CÁLCULO NUMÉRICO

Grado en Matemáticas

FACULTAD DE CIENCIAS

CURSO 2020/2021

Facultad de Ciencias

Universidad de Cádiz

SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DE ONDAS

1. Solución numérica de la ecuación de ondas

En esta sección aplicaremos esquemas de diferencias finitas para determinar soluciones numéricas de la ecuación de ondas

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad \text{en } (0,\ell)\times(0,\infty), \tag{1}$$

sujeta a las siguientes condiciones iniciales y de frontera

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x), & \text{en } [0,\ell], \\ u_t(x,0) = g(x), & \text{en } [0,\ell], \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0, & \text{en } [0,\infty), \end{cases} \tag{2}$$

donde $c > 0$ es una constante. Para establecer el método de diferencias finitas, seleccionamos un entero m y un tamaño de paso de tiempo $k > 0$. En consecuencia, el tamaño de paso de espacio será $h = \frac{\ell}{m}$ y los puntos del mallado (x_i, t_j) vendrán dados por

$$\begin{aligned} x_i &= ih, \quad \text{para} \quad i = 0,1,\ldots,m, \\ t_j &= jk, \quad \text{para} \quad j = 0,1,\ldots \end{aligned}$$

Por tanto, en cualquier punto interior de la malla (x_i, t_j) la ecuación de ondas (1) se transforma en

$$u_{tt}(x_i,t_j) = c^2 u_{xx}(x_i,t_j).$$

1.1. Método explícito

Este método se construye aproximando u_{xx} por la expresión

$$
\begin{aligned}
u_{xx}(x_i,t_j) &\approx \frac{u(x_{i+1},t_j)-2u(x_i,t_j)+u(x_{i-1},t_j)}{h^2} \\
&\approx \frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2},
\end{aligned}
\tag{3}
$$

que presenta un error de aproximación proporcional a h^2. Del mismo modo, aproximamos u_{tt} por

$$
\begin{aligned}
u_{tt}(x_i,t_j) &\approx \frac{u(x_i,t_{j+1})-2u(x_i,t_j)+u(x_i,t_{j-1})}{k^2} \\
&\approx \frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{k^2},
\end{aligned}
\tag{4}
$$

la cual presenta un error de aproximación proporcional a k^2. Sustituyendo expresiones (3) y (4) en la ecuación de ondas (1) se obtiene el esquema

$$
\frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{k^2} = c^2\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2},
\tag{5}
$$

y tomando $\mu = \frac{ck}{h}$ se tiene

$$
u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1} = \mu^2 u_{i+1,j}-2\mu^2 u_{i,j}+\mu^2 u_{i-1,j},
$$

para $j=1,2,\ldots,$ $i=1,\ldots,m-1$. Aislando la aproximación con mayor nivel de tiempo j se tiene

$$
u_{i,j+1} = \mu^2\left(u_{i+1,j}+u_{i-1,j}\right)+2\left(1-\mu^2\right)u_{i,j}-u_{i,j-1}.
\tag{6}
$$

La expresión en diferencias (6) define al método explícito para la ecuación de ondas (1). Las condiciones de frontera en (2) nos proporcionan el valor de los siguientes nodos

$$
u_{0,j} = u_{m,j} = 0, \quad j=0,1,\ldots,
$$

y la condición inicial $u(x,0)=f(x)$ implica que

$$
u_{i,0} = f(x_i) = f_i, \quad i=0,1,\ldots,m.
\tag{7}
$$

Para que el problema esté bien definido, asumimos la consistencia de las condiciones de contorno e inicial en los extremos del dominio, i.e.,

$$
f_0 = f(0) = u(0,0) = 0, \quad f_m = f(\ell) = u(\ell,0) = 0.
$$

De la ecuación (6) se tiene que los valores de los nodos en el $(j+1)$-ésimo nivel de tiempo dependen de los valores de los nodos en el j-ésimo y $(j-1)$-ésimo nivel de tiempo (método en 3 niveles). Por otro lado, los valores en el nivel de tiempo $j=0$ vienen dados por (7). Por consiguiente, para poder arrancar el método, necesitamos de los valores en el nivel de tiempo $j=1$ los cuales se obtienen de la condición de velocidad inicial

$$u_t(x,0) = g(x), \quad \text{en } [0,\ell]. \tag{8}$$

Listamos a continuación dos de las opciones comúnmente usadas para aproximar (8):

- Aplicar una aproximación progresiva en tiempo

  $$u_t(x_i,0) \approx \frac{u(x_i,t_1) - u(x_i,0)}{k}.$$

  Resolviendo para $u(x_i,t_1)$ obtenemos

  $$u(x_i,t_1) \approx u(x_i,0) + ku_t(x_i,0) = u(x_i,0) + kg(x_i).$$

  Por lo tanto,

  $$u_{i,1} = u_{i,0} + kg(x_i), \quad i = 1,\dots,m-1. \tag{9}$$

  No obstante, la aproximación (9) presenta un error de sólo $\mathscr{O}(k)$. Una mejor aproximación puede conseguirse si $f \in \mathscr{C}^2([0,\ell])$. Para ello, tomamos un segundo polinomio de Taylor en t para u aplicado en $(x_i,0)$

  $$\frac{u(x_i,t_1) - u(x_i,0)}{k} = u_t(x_i,0) + \frac{k}{2}u_{tt}(x_i,0) + \mathscr{O}(k^2). \tag{10}$$

  Por otro lado,

  $$u_{tt}(x_i,0) = c^2 u_{xx}(x_i,0) = c^2 f''(x_i).$$

  Sustituyendo en (10)

  $$u(x_i,t_1) = u(x_i,0) + ku_t(x_i,0) + \frac{k^2}{2}u_{tt}(x_i,0) + \mathscr{O}(k^3), \tag{11}$$

  $$\Downarrow$$

  $$u_{i,1} = f(x_i) + kg(x_i) + \frac{c^2k^2}{2}f''(x_i). \tag{12}$$

Si $f \in \mathscr{C}^4([0,\ell])$ pero no disponemos de $f''(x_i)$ podemos usar una ecuación en diferencias centradas de segundo orden como sigue

$$\begin{array}{rcccl} f_{i+1} & = & f(x_i+h) & = & f(x_i)+hf'(x_i)+\frac{h^2}{2}f''(x_i)+\frac{h^3}{3!}f'''(x_i)+\frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x_i)+\ldots \\ -2f_i & = & -2f(x_i) & = & -2f(x_i) \\ f_{i-1} & = & f(x_i-h) & = & f(x_i)-hf'(x_i)+\frac{h^2}{2}f''(x_i)-\frac{h^3}{3!}f'''(x_i)+\frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x_i)+\ldots \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{f_{i+1}-2f_i+f_{i-1}}{h^2}=f''(x_i)+\frac{h^2}{12}f^{(4)}(x_i)+\mathscr{O}(h^4),$$

por lo que

$$f''(x_i)=\frac{f_{i+1}-2f_i+f_{i-1}}{h^2}-\frac{h^2}{12}f^{(4)}(\overline{x_i}), \tag{13}$$

para algún $\overline{x_i}$ en (x_{i-1},x_{i+1}). Sustituyendo (13) en (11)

$$u(x_i,t_1)=u(x_i,0)+kg_i+\frac{c^2k^2}{2h^2}\left(f_{i+1}-2f_i+f_{i-1}\right)+\mathscr{O}(k^3+h^2k^2).$$

Así

$$u_{i,1}=f_i+kg_i+\frac{\mu^2}{2}\left(f_{i+1}-2f_i+f_{i-1}\right)+\mathscr{O}(k^3+h^2k^2),$$

o equivalentemente

$$u_{i,1}=\frac{\mu^2}{2}\left(f_{i+1}+f_{i-1}\right)+\left(1-\mu^2\right)f_i+kg_i, \quad i=1,\ldots,m-1. \tag{14}$$

- Aplicar una aproximación centrada en tiempo

$$u_t(x_i,0)\approx\frac{u(x_i,t_1)-u(x_i,t_{-1})}{2k}\Rightarrow g_i=\frac{u_{i,1}-u_{i,-1}}{2k},$$

la cual presenta un error de aproximación proporcional a k^2. Despejando los nodos ficticios $u_{i,-1}$ obtenemos

$$u_{i,-1}=u_{i,1}-2kg_i+\mathscr{O}(k^3). \tag{15}$$

Por otro lado, consideramos $j=0$ en (6)

$$u_{i,1}=\mu^2\left(u_{i+1,0}+u_{i-1,0}\right)+2\left(1-\mu^2\right)u_{i,0}-u_{i,-1}. \tag{16}$$

Podemos eliminar los nodos ficticios $u_{i,-1}$ usando ecuaciones (15) y (16) lo cual nos lleva a

$$u_{i,1}=\frac{\mu^2}{2}\left(f_{i+1}+f_{i-1}\right)+\left(1-\mu^2\right)f_i+kg_i, \quad i=1,\ldots,m-1.$$

Observa que este resultado coincide con (14) pero se llega mucho más rápido y sin necesidad de imponer nuevas condiciones.

Consideremos el siguiente ejemplo:

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, & \text{en } (0,1) \times (0,1), \\ u(x,0) = \operatorname{sen}(\pi x), & \text{en } [0,1], \\ u_t(x,0) = 0, & \text{en } [0,1], \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & \text{en } [0,1]. \end{cases} \tag{17}$$

Usa un total de 11 puntos en el eje X y 21 puntos en el eje temporal, y un esquema explícito para aproximar la solución numérica. Compare los resultados con la solución exacta

$$u(x,t) = \operatorname{sen}(\pi x) \cos(2\pi t).$$

Crear una tabla donde aparezcan los nodos junto con el valor de la solución numérica y la solución exacta en ellos.

Puede observarse que los resultados obtenidos en este ejemplo son demasiado precisos para lo que las aproximaciones (3) y (4) nos haría suponer. Esto se debe a que la solución exacta del problema es infinitamente diferenciable. Para analizar lo que está ocurriendo calculemos el error local de truncación del método explícito.

Tomando esquema (5) y usando desarrollos de Taylor de los elementos involucrados se tiene la ecuación modificada

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = \frac{c^2h^2}{12} u_{xxxx} - \frac{k^2}{12} u_{tttt} + \frac{2c^2h^4}{6!} u_{6x} - \frac{2k^4}{6!} u_{6t} + \frac{2c^2h^6}{8!} u_{8x} - \frac{2k^6}{8!} u_{8t} + \ldots. \tag{18}$$

Recordemos que $u_{tt} = c^2 u_{xx}$. De aquí, $u_{tttt} = c^4 u_{xxxx}$, $u_{6t} = c^6 u_{6x}$ y $u_{8t} = c^8 u_{8x}$. Sustituyendo en la ecuación modificada (18)

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = \frac{c^2}{12} \left(h^2 - c^2k^2\right) u_{xxxx} + \frac{2c^2}{6!} \left(h^4 - c^4k^4\right) u_{6x} + \frac{2c^2}{8!} \left(h^6 - c^6k^6\right) u_{8x} + \ldots, \tag{19}$$

por lo que el esquema (5) es consistente con la ecuación y presenta orden $(2,2)$.

Podemos eliminar el coeficiente de u_{xxxx} tomando

$$\frac{c\,k}{h} = 1. \tag{20}$$

No obstante, considerando relación (20), la ecuación (19) queda de la forma

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \tag{21}$$

lo cual supone un error local de truncamiento 0. De esta forma, los únicos errores que se cometen corresponden a la aproximación de los nodos $u_{i,1}$ y al redondeo en los cálculos.

Pasemos ahora a realizar un estudio de la estabilidad de von Neumann del método explícito para la ecuación de ondas. Consideremos el esquema

$$u_{j,n+1} = \mu^2 \left(u_{j+1,n} + u_{j-1,n}\right) + 2\left(1 - \mu^2\right) u_{j,n} - u_{j,n-1}, \tag{22}$$

y soluciones discretas de la forma

$$u_{j,n} = \widehat{e}_n e^{ij\phi}, \tag{23}$$

lo que nos lleva a

$$\widehat{e}_{n+1} e^{ij\phi} = \mu^2 \widehat{e}_n \left(e^{i(j+1)\phi} + e^{i(j-1)\phi}\right) + 2(1-\mu^2)\widehat{e}_n e^{ij\phi} - \widehat{e}_{n-1} e^{ij\phi}. \tag{24}$$

Dividiendo (24) entre $e^{ij\phi}$, usando identidades trigonométricas vistas en capítulos anteriores y reagrupando términos llegamos a

$$\widehat{e}_{n+1} - 2\left(1 - 2\mu^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\phi}{2}\right)\right)\widehat{e}_n + \widehat{e}_{n-1} = 0. \tag{25}$$

Expresión (25) es una ecuación en diferencias lineal de segundo orden de coeficientes constantes. Sea $A = 1 - 2\mu^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\phi}{2}\right)$. De aquí, el factor de amplificación para el esquema (5) toma la forma

$$g_{1,2} = A \pm \sqrt{A^2 - 1}.$$

Tenemos que $A \leq 1 \ \forall \ \phi$. Distinguimos dos casos:

- Si $A < -1$ entonces

  $$g_1(\phi) = A - \sqrt{A^2 - 1} < -1,$$

  así $|g_1(\phi)| > 1$, por lo que el esquema es inestable.

- Si $-1 \leq A \leq 1$ entonces para tener un esquema estable debemos exigir que $A \geq -1$ lo cual nos lleva a que

$$0 < \frac{ck}{h} \leq 1,$$

por lo que se obtiene de nuevo la condición de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL). Bajo la condición CFL se tiene

$$g_{1,2} = A \pm \sqrt{A^2 - 1} = A \pm \sqrt{1 - A^2}\, i,$$

así

$$|g(\phi)|^2 = A^2 + \left(\sqrt{1 - A^2}\right)^2 = 1,$$

de aquí se tiene que el esquema es condicionalmente estable.

1.2. Método implícito

Con el objetivo de resolver los problemas de estabilidad del método explícito introducimos el que se conoce como método implícito. Este método se construye reemplazando los términos del lado derecho del esquema explícito (5) por una media de los valores en los niveles de tiempo $j-1$ y $j+1$, es decir,

$$\begin{aligned} &\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = \\ &\quad \frac{c^2}{2h^2}\left(u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1}\right). \end{aligned} \tag{26}$$

Si denotamos de nuevo $\mu = \frac{ck}{h}$, el esquema implícito (26) toma la forma

$$\begin{aligned} &u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1} = \\ &\quad \frac{\mu^2}{2}\left(u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1}\right). \end{aligned} \tag{27}$$

El valor de los nodos en el nivel 1 de tiempo, $u_{i,1}$, se obtienen de igual forma que en el método explícito, es decir, vienen dados por (12) o (14).

La ecuación modificada asociada al esquema (27) toma la forma

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} = &-\frac{k^2}{12}u_{tttt} + \frac{c^2k^2}{2}u_{ttxx} + \frac{c^2h^2}{12}u_{xxxx} \\ &-\frac{2k^4}{6!}u_{6t} + \frac{c^2k^4}{24}u_{ttttxx} + \frac{c^2h^2k^2}{24}u_{ttxxxx} + \frac{2c^2h^4}{6!}u_{6x} + \dots \end{aligned} \tag{28}$$

Usando $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ y sus consecuencias diferenciales, la ecuación modificada (28) queda de la forma

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = \frac{c^2}{12}\left(h^2 + 5c^2k^2\right) u_{xxxx} + \frac{2c^2}{6!}\left(h^2 + c^2k^2\right)\left(h^2 + 14c^2k^2\right) u_{6x} + \dots,$$

por lo que el esquema (26) es consistente con la ecuación y presenta orden $(2,2)$.

Por otro lado, mediante un análisis de la estabilidad de von Neumann del esquema (26), se tiene que el factor de amplificación viene dado por

$$g(\phi) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - B^2}}{B},$$

donde $B = 1 + 2\mu^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\phi}{2}\right)$. Dado que $B \geq 1$, se tiene que

$$g(\phi) = \frac{1 \pm \sqrt{B^2 - 1}\, i}{B},$$

así

$$|g(\phi)|^2 = 1,$$

de aquí el esquema (26) es incondicionalmente estable.