

# Simulación numérica de ecuaciones de onda.

Ana Cuevas de Cózar

Julio 2023

Tutores: Dr.José Rafael Rodríguez Galvan  
D. Daniel Acosta Soba



- 1 Conceptos previos
  - Espacios de Lebesgue
  - Producto escalar en  $L^2$
- 2 Definición de la ecuación de onda
  - La ecuación de onda unidimensional
  - Soluciones de tipo onda viajera
  - La energía en la ecuación de onda
- 3 Resolución numérica de la ecuación de onda
  - Método de las diferencias finitas
  - Dominio de dependencia
  - Consistencia
  - Análisis de Von Neumann
  - Resolución numérica para soluciones de tipo viajero
  - Ley de energía discreta
- 4 Modelado en Python y comparativa
  - Archivos .wav y síntesis de sonido
  - Aproximaciones
  - Soluciones de tipo onda viajera
  - Comparativa variando el valor de  $\mu$
- 5 Bibliografía



# Sección 1 | Conceptos previos



# Espacios de Lebesgue

## Definición: Espacio de Lebesgue

Para  $E \subset \mathbb{R}^n$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , medible y  $p \in \mathbb{R}$  tal que  $1 \leq p < \infty$ , definimos el Espacio de Lebesgue  $L^p(E)$ , como la colección de funciones medibles, en la que se realiza una identificación entre las funciones que son iguales en casi todo, que son  $p$ -integrables, es decir, las funciones  $f$  para las cuales

$$\|f\|_{L^p(E)} = \left( \int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$



# Espacios de Lebesgue

## Definición: Espacio de Lebesgue

Para  $E \subset \mathbb{R}^n$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , medible y  $p \in \mathbb{R}$  tal que  $1 \leq p < \infty$ , definimos el Espacio de Lebesgue  $L^p(E)$ , como la colección de funciones medibles, en la que se realiza una identificación entre las funciones que son iguales en casi todo, que son  $p$ -integrables, es decir, las funciones  $f$  para las cuales

$$\|f\|_{L^p(E)} = \left( \int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

## Definición: Espacio de Banach

Un espacio de Banach  $(E, \|\cdot\|)$  es un espacio vectorial normado, en el que  $E$  es completo bajo la métrica inducida por la norma  $\|\cdot\|$ . Es decir, cada serie de Cauchy en  $E$  es una serie convergente.

## Definición: Producto escalar o interno

Sea  $E$  un espacio vectorial. Una función  $(\cdot, \cdot) : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  se llamará producto escalar o interno, si para todo  $u, v, w \in E$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  escalares, se satisfacen las siguientes propiedades:

- Linealidad:  $(\alpha u + \beta v, w) = \alpha(u, w) + \beta(v, w)$  .
- Simetría:  $(u, v) = (v, u)$  .
- Positividad:  $(u, u) \geq 0$  , y  $(u, u) = 0$  si y solo si  $u = 0$  .



## Definición: Producto escalar o interno

Sea  $E$  un espacio vectorial. Una función  $(\cdot, \cdot) : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  se llamará producto escalar o interno, si para todo  $u, v, w \in E$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  escalares, se satisfacen las siguientes propiedades:

- Linealidad:  $(\alpha u + \beta v, w) = \alpha(u, w) + \beta(v, w)$  .
- Simetría:  $(u, v) = (v, u)$  .
- Positividad:  $(u, u) \geq 0$  , y  $(u, u) = 0$  si y solo si  $u = 0$  .

## Definición: Espacio de Hilbert

Un espacio de Banach  $E$ , se llama de Hilbert, si tiene un producto escalar asociado y es completo bajo su métrica.



# Producto escalar en $L^2$

## Definición: Producto escalar en $L^2$

Sean  $f$  y  $g$  dos funciones definidas en  $E$ , definimos el producto escalar sobre  $L^2(E)$  de ellas como:

$$\langle f, g \rangle_{L^2(E)} = \int_E f(x)g(x)dx.$$



# Producto escalar en $L^2$

## Definición: Producto escalar en $L^2$

Sean  $f$  y  $g$  dos funciones definidas en  $E$ , definimos el producto escalar sobre  $L^2(E)$  de ellas como:

$$\langle f, g \rangle_{L^2(E)} = \int_E f(x)g(x)dx.$$

Para funciones que dependen de más de una variable, como por ejemplo del espacio y el tiempo,  $u(x, t)$ :

$$\langle u_1(\cdot, t), u_2(\cdot, t) \rangle_{L^2(E)} = \int_E u_1(x, t)u_2(x, t)dx,$$

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(E)} = \sqrt{\langle u(x, t), u(x, t) \rangle_{L^2(E)}}.$$



## Definición: Producto escalar en dominios discretos

Sean  $u$  y  $w$  dos funciones definidas en nuestro malla y sea  $D = \{x_1, \dots, x_{m-1}\}$ . Fijando un instante temporal  $t_r$ , definimos el producto escalar sobre  $\mathbb{R}^{m-1}$  como:

$$(u(\cdot, t_r), w(\cdot, t_r))_D = \sum_{j=1}^{m-1} h u(x_j, t_r) w(x_j, t_r),$$

Para este tipo de casos usaremos la siguiente notación:

$$(u_{\cdot, r}, w_{\cdot, r})_D = \sum_{j=1}^{m-1} h u_{j, r} w_{j, r}. \quad (1)$$

La norma asociada a este producto escalar es:  $\|u\|_D = \sqrt{(u, u)_D} \geq 0$ .



## Sección 2 | Definición de la ecuación de onda



## Definición de la ecuación de onda

Denotamos a la función  $u(x, t)$  como  $u$ .

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = f, \quad \Omega \times [0, +\infty),$$

donde  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f$  es una función de valores reales,  $c > 0$  es una constante de propagación y el operador

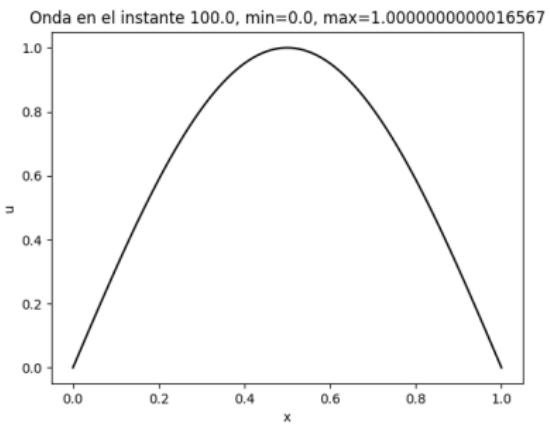
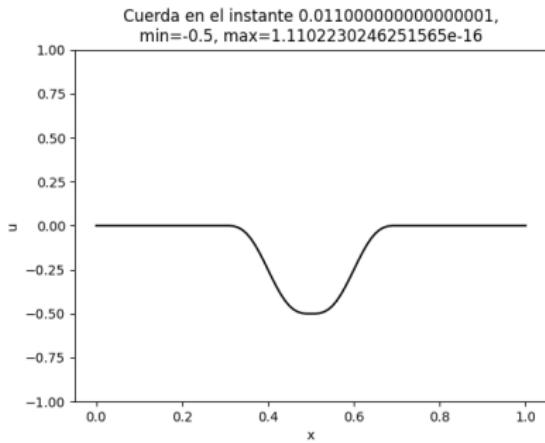
$$\Delta u = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2},$$

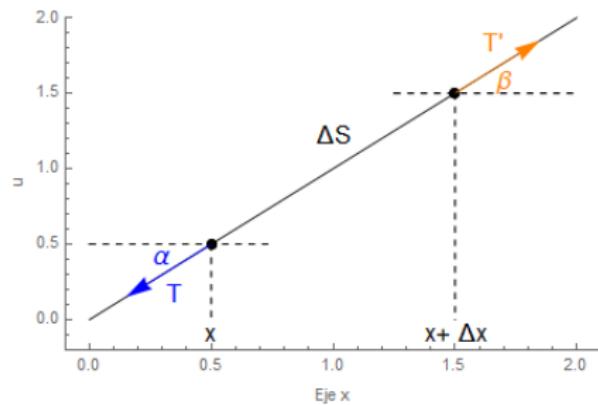
es conocido como el laplaciano.



# La ecuación de onda unidimensional

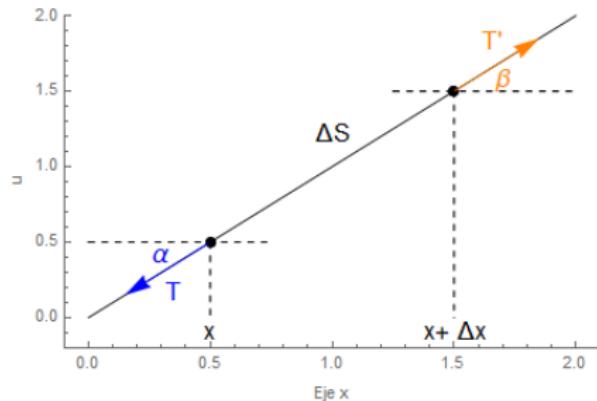
Posiciones posibles de la cuerda:





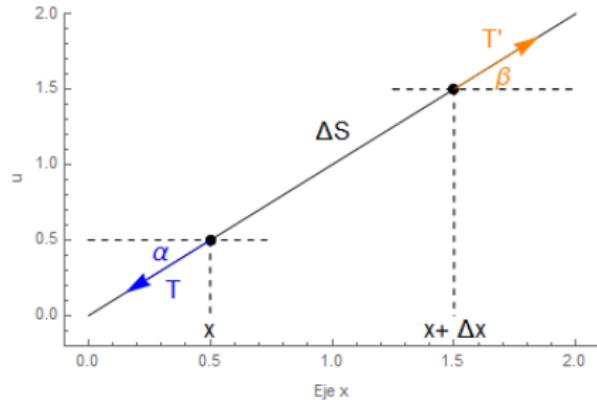
$$T_y = -F_T \operatorname{sen}(\alpha),$$

$$T'_y = F_T \operatorname{sen}(\beta).$$



$$T_y = -F_T \sin(\alpha),$$

$$T'_v = F_T \operatorname{sen}(\beta).$$



## Aproximando

$$\operatorname{sen}(\alpha) \approx \operatorname{tan}(\alpha) \text{ y } \operatorname{sen}(\beta) \approx \operatorname{tan}(\beta)$$

obtenemos:

$$F = F_T(\tan(\beta) - \tan(\alpha)).$$



$$F = F_T(u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)).$$



$$F = F_T(u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)).$$

Masa de la cuerda:  $\rho_I \Delta S$ . Aceleración  $u_{tt}(x, t)$ .

$$u_{tt}(x, t) = \frac{F_T}{\rho_I} \frac{u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)}{\Delta x}.$$

Tomando límite cuando  $\Delta x \rightarrow 0$  y  $c^2 = \frac{F_T}{\rho_I}$ :

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad \text{en } (0, L) \times (0, T). \tag{2}$$



Esquema completo:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad (x, t) \in (0, L) \times (0, T),$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in (0, L),$$

$$u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in (0, L),$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \in (0, T).$$

## Clasificación de las EDP

Una ecuación lineal de segundo orden en forma estándar sería como sigue:

$$Au_{tt} + Bu_{tx} + Cu_{xx} + Du_t + Eu_x + Fu = G,$$

### Definición: Clasificación de las EDP de segundo orden

Si en todos los puntos  $(x, t)$  de una región  $W \subset \mathbb{R}^2$  se cumple que:

- $B^2(x, t) - 4A(x, t)C(x, t) > 0$ , entonces la EDP se dice hiperbólica.
- $B^2(x, t) - 4A(x, t)C(x, t) = 0$ , entonces la EDP se dice parabólica.
- $B^2(x, t) - 4A(x, t)C(x, t) < 0$ , entonces la EDP se dice elíptica.



## Clasificación de las EDP

Una ecuación lineal de segundo orden en forma estándar sería como sigue:

$$Au_{tt} + Bu_{tx} + Cu_{xx} + Du_t + Eu_x + Fu = G,$$

### Definición: Clasificación de las EDP de segundo orden

Si en todos los puntos  $(x, t)$  de una región  $W \subset \mathbb{R}^2$  se cumple que:

- $B^2(x, t) - 4A(x, t)C(x, t) > 0$ , entonces la EDP se dice hiperbólica.
- $B^2(x, t) - 4A(x, t)C(x, t) = 0$ , entonces la EDP se dice parabólica.
- $B^2(x, t) - 4A(x, t)C(x, t) < 0$ , entonces la EDP se dice elíptica.

Para la ecuación de onda, tenemos  $B^2 - 4AC = 4c^2 > 0$ .

La ecuación es hiperbólica.



## Soluciones de tipo onda viajera

La ecuación admite la siguiente solución de tipo onda viajera:

$$u(x, t) = p_+(x - ct) + p_-(x + ct), \quad (3)$$

## Soluciones de tipo onda viajera

La ecuación admite la siguiente solución de tipo onda viajera:

$$u(x, t) = p_+(x - ct) + p_-(x + ct), \quad (3)$$

Utilizando la condición  $u(x, 0) = f(x)$ , para  $x \in (0, L)$ ,

$$f(x) = u(x, 0) = p_+(x) + p_-(x),$$

derivando respecto a  $x$ ,

$$f'(x) = p_{+x}(x) + p_{-x}(x). \quad (4)$$

La ecuación admite la siguiente solución de tipo onda viajera:

$$u(x, t) = p_+(x - ct) + p_-(x + ct), \quad (5)$$



La ecuación admite la siguiente solución de tipo onda viajera:

$$u(x, t) = p_+(x - ct) + p_-(x + ct), \quad (5)$$

Derivamos la ecuación (5),

$$u_t = \frac{\partial}{\partial t} (p_+(x - ct) + p_-(x + ct)) = cp'_+(x - ct) - cp'_-(x + ct),$$

sustituyendo la condición  $u_t(x, 0) = g(x)$  para  $x \in (0, L)$ ,

$$g(x) = u_t(x, 0) = -cp_+(x) + cp_-(x), \quad (6)$$



De las igualdades (4) y (6) se sigue:

$$p'_-(x) = \frac{1}{2}f'(x) + \frac{1}{2c}g(x), \quad \text{y} \quad p'_+(x) = \frac{1}{2}f'(x) - \frac{1}{2c}g(x).$$

De las igualdades (4) y (6) se sigue:

$$p'_-(x) = \frac{1}{2}f'(x) + \frac{1}{2c}g(x), \quad \text{y} \quad p'_+(x) = \frac{1}{2}f'(x) - \frac{1}{2c}g(x).$$

Integrando entre 0 y  $x + ct$  y 0 y  $x - ct$  respectivamente,

$$p_-(x + ct) - p_-(0) = \frac{1}{2}(f(x + ct) - f(0)) + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} g(s)ds + A,$$

$$p_+(x - ct) - p_-(0) = \frac{1}{2}(f(x - ct) - f(0)) - \frac{1}{2c} \int_0^{x-ct} g(s)ds + B.$$



$$p_-(x + ct) = \frac{1}{2}f(x + ct) + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} g(s)ds,$$
$$p_+(x - ct) = \frac{1}{2}f(x - ct) - \frac{1}{2c} \int_0^{x-ct} g(s)ds,$$

$$p_-(x + ct) = \frac{1}{2}f(x + ct) + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} g(s)ds,$$

$$p_+(x - ct) = \frac{1}{2}f(x - ct) - \frac{1}{2c} \int_0^{x-ct} g(s)ds,$$

La solución del problema de contorno es la siguiente:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds. \quad (7)$$

# La energía en la ecuación de onda

$$\langle u_t, u_{tt} \rangle_{L^2(\Omega)} = c^2 \langle u_t, u_{xx} \rangle_{L^2(\Omega)}. \quad (8)$$

Tendremos que ponerlo de la forma  $\frac{\partial}{\partial t} (\cdot)$ .



# La energía en la ecuación de onda

$$\langle u_t, u_{tt} \rangle_{L^2(\Omega)} = c^2 \langle u_t, u_{xx} \rangle_{L^2(\Omega)}. \quad (8)$$

Tendremos que ponerlo de la forma  $\frac{\partial}{\partial t} (\cdot)$ .

$$\begin{aligned} 0 &= \langle u_t, u_{tt} \rangle_{L^2(\Omega)} - c^2 \langle u_t, u_{xx} \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= \int_0^L u_{tt} u_t dx + c^2 \left( \int_0^L u_{tx} u_x dx - u_t u_x \Big|_0^L \right) \end{aligned} \quad (9)$$



# La energía en la ecuación de onda

$$\langle u_t, u_{tt} \rangle_{L^2(\Omega)} = c^2 \langle u_t, u_{xx} \rangle_{L^2(\Omega)}. \quad (8)$$

Tendremos que ponerlo de la forma  $\frac{\partial}{\partial t} (\cdot)$ .

$$\begin{aligned} 0 &= \langle u_t, u_{tt} \rangle_{L^2(\Omega)} - c^2 \langle u_t, u_{xx} \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= \int_0^L u_{tt} u_t dx + c^2 \left( \int_0^L u_{tx} u_x dx - u_t u_x \Big|_0^L \right) \end{aligned} \quad (9)$$

Utilizando las condiciones de contorno:

$$u_t u_x \Big|_0^L = u_t(\cdot, L) u_x(\cdot, L) - u_t(\cdot, 0) u_x(\cdot, 0) = 0.$$



Usando la regla de la cadena obtenemos:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{c^2}{2} \|u_x\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)$$

Usando la regla de la cadena obtenemos:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{c^2}{2} \|u_x\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)$$

Denotamos:

$$E(u) = \frac{1}{2} \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{c^2}{2} \|u_x\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

Usando la regla de la cadena obtenemos:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{c^2}{2} \|u_x\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)$$

Denotamos:

$$E(u) = \frac{1}{2} \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{c^2}{2} \|u_x\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E(u) = 0.$$

Satisface la ley de conservación de la energía.

## Sección 3 | Resolución numérica de la ecuación de onda



# Mallado

## Definición: Mallado

Sea  $[a, b] \times [c, d]$  con  $b \geq a, d \geq c$  y sean  $n, m \in \mathbb{N}$ . Definimos  $h$  como tamaño del mallado en espacio y el paso de tiempo  $k$ , de forma que los puntos de nuestro mallado serán:

$$(x, t)_{j,r} = (x_j, t_r), \quad \text{donde}$$

$$\begin{aligned} x_j &= jh && \text{para } j = 0, 1, \dots, m, \\ t_r &= rk && \text{para } r = 0, 1, \dots, n. \end{aligned}$$



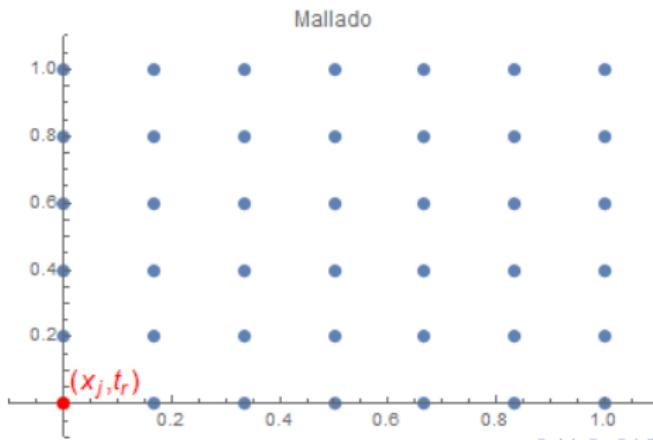
# Mallado

## Definición: Mallado

Sea  $[a, b] \times [c, d]$  con  $b \geq a, d \geq c$  y sean  $n, m \in \mathbb{N}$ . Definimos  $h$  como tamaño del mallado en espacio y el paso de tiempo  $k$ , de forma que los puntos de nuestro mallado serán:

$$(x, t)_{j,r} = (x_j, t_r), \quad \text{donde}$$

$$\begin{aligned} x_j &= jh && \text{para } j = 0, 1, \dots, m, \\ t_r &= rk && \text{para } r = 0, 1, \dots, n. \end{aligned}$$



Definimos el mallado:

$$x_j = jh \quad \text{para} \quad j = 0, \dots, m,$$

con  $x_0 = 0$ ,  $x_m = L$ .

Definimos el mallado:

$$x_j = jh \quad \text{para} \quad j = 0, \dots, m,$$

con  $x_0 = 0$ ,  $x_m = L$ .

$$t_r = rk \quad \text{para} \quad r = 0, 1, \dots, n,$$

con  $t_0 = 0$ ,  $t_n = T$ .

Definimos el mallado:

$$x_j = jh \quad \text{para} \quad j = 0, \dots, m,$$

con  $x_0 = 0$ ,  $x_m = L$ .

$$t_r = rk \quad \text{para} \quad r = 0, 1, \dots, n,$$

con  $t_0 = 0$ ,  $t_n = T$ .

La ecuación evaluada en los puntos del mallado sería:

$$u_{tt}(x_j, t_r) = c^2 u_{xx}(x_j, t_r).$$

# Método de las diferencias finitas

Aproximaremos la solución  $u$ , en estos puntos, llamándola  $u(x_j, t_r) \approx u_{j,r}$ . Utilizando una aproximación centrada :

$$u_{xx}(x_j, t_r) \approx \frac{u_{j+1,r} - 2u_{j,r} + u_{j-1,r}}{h^2},$$

$$u_{tt}(x_j, t_r) \approx \frac{u_{j,r+1} - 2u_{j,r} + u_{j,r-1}}{k^2}.$$

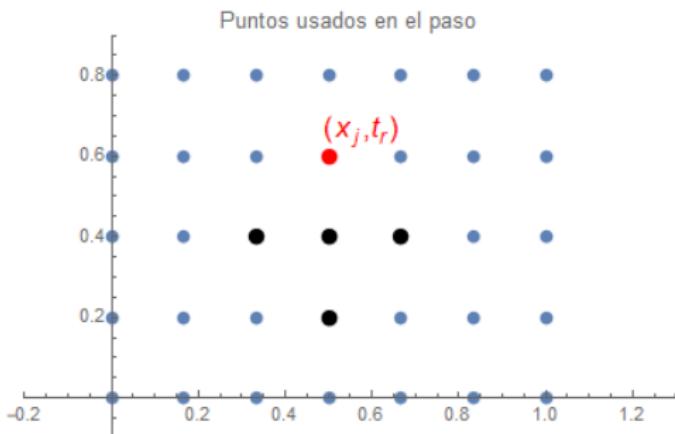


## Método de las diferencias finitas

Aproximaremos la solución  $u$ , en estos puntos, llamándola  $u(x_j, t_r) \approx u_{j,r}$ . Utilizando una aproximación centrada :

$$u_{xx}(x_j, t_r) \approx \frac{u_{j+1,r} - 2u_{j,r} + u_{j-1,r}}{h^2},$$

$$u_{tt}(x_j, t_r) \approx \frac{u_{j,r+1} - 2u_{j,r} + u_{j,r-1}}{k^2}.$$



Definiendo  $\mu = \frac{ck}{h}$ .

$$u_{j,r+1} = \mu^2(u_{j+1,r} + u_{j-1,r}) + 2(1 - \mu^2)u_{j,r} - u_{j,r-1}.$$

Definiendo  $\mu = \frac{ck}{h}$ .

$$u_{j,r+1} = \mu^2(u_{j+1,r} + u_{j-1,r}) + 2(1 - \mu^2)u_{j,r} - u_{j,r-1}.$$

Añadiendo las condiciones de contorno:

$$u_{j,r+1} = \mu^2(u_{j+1,r} + u_{j-1,r}) + 2(1 - \mu^2)u_{j,r} - u_{j,r-1},$$

para  $j = 1, \dots, m-1$  y  $r = 1, \dots, n-1$ ,

$$u_{j,0} = f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, m-1,$$

$$u_{j,1} = u_{j,0} + kg(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, m-1,$$

$$u_{0,r} = u_{m,r} = 0, \quad r = 0, 1, \dots, n-1.$$

# Dominio de dependencia

## Definición: Dominio de dependencia

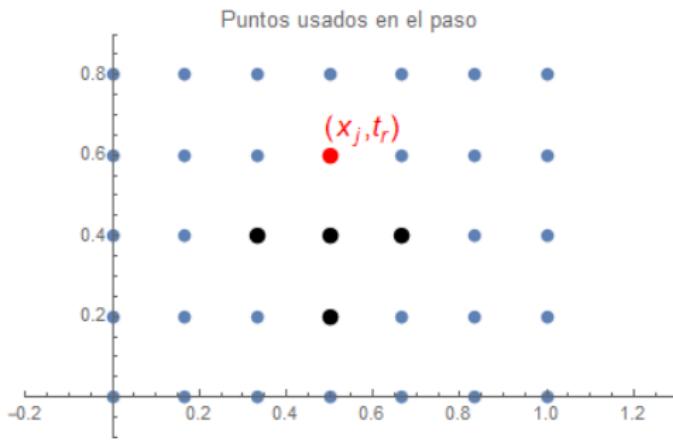
Sea  $u(x, t)$  la función solución de nuestro modelo, definida sobre un conjunto  $(0, L) \times (0, T)$ . El dominio de dependencia de  $u$  en un punto arbitrario  $(x_j, t_r)$ , es el conjunto de puntos de  $(0, L)$  necesarios para dar la solución de  $u$  en  $(x_j, t_r)$ .



# Dominio de dependencia

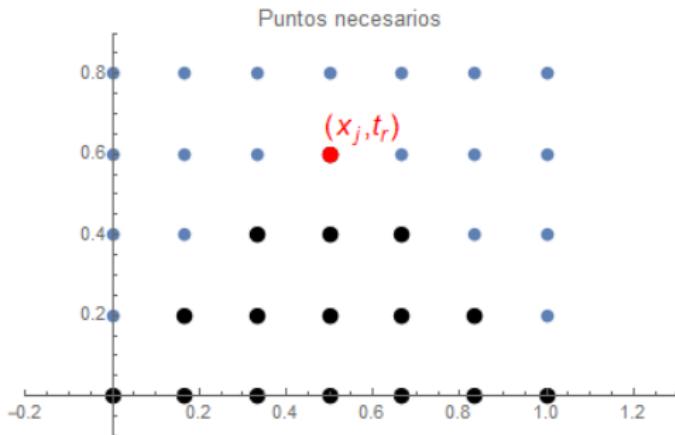
## Definición: Dominio de dependencia

Sea  $u(x, t)$  la función solución de nuestro modelo, definida sobre un conjunto  $(0, L) \times (0, T)$ . El dominio de dependencia de  $u$  en un punto arbitrario  $(x_j, t_r)$ , es el conjunto de puntos de  $(0, L)$  necesarios para dar la solución de  $u$  en  $(x_j, t_r)$ .

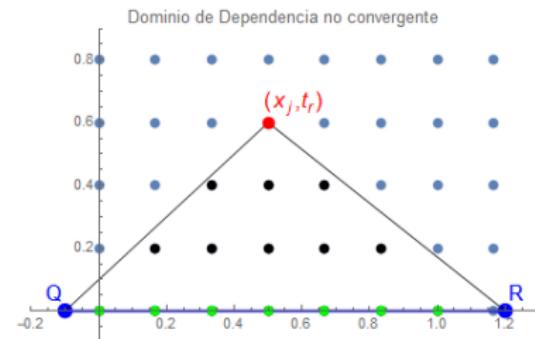
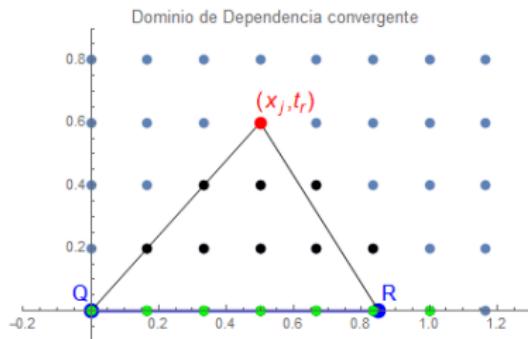


## Definición: Dominio de dependencia

Sea  $u(x, t)$  la función solución de nuestro modelo, definida sobre un conjunto  $(0, L) \times (0, T)$ . El dominio de dependencia de  $u$  en un punto arbitrario  $(x_j, t_r)$ , es el conjunto de puntos de  $(0, L)$  necesarios para dar la solución de  $u$  en  $(x_j, t_r)$ .



Que el dominio de dependencia quedase comprendido o no en el interior de los puntos de  $(0, 1)$  que utilizamos (coloreados de verde):



# Consistencia

$$\underbrace{\frac{u(j, r+1) - 2u(j, r) + u(j, r-1)}{k^2} - c^2 \frac{u(j+1, r) - 2u(j, r) + u(j-1, r)}{h^2}}_{(1)} = (2)$$



# Consistencia

$$\underbrace{\frac{u(j, r+1) - 2u(j, r) + u(j, r-1)}{k^2}}_{(1)} - c^2 \underbrace{\frac{u(j+1, r) - 2u(j, r) + u(j-1, r)}{h^2}}_{(2)} =$$

Desarrollando las series de Taylor en (1) y (2):

$$(1) = \frac{u(j, r+1) - 2u(j, r) + u(j, r-1)}{k^2} = u_{tt} + 2\frac{k^2 u_{4t}}{4!} + 2\frac{k^4 u_{6t}}{6!} + O(h^6),$$

$$(2) = \frac{u(j+1, r) - 2u(j, r) + u(j-1, r)}{h^2} = u_{xx} + 2\frac{h^2 u_{4x}}{4!} + 2\frac{h^4 u_{6x}}{6!} + O(k^6).$$



# Consistencia

$$\underbrace{\frac{u(j, r+1) - 2u(j, r) + u(j, r-1)}{k^2}}_{(1)} - c^2 \underbrace{\frac{u(j+1, r) - 2u(j, r) + u(j-1, r)}{h^2}}_{(2)} =$$

Desarrollando las series de Taylor en (1) y (2):

$$(1) = \frac{u(j, r+1) - 2u(j, r) + u(j, r-1)}{k^2} = u_{tt} + 2\frac{k^2 u_{4t}}{4!} + 2\frac{k^4 u_{6t}}{6!} + O(h^6),$$

$$(2) = \frac{u(j+1, r) - 2u(j, r) + u(j-1, r)}{h^2} = u_{xx} + 2\frac{h^2 u_{4x}}{4!} + 2\frac{h^4 u_{6x}}{6!} + O(k^6).$$

$$\begin{aligned} T_{h,k}u &:= u_{tt} + 2\frac{k^2 u_{4t}}{4!} + 2\frac{k^4 u_{6t}}{6!} - c^2 u_{xx} - 2c^2 \frac{h^2 u_{4x}}{4!} - 2c^2 \frac{h^4 u_{6x}}{6!} \dots = \\ &= u_{tt} + 2\frac{k^2 u_{4t}}{4!} - c^2 u_{xx} - 2c^2 \frac{h^2 u_{4x}}{4!} + O(k^4) + O(h^4). \end{aligned}$$



De la solución exacta obtenemos  $u_{4x} = \frac{u_{4t}}{c^4}$  y por tanto:

$$\begin{aligned} T_{h,k} u &= u_{tt} + 2\frac{k^2 u_{4t}}{4!} - c^2 u_{xx} - 2c^2 \frac{h^2 u_{4x}}{4!} + O(k^4) + O(h^4) = \\ &= 2\frac{k^2 u_{4t}}{4!} - 2c^2 \frac{h^2 u_{4t}}{4! c^4} + O(k^4) + O(h^4) = \\ &= \frac{2}{4!} \left( k^2 - \frac{h^2}{c^2} \right) u_{4t} + O(k^4) + O(h^4) = \\ &= O(k^2) + O(h^2). \end{aligned}$$

De la solución exacta obtenemos  $u_{4x} = \frac{u_{4t}}{c^4}$  y por tanto:

$$\begin{aligned} T_{h,k} u &= u_{tt} + 2\frac{k^2 u_{4t}}{4!} - c^2 u_{xx} - 2c^2 \frac{h^2 u_{4x}}{4!} + O(k^4) + O(h^4) = \\ &= 2\frac{k^2 u_{4t}}{4!} - 2c^2 \frac{h^2 u_{4t}}{4! c^4} + O(k^4) + O(h^4) = \\ &= \frac{2}{4!} \left( k^2 - \frac{h^2}{c^2} \right) u_{4t} + O(k^4) + O(h^4) = \\ &= O(k^2) + O(h^2). \end{aligned}$$

Así hemos comprobado que el esquema tiene orden de consistencia dos en espacio y en tiempo.



## Análisis de Von Neumann

Relacionamos cada aproximación numérica del esquema con la solución exacta y el error del mismo:

$$u_{j,r} = u(x_j, t_r) + \varepsilon_{j,r}$$



## Análisis de Von Neumann

Relacionamos cada aproximación numérica del esquema con la solución exacta y el error del mismo:

$$u_{j,r} = u(x_j, t_r) + \varepsilon_{j,r}$$

Sustituyéndolo en el sistema:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{u(x_j, t_{r+1}) - 2u(x_j, t_r) + u(x_j, t_{r-1})}{k^2} \right. \\ & \left. - c^2 \frac{u(x_{j+1}, t_r) - 2u(x_j, t_r) + u(x_{j-1}, t_r)}{h^2} \right) + \\ & + \left( \frac{\varepsilon_{j,r+1} - 2\varepsilon_{j,r} + \varepsilon_{j,r-1}}{k^2} - c^2 \frac{\varepsilon_{j+1,r} - 2\varepsilon_{j,r} + \varepsilon_{j-1,r}}{h^2} \right) = 0. \end{aligned}$$



Utilizando el error de tipo onda  $\varepsilon_{j,r} = g^r e^{ij\beta h}$ :



Utilizando el error de tipo onda  $\varepsilon_{j,r} = g^r e^{ij\beta h}$ :

$$g^{r+1} e^{ij\beta h} = \mu^2(g^r e^{i(j+1)\beta h} + g^r e^{i(j-1)\beta h}) + 2(1 - \mu^2)g^r e^{ij\beta h} - g^{r-1} e^{ij\beta h}.$$



Utilizando el error de tipo onda  $\varepsilon_{j,r} = g^r e^{ij\beta h}$ :

$$g^{r+1} e^{ij\beta h} = \mu^2(g^r e^{i(j+1)\beta h} + g^r e^{i(j-1)\beta h}) + 2(1 - \mu^2)g^r e^{ij\beta h} - g^{r-1} e^{ij\beta h}.$$

Realizando manipulaciones obtenemos y denotando

$$A = \left(1 - 2\mu^2 \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)\right):$$

$$\begin{aligned} g &= \frac{2A \pm \sqrt{(-2A)^2 - 4}}{2} = A \pm \sqrt{A^2 - 1} = \\ &= 1 - 2\mu^2 \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) \pm \sqrt{\left(1 - 2\mu^2 \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)\right)^2 - 1}. \end{aligned}$$



Vamos a estudiar cuando  $|g| \leq 1$ :

- Si  $A < -1$ :

La solución  $g = A - \sqrt{A^2 - 1} < -1$  y por lo tanto siempre se da  $|g| > 1$  y el esquema será en cualquier caso inestable.



Vamos a estudiar cuando  $|g| \leq 1$ :

- Si  $A < -1$ :

La solución  $g = A - \sqrt{A^2 - 1} < -1$  y por lo tanto siempre se da  $|g| > 1$  y el esquema será en cualquier caso inestable.

- Si  $-1 \leq A \leq 1$ :

En este caso se tendrá que  $g$  es un número complejo, ya que  $-1 \leq A^2 - 1 \leq 0$ .

$$g = A \pm \sqrt{A^2 - 1} = A \pm \sqrt{1 - A^2}i.$$

Por lo tanto, tomando módulo, ambas soluciones quedarían,

$$|g| = \sqrt{A^2 + \sqrt{1 - A^2}^2} = A^2 + 1 - A^2 = 1,$$

Luego nuestro esquema sería estable.



Veamos que condición se debe imponer sobre  $\mu$  para que se tenga

$$-1 \leq A \leq 1,$$



Veamos que condición se debe imponer sobre  $\mu$  para que se tenga

$$-1 \leq A \leq 1,$$

Centrándonos en  $\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)$ , con esto tenemos

$$0 \leq \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) \leq 1,$$



Veamos que condición se debe imponer sobre  $\mu$  para que se tenga

$$-1 \leq A \leq 1,$$

Centrándonos en  $\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)$ , con esto tenemos

$$0 \leq \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) \leq 1,$$

$$1 \geq 1 - 2\mu^2 \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) \geq 1 - 2\mu^2.$$

Ahora solo necesitamos que  $1 - 2\mu^2 \geq -1$ , para lo cual debe ser

$$2\mu^2 \leq 2,$$

Veamos que condición se debe imponer sobre  $\mu$  para que se tenga

$$-1 \leq A \leq 1,$$

Centrándonos en  $\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)$ , con esto tenemos

$$0 \leq \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) \leq 1,$$

$$1 \geq 1 - 2\mu^2 \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) \geq 1 - 2\mu^2.$$

Ahora solo necesitamos que  $1 - 2\mu^2 \geq -1$ , para lo cual debe ser

$$2\mu^2 \leq 2,$$

$$\mu \leq 1, \text{ (Condición CFL)}$$

# Resolución numérica para soluciones de tipo viajero

$$\begin{aligned}w^+(x_j, t_r) &= p_+(x_j - ct_r), \\w^-(x_j, t_r) &= p_-(x_j + ct_r).\end{aligned}$$

Ahora tendremos que la aproximación de la solución de  $u$  será,

$$u_{j,r} = w_{j,r}^+ + w_{j,r}^- \quad (11)$$



# Resolución numérica para soluciones de tipo viajero

$$\begin{aligned} w^+(x_j, t_r) &= p_+(x_j - ct_r), \\ w^-(x_j, t_r) &= p_-(x_j + ct_r). \end{aligned}$$

Ahora tendremos que la aproximación de la solución de  $u$  será,

$$u_{j,r} = w_{j,r}^+ + w_{j,r}^- \quad (11)$$

$$\begin{aligned} p_-(x_j + ct_r) &= \frac{1}{2}f(x_j + ct_r) + \frac{1}{2c} \int_0^{x_j + ct_r} g(s) \partial s = \\ &= \frac{1}{2}f(x_j + ct_r) + \frac{1}{2c} \int_0^{x_j} g(s) ds + \frac{1}{2c} \int_{x_j}^{x_j + ct_r} g(s) ds. \end{aligned}$$



Usando la regla del trapecio:

$$\begin{aligned}w_{j,r}^- &= \frac{1}{2}f(x_j + ct_r) + \frac{h}{4c} \left( g(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{j-1} g(x_i) + g(x_j) \right) \\&+ \frac{ck}{4c} \left( g(x_j) + 2 \sum_{i=1}^{r-1} g(x_j + ct_i) + g(x_j + ct_r) \right).\end{aligned}$$



Usando la regla del trapecio:

$$\begin{aligned} w_{j,r}^- &= \frac{1}{2}f(x_j + ct_r) + \frac{h}{4c} \left( g(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{j-1} g(x_i) + g(x_j) \right) \\ &\quad + \frac{ck}{4c} \left( g(x_j) + 2 \sum_{i=1}^{r-1} g(x_j + ct_i) + g(x_j + ct_r) \right). \end{aligned}$$

Análogamente para  $p_+(x_j - ct_r)$

$$\begin{aligned} w_{j,r}^+ &= \frac{1}{2}f(x_j + ct_r) + \frac{h}{4c} \left( g(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{j-1} g(x_i) + g(x_j) \right) \\ &\quad - \frac{ck}{4c} \left( g(x_j - ct_r) + 2 \sum_{i=r-1}^1 g(x_j - ct_i) + g(x_j) \right). \end{aligned}$$



# Ley de energía discreta

En caso continuo:

$$\langle u_t(\cdot, t), u_{tt}(\cdot, t) \rangle_{L^2(\Omega)} = c^2 \langle u_t(\cdot, t), u_{xx}(\cdot, t) \rangle_{L^2(\Omega)}.$$



## Ley de energía discreta

En caso continuo:

$$\langle u_t(\cdot, t), u_{tt}(\cdot, t) \rangle_{L^2(\Omega)} = c^2 \langle u_t(\cdot, t), u_{xx}(\cdot, t) \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Definición: Aproximaciones progresivas, regresivas y centradas

Sea  $u$  una aproximación de la solución definida en un mallado.

Definiremos las diferencias aproximadas hacia adelante, atrás o centradas respectivamente, como:

- $\delta_{x+} u_{j,r} = \frac{1}{h} (u_{j+1,r} - u_{j,r})$ ,
- $\delta_{x-} u_{j,r} = \frac{1}{h} (u_{j,r} - u_{j-1,r})$ ,
- $\delta_x u_{j,r} = \frac{1}{2h} (u_{j+1,r} - u_{j-1,r})$ .

Podemos hacer lo mismo para el eje temporal, denotándolas como  
 $\delta_{t+}, \delta_{t-}, \delta_t$

## Definición: Aproximación centrada de la derivada de segundo orden

Sea  $u$  una aproximación de la solución definida en un mallado. Definimos la aproximación centrada de la derivada de segundo orden como:

$$\begin{aligned}\delta_{xx} u_{j,r} &= \frac{1}{h^2} (e_{x+} u_{j,r} - 2u_{j,r} + e_{x-} u_{j,r}) = \\ &= \frac{1}{h^2} (u_{j+1,r} - 2u_{j,r} + u_{j-1,r})\end{aligned}$$

Al igual que la definición anterior esto será análogo en el eje temporal.



## Definición: Aproximación centrada de la derivada de segundo orden

Sea  $u$  una aproximación de la solución definida en un mallado. Definimos la aproximación centrada de la derivada de segundo orden como:

$$\begin{aligned}\delta_{xx} u_{j,r} &= \frac{1}{h^2} (e_{x+} u_{j,r} - 2u_{j,r} + e_{x-} u_{j,r}) = \\ &= \frac{1}{h^2} (u_{j+1,r} - 2u_{j,r} + u_{j-1,r})\end{aligned}$$

Al igual que la definición anterior esto será análogo en el eje temporal.

En caso discreto, tomando  $D = \{x_0, x_1, \dots, x_{m-1}\}$ :

$$(\delta_{tt} u, \delta_t u)_D = c^2 (\delta_{xx} u, \delta_t u)_D .$$



De la definición anterior:

$$\begin{aligned} & (\delta_{xx} u_{\cdot, r}, \delta_t u_{\cdot, r})_D = (\delta_{x^+ x^-} u_{\cdot, r}, \delta_t u_{\cdot, r})_D, \\ & = -(\delta_{x^-} u_{\cdot, r}, \delta_{x^-} \delta_t u_{\cdot, r})_D - (\delta_t u_{0, r})(\delta_{x^+} u_{-1, r}) + (\delta_t u_{m, r})(\delta_{x^+} u_{m-1, r}). \end{aligned}$$



De la definición anterior:

$$\begin{aligned}(\delta_{xx} u_{\cdot, r}, \delta_t u_{\cdot, r})_D &= (\delta_{x^+ x^-} u_{\cdot, r}, \delta_t u_{\cdot, r})_D, \\&= -(\delta_{x^-} u_{\cdot, r}, \delta_{x^-} \delta_t u_{\cdot, r})_D - (\delta_t u_{0, r})(\delta_{x^+} u_{-1, r}) + (\delta_t u_{m, r})(\delta_{x^+} u_{m-1, r}).\end{aligned}$$

Estos últimos términos serán 0, ya que,

$$\delta_t u_{0, r} = \frac{1}{k} (u_{0, r+1} - u_{0, r-1}) = 0,$$

$$\delta_t u_{m, r} = \frac{1}{k} (u_{m, r+1} - u_{m, r-1}) = 0.$$



De la definición anterior:

$$\begin{aligned} (\delta_{xx} u_{\cdot, r}, \delta_t u_{\cdot, r})_D &= (\delta_{x^+ x^-} u_{\cdot, r}, \delta_t u_{\cdot, r})_D, \\ &= -(\delta_{x^-} u_{\cdot, r}, \delta_{x^-} \delta_t u_{\cdot, r})_D - (\delta_t u_{0, r})(\delta_{x^+} u_{-1, r}) + (\delta_t u_{m, r})(\delta_{x^+} u_{m-1, r}). \end{aligned}$$

Estos últimos términos serán 0, ya que,

$$\delta_t u_{0, r} = \frac{1}{k} (u_{0, r+1} - u_{0, r-1}) = 0,$$

$$\delta_t u_{m, r} = \frac{1}{k} (u_{m, r+1} - u_{m, r-1}) = 0.$$

El funcional de energía discreto asociado a nuestro esquema conserva la energía.

$$\delta_t E(u_{j, r}) = \delta_t (||\delta_t u_{\cdot, r}||_D^2 + ||\delta_{x^-} u_{\cdot, r}||_D^2) = 0.$$

## Sección 4 | Modelado en Python y comparativa



# Síntesis de sonido

Síntesis de modelado físico.

## Síntesis de sonido

Síntesis de modelado físico.

$$u_{j,r+1} = \mu^2(u_{j+1,r} + u_{j-1,r}) + 2(1 - \mu^2)u_{j,r} - u_{j,r-1},$$

para  $j = 1, \dots, m-1$  y  $r = 1, \dots, n-1$ ,

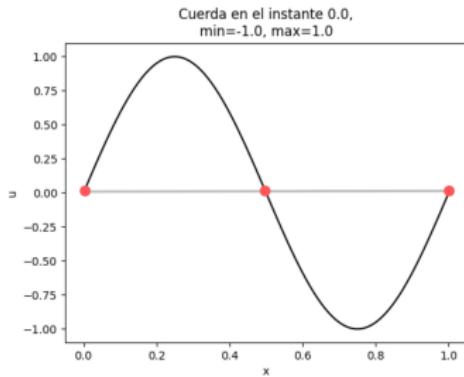
$$u_{j,0} = f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, m-1,$$

$$u_{j,1} = u_{j,0} + kg(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, m-1,$$

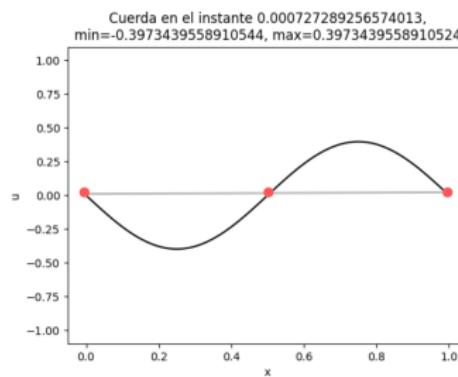
$$u_{0,r} = u_{m,r} = 0, \quad r = 0, 1, \dots, n-1.$$

De la definición de los parámetros se obtiene  $c = \lambda f$ .

De la definición de los parámetros se obtiene  $c = \lambda f$ . Elegimos  $f(x) = \sin(2\pi x)$ ,  $g(x) = 0$ , y vemos que  $N = 3$ :



**Figura:** Posición inicial, de la cuerda, los puntos rojos se corresponden con los nodos.



**Figura:** Imagen realizada con  $m = 100$ ,  $h = \frac{1}{100}$ ,  $\mu = 1$  y  $k = \frac{1}{44000}$ .



Para una onda estacionaria  $\lambda = \frac{2L}{N-1}$ . Eligiendo  $L = 1$ .

Sabiendo que,

$$\lambda = \frac{2}{2} = 1,$$

Para obtener una frecuencia de  $f = 440\text{Hz}$ , tendremos que elegir

$$c = \lambda f = 1 * 440 = 440.$$

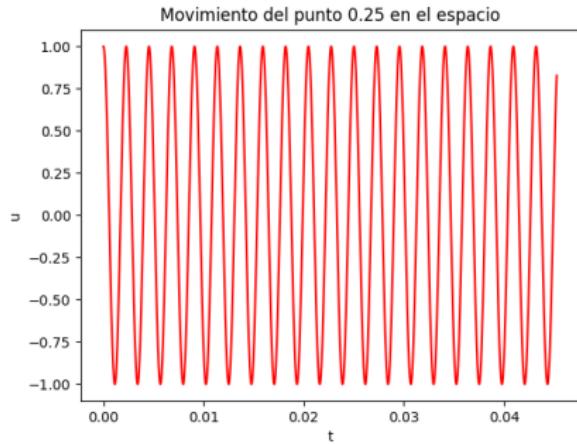
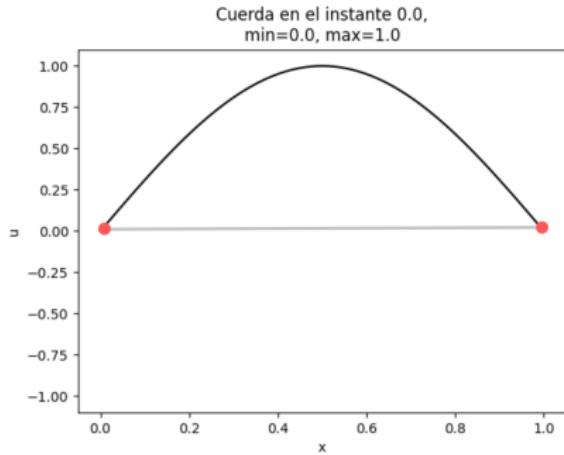


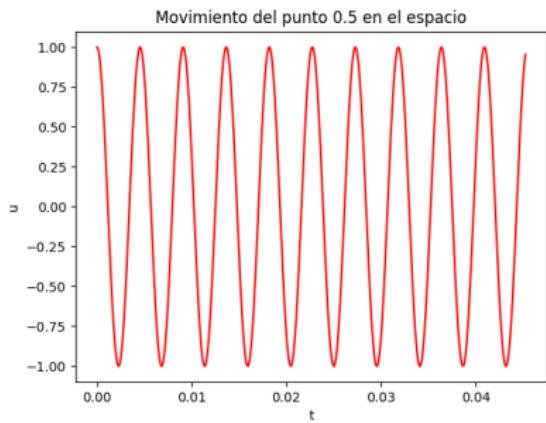
Figura: Archivo figura5-3.wav



Si utilizásemos  $c = 440$  para  $f(x) = \sin(\pi x)$ .  
 $N = 2$  y  $\lambda = \frac{2*L}{N-1} = 2$ , se sigue  $f = \frac{440}{2} = 220\text{Hz}$ .



**Figura:** Número de nodos de  
 $f(x) = \sin(\pi x)$



**Figura:** Oscilaciones en el punto  
 $x = 0,5$ , figura5-5.wav adjunto.



Este vector tendrá que contener datos entre  $-1$  y  $1$ . Para ello, hemos probado diferentes técnicas:

- Suma de las ondas producida en cada punto espacial.

Este vector tendrá que contener datos entre  $-1$  y  $1$ . Para ello, hemos probado diferentes técnicas:

- Suma de las ondas producida en cada punto espacial.
- Uso de canales.

Este vector tendrá que contener datos entre  $-1$  y  $1$ . Para ello, hemos probado diferentes técnicas:

- Suma de las ondas producida en cada punto espacial.
- Uso de canales.
- Elección de un punto de la cuerda.

# Aproximaciones

Volviendo a  $f(x) = \sin(\pi x)$ .

Para  $f(x)$  tipo Struck,  $g(x) = 0$ .

$m = 100$ ,  $m = 300$  y  $m = 400$ , siempre con  $L = 1$   $\mu = 1$  y  $c = 440$ .

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ 4x - 1 & \text{si } \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2}, \\ 3 - 4x & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{4}, \\ 0 & \text{si } \frac{3}{4} < x \leq 1. \end{cases}$$



Tomando como parámetros  $L = 1$ ,  $\mu = 1$  y  $c = 440$ ,  $m = 100$ ,  $h = \frac{1}{100}$  y  $k = \frac{1}{44000}$ .



Tomando como parámetros  $L = 1$ ,  $\mu = 1$  y  $c = 440$ ,  $m = 300$ ,  $h = \frac{1}{300}$  y  $k = \frac{1}{132000}$ .



La forma de la onda en cada punto no es tan regular como en  $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$ :

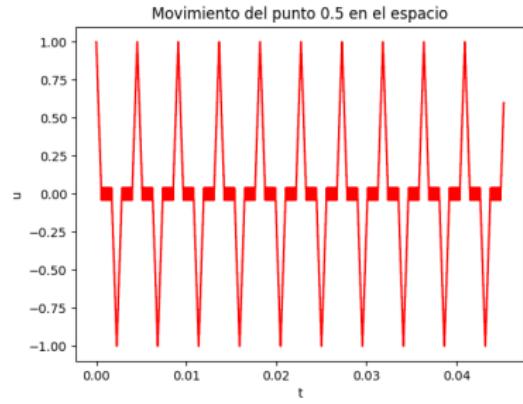
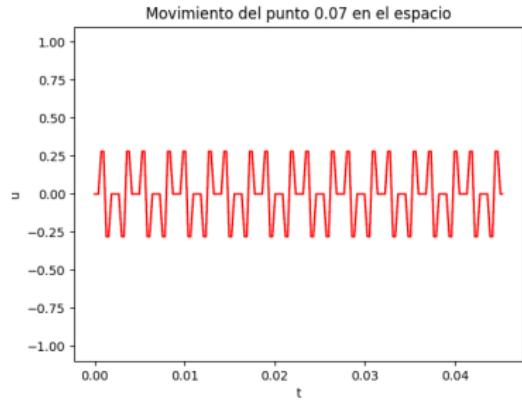


Figura: Archivo figura5-18.wav

Figura: Archivo figura5-19.wav



Para  $f(x) = 0$ ,  $g(x)$  tipo Struck:

La definición de la función  $g$   
es la siguiente:

$$g(x) = \begin{cases} 50000x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{10}, \\ 50000(0,2 - x) & \text{si } \frac{1}{10} < x \leq \frac{1}{5}, \\ 0 & \text{si } \frac{1}{5} < x \leq 1. \end{cases}$$

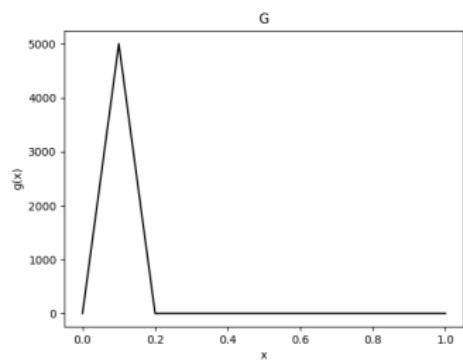


Figura: Velocidad inicial.



Tomando como parámetros  $L = 1$ ,  $\mu = 1$  y  $c = 440$ ,  $m = 200$ ,  $h = \frac{1}{200}$  y  $k = \frac{1}{88000}$ .



Movimiento del punto  $x = 0,48$ , en el tiempo.

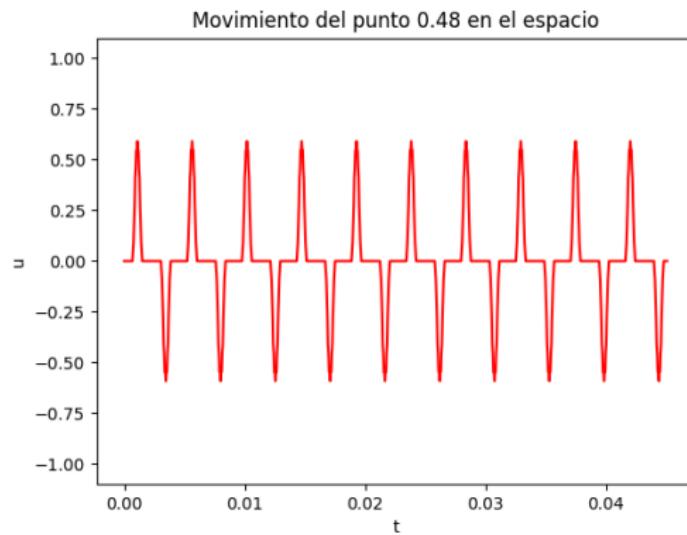


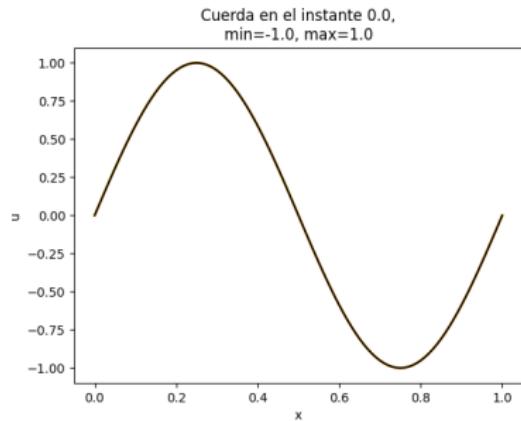
Figura: Archivo figura5-24.wav



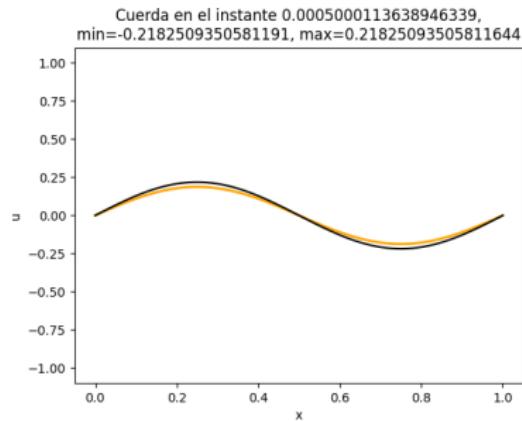
## Soluciones de tipo onda viajera

Utilizando los parámetros  $c = 440$ ,  $L = 1$ ,  $\mu = 1$ ,  $m = 100$  y por lo tanto,  $h = \frac{1}{100}$  y  $k = \frac{1}{44000}$  de nuevo y  $f(x) = \sin(2\pi x)$ ,  $g(x) = 0$ .

Al pasar el tiempo comienzan a propagarse los errores.



**Figura:** La solución exacta, coloreada de naranja, y la aproximación, coloreada de negro, se superponen.



**Figura:** Solución exacta coloreada de naranja y aproximación coloreada de negro.



$$\mu \ll 1$$

Cuando elegimos  $\mu$  mucho menor que 1, es decir, alejándonos de la solución óptima, poco a poco comienzan a propagarse los errores.

Comparemos la solución con  $\mu = 1$ , para  $f(x)$  de tipo Struck, es decir,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ 4x - 1 & \text{si } \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2}, \\ 3 - 4x & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{4}, \\ 0 & \text{si } \frac{3}{4} < x \leq 1. \end{cases}$$



Con los parámetros  $L = 1$ ,  $c = 440$ ,  $m = 100$  y  $h = \frac{1}{100}$ , compararemos estas soluciones.



Con los parámetros  $L = 1$ ,  $c = 440$ ,  $m = 100$  y  $h = \frac{1}{100}$ , compararemos estas soluciones.

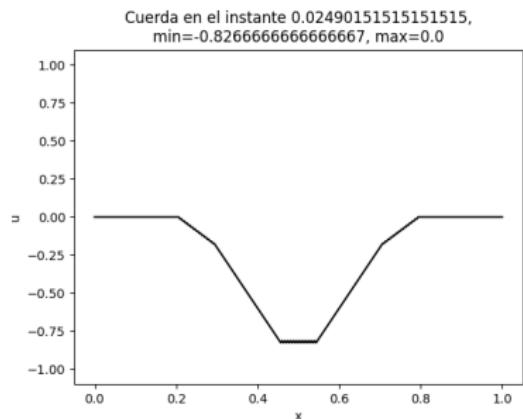
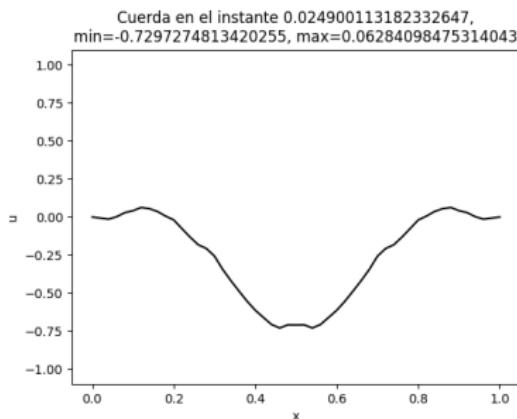


Figura: Solución para  $\mu = 1$  y  
 $k = \frac{1}{44000}$



**Figura:** Solución para  $\mu = 0,1$  y  
 $k = \frac{1}{440000}$



Movimiento de la onda en  $x = 0,5$ , en ambos casos.

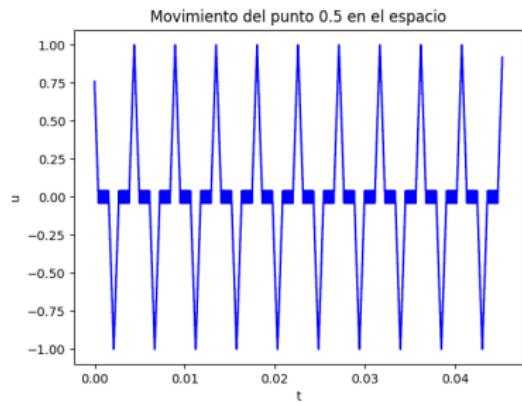


Figura: Movimiento de la onda para  $\mu = 1$ . Archivo figura5-34.wav

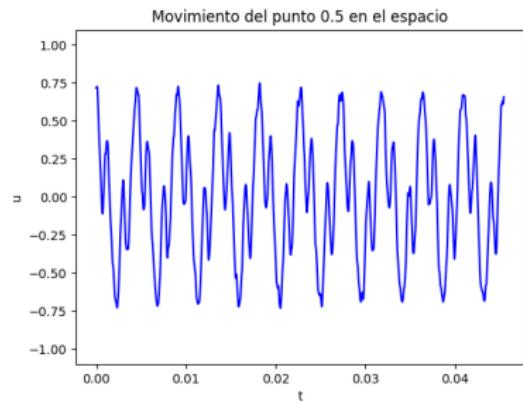
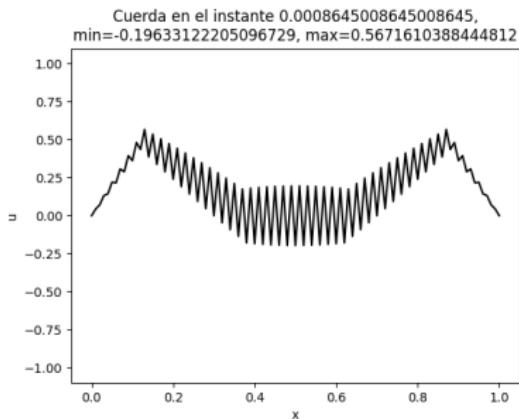


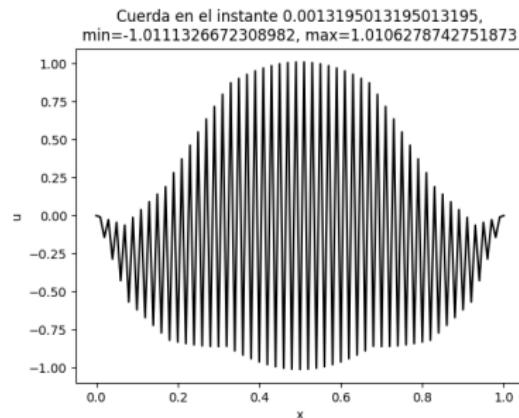
Figura: Movimiento de la onda para  $\mu = 0,1$ . Archivo figura5-35.wav

$$\mu > 1$$

Cuando violamos la condición CFL, se crean inestabilidades rápidamente. Utilizando  $L = 1$ ,  $c = 440$ ,  $m = 40$ ,  $h = \frac{1}{40}$ , tomamos  $\mu = 1,001$ , y por tanto  $k = \frac{1001}{16000000}$ .



**Figura:** Las inestabilidades comienzan rápidamente.



**Figura:** Las inestabilidades cubren la cuerda al completo.



En la posición  $x = 0,5$ .

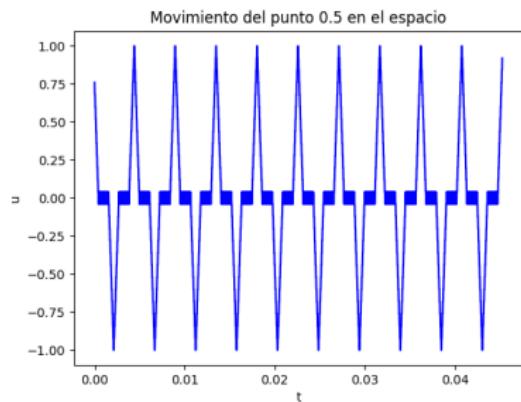


Figura: Movimiento de la onda para  $\mu = 1$ . Archivo figura5-34.wav

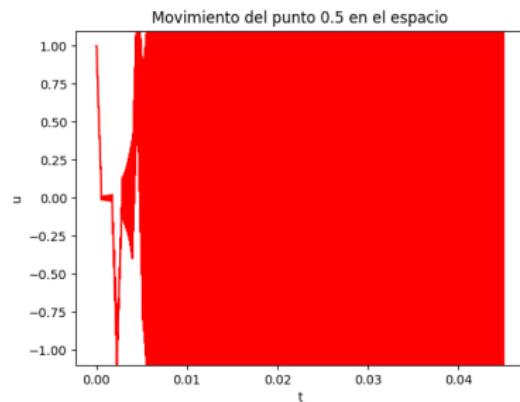


Figura: Movimiento de la onda para  $\mu = 1,1$ . Archivo figura5-39.wav



## Sección 5 | Bibliografía

