que cumplan las condiciones de contorno. Por lo tanto la ecuación (4.16) tendrá la forma:

$$\int_{\Omega} \phi_k(x) R(x) dx = 0. \quad (4.17)$$

## 4. SOLUCIÓN NUMÉRICA

---

### 4.2 B-splines cuadrático y propiedades

Puesto que vamos a aplicar el método de Galerkin, realizamos una discretización en el intervalo  $[a, b]$ . La discretización en el espacio uniforme viene dada por los nodos  $x_m$  tales que:  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$  distribuida uniformemente mediante un tamaño de paso  $h$  constante:

$$h = \frac{b - a}{N} = x_{m+1} - x_m.$$

Definimos la siguiente función B-spline cuadrática  $\phi_m$  siguiendo P.M. Prenter [? ]:

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^2} \begin{cases} (x_{m+2} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^2 + 3(x_m - x)^2 & \text{si } x_{m-1} \leq x \leq x_m, \\ (x_{m+2} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^2 & \text{si } x_m \leq x < x_{m+1}, \\ (x_{m+2} - x)^2 & \text{si } x_{m+1} \leq x < x_{m+2}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (4.18)$$

donde los nodos  $x_m$  están definidos en el intervalo  $[a, b]$  para  $m = -1(1)N$

El conjunto de funciones  $\{\phi_{-1}(x), \phi_0(x), \dots, \phi_N(x)\}$  generan una base en el intervalo definido  $[a, b]$ . Las funciones distintas a  $\phi_{m-1}$ ,  $\phi_m$  y  $\phi_{m+1}$  son cero en  $[x_m, x_{m+1}]$ . Cada una de estas funciones B-spline cuadráticas abarca tres elementos, por lo que cada  $[x_m, x_{m+1}]$  está cubierta por tres funciones B-spline.

Veamos los valores que toma la función  $\phi_m(x)$  para los nodos  $x_{m-1}, x_m, x_{m+1}$ .

$$\bullet \phi_m(x_{m-1}) = \frac{1}{h^2} [(x_{m+2} - x_{m-1})^2 - 3(x_{m+1} - x_{m-1})^2 + 3(x_m - x_{m-1})^2] =$$

$$\frac{9h^2 - 12h^2 + 3h^2}{h^2} = 0,$$

$$\bullet \phi_m(x_m) = \frac{1}{h^2} [(x_{m+2} - x_m)^2 - 3(x_{m+1} - x_m)^2] = \frac{4h^2 - 3h^2}{h^2} = 1,$$

$$\bullet \phi_m(x_{m+1}) = \frac{1}{h^2} (x_{m+2} - x_{m+1})^2 = \frac{h^2}{h^2} = 1.$$

De forma análoga obtendríamos los valores que toma la función  $\phi'_m(x)$  en los nodos, obteniendo la siguiente Tabla 4.2.

Todas las funciones B-spline diferentes de  $\phi_{m-1}(x)$ ,  $\phi_m(x)$ ,  $\phi_{m+1}(x)$ , son cero sobre el intervalo  $[x_m, x_{m+1}]$ .

## 4.2 B-splines cuadrático y propiedades

	$x_{m-1}$	$x_m$	$x_{m+1}$	$x_{m+2}$
$\phi_m(x)$	0	1	1	0
$h\phi'_m(x)$	0	-2	2	0

Una vez definidas estas funciones, definimos la solución numérica dada por:

$$u_N(x, t) = \sum_{j=-1}^N \phi_j(x) \delta_j(t), \quad (4.19)$$

donde  $\delta_j(t)$  son parámetros dependientes del tiempo que serán determinados por las condiciones de contorno y las condiciones de MWR.

Cada intervalo  $[x_m, x_{m+1}]$  finito, puede ser convertido en un intervalo  $[0, 1]$  aplicando una transformación local de coordenadas definida como:

$$h\eta = x - x_m, \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad (4.20)$$

De esta manera, puede ser estudiado de forma mas sencilla. Las funciones B-splines cuadráticas (4.18) pueden ser definidas en términos de  $\eta$  sobre el intervalo  $[0, 1]$  como:

$$\begin{aligned} \phi_{m-1}(\eta) &= (1 - \eta)^2 \\ \phi_m(\eta) &= 1 + 2\eta - 2\eta^2 \\ \phi_{m+1}(\eta) &= \eta^2 \end{aligned} \quad (4.21)$$

La función  $u(x, t)$  dada por (4.19) sobre  $[x_m, x_{m+1}]$  es aproximada sobre la región  $[0, 1]$  por:

$$u_N(\eta, t) = \sum_{j=m-1}^{m+1} \phi_j \delta_j$$

Igualando la función (4.19) y los B-spline cuadráticos (4.18), los valores de  $u$  y  $u'$  en los nodos son determinados en términos del parámetro  $\delta_m$  como:

$$\begin{aligned} u_N(x_m, t) &= u_m = \delta_{m-1} + \delta_m \\ u'_N(x_m, t) &= u'_m = \frac{2}{h}(-\delta_{m-1} + \delta_m) \end{aligned}$$

Dónde el símbolo “ ’ ” denota la primera derivada con respecto a  $x$ . Los B-spline  $\phi_m(x)$  y sus primeras derivadas son cero fuera del intervalo  $[x_{m-1}, x_{m+2}]$

## 4. SOLUCIÓN NUMÉRICA

---

### 4.3 Implementación del método de Galerkin

Aplicando el método de Galerkin a la ecuación (2.1) tomando como función peso:  $w(x)$ , obtenemos la formulación débil de la ecuación:

$$\int_a^b w(u_t - u_{xxt} - \alpha u_{xx} + \beta u_x + uu_x) dx = 0 \quad (4.22)$$

Usando el cambio de variable (4.20):

- $u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{h} u_\eta,$
- $u_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{1}{h} \frac{\partial u_\eta}{\partial x} = \frac{1}{h} \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{h^2} u_{\eta\eta},$
- $u_{xxt} = \frac{\partial u_{xx}}{\partial t} = \frac{1}{h^2} u_{\eta\eta t}.$

Por lo tanto podemos expresar (4.22) como:

$$\int_0^1 w(u_t - \frac{1}{h^2} u_{\eta\eta t} - \frac{\alpha}{h^2} u_{\eta\eta} + \frac{\beta}{h} u_\eta + \frac{1}{h} \hat{u} u_\eta) d\eta = 0 \quad (4.23)$$

donde  $\hat{u}$  es tomada como constante local para evitar la no linealidad, facilitando así también la integral.

Ahora tomando  $\rho = \frac{1}{h^2}$ ,  $\lambda = \hat{u}$  y  $\xi = \frac{\alpha}{h^2}$  y sabiendo que:

- $(wu)_\eta = w_\eta u + w u_\eta,$
- $(w u_\eta)_\eta = w_\eta u_\eta + w u_{\eta\eta},$
- $(w u_{\eta t})_\eta = w_\eta u_{\eta t} + w u_{\eta\eta t},$

tenemos que:

$$\begin{aligned}
w \left( u_t - \rho u_{\eta\eta t} - \xi u_{\eta\eta} + \frac{\beta + \lambda}{h} u_\eta \right) &= w \left( u_t + \frac{\beta + \lambda}{h} u_\eta \right) - \xi (w u_{\eta\eta} - w_\eta u_\eta \\
&\quad + w_\eta u_\eta) - \rho w u_{\eta\eta t} \\
&= w \left( u_t + \frac{\beta + \lambda}{h} u_\eta \right) - \xi ((w u_\eta)_\eta + w_\eta u_\eta) \\
&\quad - \rho w u_{\eta\eta t} \\
&= w \left( u_t + \frac{\beta + \lambda}{h} u_\eta \right) - \xi ((w u_\eta)_\eta + w_\eta u_\eta) \\
&\quad - \rho (w u_{\eta\eta t} + w_\eta u_{\eta t} - w_\eta u_{\eta t}) \\
&= w \left( u_t + \frac{\beta + \lambda}{h} u_\eta \right) - \xi (w u_\eta)_\eta + \xi (w_\eta u_\eta) \\
&\quad + \rho w_\eta u_{\eta t} - \rho (w u_{\eta t})_\eta
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Aplicando la integral por partes en (4.23):

$$\int_0^1 \left( w(u_t + \frac{\beta + \lambda}{h} u_\eta) + \xi w_\eta u_\eta + \rho w_\eta u_{\eta t} \right) d\eta = \int_0^1 (\xi (w u_\eta)_\eta + \rho (w u_{\eta t})_\eta) d\eta \tag{4.25}$$

Tomando  $w(x)$  como las funciones B-splines cuadráticas indicadas en (4.18) y sustituyendo la aproximación (4.19) en (4.25) con algunas manipulaciones, obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j=m-1}^{m+1} \left[ \int_0^1 (\phi_i \phi_j + \rho \phi'_i \phi'_j) d\eta - [\rho \phi_i \phi'_j]_0^1 \right] \dot{\delta}_j^e + \\
&\sum_{i,j=m-1}^{m+1} \left[ \int_0^1 \left( \frac{\beta + \lambda}{h} \phi_i \phi'_j + \xi \phi'_i \phi'_j \right) d\eta - [\xi \phi_i \phi'_j]_0^1 \right] \delta_j^e = 0,
\end{aligned}$$

donde  $\delta^e = (\delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1})^T$  y “ $\cdot$ ” representa la diferenciación respecto a  $t$ . Puede darse en forma de matriz como:

$$[A^e + \rho B^e - \rho C^e] \dot{\delta}_j^e + \left[ \frac{\beta + \lambda}{h} D^e + \xi B^e - \xi C^e \right] \delta_j^e = 0. \tag{4.26}$$

Los elementos  $a_{ij}^e$ ,  $b_{ij}^e$ ,  $c_{ij}^e$  y  $d_{ij}^e$  de las matrices  $A^e$ ,  $B^e$ ,  $C^e$  y  $D^e$  están dadas por las siguientes integrales:<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Todas las cuentas realizadas para la obtención de las matrices han sido verificadas apoyándose en el software Wolfram Mathematica.

#### 4. SOLUCIÓN NUMÉRICA

---

$$A_{ij}^e = \int_0^1 \phi_i \phi_j d\eta = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 6 & 13 & 1 \\ 13 & 54 & 13 \\ 1 & 13 & 6 \end{bmatrix}, \quad (4.27)$$

$$B_{ij}^e = \int_0^1 \phi'_i \phi'_j d\eta = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (4.28)$$

$$C_{ij}^e = \int_0^1 \phi_i \phi'_j d\eta = 2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.29)$$

$$D_{ij}^e = \int_0^1 \phi_i \phi'_j d\eta = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -8 & 0 & 8 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad (4.30)$$

con los subíndices  $i, j = m-1, m, m+1$  para  $[x_m, x_{m+1}]$ . Tomamos  $u$  como un promedio (lumped value) de la forma  $\frac{u_m + u_{m+1}}{2}$  obteniendo:

$$\lambda_m = \frac{\delta_{m-1} + 2\delta_m + \delta_{m+1}}{2}.$$

Hemos tomado el promedio y lo hemos usado en el siguiente nivel de tiempo como valor aproximado. Debido a esta forma de agrupamiento, se conoce como “lumped method”. Primero hemos trabajado en el intervalo  $[0, 1]$  y hemos encontrado  $A^e, B^e, C^e$  y  $D^e$  para esos elementos. Tenemos entonces que encontrar la solución de la ecuación en todo el intervalo  $[a, b]$ . Para ello vamos a unir todos los elementos de la matriz en toda la región. Por lo que obtendremos las matrices globales  $A, B, C$  y  $D$ . Podemos expresar (4.26) de forma global como:

$$[A + \rho B - \rho C] \dot{\delta} + \left[ \frac{\beta + \lambda}{h} D + \xi B - \xi C \right] \delta = 0 \quad (4.31)$$

donde  $\delta = (\delta_{-1}, \delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{N-1}, \delta_N)^T$ .

Veamos el algoritmo utilizado para la obtención de las matrices. Nos centraremos en la matriz  $A^1$ , las demás matrices se calcularán de forma análoga.

---

<sup>1</sup>Todas las cuentas realizadas para la obtención de las matrices han sido verificadas apoyandome en el software Wolfram Mathematica

### 4.3 Implementación del método de Galerkin

Sea  $\int_a^b w(x)u_t(x)dx$  y la ecuación (4.19). Vamos a fijar los valores de  $w$  para obtener las distintas filas de la matriz. Para obtener los coeficientes, vamos a transformar el intervalo  $[a, b]$  en el intervalo  $[0, 1]$ , haciendo uso del cambio de variable (4.20), para facilitar el estudio con el uso de funciones B-splines cuadráticas definidas respecto a  $\eta$  (4.21).

- Para la primera fila de la matriz tomamos:  $w(x) = \phi_{-1}(x)$  entonces:

$$\begin{aligned} \int_a^b w(x)u_t dx &= \int_a^b \phi_{-1}(x) \sum_{i=-1}^N \phi_i(x)\delta_i(t)dx = \int_{x_0}^{x_1} \phi_{-1}(x) \sum_{i=-1}^N \phi_i(x)\delta_i(t)dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \phi_{-1}(x) \sum_{i=-1}^1 \phi_i(x)\delta_i(t)dx = \delta_{-1}(t) \int_{x_0}^{x_1} \phi_{-1}(x)\phi_{-1}(x)dx + \\ &\quad + \delta_0(t) \int_{x_0}^{x_1} \phi_{-1}(x)\phi_0(x)dx + \delta_1(t) \int_{x_0}^{x_1} \phi_{-1}(x)\phi_1(x)dx \end{aligned} \quad (4.32)$$

Procedemos ahora a hacer el cambio de variable. Sea el cambio de variable (4.20), las funciones B-splines cuadráticas (4.18) y la transformación al intervalo  $[0, 1]$  en términos de  $\eta$  en (4.21) en el intervalo  $[x_0, x_1]$ .

Para  $\phi_{-1}(x)$  en  $[x_0, x_1]$ :

$$\frac{1}{h^2}(x_1 - x)^2 = \frac{1}{h^2}(x_1 - x_0 - h\eta)^2 = (1 - \eta)^2 = \phi_{m-1}(\eta).$$

Para  $\phi_0(x)$  en  $[x_0, x_1]$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2}((x_2 - x)^2 - 3(x_1 - x)^2) &= \frac{1}{h^2}((x_2 - x_0 - h\eta)^2 - 3(h^2(1 - \eta)^2)) \\ &= (2 - \eta)^2 - 3(1 - \eta)^2 = 1 + 2\eta - 2\eta^2 = \phi_m(\eta). \end{aligned}$$

Para  $\phi_1(x)$  en  $[x_0, x_1]$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2}((x_3 - x)^2 - 3(x_2 - x)^2 + 3(x_1 - x)^2) &= \frac{1}{h^2}((x_3 - x_0 - h\eta)^2 - 3(x_2 - x_0 - h\eta)^2 \\ &\quad + 3(x_1 - x_0 - h\eta)^2) = (3 - \eta)^2 - 3(2 - \eta)^2 + 3(1 - \eta)^2 = \eta^2 = \phi_{m+1}(\eta). \end{aligned}$$

#### 4. SOLUCIÓN NUMÉRICA

---

Por lo tanto tenemos que nuestro cambio de variable sería:

$$\phi_{-1}(x) \rightarrow \phi_{m-1}(\eta)$$

$$\phi_0(x) \rightarrow \phi_m(\eta)$$

$$\phi_1(x) \rightarrow \phi_{m+1}(\eta)$$

Siguiendo entonces (4.32) y haciendo el cambio anterior para el intervalo  $[0, 1]$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_a^b \phi_{-1}(x) u_t(x) dx &= \frac{1}{h} \left( \delta_{-1}(t) \int_0^1 \phi_{m-1}(\eta) \phi_{m-1}(\eta) d\eta + \delta_0(t) \int_0^1 \phi_{m-1}(\eta) \phi_m(\eta) d\eta \right. \\ &\quad \left. + \delta_1(t) \int_0^1 \phi_{m-1}(\eta) \phi_{m+1}(\eta) d\eta \right) \\ &= \frac{1}{30h} (6\delta_{-1}(t) + 13\delta_0(t) + \delta_1(t)) \end{aligned} \quad 5$$

Obteniendo así los coeficientes de la primera fila de la matriz  $A$ .

- Para la segunda fila de la matriz tomamos  $w(x) = \phi_0(x)$ .

Los únicos valores no nulos para  $[x_0, x_1]$  son para  $i = -1, 0, 1$  y  $[x_1, x_2]$  son para  $i = 0, 1, 2$

$$\begin{aligned} \int_a^b w(x) u_t(x) dx &= \int_a^b \phi_0(x) \sum_{i=-1}^N \phi_i(x) \delta_{i(t)} dx = \int_{x_0}^{x_1} \phi_0(x) \sum_{i=-1}^1 \phi_i(x) \delta_i dx \\ &\quad + \int_{x_1}^{x_2} \phi_0(x) \sum_{i=0}^2 \phi_i(x) \delta_i(t) = \delta_{-1}(t) \int_{x_0}^{x_1} \phi_0(x) \phi_{-1}(x) dx \\ &\quad + \delta_0(t) \left( \int_{x_0}^{x_1} \phi_0(x) \phi_0(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} \phi_0(x) \phi_0(x) dx \right) \\ &\quad + \delta_1(t) \left( \int_{x_0}^{x_1} \phi_0(x) \phi_1(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} \phi_0(x) \phi_1(x) dx \right) \\ &\quad + \delta_2(t) \int_{x_1}^{x_2} \phi_0(x) \phi_2(x) dx. \end{aligned} \quad (4.33)$$



### 4.3 Implementación del método de Galerkin

Procedemos ahora a hacer el cambio de variable de forma análoga a la anterior utilizando 4.18, 4.20, y 4.21 en el intervalo  $[x_0, x_1]$  y  $[x_1, x_2]$  obteniendo los siguientes cambios de variable:

Para el intervalo  $[x_0, x_1]$ :

$$\phi_{-1}(x) \rightarrow \phi_{m-1}(\eta)$$

$$\phi_0(x) \rightarrow \phi_m(\eta)$$

$$\phi_1(x) \rightarrow \phi_{m+1}(\eta)$$

Para el intervalo  $[x_1, x_2]$ :

$$\phi_0(x) \rightarrow \phi_{m-1}(\eta)$$

$$\phi_1(x) \rightarrow \phi_m(\eta)$$

$$\phi_2(x) \rightarrow \phi_{m+1}(\eta)$$

Siguiendo entonces (4.33):

$$\begin{aligned} (4,33) &= \frac{1}{h} \left[ \delta_{-1} \int_0^1 \phi_m(\eta) \phi_{m-1}(\eta) d\eta + \delta_0 \left( \int_0^1 \phi_m(\eta) \phi_m(\eta) d\eta + \int_0^1 \phi_{m-1}(\eta) \phi_{m-1}(\eta) d\eta \right) \right. \\ &\quad \left. + \delta_1 \left( \int_0^1 \phi_m(\eta) \phi_{m+1}(\eta) d\eta + \int_0^1 \phi_{m-1}(\eta) \phi_m(\eta) d\eta \right) + \delta_2 \int_0^1 \phi_{m-1}(\eta) \phi_{m+1}(\eta) d\eta \right] \\ &= \frac{1}{30h} (13\delta_{-1} + 60\delta_0(t) + 26\delta_1(t) + \delta_2(t)). \end{aligned} \quad 5$$

Obteniendo así, los coeficientes de la segunda fila.

- Para las fila del medio tomamos  $w(x) = \phi_j(x)$  genérico con  $j = 1, \dots, N - 2$ :

Los únicos valores no nulos para  $[x_{j-1}, x_j]$  son para  $i = j - 2, j - 1, j$ , para  $[x_j, x_{j+1}]$  son para  $i = j - 1, j, j + 1$  y  $[x_{j+1}, x_{j+2}]$  son para  $i = j, j + 1, j + 2$

#### 4. SOLUCIÓN NUMÉRICA

---

$$\begin{aligned}
\int_a^b w(x)u_t(x)dx &= \int_a^b \phi_j(x) \sum_{i=-1}^N \phi_i(x)\delta_i(t)dx = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \phi_j(x) \sum_{i=j-2}^j \phi_i(x)\delta_i(t)dx \\
&+ \int_{x_j}^{x_{j+1}} \phi_j(x) \sum_{i=j-1}^{j+1} \phi_i(x)\delta_i(t) + \int_{x_{j+1}}^{x_{j+2}} \phi_j(x) \sum_{i=j}^{j+2} \phi_i(x)\delta_i(t) \\
&= \delta_{j-2}(t) \int_{x_{j-1}}^{x_j} \phi_j(x)\phi_{j-2}(x)dx + \delta_{j-1}(t) \left( \int_{x_{j-1}}^{x_j} \phi_j(x)\phi_{j-1}(x)dx \right. \\
&+ \left. \int_{x_j}^{x_{j+1}} \phi_j(x)\phi_{j-1}(x)dx \right) + \delta_j(t) \left( \int_{x_{j-1}}^{x_j} \phi_j(x)\phi_j(x)dx \right. \\
&+ \left. \int_{x_j}^{x_{j+1}} \phi_j(x)\phi_j(x)dx + \int_{x_{j+1}}^{x_{j+2}} \phi_j(x)\phi_j(x)dx \right) \\
&+ \delta_{j+1}(t) \left( \int_{x_j}^{x_{j+1}} \phi_j(x)\phi_{j+1}(x)dx + \int_{x_{j+1}}^{x_{j+2}} \phi_j(x)\phi_{j+1}(x)dx \right) \\
&+ \delta_{j+2}(t) \int_{x_{j+1}}^{x_{j+2}} \phi_j(x)\phi_{j+2}(x)dx.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Procedemos ahora a hacer el cambio de variable de forma análoga a la anterior utilizando 4.20, 4.18 y 4.21 en el intervalo  $[x_{j-1}, x_j]$ ,  $[x_j, x_{j+1}]$  y  $[x_{j+1}, x_{j+2}]$  obteniendo los siguientes cambios de variable:

Para el intervalo  $[x_{j-1}, x_j]$ :

$$\phi_{j-2}(x) \rightarrow \phi_{m-1}(\eta)$$

$$\phi_{j-1}(x) \rightarrow \phi_m(\eta)$$

$$\phi_j(x) \rightarrow \phi_{m+1}(\eta)$$

Para el intervalo  $[x_j, x_{j+1}]$ :

$$\phi_{j-1}(x) \rightarrow \phi_{m-1}(\eta)$$

$$\phi_j(x) \rightarrow \phi_m(\eta)$$

$$\phi_{j+1}(x) \rightarrow \phi_{m+1}(\eta)$$

Para el intervalo  $[x_{j+1}, x_{j+2}]$ :

$$\phi_j(x) \rightarrow \phi_{m-1}(\eta)$$

$$\phi_{j+1}(x) \rightarrow \phi_m(\eta)$$

$$\phi_{j+2}(x) \rightarrow \phi_{m+1}(\eta)$$

Sustituyendo en (4.34):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \left[ \delta_{j-2}(t) \int_0^1 \phi_{m+1}(\eta) \phi_{m-1}(\eta) d\eta + \delta_{j-1}(t) \left( \int_0^1 \phi_m(\eta) \phi_{m+1}(\eta) d\eta \right. \right. \\ & + \left. \int_0^1 \phi_m(\eta) \phi_{m-1}(\eta) d\eta \right) + \delta_j(t) \left( \int_0^1 \phi_{m+1}(\eta) \phi_{m+1}(\eta) d\eta + \int_0^1 \phi_m(\eta) \phi_m(\eta) d\eta \right. \\ & + \left. \int_0^1 \phi_{m-1}(\eta) \phi_{m-1}(\eta) d\eta \right) + \delta_{j+1}(t) \left( \int_0^1 \phi_m(\eta) \phi_{m+1}(\eta) d\eta + \int_0^1 \phi_m(\eta) \phi_{m-1}(\eta) d\eta \right) \\ & + \left. \delta_{j+2}(t) \int_0^1 \phi_{m-1}(\eta) \phi_{m+1}(\eta) d\eta \right] \\ & = \frac{1}{30h} (\delta_{j-2}(t) + 26\delta_{j-1}(t) + 66\delta_j(t) + 26\delta_{j+1}(t) + \delta_{j+2}(t)) \end{aligned}$$

Hemos obtenido por tanto, los coeficientes de las fila intermedias.

- Para la penúltima fila tomamos  $w(x) = \phi_{N-1}(x)$

Los únicos valores no nulos para  $[x_{N-2}, x_{N-1}]$  son para  $i = N - 3, N - 2, N - 1$  y para  $[x_{N-1}, x_N]$  son para  $i = N - 2, N - 1, N$

#### 4. SOLUCIÓN NUMÉRICA

---

$$\begin{aligned}
\int_a^b w(x)u_t(x)dx &= \int_a^b \phi_{N-1}(x) \sum_{i=-1}^N \phi_i(x)\delta_i(t)dx = \int_{x_{N-2}}^{x_{N-1}} \phi_{N-1}(x) \sum_{i=N-3}^{N-1} \phi_i(x)\delta_i(t)dx \\
&+ \int_{x_{N-1}}^{x_N} \phi_{N-1}(x) \sum_{i=N-2}^N \phi_i(x)\delta_i(t) = \delta_{N-3}(t) \int_{x_{N-2}}^{x_{N-1}} \phi_{N-1}(x)\phi_{N-3}(x)dx \\
&+ \delta_{N-2}(t) \left( \int_{x_{N-2}}^{x_{N-1}} \phi_{N-1}(x)\phi_{N-2}(x)dx + \int_{x_{N-1}}^{x_N} \phi_{N-1}(x)\phi_{N-2}(x)dx \right) \\
&+ \delta_{N-1}(t) \left( \int_{x_{N-2}}^{x_{N-1}} \phi_{N-1}(x)\phi_{N-1}(x)dx + \int_{x_{N-1}}^{x_N} \phi_{N-1}(x)\phi_{N-1}(x)dx \right) \\
&+ \delta_N(t) \int_{x_{N-1}}^{x_N} \phi_{N-1}(x)\phi_N(x)dx.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Procedemos ahora a hacer el cambio de variable de forma análoga a la anterior utilizando (4.18), (4.20) y (4.21) en el intervalo  $[x_{N-2}, x_{N-1}]$  y  $[x_{N-1}, x_N]$  obteniendo los siguientes cambios de variable:

Para el intervalo  $[x_{N-2}, x_{N-1}]$ :

$$\phi_{N-3}(x) \rightarrow \phi_{m-1}(\eta)$$

$$\phi_{N-2}(x) \rightarrow \phi_m(\eta)$$

$$\phi_{N-1}(x) \rightarrow \phi_{m+1}(\eta)$$

Para el intervalo  $[x_{N-1}, x_N]$ :

$$\phi_{N-2}(x) \rightarrow \phi_{m-1}(\eta)$$

$$\phi_{N-1}(x) \rightarrow \phi_m(\eta)$$

$$\phi_N(x) \rightarrow \phi_{m+1}(\eta)$$

Sustituyendo en (4.35):

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{h} \left[ \delta_{N-3}(t) \int_0^1 \phi_{m+1}(\eta) \phi_{m-1}(\eta) d\eta + \delta_{N-2}(t) \left( \int_0^1 \phi_m(\eta) \phi_{m+1}(\eta) d\eta \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \int_0^1 \phi_m(\eta) \phi_{m-1}(\eta) d\eta \right) + \delta_{N-1}(t) \left( \int_0^1 \phi_{m+1}(\eta) \phi_{m+1}(\eta) d\eta \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \int_0^1 \phi_m(\eta) \phi_m(\eta) d\eta \right) + \delta_N(t) \int_0^1 \phi_m(\eta) \phi_{m+1}(\eta) d\eta \right] \\
& = \frac{1}{30h} (\delta_{N-3}(t) + 26\delta_{N-2}(t) + 60\delta_{N-1}(t) + 13\delta_N(t)).
\end{aligned}$$

Luego hemos obtenido los coeficientes de la penúltima fila.

- Por último, tomamos  $w(x) = \phi_N(x)$

Los únicos valores no nulos para  $[x_{N-1}, x_N]$  son para  $i = N-2, N-1, N$

$$\begin{aligned}
\int_a^b w(x) u_t(x) dx &= \int_a^b \phi_N(x) \sum_{i=-1}^N \phi_i(x) \delta_i(t) dx = \int_{x_{N-1}}^{x_N} \phi_N(x) \sum_{i=N-2}^N \phi_i(x) \delta_i(t) dx \\
&= \delta_{N-2}(t) \int_{x_{N-1}}^{x_N} \phi_N(x) \phi_{N-2}(x) dx + \delta_{N-1}(t) \int_{x_{N-1}}^{x_N} \phi_N(x) \phi_{N-1}(x) dx \\
&\quad + \delta_N(t) \int_{x_{N-1}}^{x_N} \phi_N(x) \phi_N(x) dx.
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Procedemos ahora a hacer el cambio de variable de forma análoga a la anterior utilizando 4.18, 4.20 y 4.21 en el intervalo  $[x_{N-1}, x_N]$  obteniendo los siguientes cambios de variable:

Para el intervalo  $[x_{N-1}, x_N]$ :

#### 4. SOLUCIÓN NUMÉRICA

---

$$\phi_{N-2}(x) \rightarrow \phi_{m-1}(\eta)$$

$$\phi_{N-1}(x) \rightarrow \phi_m(\eta)$$

$$\phi_N(x) \rightarrow \phi_{m+1}(\eta)$$

Sustituyendo en (4.36):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \left[ \delta_{N-2}(t) \int_0^1 \phi_{m+1}(\eta) \phi_{m-1}(\eta) d\eta + \delta_{N-1}(t) \int_0^1 \phi_m(\eta) \phi_{m+1}(\eta) d\eta \right. \\ & \left. + \delta_N(t) \int_0^1 \phi_{m-1}(\eta) \phi_{m-1}(\eta) d\eta \right] = \frac{1}{30h} (\delta_{N-2}(t) + 13\delta_{N-1}(t) + 6\delta_N(t)). \end{aligned}$$

Hemos calculado por tanto los coeficientes de la matriz  $A$  completa.

Las matrices  $B, C$  y  $D$  se calculan de forma análoga. Basándonos en el anterior algoritmo y apoyando los cálculos en Wolfram Mathematica obtenemos las siguientes matrices:

$$30A = \begin{pmatrix} 6 & 13 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 13 & 60 & 26 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 26 & 60 & 13 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 13 & 6 \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

$$\frac{3}{2}B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 4 & -2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -2 & 6 & -2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

$$\frac{1}{2}C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

$$6D = \begin{pmatrix} -3\lambda_0 & 2\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -8\lambda_0 & -3\lambda_0 & 2\lambda_0 + 8\lambda_1 & \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\lambda_0 & -2\lambda_0 - 8\lambda_1 & 3\lambda_0 - 3\lambda_2 & 8\lambda_1 + 2\lambda_2 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda_{N-2} & -8\lambda_{N-2} - 2\lambda_{N-1} & 3\lambda_{N-2} & 8\lambda_{N-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda_{N-1} & -2\lambda_{N-1} & 3\lambda_{N-1} \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

Donde:

$$\lambda_m = \frac{1}{2}(\delta_{m-1} + 2\delta_m + \delta_{m+1}) \quad (4.41)$$

Nuestro siguiente objetivo es calcular las funciones  $\delta_j(t)$ .

#### 4.3.1 Cálculo de $\delta_j(t)$

Dado que las funciones  $\delta_j(t)$  dependen de la variable temporal  $t$ , consideraremos una discretización uniforme en el tiempo tomando  $t_0 < t_1 < \dots < t_N$  con  $t_{n+1} - t_n = \Delta t$  para  $n = 0, 1, \dots, N_t - 1$ .

A partir de ahora denotaremos cada una de ellas como  $\delta_m^n$ , donde la  $m$  representa la discretización respecto al espacio y  $n$  respecto al tiempo.

Vamos a discretizar los  $\delta_i$  y  $\dot{\delta}_i$  mediante la aproximación de Crank-Nicolson y una aproximación progresiva en el tiempo, respectivamente.

$$\delta_i = \frac{\delta_i^n + \delta_i^{n+1}}{2}, \quad \dot{\delta}_i = \frac{\delta_i^{n+1} - \delta_i^n}{\Delta t}$$

Sustituyendo las aproximaciones anteriores en (4.31):

$$\begin{aligned} [A + \rho B - \rho C] \frac{\delta_i^{n+1} - \delta_i^n}{\Delta t} + \left( \frac{\beta + \lambda}{h} D + \xi B - \xi C \right) \frac{\delta_i^n + \delta_i^{n+1}}{2} &= 0. \\ \delta_i^{n+1} [A + \rho B - \rho C + \left( \frac{\beta + \lambda}{h} D + \xi B - \xi C \right) \frac{\Delta t}{2}] &= \delta_i^n [A + \rho B - \rho C - \left( \frac{\beta + \lambda}{h} D + \xi B - \xi C \right) \frac{\Delta t}{2}] \end{aligned} \quad (4.42)$$

con  $i = m - 2, m - 1, m, m + 1, m + 2$

Este sistema tiene  $(N + 2)$  ecuaciones lineales con  $(N + 2)$  coeficientes desconocidos  $(\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_{N-1}, \delta_N)$ . Obteniendo un sistema  $(N + 2) \times (N + 2)$  donde  $\Delta t$  es el paso del tiempo.

#### 4. SOLUCIÓN NUMÉRICA

Tomando (4.42) y las matrices (4.37)-(4.40) obtenemos una relación entre los parámetros  $\delta_i^{n+1}$  y  $\delta_i^n$  en los niveles de tiempo  $n$  y  $n + 1$  dada por:

$$\gamma_1 \delta_{m-2}^{n+1} + \gamma_2 \delta_{m-1}^{n+1} + \gamma_3 \delta_m^{n+1} + \gamma_4 \delta_{m+1}^{n+1} + \gamma_5 \delta_{m+2}^{n+1} = \gamma_5 \delta_{m-2}^n + \gamma_4 \delta_{m-1}^n + \gamma_3 \delta_m^n + \gamma_2 \delta_{m+1}^n + \gamma_1 \delta_{m+2}^n \quad (4.43)$$

donde los coeficientes  $\gamma_j$  son:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{1}{30} - \frac{2\rho}{3} - \frac{\xi \Delta t}{3} - \frac{(\beta + \lambda) \Delta t}{12h} \\ \gamma_2 &= \frac{26}{30} - \frac{4\rho}{3} - \frac{2\xi \Delta t}{3} - \frac{10(\beta + \lambda) \Delta t}{12h} \\ \gamma_3 &= \frac{66}{30} + 4\rho + 2\xi \Delta t \\ \gamma_4 &= \frac{26}{30} - \frac{4\rho}{3} - \frac{2\xi \Delta t}{3} + \frac{10(\beta + \lambda) \Delta t}{12h} \\ \gamma_5 &= \frac{1}{30} - \frac{2\rho}{3} - \frac{\xi \Delta t}{3} + \frac{(\beta + \lambda) \Delta t}{12h} \end{aligned}$$

El sistema (4.43) puede escribirse de la siguiente forma matricial:

$$P \delta^{n+1} = Q \delta^n \quad (4.44)$$

donde  $P$  y  $Q$  son matrices pentadiagonales de dimensión  $(N + 2) \times (N + 2)$  y  $\delta^n = (\delta_{-1}^n, \delta_0^n, \dots, \delta_{N-1}^n, \delta_N^n)^T$  es el vector que contiene los  $(N + 2)$  parámetros desconocidos que queremos calcular en el instante de tiempo  $n$ . La ecuación (4.44) presenta la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & \gamma_5 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & \gamma_5 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & \gamma_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{-1}^{n+1} \\ \delta_0^{n+1} \\ \vdots \\ \delta_N^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_5 & \gamma_4 & \gamma_3 & \gamma_2 & \gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_5 & \gamma_4 & \gamma_3 & \gamma_2 & \gamma_1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_5 & \gamma_4 & \gamma_3 & \gamma_2 & \gamma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{-1}^n \\ \delta_0^n \\ \vdots \\ \delta_N^n \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

Para resolver (4.44), tomaremos que las matrices  $P$  y  $Q$  pertenecen al instante  $n$  que ya conocemos. Por ello, al calcular las variables en el instante  $n + 1$ , las matrices  $P$  y  $Q$  serán conocidas y obtendremos un sistema lineal y recursivo, que relaciona los niveles de tiempo  $n$  y  $n + 1$ . Por tanto, primero necesitamos calcular el vector inicial  $\delta^0 = (\delta_{-1}^0, \delta_0^0, \dots, \delta_{N-1}^0, \delta_N^0)^T$

##### 4.3.1.1 Cálculo de los nodos $\delta_m^0$

Para calcular el vector  $\delta^0 = (\delta_{-1}^0, \delta_0^0, \dots, \delta_{N-1}^0, \delta_N^0)^T$  sustituimos la aproximación sobre el intervalo  $[a, b]$  en  $t = 0$  como sigue:



### 4.3 Implementación del método de Galerkin

$$u_N(x, 0) = \sum_{m=-1}^N \phi_m(x) \delta_m(0) \quad (4.46)$$

Podemos escribir la solución como sigue:

$$u_N(x_m, 0) = \phi_{m-2} \delta_{m-2}(0) + \phi_{m-1} \delta_{m-1}(0) + \phi_m \delta_m(0) + \phi_{m+1} \delta_{m+1}(0) + \phi_{m+2} \delta_{m+2}(0)$$

donde los valores de los B-splines en los nodos  $x_m$  se calculan a través de la Tabla 4.2

Para el cálculo del vector utilizaremos la condición inicial y una condición de contorno para obtener las  $N + 2$  ecuaciones necesarias.

- De la condición inicial  $u(x, 0) = f(x)$  tenemos:

$$u_N(x_m, 0) = \delta_{m-1}^0 + \delta_m^0 = f(x_m),$$

con  $m = 0, 1, 2, \dots, N$ , luego ya conocemos  $N + 1$  ecuaciones.

- De las condiciones de contorno, puesto que solo nos falta una ecuación tomaremos la siguiente:

$$(u_N)_x(a, 0) = 0 \text{ tenemos:}$$

$$(u_N)_x(a, 0) = u_{Nx}(x_0, 0) = \frac{-2}{h}(\delta_{-1}^0 + \delta_0^0) = 0.$$

Luego tenemos  $N + 2$  ecuaciones.

Por tanto, haciendo uso de las  $N + 2$  ecuaciones podemos escribir el siguiente sistema matricial:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{-1}^0 \\ \delta_0^0 \\ \vdots \\ \delta_N^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_N(x_0, 0) \\ u_N(x_0, 0) \\ \vdots \\ u_N(x_{N-1}, 0) \\ u_N(x_N, 0) \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

Para resolver este sistema nos hemos apoyado en el software Wolfram Mathematica.

## 4. SOLUCIÓN NUMÉRICA

---

### 4.3.1.2 Cálculo de los nodos $\delta_m^n$

Para la obtención del vector  $\delta^n = (\delta_{-1}^n, \delta_0^n, \dots, \delta_{N-1}^n, \delta_N^n)^T$  para  $n = 1, \dots, N_t$ , hemos procedido de la siguiente forma:

- En primer lugar, después de haber obtenido  $\delta^0$ , calculamos  $\delta^1$  mediante el sistema matricial (4.45) para  $n = 0$ , luego relacionamos  $\delta^0$  y  $\delta^1$ .
- Una vez calculado el vector  $\delta^1$  resolvemos (4.45) con  $n = 1$  relacionando ahora  $\delta^1$  y  $\delta^2$ , siendo  $\delta^1$  conocida.
- Sucesivamente, calculamos el resto de  $\delta^n$  de forma análoga, hasta llegar a  $\delta^{N_t}$ .

## 4.4 Análisis de estabilidad mediante von Neumann

Mediante el esquema numérico planteado, a partir de los nodos  $(x_m, t_n)$  de las discretizaciones, hemos calculado los valores numéricos  $\{\delta_m^n\}$ . En consecuencia, presentarán un error de la forma:

$$\delta_m^n = \delta_{m_E}^n + \delta_m^{n*}$$

siendo  $\delta_m^n$  el valor numérico,  $\delta_{m_E}^n$  el valor exacto y  $\delta_m^{n*}$  el error de  $(x_m, t_n)$ . Para poder aplicar el análisis de estabilidad, linealizaremos la ecuación (2.1) suponiendo, como en la sección anterior, que  $\lambda = \hat{u}$ , constante local.

### DEFINICIÓN 4.4.1:

Un método es numéricamente estable si el error  $\delta_m^{n*}$  está acotado. En caso contrario, el método es numéricamente inestable.

Para analizar la estabilidad, tomamos un error tipo onda. Este método se conoce como el método de von Neumann. El hecho de considerar este tipo de error, se debe a que en general, los operadores de diferencia lineales admiten soluciones de tipo onda. Un error tipo onda puede escribirse como:

$$\delta_m^{n*} = \hat{\delta}^n e^{ijkh} \quad (4.48)$$

donde  $\hat{\delta}^n$  representa la amplitud de la onda en el instante  $n$  y  $k$  el número de onda. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que  $x_j = jh$ .

- Sustituyendo (4.48) en (4.43), tenemos que:

$$\begin{aligned} & \varepsilon_1 \widehat{\delta^{n+1}} e^{i(j-2)kh} + \varepsilon_2 \widehat{\delta^{n+1}} e^{i(j-1)kh} + \varepsilon_3 \widehat{\delta^{n+1}} e^{ijkh} + \varepsilon_4 \widehat{\delta^{n+1}} e^{i(j+1)kh} + \varepsilon_5 \widehat{\delta^{n+1}} e^{i(j+2)kh} = \\ & \eta_5 \widehat{\delta^n} e^{i(j-2)kh} + \eta_4 \widehat{\delta^n} e^{i(j-1)kh} + \eta_3 \widehat{\delta^n} e^{ijkh} + \eta_2 \widehat{\delta^n} e^{i(j+1)kh} + \eta_1 \widehat{\delta^n} e^{i(j+2)kh} \end{aligned} \quad (4.49)$$

donde:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= 1 - E - M - K(\beta + \lambda_m), & \eta_1 &= 1 - E + M - K(\beta + \lambda_m), \\ \varepsilon_2 &= 26 - 2E - 2M - 10K(\beta + \lambda_m), & \eta_2 &= 26 - 2E + 2M - 10K(\beta + \lambda_m), \\ \varepsilon_3 &= 66 + 6E + 6M, & \eta_3 &= 66 + 6E - 6M, \\ \varepsilon_4 &= 26 - 2E - 2M + 10K(\beta + \lambda_m), & \eta_4 &= 26 - 2E + 2M + 10K(\beta + \lambda_m), \\ \varepsilon_5 &= 1 - E - M + K(\beta + \lambda_m), & \eta_5 &= 1 - E + M + K(\beta + \lambda_m), \end{aligned}$$

donde

$$E = \frac{20}{h^2}, \quad M = \frac{10\alpha}{h^2}, \quad K = \frac{5\Delta t}{2h}.$$

- Puesto que se trata de una ecuación en diferencias finitas lineal homogénea de coeficientes constantes de primer orden, su solución es de la forma  $\widehat{\delta^n} = c\lambda^n$  con  $c$  constante. Sustituimos en la ecuación anterior (4.4), sacamos factor común  $e^{ijkh}$  y despejamos  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{\varepsilon_1 e^{-2ikh} + \varepsilon_2 e^{-ikh} + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 e^{ikh} + \varepsilon_5 e^{2ikh}}{\eta_5 e^{-2ikh} + \eta_4 e^{-ikh} + \eta_3 + \eta_2 e^{ikh} + \eta_1 e^{2ikh}}. \quad (4.50)$$

- Transformamos las exponenciales a trigonométricas mediante el cambio  $e^{ikh} = \cos(kh) + i\sin(kh)$ :

$$\lambda = \frac{\omega_1 - i\varpi}{\omega_2 + i\varpi}$$

donde

$$\begin{aligned} \omega_1 &= (2 - 2E + 2M)\cos(2kh) + (52 - 4E + 4M)\cos(kh) + \eta_3 \\ \omega_2 &= (2 - 2E - 2M)\cos(2kh) + (52 - 4E - 4M)\cos(kh) + \varepsilon_3 \\ \varpi &= 20K(\beta + \lambda_m)\sin(kh) + 2K(\beta + \lambda_m)\sin(2kh) \end{aligned}$$

#### 4. SOLUCIÓN NUMÉRICA

---

- Estudiamos el módulo de  $\lambda$ :

$$|\lambda| = \left| \frac{\omega_1 - i\varpi}{\omega_2 + i\varpi} \right| \leq 1$$

Cuando:

$$(66h^2 + 60\alpha\delta t) + (52h^2 - 40\alpha\Delta t)\cos(kh) + (h^2 - 20\alpha\Delta t)\cos(2kh) > 0$$

Por ello, nuestro esquema es condicionalmente estable.

## Ejemplos y comparaciones

En este capítulo vamos a considerar dos problema test donde calcularemos las soluciones exactas obtenidas en el Capítulo 3 y las soluciones numéricas obtenidas en el Capitulo 4. Estudiaremos, a través de las normas  $L_2$  y  $L_\infty$ , la eficiencia y precisión de nuestras soluciones numéricas.

Para la obtención de las soluciones nos hemos apoyado en el software Wolfram Mathematica

### 5.1 Ejemplo 1

Consideramos los siguientes valores de los parámetros en la ecuación (2.1):

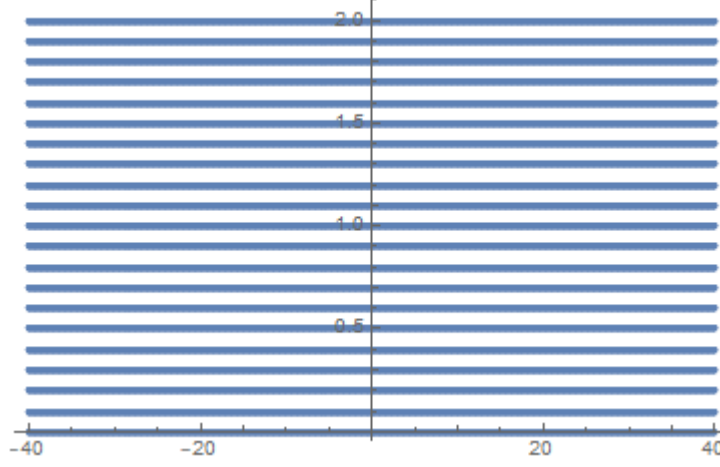
$$\alpha = 0, \quad \beta = 1, \quad c = 1,03, \quad h = 0,1, \quad \Delta t = 0,1$$

$$\text{En el dominio } -40 \leq x \leq 60, \quad 0 \leq t \leq 2 \quad (5.1)$$

Esta ecuación es conocida como la ecuación de Benjamin-Bona-Mahony. Estamos considerando una discretización en el espacio con  $N = 1000$  puntos y 1001 subintervalos, y un discretización del tiempo con  $N_t = 20$  subintervalos. Tomamos  $u(x, 0) = f(x)$  siendo  $f(x)$  el solitón obtenido (3.2.1.1) en  $t = 0$ .

## 5. EJEMPLOS Y COMPARACIONES

---



**Figura 5.1:** Malla para la discretización del intervalo  $-40 \leq x \leq 60$  tomando  $h = 0,1$  y  $0 \leq t \leq 2$  para  $\Delta t = 0,1$

### 5.1.1 Solución Exacta

Tomamos la solución tipo onda solitaria de forma exacta,  $u(x, t)$ , mediante la expresión obtenida en el Capítulo 3 (3.2.1.1). Sustituimos los valores citados anteriormente (5.1), obteniendo:

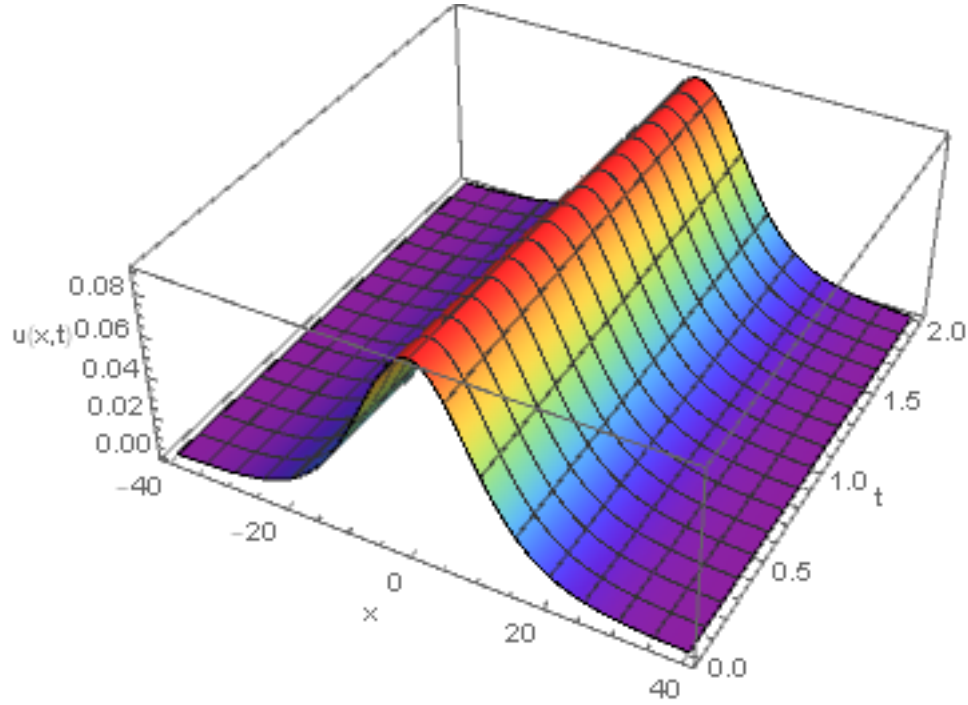
$$u(x, t) = \frac{9}{100} \operatorname{sech} \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{103}} \left( \frac{-103t}{100} + x \right) \right]^2 \quad (5.2)$$

Por tanto, la amplitud de onda obtenida es  $A = \frac{9}{100}$  y su anchura  $\frac{1}{\mu}$  con  $\mu = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{103}}$

Observamos gráficamente la forma del solitón en la Figura 5.2

### 5.1.2 Solución Numérica

Obtenemos la solución numérica  $u_N(x, t)$  para este ejemplo, desarrollando el procedimiento descrito en la sección 4.3 del Capítulo 4. Resolveremos el sistema  $(N + 2) \times (N + 2)$  y hallaremos las  $(N + 2)$  variables  $\{\delta_m^n\}$ .



**Figura 5.2:** Solución exacta del ejemplo

### 5.1.3 Comparaciones

En esta sección vamos a comparar ambas soluciones para cada instante de tiempo  $n$  aplicando las normas  $L_2$  y  $L_\infty$ . Para mayor detalle, el lector puede consultar [? ]. Estas normas se definen como:

$$L_2 = \|u - u_N\|_2 = \sqrt{h \sum_{m=0}^N (u(x_m, t_n) - u_N(x_m, t_n))^2} \quad (5.3)$$

$$L_\infty = \|u - u_N\|_\infty = \max_{m=0, \dots, N} |u(x_m, t_n) - u_N(x_m, t_n)| \quad (5.4)$$

para un  $n \in \{0, \dots, N_t\}$  fijado.

Podemos observar la tabla de errores obtenida en 5.3. Observamos que el error es muy pequeño por lo que podemos concluir que hemos obtenido una solución numérica satisfactoria.

## 5. EJEMPLOS Y COMPARACIONES

---

Tiempo t	Instante n	$L_2$	$L_\infty$
0.	0	$9.91319 \times 10^{-19}$	$1.30104 \times 10^{-18}$
0.1	1	0.00022368	0.000124316
0.2	2	0.000407322	0.0000632362
0.3	3	0.000611577	0.000134588
0.4	4	0.000816734	0.000127545
0.5	5	0.00100841	0.000176868
0.6	6	0.00122337	0.00020918
0.7	7	0.00139754	0.000236279
0.8	8	0.00162616	0.000330151
0.9	9	0.00177504	0.000300581
1.	10	0.00203174	0.00052719
1.1	11	0.00214432	0.000362277
1.2	12	0.00246192	0.000868412
1.3	13	0.00252571	0.000701651
1.4	14	0.00297379	0.00147956
1.5	15	0.00299134	0.00146831
1.6	16	0.00371241	0.00259535
1.7	17	0.00376066	0.0029281
1.8	18	0.00502006	0.00465514
1.9	19	0.00537062	0.00568324
2.	20	0.00759576	0.00848096

**Figura 5.3:** Tabla de errores  $L_2$  y  $L_\infty$  entre la solución exacta y la numérica



## 5.2 Verificación de las leyes de conservación

Una de las propiedades de las soluciones tipo onda solitaria, en nuestro caso tipo solitón, es la presencia de leyes de conservación. Estas leyes de conservación (masa  $M$ , momento  $P$ , energía  $E$ ) vienen dadas por:

$$M = \int_a^b u(x, t) dx \quad (5.5)$$

$$P = \int_a^b \left( u^2(x, t) + u_x^2(x, t) \right) dx \quad (5.6)$$

$$E = \int_a^b \left( u^3(x, t) + 3u^2(x, t) \right) dx \quad (5.7)$$

En cada instante de tiempo, vamos a observar en la tabla (5.4) como las cantidades de masa, momento y energía se mantienen casi constantes con el paso del tiempo. Por lo tanto, se demuestra las buenas propiedades del método numérico.

## 5. EJEMPLOS Y COMPARACIONES

---

Instante	Tiempo t	M	P	E
0	0.	2.10926	0.127302	0.388806
1	0.1	2.10896	0.127271	0.38871
2	0.2	2.10864	0.127239	0.388613
3	0.3	2.10833	0.127208	0.388517
4	0.4	2.108	0.127177	0.38842
5	0.5	2.10769	0.127146	0.388324
6	0.6	2.10734	0.127114	0.388227
7	0.7	2.10702	0.127083	0.388131
8	0.8	2.10664	0.127052	0.388034
9	0.9	2.10631	0.127021	0.387938
10	1.	2.10589	0.126989	0.387841
11	1.1	2.10557	0.126958	0.387745
12	1.2	2.10508	0.126927	0.387648
13	1.3	2.10477	0.126896	0.387552
14	1.4	2.10416	0.126865	0.387455
15	1.5	2.1039	0.126833	0.387359
16	1.6	2.10309	0.126802	0.387262
17	1.7	2.10294	0.126771	0.387166
18	1.8	2.10179	0.12674	0.387069
19	1.9	2.10189	0.126708	0.386972
20	2.	2.10014	0.126677	0.386876

**Figura 5.4:** Leyes de conservación para la solución numérica

### 5.3 Ejemplo 2

En el anterior ejemplo hemos considerado la condición inicial  $u(x, 0)$  como el solitón. Podríamos preguntarnos que ocurriría si perturbáramos ligeramente la amplitud del solitón.

Vamos a estudiar este caso. Consideramos los mismos valores del ejemplo 1 (5.1) para los parámetros en la ecuación (??). Recordemos que la amplitud de onda obtenida es  $A = \frac{9}{100}$ .

Para la solución numérica, tomamos  $u(x, 0) = g(x)$  siendo  $g(x)$  el solitón obtenido perturbando ligeramente su amplitud. Es decir, vamos a tomar la amplitud de la forma:  $\hat{A} = 3(c - 1) + 0,05$ . Por tanto, sustituyendo los valores (5.1), se define  $g(x)$  como:

$$g(x) = \frac{14}{100} \operatorname{sech} \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{103}} \left( \frac{-103t}{100} + x \right) \right]^2 \quad (5.8)$$

Obtenemos la solución numérica  $u_N(x, t)$  para este ejemplo, desarrollando el procedimiento descrito en el Capítulo 4. Resolveremos el sistema  $(N + 2) \times (N + 2)$  y hallaremos las  $(N + 2)$  variables  $\{\delta_m^n\}$ .

Comprobamos que ocurre con las leyes de conservación. En cada instante de tiempo, observamos en la tabla (5.5) como las cantidades de masa, momento y energía se mantienen casi constantes con el paso del tiempo. Por lo que se comporta como un solitón.

Instante	Tiempo t	M	P	E
0	0.	3.27763	0.308039	0.953061
1	0.1	3.27673	0.307917	0.952677
2	0.2	3.27622	0.307795	0.952294
3	0.3	3.27561	0.307673	0.951911
4	0.4	3.27491	0.307551	0.951528
5	0.5	3.27414	0.307429	0.951145
6	0.6	3.27332	0.307307	0.950762
7	0.7	3.27247	0.307184	0.950378
8	0.8	3.2716	0.307062	0.949995
9	0.9	3.27072	0.30694	0.949611
10	1.	3.26983	0.306818	0.949227
11	1.1	3.26893	0.306696	0.948843
12	1.2	3.26801	0.306573	0.948459
13	1.3	3.26706	0.306451	0.948075
14	1.4	3.26609	0.306328	0.94769
15	1.5	3.26506	0.306206	0.947305
16	1.6	3.26399	0.306083	0.94692
17	1.7	3.26284	0.305961	0.946534
18	1.8	3.26162	0.305838	0.946148
19	1.9	3.2603	0.305715	0.945762
20	2.	3.25887	0.305592	0.945374

**Figura 5.5:** Leyes de conservación para la solución numérica



## Conclusión

A través de este trabajo hemos alcanzado satisfactoriamente soluciones tipo solitón de forma exacta y numérica para la ecuación Benjamin-Bona-Mahony-Burger (2.1).

Para el cálculo de la solución exacta (3.2.1.1) de la ecuación (??), hemos considerado soluciones tipo onda solitaria obteniendo, por tanto, ondas no lineales estables manteniendo su forma y velocidad sin disiparse en el medio y localizada en un intervalo finito. Hemos realizado un estudio del parámetro  $c$ , conocido como la velocidad de la onda, además de mostrar gráficamente los diferentes casos.

Por otro lado, hemos calculado la solución numérica mediante el método de elementos finitos de Galerkin basado en el uso de funciones B-spline cuadráticos. Hemos podido tomar 1000 puntos para el espacio y 20 para el tiempo. La discretización utilizada ha sido suficiente para calcular soluciones numéricas precisas. Según el análisis de estabilidad realizado mediante la teoría de von Neumann, hemos concluido que el método utilizado es condicionalmente estable. Tanto para la obtención de la solución numérica como para el estudio de la estabilidad, hemos considerado nuestra ecuación de forma linealizada, imponiendo que el término que aportaba la no linealidad, fuera constante localmente. El estudio de la convergencia se deja para un posible futuro trabajo.

## 6. CONCLUSIÓN

---

Por último, hemos obtenido las soluciones exactas y numéricas de dos problemas test. Hemos comprobado que las soluciones eran prácticamente iguales, obteniendo tablas de errores mediante el uso de las normas  $L_2$  y  $L_\infty$ . Hemos podido comprobar que la solución numérica ha heredado propiedades de la exacta, como por ejemplo las leyes de conservación. En concreto, hemos probado que nuestras soluciones numéricas mantienen la masa, momento y energía prácticamente constantes a lo largo del tiempo. Por otro lado, hemos realizado un segundo problema test, donde hemos tomado  $u(x, t)$  con una pequeña perturbación en la amplitud del solitón.

Si se puede, siempre es conveniente hallar la solución exacta, lo que nos ha permitido compararla con la numérica, obteniendo resultados satisfactorios. Concluimos entonces, que el método numérico utilizado es útil y eficaz en nuestra EDP.

Para la realización de todos los cálculos hemos usado el software Wolfram Mathematica, tanto para la implementación del método como para comprobar las cuentas y resultados.

---