

UNIVERSIDAD DE CÁDIZ

FACULTAD DE CIENCIAS

GRADO EN MATEMÁTICAS

# SIMULACIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DE ONDA.

Trabajo de fin de grado presentado por

**Ana Cuevas de Cózar**

Tutores: Dr.José Rafael Rodríguez Galvan

D.Daniel Acosta Soba

Firma de la alumna

Firma de los tutores

Puerto Real, Cádiz, Junio de 2.023



## **Abstract**

Five years ago, a first volume of open problems in Mathematical



*A mis padres.*



## **Resumen**

Se ha hecho una investigación sobre la resolución de las ecuaciones de onda.





## **Agradecimientos**

Por mi excelencia y formación profesional, gracias a su cariño, guía y apoyo.  
Este presente simboliza mi gratitud por toda la responsabilidad e inestimable ayuda que siempre me han proporcionado.

Con amor, admiración y respeto.

Ana Cuevas de Cózar

junio 2023



# Índice general

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Conceptos previos</b>	<b>3</b>
2.1	Espacios de Lebesgue . . . . .	3
2.2	Producto interior y suma por partes en $L^2$ . . . . .	4
2.3	Dominio de Dependencia . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Definición de la ecuación de onda</b>	<b>11</b>
3.1	Ecuaciones de transporte . . . . .	12
3.2	La energía en la ecuación de ondas . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Tipos de soluciones</b>	<b>15</b>
4.1	Métodos principales de resolución . . . . .	15
4.2	Método de diferencias finitas . . . . .	15
4.3	Consistencia . . . . .	18
4.4	Análisis de Von Neumann . . . . .	19
4.5	Esquema como dos ecuaciones de transporte . . . . .	22
4.6	Ley de energía discreta . . . . .	22
<b>5</b>	<b>Comparativa en python</b>	<b>25</b>
5.1	Comparar cambiando $\mu$ . . . . .	25
5.2	Comparar cambiando la energía . . . . .	25
<b>6</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>27</b>
<b>A</b>	<b>Anexo</b>	<b>29</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>31</b>



# Introducción

El porque de los usos de los métodos numéricos, porque elegimos la ecuación de ondas, nos parece una forma chula y de hecho practica de unir las matemáticas con la música se podría ampliar el estudio y hacer música escrita como ecuaciones.

pero en ocasiones hay ecuaciones en las que no se puede, o es muy complicado, obtener soluciones exactas y por ello aplicamos métodos numéricos.

Comenzaremos dando una definición general de la ecuación de ondas en  $\mathbb{R}^n$ , con  $n \geq 1$   
[1][2]



## Conceptos previos



Antes de comenzar a adentrarnos en el tema hay varios conceptos que debemos explicar para hacer más cómoda y fácil la comprensión del resto de nuestro trabajo.

### 2.1 Espacios de Lebesgue

Para comenzar a ponernos en contexto, definiremos los espacios de Lebesgue. Un concepto clásico que se utiliza de manera recurrente en varios campos de las matemáticas [3].

#### DEFINICIÓN 2.1.1: Espacio de Lebesgue

Para  $E$  medible y  $1 \leq p \leq \infty$  definimos, el Espacio de Lebesgue  $L^p(E)$ , como la colección de funciones medibles  $f$  para las cuales  $\|f\|^p$  es integrable sobre  $E$



Esta definición es muy general y nosotros necesitaremos en realidad el concepto de un espacio normado, para ello veamos que es una norma.

## 2. CONCEPTOS PREVIOS

### DEFINICIÓN 2.1.2: Norma

Sea  $X$  un espacio lineal. Una función con valores reales  $\|\cdot\|$  de  $X$  será llamada una norma si para cada  $f$  y  $g$  en  $X$  y cada número real  $\alpha$ , se cumplen:

- **Desigualdad triangular**  $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$
- **Homogeneidad**  $\|\alpha f\| \leq |\alpha| \|f\|$  (donde  $|\alpha|$  denota el valor absoluto de  $\alpha$ )
- **No negatividad**  $\|f\| \geq 0$  y  $\|f\| = 0$  si y solo si  $f = 0$

Ahora veremos como se traduce esto en el caso concreto de  $p = 2$ , ya que este será el contexto en el que nos moveremos el resto del trabajo.

## 2.2 Producto interior y suma por partes en $L^2$

Para poder hacer de manera adecuada el análisis de la energía necesitaremos primeramente definir el producto interior, ~~en este caso lo mas sencillo será tomar la norma usual en  $L^2$~~ , es decir:

### DEFINICIÓN 2.2.1: Producto interior en $L^2$

Sean  $f$  y  $g$  dos funciones definidas en un intervalo  $D$ , definimos el producto interior en  $L^2$  de ellas como:

$$\langle f, g \rangle_D = \int_D f(x)g(x)dx.$$

Definimos la norma asociada a dicho producto como:

$$\|f\|_D = \sqrt{\langle f, f \rangle_D}.$$

~~Para nuestro problema especifico ambas funciones tendrán más de una componente. Suponiendo que, tal y como en el capítulo anterior, tenemos funciones del tipo  $u(x, t)$ , esto quedaría:~~

$$\langle u_1, u_2 \rangle_D(t) = \int_D u_1(x, t)u_2(x, t)dx, \quad \|u\|_D(t) = \sqrt{\langle u(x, t), u(x, t) \rangle_D}.$$

Esto a partir de ahora lo denotaremos como  $\langle u_1, u_2 \rangle_D$  y  $\|u\|_D$  respectivamente.



## 2.2 Producto interior y suma por partes en $L^2$

En este punto nuestro objetivo será llegar a una generalización discreta de este concepto, para luego llegar a una aproximación de la integral. ~~Comenzaremos entonces tal y como hemos dicho por generalizar el producto interior para un conjunto discreto de punto en  $L^2$~~

### DEFINICIÓN 2.2.2: Producto interior en dominios discretos

~~En el contexto anterior,~~ sean  $f$  y  $g$  dos funciones definidas en un conjunto de puntos  $D = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  equidistantes, donde  ~~dicha distancia es  $h$ . Generalizaremos el producto interior en  $L^2$  en ellas como:~~

$$\langle f, g \rangle_D = \sum_{j=1}^m h f(x_j) g(x_j).$$



~~Definimos la norma asociada será:~~  $\|f\|_D = \sqrt{\langle f, f \rangle_D} \geq 0$ .



Ahora, sabiendo que vamos a hacer un esquema de diferencias finitas en nuestro problema, necesitaremos extrapolar esta definición 2.2.2 a un retículo o mallado. Para ello vamos a definirlo, tal y como lo usaremos en nuestro esquema.

### DEFINICIÓN 2.2.3: ~~Definición del mallado en un intervalo~~

~~Sea el intervalo  $[a, b] \times [c, d]$  con  $a, b, c, d \geq 0$  y sean  $n, m \in \mathbb{N}$ . Definimos  $h$  como tamaño en espacio y el paso de tiempo  $k$ , de forma que los puntos de nuestro mallado serán:~~

$$\langle x, t \rangle = \langle x_j, t_r \rangle, \text{ donde}$$

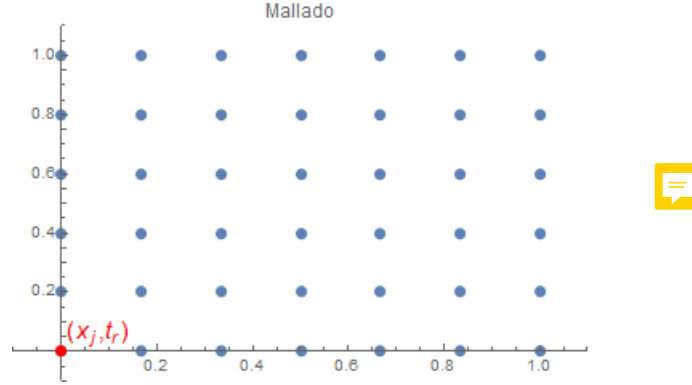
$$x_j = jh \quad \text{para } j = 1, \dots, m,$$

$$t_r = rk \quad \text{para } r = 0, 1, \dots, n.$$



Vemos que nuestro mallado sería del tipo:

## 2. CONCEPTOS PREVIOS



Una vez ya definido este mallado veamos como se usaría la definición 2.2.2 por parte para unas funciones  $u, w$  definidas en los puntos del mismo. Antes que nada tendremos que fijar en que dominio nos estaremos moviendo, ya que la definición es para un conjunto de puntos en una sola dimensión. Supongamos que nuestro mallado es el definido ~~anteriormente, del tipo  $(x_j, t_r)$~~  y que necesitamos aplicar el producto interior en la posición,  $x$ . En este caso nos quedará de la forma:

$$\langle u(\cdot, t_r), w(\cdot, t_r) \rangle_D = \sum_{j=1}^m h u(x_j, t_r) w(x_j, t_r) \quad (2.1)$$

donde  $D = x_1, \dots, x_m$  definidos en nuestro mallado ~~y hemos fijado  $r$ , es decir un instante en el tiempo, en el que realizamos esta operación.~~

Para este tipo de casos usaremos la siguiente notación:

$$\langle u_{\cdot, r}, w_{\cdot, r} \rangle_D = \sum_{j=1}^m h u_{j, r} w_{j, r} \quad (2.2)$$

En este punto, una vez definidas las operaciones que nos ~~hacen falta~~, para simplificar más adelante la notación que usaremos necesitaremos los siguientes conceptos:

### DEFINICIÓN 2.2.4: Forward and backward shifts

Sean  $u$  una función discretizada en el mallado antes descrito. Definiremos el forward shift o desplazamiento hacia delante (resp. backward o desplazamiento hacia atrás) como:

$$e_{x+} u_{j, r} = u_{j+1, r}, \quad (e_{x-} u_{j, r} = u_{j-1, r} \text{ respectivamente.})$$

Siguiendo con esto podríamos aproximar la derivada de primer de las siguientes formas,



$$\begin{aligned}\delta_{x+} &= \frac{1}{h} (e_{x+} - 1) \cong \frac{d}{dx}, \\ \delta_{x-} &= \frac{1}{h} (1 - e_{x-}) \cong \frac{d}{dx}, \\ \delta_x &= \frac{1}{2h} (e_{x+} - e_{x-}) \cong \frac{d}{dx}.\end{aligned}$$



lo que aplicándolo sobre una función definida en nuestro mallado queda:

### DEFINICIÓN 2.2.5: Forward, Backward and Centered difference approximations

Sean  $u$  una función discretizada en un mallado ~~del tipo 2.2.3~~

Definiremos las diferencias aproximadas hacia adelante, atrás o centradas (más conocidas por sus nombres en inglés ~~"Forward, backward and centered difference approximations"~~) respectivamente, como:

- $\delta_{x+} u_{j,r} = \frac{1}{h} (u_{j+1,r} - u_{j,r}),$
- $\delta_{x-} u_{j,r} = \frac{1}{h} (u_{j,r} - u_{j-1,r}),$
- $\delta_x u_{j,r} = \frac{1}{2h} (u_{j+1,r} - u_{j-1,r}).$

Podemos hacer lo mismo para el eje temporal, denotándolas como  $\delta_{t+}, \delta_{t-}, \delta_t$

También definiremos la aproximación de segundo orden como

$$\delta_x \triangleq \delta_{x+} \delta_{x-} = \frac{1}{h^2} (e_{x+} - 2 + e_{x-}) \cong \frac{d^2}{dx^2} \quad (2.3)$$



Al igual que la definición anterior esto será análogo en el eje temporal.

Para finalizar la sección, hay otro concepto que usaremos bastante. Este nos ayudará a



hacer una representación discreta de la integración por partes, lo definiremos utilizando el producto interior en ambiente discreto y la notación (2.2).

## 2. CONCEPTOS PREVIOS

### DEFINICIÓN 2.2.6: Representación de la suma por partes

Sean  $u, w$  y  $D$  definidas tal y como anteriormente, la representación de la suma por partes utilizando el producto interior que usaremos en lo que sigue es, fijando un instante temporal  $r$ :

$$\begin{aligned}
 \langle u_{\cdot,r}, \delta_{x+} w_{\cdot,r} \rangle_D &= \sum_{j=1}^m h u_{j,r} \frac{1}{h} (w_{j+1,r} - w_{j,r}) = \\
 &= - \sum_{j=1}^m h \frac{1}{h} (u_{j,r} - u_{j-1,r}) w_{j,r} + u_{m,r} w_{m+1,r} - u_{-1,r} w_{0,r} = \\
 &= - \langle \delta_{x-} u_{\cdot,r}, w_{\cdot,r} \rangle_D + u_{m,r} w_{m+1,r} - u_{-1,r} w_{0,r}
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}
 \langle u_{\cdot,r}, \delta_{x-} w_{\cdot,r} \rangle_D &= \sum_{j=1}^m h u_{j,r} \frac{1}{h} (w_{j,r} - w_{j-1,r}) = \\
 &= - \sum_{j=1}^m h \frac{1}{h} (u_{j+1,r} - u_{j,r}) w_{j,r} + u_{0,r} w_{-1,r} - u_{m+1,r} w_{m,r} = \\
 &= - \langle \delta_{x+} u_{\cdot,r}, w_{\cdot,r} \rangle_D - u_{0,r} w_{-1,r} + u_{m+1,r} w_{m,r}
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Vemos que estos últimos terminos se salen del mallado que hemos definido, estos serán puntos virtuales del retículo.

### 2.3 Dominio de Dependencia

Como en la sección anterior hemos definido el mallado 2.2.3 que usaremos, vamos ahora a definir el concepto de Dominio de dependencia, que estará estrechamente relacionado con el mismo.

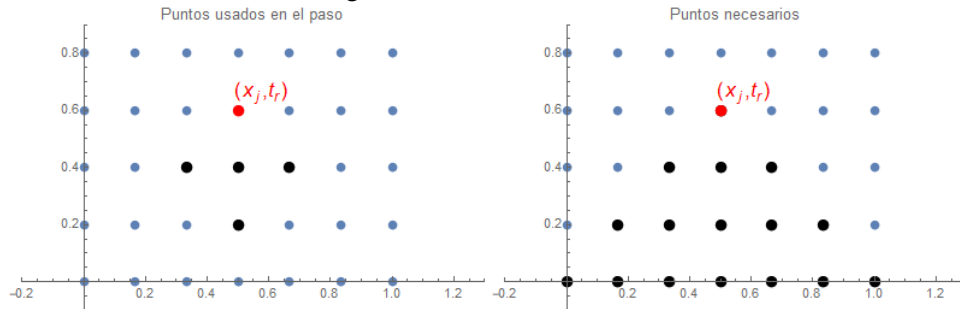
#### DEFINICIÓN 2.3.1: Dominio de dependencia

El dominio de dependencia se refiere al conjunto de puntos iniciales utilizados por el método numérico para dar la solución a un problema.

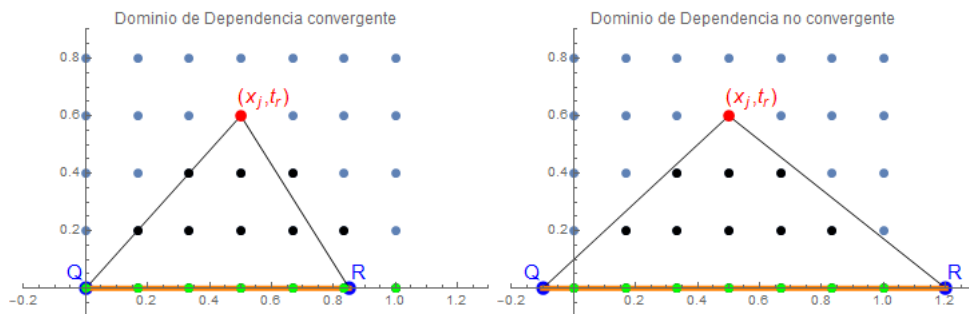
Para cada punto del mallado  $(x_j, t_r)$  tendremos un dominio de dependencia asociado.

## 2.3 Dominio de Dependencia

Es importante recalcar que si nuestro dominio de dependencia es ~~mas~~ mas amplio que los datos del mallado que estamos utilizando la solución del punto buscada podría no converger. Ilustremos esto con unos diagramas:



En la imagen de la izquierda recalcamos que para conseguir la solución en el punto  $(x_j, t_r)$  podríamos necesitar por ejemplo esos cuatro puntos recalcados. A su vez para obtener la solución de esto necesitaremos los anteriores puntos, utilizando al final todos los puntos de la imagen de la derecha.



Ahora supongamos que, como en la imagen de la izquierda, el dominio de dependencia (triangulo interior de las lineas), quedase en el interior de los puntos utilizados. En este caso si hay algún cambio a lo largo de la linea naranja, los puntos iniciales (verdes), al contener íntegramente a la misma, lo captarían y la solución en  $(x_j, t_r)$  lo reflejaría.

Si al contrario, estuviésemos en la situación de la derecha, nos damos cuenta que los puntos iniciales (verdes) podrían no captar un cambio, si este se diese entre el punto  $Q$  y el primer punto o entre  $R$  y el último. Por lo tanto el punto  $(x_j, t_r)$  no cambiaría de solución y no convergería a la solución real de nuestra ecuación.



## Definición de la ecuación de onda

!!!Explicar porque modela una onda, sacado de [4] y como se puede separar como dos de transporte, con sentido opuesto

Comenzaremos dando una introducción a la ecuación de ondas en  $\mathbb{R}^n$ , con  $n \geq 1$  [1, 2]

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = f, x \in \Omega \in \mathbb{R}^n, t \in [0, +\infty]. \quad (3.1)$$

Donde  $f$  es una función de valores reales,  $c > 0$  es una constante de propagación y el operador

$$\Delta u = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}, \quad (3.2)$$

es conocida como el Laplaciano. En este tipo de ecuaciones la variable  $t$  denota el tiempo transcurrido y las variables  $x_i, i = 1, \dots, n$  denotan la posición de la onda en cada dirección del espacio  $\mathbb{R}^n$ .

Podemos observar que se trata de una ecuación lineal y, siempre que  $f \neq 0$ , la ecuación será no homogénea, es decir, tendrá termino independiente.

### 3. DEFINICIÓN DE LA ECUACIÓN DE ONDA

~~Comenzaremos hablando, por simplicidad, de la~~ ecuación de onda en dimensión uno. En este caso la ecuación se puede escribir de la siguiente forma:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad (3.3)$$



Usualmente las ecuaciones en derivadas parciales se clasifican en: elípticas, hiperbólicas y parabólicas. ~~Para ello tendremos que estandarizarla.~~ Aunque las ecuaciones se pueden clasificar y estandarizar siempre, nosotros por simplicidad lo haremos solo para las de segundo orden. (Buscar la referencia)

Una ecuación de segundo orden en forma estándar sería como sigue:

$$Au_{tt} + Bu_{tx} + Cu_{xx} + Du_t + Eu_x + Fu = G, \quad (3.4)$$

donde  $A, B, C, D, E, F, G$  funciones de variables  $t$  y  $x$ .

Clasificaremos (3.4) dependiendo de las ecuaciones características relativas a la ecuación en derivadas parciales (EDP):

#### DEFINICIÓN 3.0.1: Clasificación de las EDP de segundo orden

Si en todos los puntos  $(x, t)$  de una región  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  se cumple que:

- $B^2(x, t) - 4A(x, t)C(x, t) > 0$ , entonces la EDP (3.4) se dice hiperbólica.
- $B^2(x, t) - 4A(x, t)C(x, t) = 0$ , entonces la EDP (3.4) se dice parabólica.
- $B^2(x, t) - 4A(x, t)C(x, t) < 0$ , entonces la EDP (3.4) se dice elíptica.

Vemos que en (3.3)  $A = 1, C = -c^2, G = f$  y cada una de las demás funciones es 0. Ahora tenemos  $B^2 - 4AC = 4c^2 > 0$  y por lo tanto nuestra ecuación es hiperbólica.

Este tipo de clasificación de las ecuaciones se usa para separar los distintos métodos numéricos que se pueden usar, ya que estos suelen diferir dependiendo de la misma.

### 3.1 Ecuaciones de transporte



Una vez definida nuestra ecuación de onda, es interesante ver que esta se puede descomponer en dos ecuaciones de transporte. Para ello comenzaremos suponiendo que la solución  $u(x, t)$  se puede descomponer en dos funciones de propagación, donde  $c$  sabemos que es la velocidad de la onda,





$$u(x, t) = p^+(x + ct) + p^-(x - ct), \quad (3.5)$$

aquí llamamos  $p^+$  a la propagación hacia la derecha y  $p^-$  hacia la izquierda. Ahora veremos como se comportan las mismas al derivarlas.

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{d}{dt}(p^+(x + ct) + p^-(x - ct)) = cp_t^+(x + ct) - cp_t^-(x - ct), \\ u_{tt} &= \frac{d^2}{dt^2}(p^+(x + ct) + p^-(x - ct)) = c^2 p_{tt}^+(x + ct) + c^2 p_{tt}^-(x - ct), \\ u_x &= \frac{d}{dx}(p^+(x + ct) + p^-(x - ct)) = p_x^+(x + ct) + p_x^-(x - ct), \\ u_{xx} &= \frac{d^2}{dx^2}(p^+(x + ct) + p^-(x - ct)) = p_{xx}^+(x + ct) + p_{xx}^-(x - ct). \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación nos queda de la siguiente forma,

$$c^2 p_{tt}^+(x + ct) + c^2 p_{tt}^-(x - ct) = c^2 (p_{xx}^+(x + ct) + p_{xx}^-(x - ct)) \quad (3.6)$$

### 3.2 La energía en la ecuación de ondas

En esta sección nos centraremos en analizar la ley de energía an la ecuación de ondas. ~~Para poder ver como se comportará la energía en nuestro esquema deberemos comenzar viéndolo en la ecuación (3.3), suponiendo que en este caso el espacio está definido sobre todo  $\mathbb{R}$ .~~

Para poder obtener el la energía de la ecuación haremos el producto interior 2.2.1 de la misma con  $u_t$  (PORQUE SE HACE ESTO?):

$$\langle u_t, u_{tt} \rangle = c^2 \langle u_t, u_{xx} \rangle$$

Para poder obtener cada uno de los términos de la energía tendremos que ponerlo de la forma  $\frac{d}{dt}(\cdot)$ , comenzaremos por el termino de la izquierda. Comencemos desarrollándolo:

$$\langle u_t, u_{tt} \rangle = \int_{\mathbb{R}} u_t u_{tt} dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u_t u_{tt} dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u_t u_{tt} dx$$

Utilizando la integración por partes en una de las integrales obtendremos,

$$\langle u_t, u_{tt} \rangle = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u_t u_{tt} dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u_{tt} u_t dx + u_{tt}^2|_{\mathbb{R}}.$$

### 3. DEFINICIÓN DE LA ECUACIÓN DE ONDA

---

Como  $u_{tt}^2|_{\mathbb{R}} = 0$  y utilizando la regla de la cadena tenemos que

$$\langle u_t, u_{tt} \rangle = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u_t u_{tt} dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u_{tt} u_t dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u_t u_{tt} + u_{tt} u_t dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt} u_t u_t dx.$$

Por último, al ser  $\frac{d}{dt}$  independiente de  $x$ , suponiendo que se dan en  $u$  y en  $u_t$  condiciones de continuidad adecuadas y utilizando la definición de norma 2.2.1,

$$\langle u_t, u_{tt} \rangle = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u_t u_t dx = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \|u_t\|^2 dx.$$

Ahora nos centraremos en el termino de la derecha, y de manera totalmente análoga al anterior,

$$\langle u_t, u_{xx} \rangle = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u_x u_x dx = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \|u_x\|^2 dx,$$

por consiguiente nos quedaría,

$$0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \frac{c^2}{2} \|u_x\|^2 \right).$$

(EXPLICAR PORQUE CADA TERMINO ES ASÍ O REFERENCIAR)

Ahora podremos separar en energía cinética  $\mathfrak{T} = \frac{1}{2} \|u_t\|^2$  y la energía potencial  $\mathfrak{B} = \frac{\mu^2}{2} \|u_x\|^2$  de donde se sigue que la energía total será

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{T} + \mathfrak{B} = \frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \frac{\mu^2}{2} \|u_x\|^2.$$

Por otro lado, tenemos que  $\frac{d}{dt} \mathfrak{H} = 0$ , ya que tanto  $\mathfrak{T}$ , como  $\mathfrak{B}$  son no negativas implicará que

$$\mathfrak{H}(t) = \mathfrak{H}(0) \geq 0, \quad \|u_t\|_{\mathbb{R}} \leq \sqrt{2\mathfrak{H}(0)} \quad \text{y} \quad \|u_x\|_{\mathbb{R}} \leq \frac{\sqrt{2\mathfrak{H}(0)}}{2}.$$

Vemos que esto nos impone ciertas restricciones a nuestra ecuación, estos se traducirán a condiciones de contorno en nuestro esquema.

## Tipos de soluciones

### 4.1 Métodos principales de resolución

Las ecuaciones en derivadas parciales, en general, no se pueden resolver con métodos exactos de resolución, como separación de variables, transformada de Fourier, etc. Para que se pudiesen resolver tendrían que ser muy sencillas y, en la practica, al no modelar bien la realidad, no nos resultarían muy útiles. Esto nos lleva a la creación de métodos numéricos que consiguen resolverlas de una manera aproximada.

En este apartado nos centraremos en el método de diferencias finitas, y veremos las características principales que nos atañen del mismo. Más tarde, en el capítulo 5, implementaremos este método en Python.

### 4.2 Método de diferencias finitas

Este método consiste principalmente en la aproximación en tiempo y en espacio de nuestro problema de contorno con valores iniciales para la ecuación de onda, en este caso elegimos las condiciones de contorno mas usadas, más tarde nos centraremos en ellas:

#### 4. TIPOS DE SOLUCIONES

---

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad (x, t) \in (0, l) \times (0, \infty), \quad (4.1)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, l], \quad (4.2)$$

$$u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in [0, l], \quad (4.3)$$

$$u(0, t) = u_t(l, t) = 0, \quad t \in [0, \infty[. \quad (4.4)$$

Estas última condición, (4.4), se llaman de tipo Dirichlet homogéneas.

Vamos a crear un mallado tal y como en 2.2.3, para hacer una discretización del problema.

$$x_j = jh \quad \text{para} \quad j = 1, \dots, m,$$

$$t_r = rk \quad \text{para} \quad r = 0, 1, \dots, n.$$

En este caso elegimos un entero  $m$  y el tamaño de paso de tiempo correspondiente  $k > 0$ . El tamaño de paso del espacio será  $h = \frac{l}{m}$  y con esto haremos un mallado del tipo  $(x_j, t_r)$ .

Vemos que los puntos del interior podrían escribirse como:

$$u_{tt}(x_j, t_r) = c^2 u_{xx}(x_j, t_r). \quad (4.5)$$

En lo que sigue, denotaremos la aproximación como  $u(x_j, t_r) \approx u_{j,r}$ .

Ahora el método se construirá optando por un esquema del tipo explícito en espacio, utilizando una aproximación centrada tanto en espacio como en tiempo.

$$u_{xx}(x_j, t_r) \approx \frac{u_{j+1,r} - 2u_{j,r} + u_{j-1,r}}{h^2}, \quad (4.6)$$

$$u_{tt}(x_j, t_r) \approx \frac{u_{j,r+1} - 2u_{j,r} + u_{j,r-1}}{k^2}. \quad (4.7)$$

Ahora sustituyendo las expresiones (4.6),(4.7) en la ecuación de ondas (4.5) nos queda el esquema.

$$\frac{u_{j,r+1} - 2u_{j,r} + u_{j,r-1}}{k^2} = c^2 \frac{u_{j+1,r} - 2u_{j,r} + u_{j-1,r}}{h^2}. \quad (4.8)$$

En estos casos se tiende a tomar  $\mu = \frac{ck}{h}$ , por lo que se tendría:

$$u_{j,r+1} - 2u_{j,r} + u_{j,r-1} = \mu^2 u_{j+1,r} - 2\mu^2 u_{j,r} + \mu^2 u_{j-1,r},$$

para  $r = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, \dots, m - 1$ .

Despejando la aproximación con mayor nivel en tiempo, obtenemos:

$$u_{j,r+1} = \mu^2(u_{j+1,r} + u_{j-1,r}) + 2(1 - \mu^2)u_{j,r} - u_{j,r-1}. \quad (4.9)$$

Esta expresión define el método que utilizaremos, dejando a un lado las condiciones de frontera (4.2),(4.3) y (4.4).

Ahora nos centraremos en dichas condiciones. (4.2) nos dará los valores de los nodos  $u_{j,0} = f(x_j) = f_j$  para

$$j = 0, 1, \dots, m$$

.

Por otra parte, las condiciones de tipo Dirichlet (4.4) quedarán como  $u_{0,r} = u_{m,r} = 0$  para  $r = 0, 1, \dots, n$ .

Para la condición que falta 4.3 utilizaremos,  $u_{j,1} = u_{j,0} + g(x_j) = u_{j,0} + g_j$ , que servirá para cualquier orden de las funciones  $f$  y  $g$ . Para esta podría haber muchas mas opciones, por ejemplo, si sabemos que la función  $f(x)$  es de orden 2 podríamos utilizar:  $u_{j,1} = u_{j,0} + kg(x_j) + \frac{c^2k^2}{2}f''(x(j))$ . En nuestro caso no ahondaremos mas en este tema y utilizaremos la expresión mas sencilla descrita anteriormente.

Nuestro esquema al completo quedaría:

$$u_{j,r+1} = \mu^2(u_{j+1,r} + u_{j-1,r}) + 2(1 - \mu^2)u_{j,r} - u_{j,r-1}, \quad (4.10)$$

$$u_{j,0} = f(x_j) = f_j, \quad j = 0, 1, \dots, m, \quad (4.11)$$

$$u_{j,1} = u_{j,0} + g(x_j) = u_{j,0} + g_j, \quad j = 0, 1, \dots, m, \quad (4.12)$$

$$u_{0,r} = u_{m,r} = 0, \quad r = 0, 1, \dots, n. \quad (4.13)$$

## 4. TIPOS DE SOLUCIONES

---

### 4.3 Consistencia

Para poder comprobar el orden del esquema que hemos elegido (4.9) vamos a hacer un análisis de la consistencia, que comenzaremos dividiendo la ecuación (4.8) de la siguiente forma,

$$\underbrace{\frac{u_{j,r+1} - 2u_{j,r} + u_{j,r-1}}{k^2}}_{(1)} - c^2 \underbrace{\frac{u_{j+1,r} - 2u_{j,r} + u_{j-1,r}}{h^2}}_{(2)} = 0.$$

Haremos ahora el desarrollo de Taylor para cada una de las componentes anteriores, para las derivadas a partir de orden dos  $u_{xxx} = u_{3x}$  y  $u_{ttt} = u_{3t}$  respectivamente.

$$\begin{aligned} u_{i+1,j} &= u + hu_x + h^2 \frac{u_{xx}}{2} + h^3 \frac{u_{3x}}{3!} + h^4 \frac{u_{4x}}{4!} + h^5 \frac{u_{5x}}{5!} + O(h^6), \\ u_{i-1,j} &= u - hu_x + h^2 \frac{u_{xx}}{2} - h^3 \frac{u_{3x}}{3!} + h^4 \frac{u_{4x}}{4!} - h^5 \frac{u_{5x}}{5!} + O(h^6), \\ u_{i,j+1} &= u + ku_t + k^2 \frac{u_{tt}}{2} + k^3 \frac{u_{3t}}{3!} + k^4 \frac{u_{4t}}{4!} + k^5 \frac{u_{5t}}{5!} + O(k^6), \\ u_{i,j-1} &= u - ku_t + k^2 \frac{u_{tt}}{2} - k^3 \frac{u_{3t}}{3!} + k^4 \frac{u_{4t}}{4!} - k^5 \frac{u_{5t}}{5!} + O(k^6), \\ u_{i,j} &= u. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (1) y (2), obtendremos:

$$\begin{aligned} (1) &= u_{tt} + 2 \frac{k^2 u_{4t}}{4!} + 2 \frac{k^4 u_{6t}}{6!} + O(h^6), \\ (2) &= u_{xx} + 2 \frac{h^2 u_{4x}}{4!} + 2 \frac{h^4 u_{6x}}{6!} + O(k^6). \end{aligned}$$

Sustituyendo en nuestro esquema nos quedará:

$$\begin{aligned} T_{h,k} u &:= u_{tt} + 2 \frac{k^2 u_{4t}}{4!} + 2 \frac{k^4 u_{6t}}{6!} - c^2 u_{xx} - 2c^2 \frac{h^2 u_{4x}}{4!} - 2c^2 \frac{h^4 u_{6x}}{6!} \dots = \\ &= u_{tt} + 2 \frac{k^2 u_{4t}}{4!} - c^2 u_{xx} - 2c^2 \frac{h^2 u_{4x}}{4!} + O(k^4) + O(h^4). \end{aligned}$$

Como  $u_{tt} = c^2 u_{xx}$  por hipótesis, entonces

$$\begin{aligned} u_{ttt} &= c^2 u_{xxt}, \\ u_{tttt} &= c^2 u_{xxtt}. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} c^2 u_{xxx} &= u_{ttt}, \\ c^2 u_{xxx} &= u_{tttt}. \end{aligned}$$

De aquí deducimos,  $u_{4x} = \frac{u_{4t}}{c^4}$  y por tanto:

$$\begin{aligned} T_{h,k}u &= u_{tt} + 2\frac{k^2 u_{4t}}{4!} - c^2 u_{xx} - 2c^2 \frac{h^2 u_{4x}}{4!} + O(k^4 - h^4) = \\ &= 2\frac{k^2 u_{4t}}{4!} - 2c^2 \frac{h^2 u_{4t}}{4!c^4} + O(k^4 - h^4) = \\ &= \frac{2}{4!} \left( k^2 - \frac{h^2}{c^2} \right) u_{4t} + O(k^4) + O(h^4) = \\ &= O(k^2) + O(h^2). \end{aligned}$$

Así hemos comprobado que el esquema tiene orden de consistencia dos en espacio y en tiempo.

#### 4.4 Análisis de Von Neumann

En la utilización de métodos multipaso, como el esquema que nos centramos en este trabajo, los errores pueden ser mucho mayores de lo que podría esperarse a causa de las cotas de error global. En este error interviene un aumento del error propagado y a menudo incrementa al disminuir la longitud de paso. Puede estar relacionado con varios factores como el método de inicialización, el truncamiento local y errores de redondeo. Esto se conoce como **inestabilidad**.

En esta sección nos centraremos en el análisis de Estabilidad de Fourier o Von Neumann. Este aunque no garantizará la estabilidad total del esquema, ya que esto no lo hace ningún método ni análisis de los que podríamos elegir, suele dar muy buenos resultados en la práctica, y es el más empleado.

Podemos encontrar diversas notaciones y formas de hacer este análisis en libros clásicos y modernos, véase [5, 6].

Comenzamos relacionando cada solución numérica del esquema con la solución exacta y el error del mismo, de la forma:

$$u_{j,r} = u(x_j, t_r) + \epsilon_{j,r} \quad (4.14)$$

donde  $\epsilon_{j,r}$  denotará el error en cada uno de los puntos del retículo que hemos formado.

#### 4. TIPOS DE SOLUCIONES

---

Ahora vamos a aplicarlo a la ecuación de onda, para profundizar en la estabilidad del esquema (4.10). Haciendo uso del termino del error como hemos visto en (4.14), lo sustituimos en el esquema, esta vez utilizando (4.8).

$$\left( \frac{u(x_{j+1}, t_{r+1}) - 2u(x_j, t_r) + u(x_{j-1}, t_{r-1}))}{k^2} - c^2 \frac{u(x_{j+1}, t_r) - 2u(x_j, t_r) + u(x_{j-1}, t_r)}{h^2} \right) + \left( \frac{\epsilon_{j,r+1} - 2v_{j,r} + \epsilon_{j,r-1}}{k^2} - c^2 \frac{\epsilon_{j+1,r} - 2\epsilon_{j,r} + \epsilon_{j-1,r}}{h^2} \right) = 0$$

Como cualquier esquema numérico lineal se satisface de manera exacta por  $u(x_j, t_r)$ , los errores también serán soluciones de la ecuación discretizada, obteniendo.

$$\frac{\epsilon_{j,r+1} - 2v_{j,r} + \epsilon_{j,r-1}}{k^2} - c^2 \frac{\epsilon_{j+1,r} - 2\epsilon_{j,r} + \epsilon_{j-1,r}}{h^2} = 0$$

Tomando la solución de tipo onda  $u_{j,r} = g^r e^{ij\beta h}$  donde  $g$  denota el factor de amplitud y  $\beta$  se corresponderá al número de onda de la ecuación de Fourier. Vamos a sustituirlo en la ecuación anterior, quedando:

$$g^{r+1} e^{ij\beta h} = \mu^2 (g^r e^{i(j+1)\beta h} + g^r e^{i(j-1)\beta h}) + 2(1 - \mu^2) g^r e^{ij\beta h} - g^{r-1} e^{ij\beta h}.$$

Dividiendo entre  $g^{r-1} e^{ij\beta h}$ :

$$\begin{aligned} g^2 &= \mu^2 (g e^{i\beta h} + g e^{-i\beta h}) + 2(1 - \mu^2) g - 1, \\ 0 &= g^2 - \mu^2 (g e^{i\beta h} + g e^{-i\beta h}) - 2(1 - \mu^2) g + 1. \end{aligned}$$

Usando las identidades trigonométricas  $e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos(x)$  y  $1 - \cos(x) = 2\sin^2(\frac{x}{2})$  obtenemos,

$$\begin{aligned} 0 &= g^2 - 2\mu^2 \cos(\beta h) g - 2(1 - \mu^2) g + 1, \\ &= g^2 - 2\mu^2 \cos(\beta h) g + 2\mu^2 g - 2g + 1, \\ &= g^2 + 2g(1 + \mu^2(1 - \cos(\beta h))) + 1, \\ &= g^2 + 2 \left( 2\mu^2 \sin^2 \left( \frac{\beta h}{2} \right) - 1 \right) g + 1. \end{aligned}$$

Podemos ahora tratarlo como una ecuación de segundo grado, es decir, tomando  $A = \left( 1 - 2\mu^2 \sin^2 \left( \frac{\beta h}{2} \right) \right)$  vemos que nos quedaría,



$$g = \frac{2A \pm \sqrt{(-2A)^2 - 4}}{2} = A \pm \sqrt{A^2 - 1} =$$

$$= 1 - 2\mu^2 \sin^2 \left( \frac{\beta h}{2} \right) \pm \sqrt{\left( 1 - 2\mu^2 \sin^2 \left( \frac{\beta h}{2} \right) \right)^2 - 1}.$$

Al ser  $g$  el factor de ampliación, es una relación del espacio y el tiempo y si se alejase demasiado de 0, las perturbaciones se amplificarán con el tiempo. Por lo tanto necesitaremos  $|g| \leq 1$ , es decir,

$$\left| A \pm \sqrt{A^2 - 1} \right| \leq 1$$

Vamos a ver que pasará dependiendo de los valores posibles de  $A$ . Como  $2\mu^2 \sin^2 \left( \frac{\beta h}{2} \right) \geq 0$  tendremos que  $A \leq 1$ .

- Si  $A < -1$ :

La solución  $g - 1 = A - \sqrt{A^2 - 1} < -1$  y por lo tanto siempre se da  $|g_1| > 1$  y el esquema será en cualquier caso inestable.

- Si  $-1 \leq A \leq 1$ :

Tenemos que

$$-1 \leq 1 - 2\mu^2 \sin^2 \left( \frac{\beta h}{2} \right) \leq 1$$

$$1 \geq 1 - 2\mu^2 \sin^2 \left( \frac{\beta h}{2} \right) \geq 0$$

Y como para cualesquiera  $\beta, h$  se tiene que  $1 \geq \sin^2 \left( \frac{\beta h}{2} \right) \geq 0$  se dará  $1 \geq \mu^2 \geq 0$ , y al darse  $\mu = \frac{ck}{h} > 0$  por definición, llegamos a la condición CFL:

$$1 \geq \mu \geq 0$$

Así que en este caso el esquema será estable.

Por lo tanto nuestro esquema será condicionalmente estable. En este caso, tal y como podemos extraer de [2], mirando el dominio de dependencia (2.3.1) nos damos cuenta de que, cuando se de la igualdad a uno, este coincidirá con los puntos de nuestra discretización, es decir, dependerá del menor número de puntos posibles, mientras cumple la condición CFL.

## 4. TIPOS DE SOLUCIONES

---

En la comparativa del capítulo siguiente cambiaremos  $\mu$  para ilustrar como afecta de manera muy positiva a la estabilidad de las soluciones el análisis anteriormente realizado.

### 4.5 Esquema como dos ecuaciones de transporte

Tal y como comentamos en la sección 3.1 la ecuación de ondas se puede separar en dos ecuaciones de tipo transporte (3.5). Ahora nos centraremos en ver como quedaría nuestro esquema para cada una de ellas, para su implementación en Python.

Comenzamos viendo cada una de las funciones  $w$  de dimensión 2 que quedan definidas con nuestras funciones  $p^+, p^-$ , usamos estas ya que es imprescindible para la implementación que estén definidas en los puntos de nuestro mallado.

$$\begin{aligned}w^+(x_j, t_r) &= p^+(x_j + ct_r) \\w^-(x_j, t_r) &= p^-(x_j - ct_r)\end{aligned}$$

Ahora tomaremos las aproximaciones tal y como hicimos con la solución  $u$ , quedando

$$u_{j,r} = w_{j,r}^+ + w_{j,r}^-$$

(INTRODUCIR COMO METO ESTO EN MI ESQUEMA )

### 4.6 Ley de energía discreta

En este punto nos preguntamos como se traducirían esta ley de energía a nuestro esquema. En este caso al ser el esquema discreto, tendremos que usar la definición de suma por partes 2.2.1, en lugar de la del producto interior anteriormente utilizada en la sección 3.2.

Vamos a comenzar tomando como dominio mallado 2.2.3, sabiendo que queremos hacer la suma por partes en el eje de la posición definimos  $D$  los puntos del mismo. Veremos cuales son las condiciones que deberán cumplir nuestro esquema, utilizando la función  $\delta$  definida en 2.2.5, será.

$$\langle \delta_t u, \delta_{tt} u \rangle_D = c^2 \langle \delta_t u, \delta_{xx} u \rangle_D .$$

Siguiendo la notación que tomabamos en 2.2.6, para cada  $r = 1, \dots, n$  tendremos:

$$\langle \delta_t u_{.,r}, \delta_{tt} u_{.,r} \rangle_D = c^2 \langle \delta_t u_{.,r}, \delta_{xx} u_{.,r} \rangle_D. \quad (4.15)$$

Ahora para desarrollar la parte derecha de la igualdad usaremos la observación (2.3) y posteriormente la definición 2.2.6.

$$\begin{aligned} \langle \delta_t u_{.,r}, \delta_{xx} u_{.,r} \rangle_D &\stackrel{(2.3)}{=} \langle \delta_t u_{.,r}, \delta_{x^+ x^-} u_{.,r} \rangle_D \\ &\stackrel{(2.5)}{=} - \langle \delta_{x^+} \delta_t u_{.,r}, \delta_{x^+} u_{.,r} \rangle_D - (\delta_t u_{0,r})(\delta_{x^-} u_{-1,r}) - (\delta_t u_{m+1,r})(\delta_{x^-} u_{m,r}) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Insertando esto en la ecuación (4.15) nos quedaría:

$$\langle \delta_t u_{.,r}, \delta_{tt} u_{.,r} \rangle_D + c^2 \langle \delta_t u_{.,r}, \delta_{x^+} \delta_t u_{.,r} \rangle_D = -c^2 (\delta_t u_{0,r})(\delta_{x^-} u_{-1,r}) + c^2 (\delta_t u_{m+1,r})(\delta_{x^-} u_{m,r}).$$

Denotando al termino de la derecha como  $\mathfrak{b}$  tendremos que

$$\delta_{t^+} \mathfrak{h} = \mathfrak{b}.$$

Identificamos los términos, de la energía total  $\mathfrak{h}$ , energía cinética  $\mathfrak{t}$  y energía potencial  $\mathfrak{v}$ :

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{t} + \mathfrak{v}, \quad \mathfrak{t} = \frac{1}{2} \|\delta_t u_{.,r}\|_D^2 \quad \text{y} \quad \mathfrak{v} = \frac{\mu^2}{2} \langle \delta_{x^+} u_{.,r}, e_t \delta_{x^+} u_{.,r} \rangle_D.$$

Y por lo tanto se dará la conservación de energía cuando  $\mathfrak{b} = 0$ , es decir cuando

$$(\delta_t u_{0,r})(\delta_{x^-} u_{-1,r}) = (\delta_t u_{m+1,r})(\delta_{x^-} u_{m,r}) \quad (4.17)$$

Esto se puede dar de muchas maneras, pero las mas sencillas y estudiadas son que ambas sean cero. Para el lado izquierdo de (4.17) se traduciría en:

$$u_{0,r} = 0, \quad r = 0, 1, \dots, n, \quad (4.18)$$

o

$$\delta_{x^-} u_{0,r} \quad r = 0, 1, \dots, n, \quad (4.19)$$

Vemos que 4.18 se corresponde con la condición de Dirichlet en el borde izquierdo del mallado, esta será la misma condición que dábamos en 4.13. De la segunda, 4.19, de la definición de 2.2.5 sabemos,  $\delta_{x^-} u_{0,r} = \frac{1}{h} (u_{0,r} - u_{-1,r})$  y por lo tanto  $u_{j,0} = u_{j,-1}$  para

#### 4. TIPOS DE SOLUCIONES

---

$j = 0, 1, \dots, m$ .

En nuestro caso  $j = -1$  no se encuentra en el esquema, pero gracias a la igualdad que acabamos de obtener podremos inicializar los puntos de la primera posición en espacio  $j = 0$  con nuestra expresión 4.9, quedando:

$$\begin{aligned} u_{0,r+1} &= \mu^2(u_{1,r} + u_{-1,r}) + 2(1 - \mu^2)u_{0,r} - u_{0,r-1} \\ &= \mu^2(u_{1,r} + u_{0,r}) + 2(1 - \mu^2)u_{0,r} - u_{0,r-1} \\ &= \mu^2 u_{1,r} + (2 - \mu^2)u_{0,r} - u_{0,r-1} \end{aligned}$$

Miramos ahora el lado derecho de la igualdad (4.17) e igualando a cero tendremos

$$u_{m+1,r} = 0, \quad r = 0, 1, \dots, n, \quad (4.20)$$

o

$$\delta_x - u_{m,r} \quad r = 0, 1, \dots, n, \quad (4.21)$$

(AQUÍ EL PROBLEMA ES Que NO SE REALMENTE COMO INTERPRETAR ESTO. PORQUE LA PRIMERA CONDICIÓN SE REFIERE A UNA RECTA DE PUNTOS VIRTUALES (queda  $u_{m+1,r} = 0$ ) Y LA SEGUNDA UNOS PUNTOS QUE YA TENEMOS DEFINIDOS POR NUESTRO ESQUEMA(4.10) ( $u_{m,r} = u_{m-1,r}$  LO QUE AL METERLO EN EL ESQUEMA (4.9),ME QUEDA  $u_{m,r+1} = (2 - \mu^2)u_{m,r} + \mu^2 u_{m+1,r} - u_{m,r-1}$ ) Y AL TENER NODOS VIRTUALES TAMPOCO SE COMO SE COMO CONTINUAR)

En el capítulo siguiente modificaremos estas expresiones obtenidas, para ver que pasa cuando no se da conservación de la energía.

## Comparativa en python

### 5.1 Comparar cambiando $\mu$

Cambio  $\mu$

### 5.2 Comparar cambiando la energía

Cambio la energía y separo



CAPITULO

# 6

## Conclusiones

$\frac{1}{2}$  |





APPENDIX



# Anexo

En este capítulo anexaremos el código realizado en Python.



# Bibliografía

- [1] Abdul-Majid Wazwaz. *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory*. 01 2009. 1, 11
- [2] K. W. Morton, D. F. Mayers, and D. F. Mayers. *Numerical solution of partial differential equations: an introduction*. Cambridge University Press, Cambridge, 2nd edition, 2005. 1, 11, 21
- [3] H.L. Royden and P. Fitzpatrick. *Real Analysis*. Prentice Hall, 2010. 3
- [4] Patricia Camarena. La transferencia del conocimiento: ecuaciones diferenciales parciales hacia una cuerda que vibra. 2004. 11
- [5] 19
- [6] W.A. Smith and F.J.S. Bernabe. *Análisis numérico*. Prentice Hall, 1988. 19
- [7] Stefan Bilbao. *Numerical Sound Synthesis: Finite Difference Schemes and Simulation in Musical Acoustics*. Wiley Publishing, 2009.
- [8] A. Quarteroni. *Numerical Models for Differential Problems*. MS&A. Springer Milan, 2010.
- [9] Juan Carlos Solares Carreño and Rosalba Mendoza Suárez. Acerca de algunas soluciones de ciertas ecuaciones de onda. 2012.
- [10] J. Vankka. *Digital Synthesizers and Transmitters for Software Radio*. Springer US, 2005.
- [11] M.E. Van Valkenburg. *Network Analysis 3rd Edition*. Pearson Education, 2006.

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [12] Enrique Zuazua. Optimal and approximate control of finite-difference approximation schemes for the 1d wave equation. *Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni. Serie VII*, 2004.
- [13] Bo Strand. Summation by parts for finite difference approximations for  $d/dx$ . *Journal of Computational Physics*, 110(1):47–67, 1994.
- [14] David L. Russell. Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations: Recent progress and open questions. *SIAM Review*, 20(4):639–739, 1978.
- [15] John C. Strikwerda. *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations, Second Edition*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2004.
- [16] Stig Larsson and Vidar Thom  e. *Partial differential equations with numerical methods*, volume 45. Springer, Berlin, 1st softcover pr. edition, 2009.