

UNIVERSIDAD DE CÁDIZ

FACULTAD DE CIENCIAS

GRADO EN MATEMÁTICAS

SIMULACIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DE ONDA.

Trabajo de fin de grado presentado por

Ana Cuevas de Cózar

Tutores: Dr.José Rafael Rodríguez Galvan

D.Daniel Acosta Soba

Firma de la alumna

Firma de los tutores

Puerto Real, Cádiz, Junio de 2.023

Abstract

Five years ago, a first volume of open problems in Mathematical

A mis padres.

Resumen

Se ha hecho una investigación sobre la resolución de las ecuaciones de onda.

Agradecimientos

Por mi excelencia y formación profesional, gracias a su cariño, guía y apoyo.
Este presente simboliza mi gratitud por toda la responsabilidad e inestimable ayuda que siempre me han proporcionado.

Con amor, admiración y respeto.

Ana Cuevas de Cózar

mayo 2023

Índice general

1	Introducción	1
2	Definición de la ecuación de onda	3
3	Conceptos previos	5
3.1	Producto interior y suma por partes	5
3.2	Terminología	6
3.3	Controlabilidad y observabilidad	7
4	Tipos de soluciones	9
4.1	Métodos principales de resolución	9
4.2	Método de diferencias finitas	9
4.3	Consistencia	11
4.4	Análisis de Von Neumann	12
5	Análisis de la energía en nuestro esquema	15
5.1	La energía en la ecuación de ondas	15
5.2	Traducción a nuestro esquema	16
5.3	Controlabilidad y observabilidad	17
5.4	Condiciones de contorno	17
6	Comparativa en python	19
6.1	Comparar cambiando μ	19
6.2	Comparar cambiando la energía	19
7	Conclusiones	21
	Bibliografía	23

Hay a quien le gusta comenzar cada capítulo con una cita...

Mulachenski

CAPITULO

1

Introducción

El porque de los usos de los métodos numéricos, porque elegimos la ecuación de ondas, nos parece una forma chula y de hecho practica de unir las matemáticas con la música se podría ampliar el estudio y hacer música escrita como ecuaciones.



pero en ocasiones hay ecuaciones en las que no se puede, o es muy complicado, obtener soluciones exactas y por ello aplicamos métodos numéricos.

Comenzaremos dando una definición general de la ecuación de ondas en \mathbb{R}^n , con $n \geq 1$
[1][2]

Definición de la ecuación de onda

!!!Explicar porque modela una onda, sacado de [3]

Comenzaremos dando una definición general de la ecuación de ondas en \mathbb{R}^n , con $n \geq 1$
[1][2]

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = f, x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

Con f es una función de valores reales, $c > 0$ constante de propagación y el operador

$$\Delta u = \sum_{j=1}^N \frac{\delta^2 u}{\delta x_j^2} \quad (2.2)$$

que es conocida como el Laplaciano. En este tipo de ecuaciones la variable t denota el tiempo transcurrido y las variables $x_i, i = 1, \dots, n$ denotan la posición de la onda en cada dirección del espacio \mathbb{R}^n .

Podemos observar que son lineales, y siempre que $f \neq 0$ la ecuación será no homogénea, es decir, tendrá termino independiente.

Comenzaremos hablando de las ecuación de onda de una dimensión, puesto que esas son las más sencillas de trabajar.

2. DEFINICIÓN DE LA ECUACIÓN DE ONDA

Entonces la ecuación se definirá de la siguiente forma:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad (2.3)$$

Para poder tratar con este tipo de ecuaciones de una manera más sencilla, usualmente las clasificamos en: elípticas, hiperbólicas y parabólicas. Para ello tendremos que ponerla en forma estándar. Aunque las ecuaciones se pueden clasificar y estandarizar siempre, nosotros por simplicidad lo haremos solo para las de segundo orden.

Una ecuación de segundo orden en forma estándar sería como sigue:

$$Au_{tt} + Bu_{tx} + Cu_{xx} + Du_t + Eu_x + Fu = G \quad (2.4)$$

donde A, B, C, D, E, F, G son constantes o funciones de variables t y x .

Clasificaremos dependiendo de las ecuaciones características relativas a la ecuación en derivadas parciales (EDP):

DEFINICIÓN 2.0.1: Clasificación de las EDP de segundo orden

Si en todos los puntos (x, y) de una región $W \in \mathbb{R}^2$ se cumple que:

- $B^2(x, y) - 4A(x, y)C(x, y) > 0$, entonces la EDP (n^*) se dice hiperbólica.
- $B^2(x, y) - 4A(x, y)C(x, y) = 0$, entonces la EDP (n^*) se dice parabólica.
- $B^2(x, y) - 4A(x, y)C(x, y) < 0$, entonces la EDP (n^*) se dice elíptica.

Pongamos ahora nuestra ecuación de esa forma:

Vemos que $A = 1, C = -c^2, G = f$ y cada una de las demás variables es 0. Ahora tenemos $B^2 - 4AC = 4c^2 > 0$ y por lo tanto nuestra ecuación es hiperbólica.

Este tipo de clasificación de las ecuaciones se usa para separar los distintos métodos numéricos que se pueden usar, ya que estos suelen diferir dependiendo de la misma.

Conceptos previos

Antes de comenzar a adentrarnos en el tema hay varios conceptos que debemos explicar para hacer más cómoda y fácil la comprensión del resto de nuestro trabajo.

3.1 Producto interior y suma por partes

Para poder hacer de manera adecuada el análisis de la energía necesitaremos primeramente definir el producto interior, en este caso lo mas sencillo será tomar el producto interior en L_2 , es decir:

DEFINICIÓN 3.1.1: Producto interior en L_2

Sean f y g dos funciones definidas en un intervalo D , definimos el producto interior en L_2 de ellas como:

$$\langle f, g \rangle_D = \int_D f(x) * g(x) dx$$

Definimos la norma asociada a dicho producto como:

$$||f||_D = \sqrt{\langle f, f \rangle_D}$$

Para nuestro problema específico ambas funciones tendrán más de una componente. Suponiendo que, tal y como en el capítulo anterior, tenemos funciones del tipo $u(x, t)$, esto quedaría:

3. CONCEPTOS PREVIOS

$$\langle u_1, u_2 \rangle_D(t) = \int_D u_1(x, t) u_2(x, t) dx \quad \|u\|_D(t) = \sqrt{\langle u, u \rangle_D}$$

Esto a partir de ahora lo denotaremos como $\langle u_1, u_2 \rangle_D$ y $\|u\|_D$ respectivamente.



(Introducir las propiedades que usaremos, y reescribir el cap 4 usando esto)

Ahora, sabiendo vamos a hacer un esquema de diferencias finitas en nuestro problema, necesitaremos extrapolar esta definición a un contexto discreto, esto lo haremos usando el concepto de suma por partes.

DEFINICIÓN 3.1.2: Suma por partes

Sean f y g dos funciones discretas definidas en un intervalo $D = (d_-, d^+)$, definimos el producto interior en L_2 de ellas como:

$$\langle f^n, g^n \rangle_D = \sum_{x=d_-+1}^{d^+-1} h f^n(x) g^n(x) + \frac{1}{2} f^n(d_-) g^n(d_-) + \frac{1}{2} f^n(d^+) g^n(d^+)$$

Donde h es tamaño de cada uno de los subintervalos en los que se divide D . Definimos la norma asociada será: $\|f\|_D = \sqrt{\langle f^n, f^n \rangle_D} \geq 0$

Vemos que si nuestro dominio es del tipo $D = \mathbb{Z}$ se tendrá que



$$\langle f^n, g^n \rangle_D = \sum_{x=d_-+1}^{d^+-1} h f^n(x) g^n(x)$$

3.2 Terminología

(Decir algo sobre que u es una serie temporal???)



DEFINICIÓN 3.2.1: Forward and backward shifts

Sean u una función discretizada en un mallado del tipo $(x_i, t_j) \in (\alpha_1, \beta_1) \times (\alpha_2, \beta_2)$ donde $i = 1, 2, \dots, m$ y $j = 1, 2, \dots, n$. Definiremos el forward shift o desplazamiento hacia delante (resp. backward o desplazamiento hacia atrás) como:

$$e_{t+} u_{i,j} = u_{i,j+1} \quad \text{respectivamente,} \quad e_{t-} u_{i,j} = u_{i,j-1}$$

DEFINICIÓN 3.2.2: Forward Backward and Centered difference approximations

Sean u una función discretizada en un mallado del tipo $(x_i, t_j) \in (\alpha_1, \beta_1)x(\alpha_2, \beta_2)$ donde $i = 1, 2, \dots, m$ y $j = 1, 2, \dots, n$.

Definiremos las diferencias aproximadas hacia adelante, atrás o centradas (más conocidas por sus nombres en inglés "Forward, backward and centered difference approximations") respectivamente, como:

- $\delta_{t+} u_{i,j} = \frac{1}{k} (u_{i,j+1} - u_{i,j})$
- $\delta_{t-} u_{i,j} = \frac{1}{k} (u_{i,j} - u_{i,j-1})$
- $\delta_t u_{i,j} = \frac{1}{k} (u_{i,j+1} - u_{i,j-1})$

3.3 Controlabilidad y observabilidad



La controlabilidad de una EDP se refiere a la capacidad de controlar el sistema dinámico que modela la misma, es decir, es la capacidad de encontrar una función de control que lleve el sistema de un estado inicial a un estado deseado en un tiempo concreto.

(DEFINICION en pag 3 de [4])

DEFINICIÓN 3.3.1: Controlabilidad de un sistema

Tipos de soluciones

4.1 Métodos principales de resolución

Las ecuaciones ~~hiperbólicas~~, en general, no se pueden resolver con métodos exactos de resolución, como separación de variables, transformada de ~~Fourie, ect.~~ Para que se pudiesen resolver tendrían que cumplir unas condiciones muy concretas y en la practica, al no modelar bien la realidad, no nos resultarían muy útiles. Esto nos lleva a la creación de métodos numéricos que consiguen resolverlas de una manera ~~no-exacta~~.

En este apartado nos centraremos en el método de diferencias finitas, y veremos las características principales que nos atañen del mismo. Más tarde, en el capítulo 5, implementaremos este método en Python.

4.2 Método de diferencias finitas

Este método consiste principalmente en la aproximación en tiempo y en espacio de nuestra ~~ecuación con unas condiciones iniciales para los dos primeros instantes y la primera y la última posiciones en el espacio, es decir, para la ecuación:~~

4. TIPOS DE SOLUCIONES

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \text{ en } (0, l) \times (0, \infty) \quad (4.1)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x), & x \in [0, l] \\ u_t(x, 0) = g(x), & x \in [0, l] \\ u(0, t) = u_t(l, t) = 0, & t \in [0, \infty[\end{cases} \quad (4.2)$$

Estas última condición se llama de tipo Dirichlet. En este caso elegimos un entero m y el tamaño de paso de tiempo correspondiente $k > 0$. El tamaño de paso del espacio será $h = \frac{l}{m}$ y con esto haremos un mallado del tipo (x_i, t_j) .

Estos puntos vendrán dados de la forma:

$$x_i = ih \text{ para } i = 1, \dots, m$$

$$t_j = jk \text{ para } j = 0, 1, \dots$$

~~Vemos que los puntos del interior podrían escribirse de la siguiente como:~~

$$\del{u_{tt}(x_i, t_j) = c^2 u_{xx}(x_i, t_j)} \quad (4.3)$$

Ahora el método se construirá, en nuestro caso optando por un esquema del tipo explícito en espacio y en tiempo, ~~es decir~~, utilizando una aproximación centrada tanto en espacio como en tiempo, de la siguiente forma:

$$u_{xx}(x_i, t_j) \approx \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{h^2} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

$$u_{tt}(x_i, t_j) \approx \frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1}))}{k^2} \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2}$$

Los errores de aproximación de estos métodos son proporcionales a h^2 y k^2 respectivamente, cosa que demostraremos en la siguiente sección. Ahora sustituyendo las expresiones en la ecuación de ondas (4.3) nos queda el esquema.

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = c^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \quad (4.4)$$

En estos casos se tiende a tomar $\mu = \frac{ck}{h}$, por lo que se tendría:

$$u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1} = \mu^2 u_{i+1,j} - 2\mu^2 u_{i,j} + \mu u_{i-1,j} \text{ para } j = 1, 2, \dots, i = 1, 2, \dots, m-1$$

Despejando la aproximación con mayor nivel en tiempo, obtenemos:

$$u_{i,j+1} = \mu^2(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + 2(1 - \mu^2)u_{i,j} - u_{i,j-1} \quad (4.5)$$



Esta expresión define el método que utilizaremos, dejando a un lado las condiciones de frontera (4.2), estas nos darán los valores de los nodos $u_{i,0} = f(x_i) = f_i$ para $i = 0, 1, \dots, m$ y por otra parte, las condición del tipo Dirichlet quedarán como $u_{0,j} = u_{m,j} = 0$ para $j = 0, 1, \dots$. Para la condición que falta utilizaremos, para cualquier orden de la función $g(x)$, $u_{i,1} = u_{i,0} + g(x_i) = u_{i,0} + g_i$.



Para esta última condición podría haber muchas mas opciones, por ejemplo, si sabemos que la función $f(x)$ es de orden 2 podríamos utilizar: $u_{i,1} = u_{i,0} + kg(x_i) + \frac{c^2 k^2}{2} f''(x(i))$. En nuestro caso no ahondaremos en este tema y usaremos la condición mas sencilla anteriormente descrita, al dar buenos resultados.



4.3 Consistencia

Para poder comprobar el orden ~~para los métodos~~ que hemos elegido vamos a hacer un análisis de la consistencia, que comenzaremos dividiendo la ecuación (4.4) de la siguiente forma,

$$\underbrace{\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2}}_{(1)} - c^2 \underbrace{\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}}_{(2)} = 0$$

Haremos ahora el desarrollo de Taylor para cada una de las componentes anteriores.



$$\begin{aligned} u_{i+1,j} &= u + hu_x + h^2 \frac{u_{xx}}{2} + h^3 \frac{u_{xxx}}{3!} + h^4 \frac{u_{xxxx}}{4!} + h^5 \frac{u_{xxxxx}}{5!} + \dots \\ u_{i-1,j} &= u - hu_x + h^2 \frac{u_{xx}}{2} - h^3 \frac{u_{xxx}}{3!} + h^4 \frac{u_{xxxx}}{4!} - h^5 \frac{u_{xxxxx}}{5!} + \dots \\ u_{i,j+1} &= u + ku_t + k^2 \frac{u_{tt}}{2} + k^3 \frac{u_{ttt}}{3!} + k^4 \frac{u_{tttt}}{4!} + k^5 \frac{u_{ttttt}}{5!} + \dots \\ u_{i,j-1} &= u - ku_t + k^2 \frac{u_{tt}}{2} - k^3 \frac{u_{ttt}}{3!} + k^4 \frac{u_{tttt}}{4!} - k^5 \frac{u_{ttttt}}{5!} + \dots \\ u_{i,j} &= u \end{aligned}$$



De (1) y (2) obtendremos:

$$\begin{aligned} (1) &= u_{tt} + 2 \frac{k^2 u_{4t}}{4!} + 2 \frac{k^4 u_{6t}}{6!} + \dots \\ (2) &= u_{xx} + 2 \frac{h^2 u_{xxx}}{4!} + 2 \frac{h^4 u_{6x}}{6!} + \dots \end{aligned}$$

Sustituyendo en nuestro esquema nos quedará:

4. TIPOS DE SOLUCIONES

$$\begin{aligned} T_{h,k}u &= u_{tt} + 2\frac{k^2 u_{4t}}{4!} + 2\frac{k^4 u_{6t}}{6!} - c^2 u_{xx} - 2c^2 \frac{h^2 u_{xxxx}}{4!} - 2c^2 \frac{h^4 u_{6x}}{6!} \dots = \\ &= u_{tt} + 2\frac{k^2 u_{4t}}{4!} - c^2 u_{xx} - 2c^2 \frac{h^2 u_{xxxx}}{4!} + O(k^4 - h^4) \end{aligned}$$



Como $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ por hipótesis, entonces

$$u_{ttt} = c^2 u_{xxt}$$

$$u_{tttt} = c^2 u_{xxtt}$$

Por otro lado,

$$c^2 u_{xxx} = u_{ttt}$$

$$c^2 u_{xxx} = u_{tttx}$$

De aquí deducimos, $u_{4x} = \frac{u_{4t}}{c^4}$ y por tanto:

$$\begin{aligned} T_{h,k}u &= u_{tt} + 2\frac{k^2 u_{4t}}{4!} - c^2 u_{xx} - 2c^2 \frac{h^2 u_{4x}}{4!} + O(k^4 - h^4) = \\ &= 2\frac{k^2 u_{4t}}{4!} - 2c^2 \frac{h^2 u_{4t}}{4!c^4} + O(k^4 - h^4) = \frac{2}{4!} (k^2 - \frac{h^2}{c^2}) u_{4t} + O(k^4 - h^4) \end{aligned}$$

Así hemos comprobado que el esquema tiene orden de aproximación 2 en espacio y en tiempo. ~~Para que sea consistente debe verificarse que $\lim_{h,k \rightarrow 0} T_{h,k} = 0$, y como todos los términos están multiplicado o bien por h o bien por k , podemos concluir que el esquema es consistente.~~

4.4 Análisis de Von Neumann

En esta sección vamos a realizar el análisis de Von Neumann de la ecuación de Onda, para profundizar en la estabilidad del esquema, ~~de manera similar a como lo haríamos para un caso continuo, para ello usamos el esquema (4.5).~~ Solo para esta sección haremos el cambio $i \rightarrow j$ y $j \rightarrow n$ para no confundirnos con la i como número imaginario, por tanto nos quedaría:

$$u_{j,n+1} = \mu^2 (u_{j+1,n} + u_{j-1,n}) + 2(1 - \mu^2) u_{j,n} - u_{j,n-1} \quad (4.6)$$

Tomamos la solución de tipo onda, ya que es la que mas se adecua a nuestra situación.

$u_{j,n} = z^n e^{ij\beta h}$ donde $z = e^{sk}$. y β es el número de onda espacial, definido como $\beta =$

$\frac{2\pi}{Nh}$, donde N es el número de puntos de malla en el dominio espacial. (Quiero meter que representan cada uno de los factores) Vamos a sustituirlo en la ecuación (4.6).

$$z^{n+1}e^{ij\beta h} = \mu^2(z^n e^{i(j+1)\beta h} + z^n e^{i(j-1)\beta h}) + 2(1 - \mu^2)z^n e^{ij\beta h} - z^{n-1}e^{ij\beta h} \quad (4.7)$$


Dividiendo entre $z^{n-1}e^{ij\beta h}$:

$$\begin{aligned} z^2 &= \mu^2(z e^{i\beta h} + z e^{-i\beta h}) + 2(1 - \mu^2)z - 1 \\ 0 &= z^2 - \mu^2(z e^{i\beta h} + z e^{-i\beta h}) - 2(1 - \mu^2)z + 1 \end{aligned}$$

Usando las identidades trigonométricas $e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos(x)$ y $1 - \cos(x) = 2\sin^2(\frac{x}{2})$ obtenemos,

$$\begin{aligned} 0 &= z^2 - 2\mu^2 \cos(\beta h)z - 2(1 - \mu^2)z + 1 \\ 0 &= z^2 - 2\mu^2 \cos(\beta h)z + 2\mu^2 z - 2z + 1 \\ 0 &= z^2 + 2z(1 + \mu^2(1 - \cos(\beta h))) + 1 \\ 0 &= z^2 + 2\left(2\mu^2 \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) - 1\right)z + 1 \end{aligned}$$

Podemos ahora tratarlo como una ecuación de segundo grado, es decir, tomando $A = \left(1 - 2\mu^2 \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)\right)$ vemos que nos quedaría,



$$z = \frac{2A \pm \sqrt{(-2A)^2 - 4}}{2} = A \pm \sqrt{A^2 - 1} = 1 - 2\mu^2 \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) \pm \sqrt{\left(1 - 2\mu^2 \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)\right)^2 - 1}$$

Al tener nuestro esquema 3 instantes nos damos cuenta de que hay dos soluciones de la ecuación, estas representarán la propagación en cada una de las dos direcciones posibles. Sabemos que z será quien nos dé la tasa de crecimiento o decaimiento de nuestra solución, al ser el factor de amplificación, y por lo tanto necesitaremos $|z| \leq 1$. Vemos, usando el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz [5], que esto se puede traducir como:

$$\left|2\mu^2 \sin\left(\frac{\beta h}{2}\right) - 1\right| \leq 1$$

O lo que es lo mismo:

$$2\mu^2 \sin\left(\frac{\beta h}{2}\right) \leq 1$$

4. TIPOS DE SOLUCIONES

Como debe satisfacerse para cualquier valor de β y la función $0 \leq \sin^2(x) \leq 1$ para todo x la condición de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) será:

$$\mu \leq 1$$

En este caso, tal y como podemos extraer de [2], mirando el dominio de dependencia nos damos cuenta de que, cuando se da la igualdad, este coincidirá con los puntos de nuestra discretización, es decir, dependerá del menor número de puntos posibles, mientras cumple la condición CFL. Esta condición no es absoluta, ya que pueden darse casos en los que el esquema no sea exacto aún cumpliéndose la misma. Veremos aún así en la comparativa de capítulos posteriores como afecta de manera muy positiva a la estabilidad de las soluciones.



Análisis de la energía en nuestro esquema

En este capítulo nos centraremos en analizar el cambio de energía que ocurrirá en el esquema en diferencias finitas.

5.1 La energía en la ecuación de ondas

Para poder ver como se comportará la energía en nuestro esquema particular deberemos comenzar viéndolo en la ecuación (4.1), suponiendo que en este caso el espacio está definido sobre todo \mathbb{R} . La energía para dicha ecuación la podemos obtener multiplicando por u_t , para después integrar en espacio, es decir:

$$\begin{aligned} 0 &= u_{tt}u_t - \mu^2 u_{xx}u_t \\ 0 &= \int_{\mathbb{R}} u_{tt}u_t dx - \int_{\mathbb{R}} \mu^2 u_{xx}u_t dx \\ 0 &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} [u_t^2]_t dx - \int_{\mathbb{R}} \mu^2 u_x u_{xt} dx \end{aligned}$$

Esta última igualdad se da por la forma de nuestro dominio en concreto, ya que se desvanecerían los otros términos. Ahora integrando, y como $\int_{\mathbb{R}} \mu^2 u_x u_{xt} dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} [u_x^2]_t dx$ en tiempo obtenemos,

5. ANÁLISIS DE LA ENERGÍA EN NUESTRO ESQUEMA

$$0 = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} [u_t^2]_t dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} [u_x^2]_t dx \quad (5.1)$$

De aquí en adelante y siguiendo [6] utilizaremos la notación del producto interior y su norma asociada en L_2 , por consiguiente nos quedaría,

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \frac{\mu^2}{2} \|u_x\|^2 \right)$$

Ahora podremos separar en energía cinética $\mathfrak{T} = \frac{1}{2} \|u_t\|^2$ y la energía potencial $\mathfrak{B} = \frac{\mu^2}{2} \|u_x\|^2$ de donde se sigue que la energía total será

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{T} + \mathfrak{B} = \frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \frac{\mu^2}{2} \|u_x\|^2$$

Aún así para que estas fuesen las energías reales de la ecuación tendrían que estar escaladas. Por otro lado, tenemos que $\frac{d}{dt} \mathfrak{H} = 0$, ya que tanto \mathfrak{T} , como \mathfrak{B} son no negativas implicará que

$$\mathfrak{H}(t) = \mathfrak{H}(0) \geq 0, \quad \|u_t\|_{\mathbb{R}} \leq \sqrt{2\mathfrak{H}(0)} \quad \text{y} \quad \|u_x\|_{\mathbb{R}} \leq \frac{\sqrt{2\mathfrak{H}(0)}}{\mu}$$

5.2 Traducción a nuestro esquema

En este punto nos preguntamos como se traducirían estas condiciones y la formula de la energía a nuestro esquema específico. Comenzamos viendo que en este caso como nuestro esquema es finito y no estamos en un entorno continuo, tendremos que usar la definición de suma por partes en lugar de la del producto interior anteriormente utilizada. Tomamos como dominio \mathbb{Z} y vemos que nuestra ecuación, utilizando la función δ definida en el Capítulo 2, será.

$$\langle \delta_t u, \delta_{tt} u \rangle_{\mathbb{Z}} = \mu^2 \langle \delta_t u, \delta_{xx} u \rangle_{\mathbb{Z}}$$

Utilizando la suma por partes de la misma manera que el producto interior de la sección anterior, y sabiendo que nuestro dominio es no acotado, tendremos.

$$\langle \delta_t u, \delta_{tt} u \rangle_{\mathbb{Z}} = -\mu^2 \langle \delta_t u, \delta_{x+} \delta_t u \rangle_{\mathbb{Z}}$$

$$\langle \delta_t u, \delta_{tt} u \rangle_c + \mu^2 \langle \delta_t u, \delta_{x+} \delta_t u \rangle_{\mathbb{Z}} = 0$$

Lo escribimos de la forma,

$$\delta_{t+} \left(\frac{1}{2} \|\delta_{t-} u\|_{\mathbb{Z}}^2 + \frac{\mu^2}{2} \langle \delta_{x+} u, e_{t-} \delta_{x+} u \rangle_{\mathbb{Z}} \right) = 0$$

Identificamos los términos, de la energía total \mathfrak{h} , energía cinética \mathfrak{t} y energía potencial \mathfrak{b} :

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{t} + \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{t} = \frac{1}{2} \|\delta_{t-} u\|_{\mathbb{Z}}^2 \quad \text{y} \quad \mathfrak{b} = \frac{\mu^2}{2} \langle \delta_{x+} u, e_{t-} \delta_{x+} u \rangle_{\mathbb{Z}}$$

Y tal y como en el apartado anterior, podemos deducir que:

$$\mathfrak{h}^n = \mathfrak{h}^0$$

Ahora que ya tenemos como se define la energía en nuestro esquema en particular, podremos ver como afecta la misma a varias facetas de nuestra ecuación.

5.3 Controlabilidad y observabilidad

En esta sección vamos a ver como la

5.4 Condiciones de contorno

(En esta sección quiero ver como afectan a las condiciones de contorno las desigualdades que hemos obtenido, ver en numerical sound synthesis)

Comparativa en python

6.1 Comparar cambiando μ

Cambio μ

6.2 Comparar cambiando la energía

Cambio la energía y separo

CAPITULO

7

Conclusiones

A .

Bibliografía

- [1] Abdul-Majid Wazwaz. *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory*. 01 2009. 1, 3
- [2] K. W. Morton, D. F. Mayers, and D. F. Mayers. *Numerical solution of partial differential equations: an introduction*. Cambridge University Press, Cambridge, 2nd edition, 2005. 1, 3, 14
- [3] Patricia Camarena. La transferencia del conocimiento: ecuaciones diferenciales parciales hacia una cuerda que vibra. 2004. 3
- [4] David L. Russell. Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations: Recent progress and open questions. *SIAM Review*, 20(4):639–739, 1978. 7
- [5] M.E. Van Valkenburg. *Network Analysis 3rd Edition*. Pearson Education, 2006. 13
- [6] Stefan Bilbao. *Numerical Sound Synthesis: Finite Difference Schemes and Simulation in Musical Acoustics*. Wiley Publishing, 2009. 16
- [7] A. Quarteroni. *Numerical Models for Differential Problems*. MS&A. Springer Milan, 2010.
- [8] Juan Carlos Solares Carreño and Rosalba Mendoza Suárez. Acerca de algunas soluciones de ciertas ecuaciones de onda. 2012.
- [9] J. Vankka. *Digital Synthesizers and Transmitters for Software Radio*. Springer US, 2005.

BIBLIOGRAFÍA

- [10] Enrique Zuazua. Optimal and approximate control of finite-difference approximation schemes for the 1d wave equation. *Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni. Serie VII*, 2004.
- [11] Bo Strand. Summation by parts for finite difference approximations for d/dx . *Journal of Computational Physics*, 110(1):47–67, 1994.