Exercice 3.1

On considère le modèle suivant des relations amoureuses (Strogatz, 1988) : R est le coefficient d'attraction de Roméo pour Juliette, et corrélativement J est le coefficient d'attraction de Juliette pour Roméo.
Ces deux coefficients évoluent selon une dynamique donnée par

$$\frac{dR}{dt} = a\,R + b\,J\,,$$
$$\frac{dJ}{dt} = c\,R + d\,J.$$

C'est le prototype d'un système linéaire. On va s'intéresser à l'évolution asymptotique de J et R lorsque $t \to \infty$. On considère que $J=0$ correspond à l'indifférence, $J=+\infty$ à l'amour passionné, et $J=-\infty$ à la révulsion féroce.

On considèrera successivement les cas suivants :

a - $a=d=0$,
b - $a=d\,, b=c\,,$
c - $c=-b\,, d=-a\,,$
d - $a=b=0$,

Exercice 3.1 - Solution

On sait que les valeurs propres correspondant à un système de deux équations couplées sont :

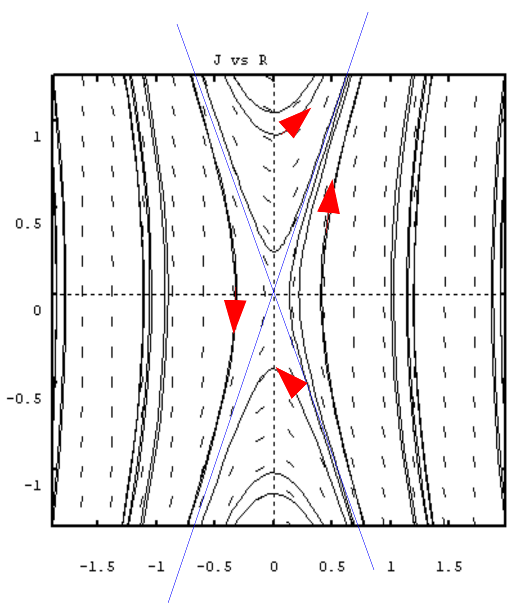
$$\lambda_{1,2} = \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad - bc)}}{2}$$

Pour le premier cas, on trouve

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{bc}$$

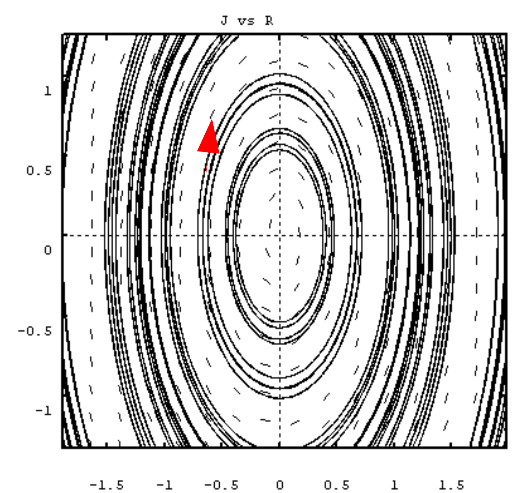
Si b et c sont de même signe, on a une valeur propre positive et une négative.

$$b \geq 0$$
$$c \geq 0$$



(Calculer les vecteurs propres dans un cas particulier)

Si b et c sont de signe opposés, les deux valeurs propres sont complexes. Comme $a+d=0$, on tourne sans fin auour de zéro.



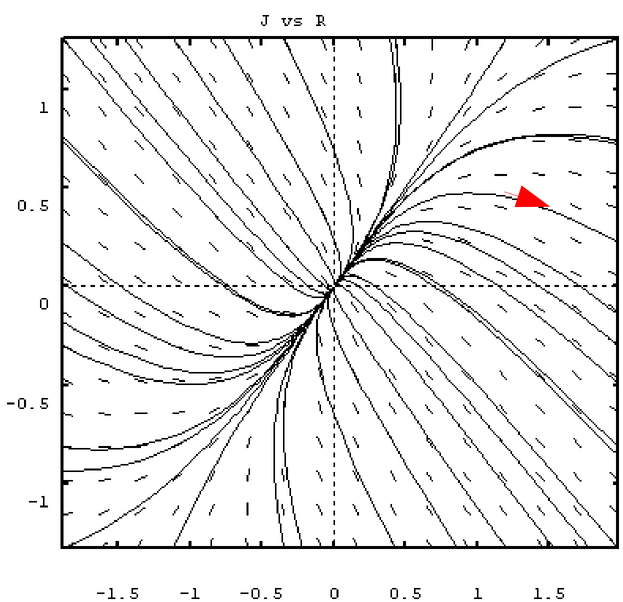
Exercice 3.1 - Solution

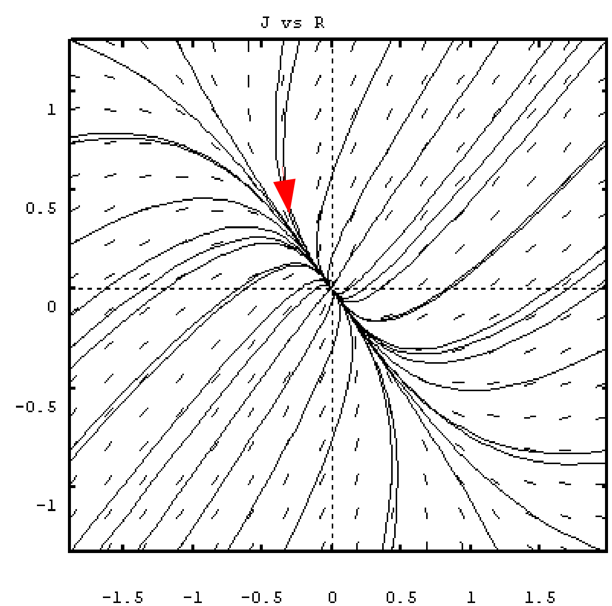
Pour le second cas, on trouve :

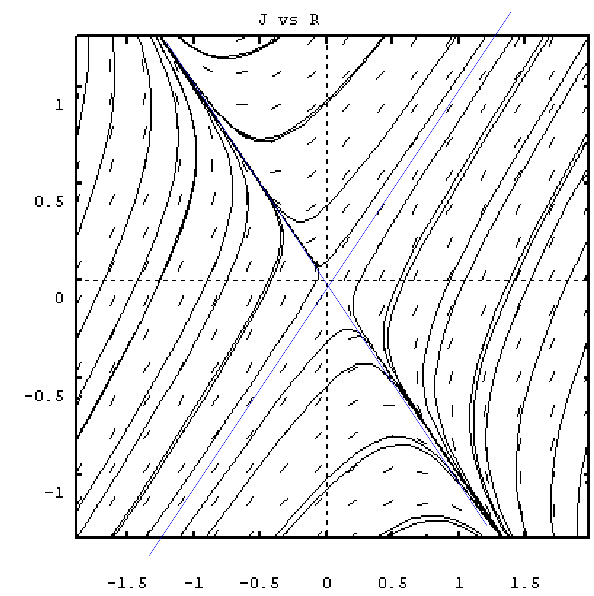
$$\lambda_{1,2} = a \pm |b|$$

Il n'y a jamais d'oscillations. On peut avoir selon ls valeurs de a et b soit un poit fixe stable, soit un point fixe instable, soit un point de selle. Qui se ressemble s'assemble?

$a > \|b\| \geq 0$	$a < -\|b\| \leq 0$	$\|a\| < \|b\|$
point fixe instable	point fixe stable	point de selle







(Calculer les vecteurs propres dans un cas particulier)

Exercice 3.1 - Solution

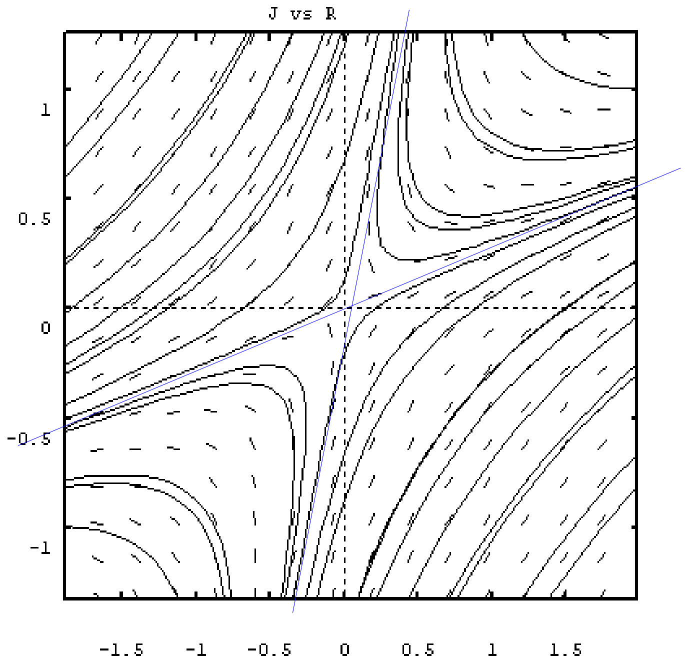
Pour le troisième cas, on trouve :

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$$

Selon les valeurs absolues relatives de a et b, on a un point de selle ou une oscillation . Les contraires s'attirent?

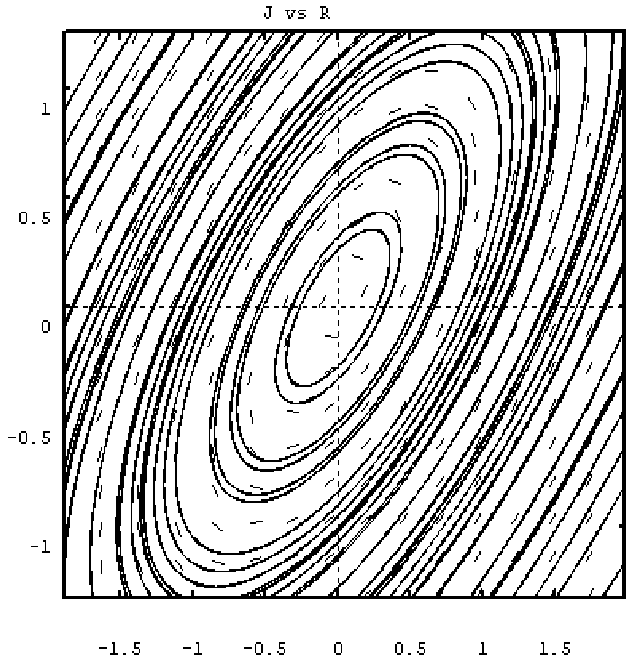
$$|a| \geq |b|$$

point de selle



$$|a| < |b|$$

point foyer isolé



(Calculer les vecteurs propres dans un cas particulier)

Exercice 3.1 - Solution

Pour le quatrième cas, on trouve : $\lambda_{1,2} = 0$

Pas de vecteurs propres, pas de cycles.....

On est ramené à une situation à une dimension, car *R* est constant *$R = R_0$*. Pour *J* on a

$$\frac{dJ}{dt} = d\,J + cR_0$$

Selon le signe de d, on a une croissance exponentielle, ou une décroissance vers

$$\frac{cR_0}{d}$$

Remarque : on traite ainsi d'autres cas pathologiques tels que *a=b=c=d* (le faire).

Exercice 3.2

Classifier les systèmes suivants :

$$\frac{dx}{dt} = y\,;\ \frac{dy}{dt} = -2\mathrm{x} - 3\,y\,;$$

$$\frac{dx}{dt} = 3\mathrm{x} - 4\,y\,;\ \frac{dy}{dt} = x - y\,;$$

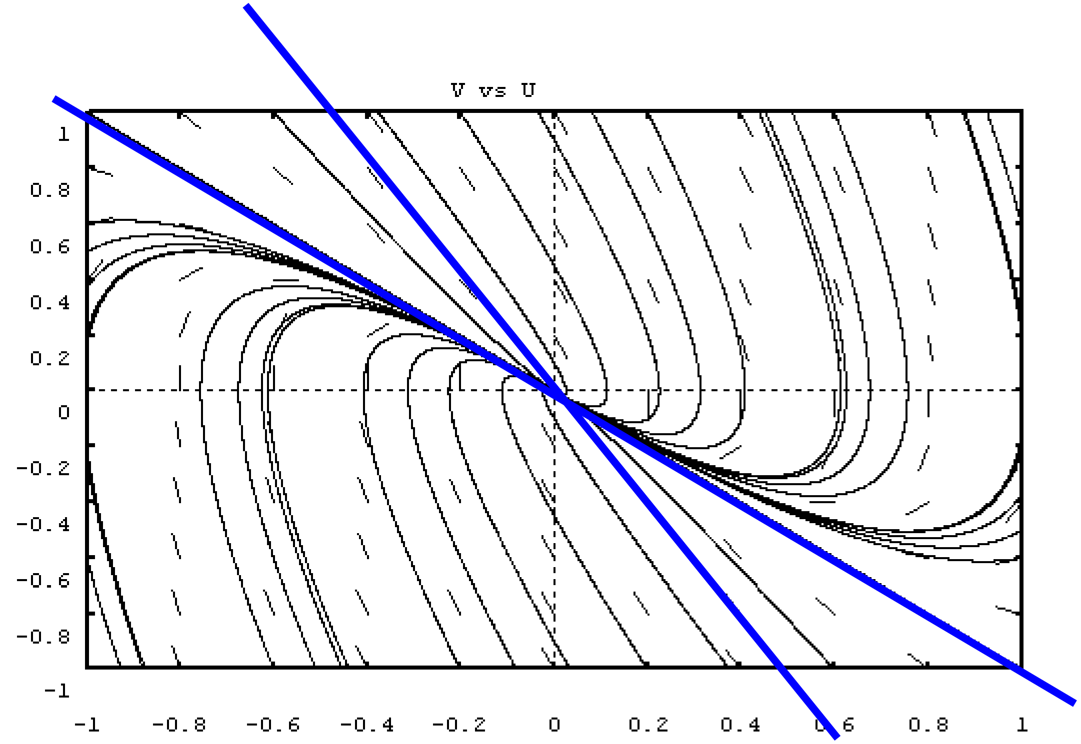
$$\frac{dx}{dt} = -3\mathrm{x} + 2\mathrm{y}\,;\ \frac{dy}{dt} = x - 2\,y\,;$$

Exercice 3.2 - Solution

$$\frac{dx}{dt} = y\,;\, \frac{dy}{dt} = -2x - 3\,y$$

$$\lambda_1 = -1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

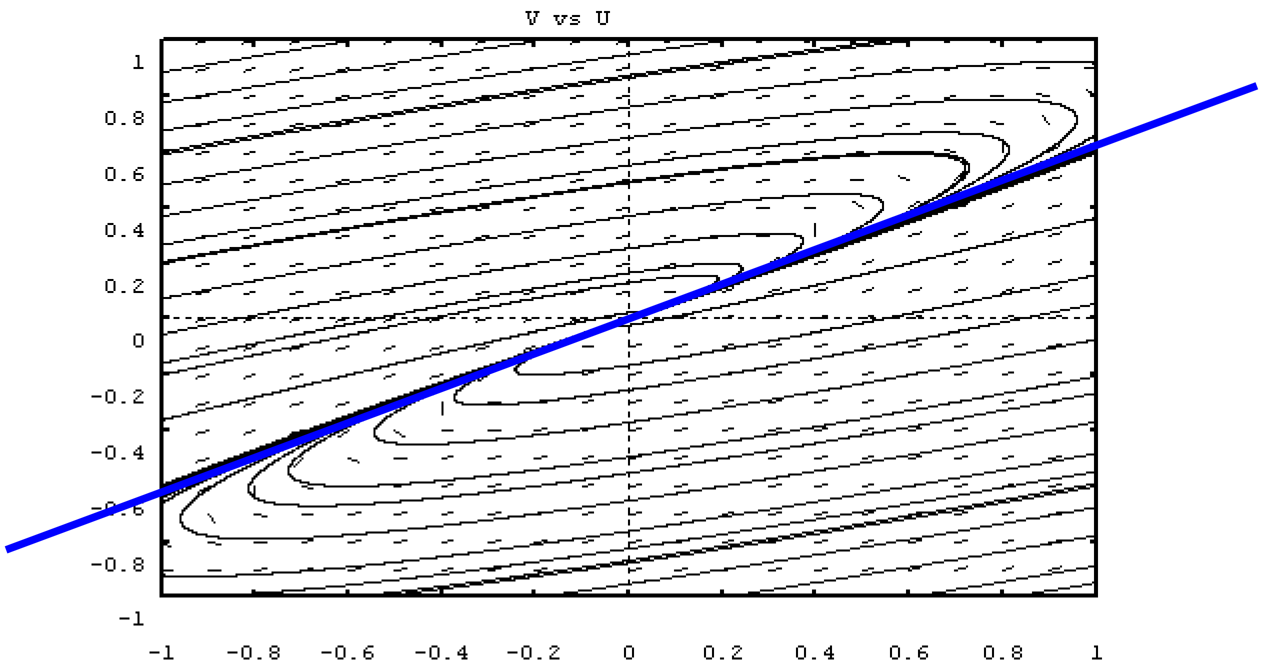


point fixe stable

Exercice 3.2 - Solution

$$\frac{dx}{dt} = 3x - 4y \,;\; \frac{dy}{dt} = x - y \,;$$

$$\lambda_1 = 1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$



On est dans le cas d'une valeur propre double, et ici il y a un seul vecteur propre. On doit imaginer cette situation comme la limite de deux vecteurs propres de plus en plus proches.

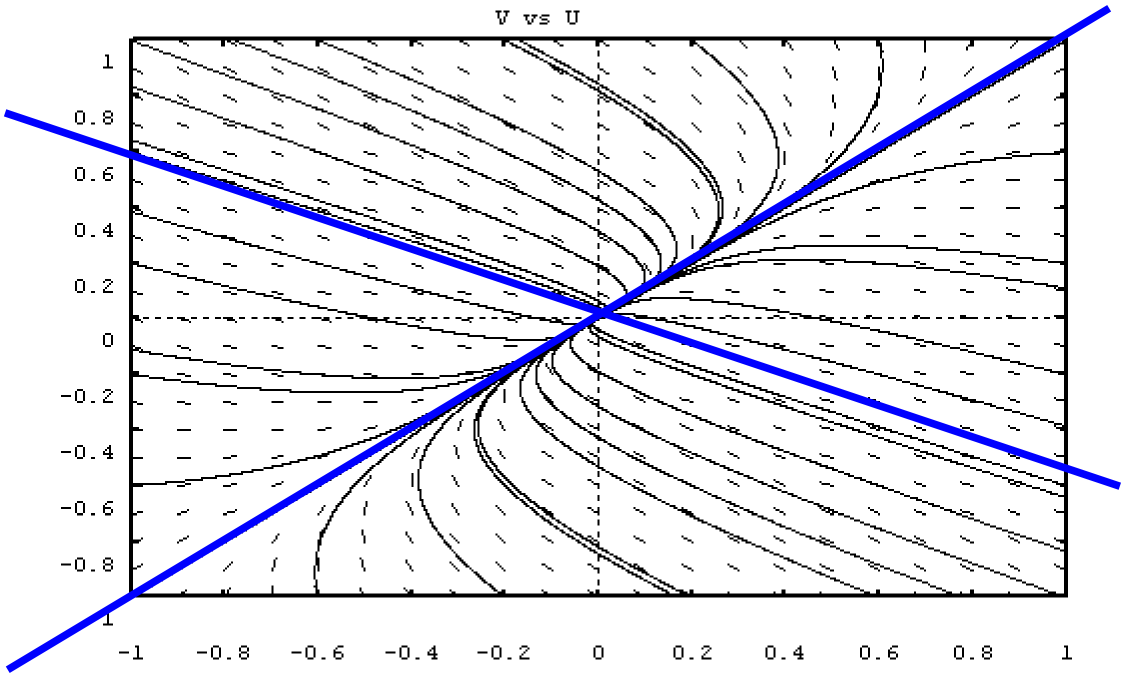
point fixe instable

Exercice 3.2 - Solution

$$\frac{dx}{dt}=-3x+2y\,;\frac{dy}{dt}=x-2\,y\,;$$

$$\lambda_1=-4\rightarrow\begin{bmatrix}1\\-1/2\end{bmatrix}$$

$$\lambda_2=-1\rightarrow\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$



point fixe stable

Exercice 3.3

Tracer le 'portrait de phase' (flot, points fixes) pour les systèmes suivants :

$$\frac{dx}{dt} = x - x^3 ; \frac{dy}{dt} = -y ;$$

$$\frac{dx}{dt} = x(2 - x - y) ; \frac{dy}{dt} = x - y ;$$

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - y ; \frac{dy}{dt} = x - y ;$$

$$\frac{dx}{dt} = y ; \frac{dy}{dt} = -x + y(1 - x^2) ;$$

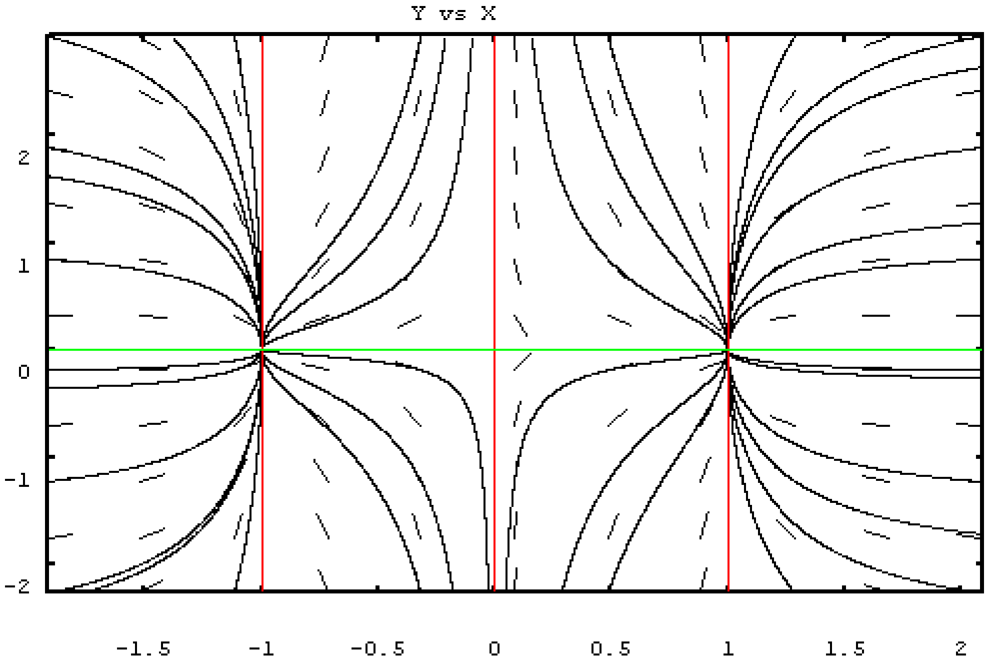
$$\frac{dx}{dt} = 2\mathrm{xy} ; \frac{dy}{dt} = y^2 - x^2 ;$$

$$\frac{dx}{dt} = y + y^2 ; \frac{dy}{dt} = \frac{-1}{2} x + \frac{1}{5} y - xy + \frac{6}{5} y^2 ;$$

$$\frac{dx}{dt} = y + y^2 ; \frac{dy}{dt} = -x + \frac{1}{5} y - xy + \frac{6}{5} y^2 ;$$

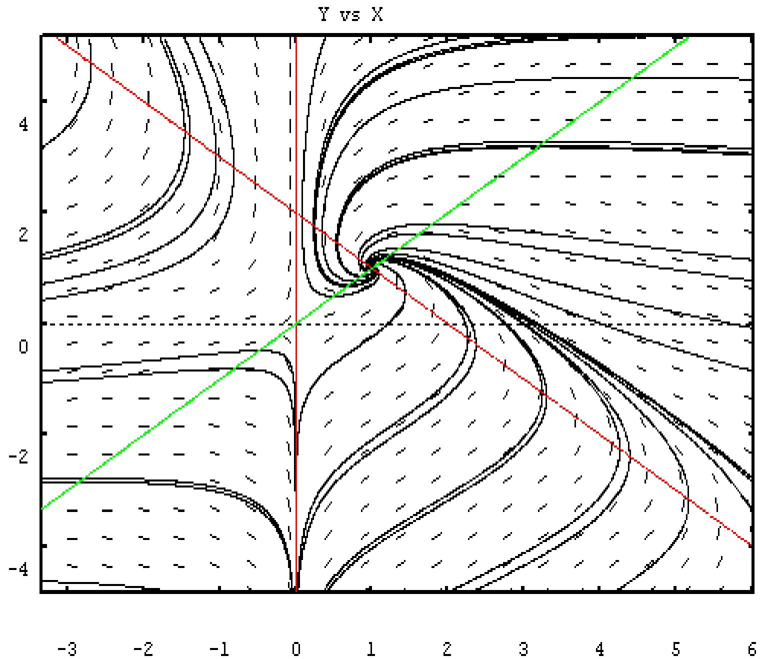
Exercice 3.3 - Solution

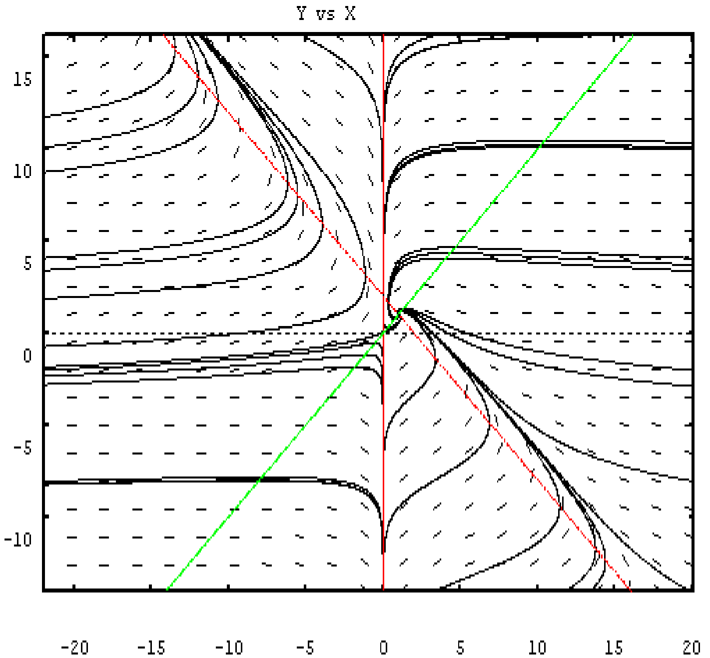
$$\frac{dx}{dt} = x - x^3 \,;\, \frac{dy}{dt} = -y$$



Exercice 3.3 - Solution

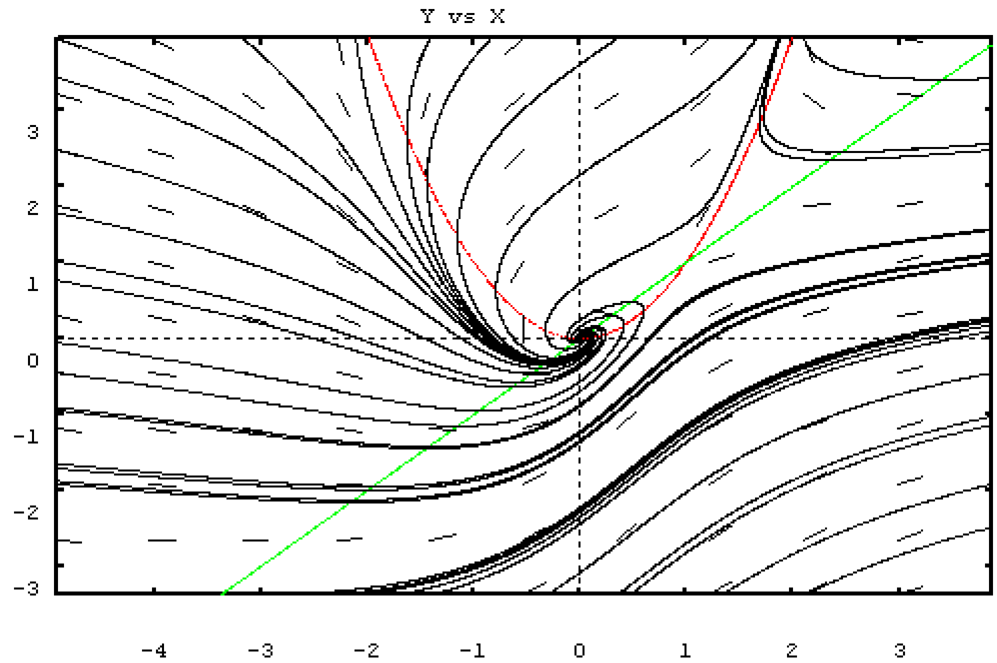
$$\frac{dx}{dt} = x(2 - x - y)\,;\, \frac{dy}{dt} = x - y\,;$$





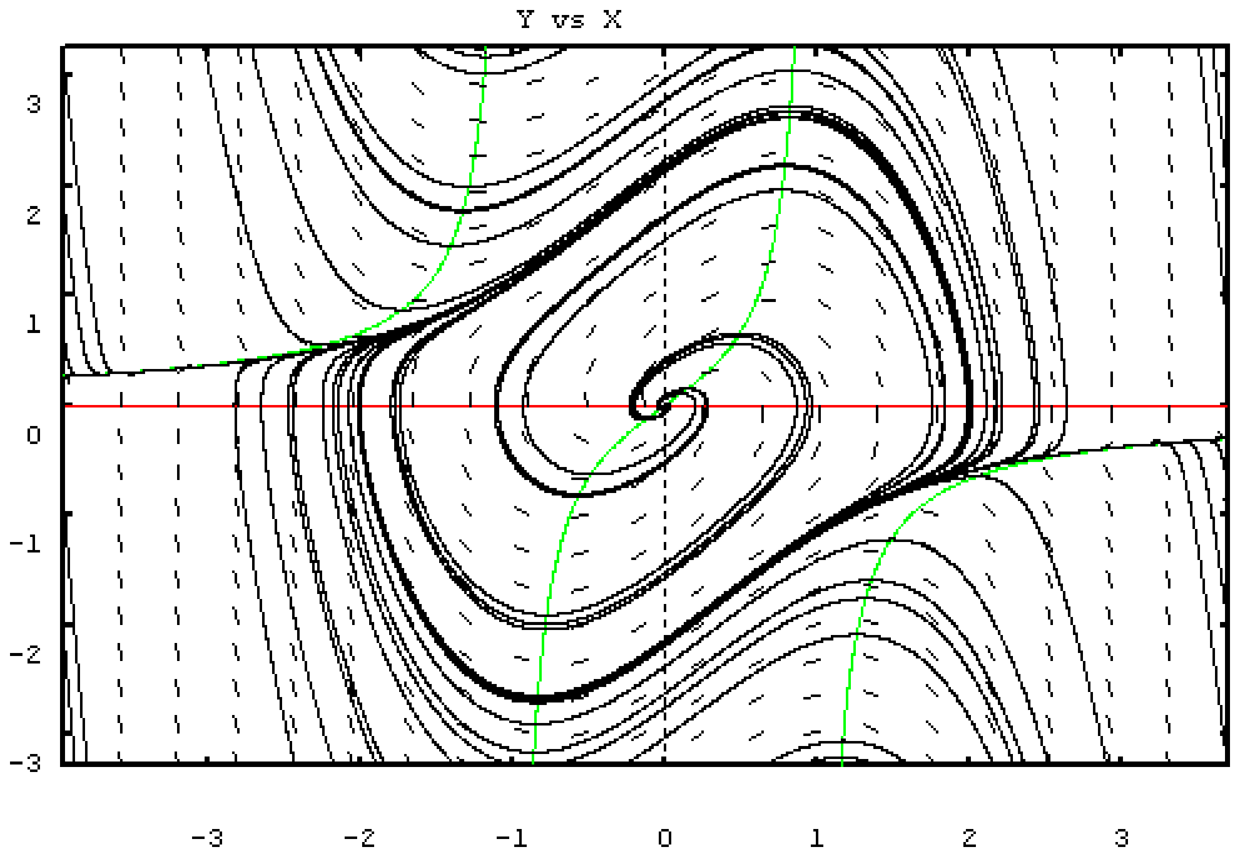
Exercice 3.3 - Solution

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - y\,;\ \frac{dy}{dt} = x - y\,;$$



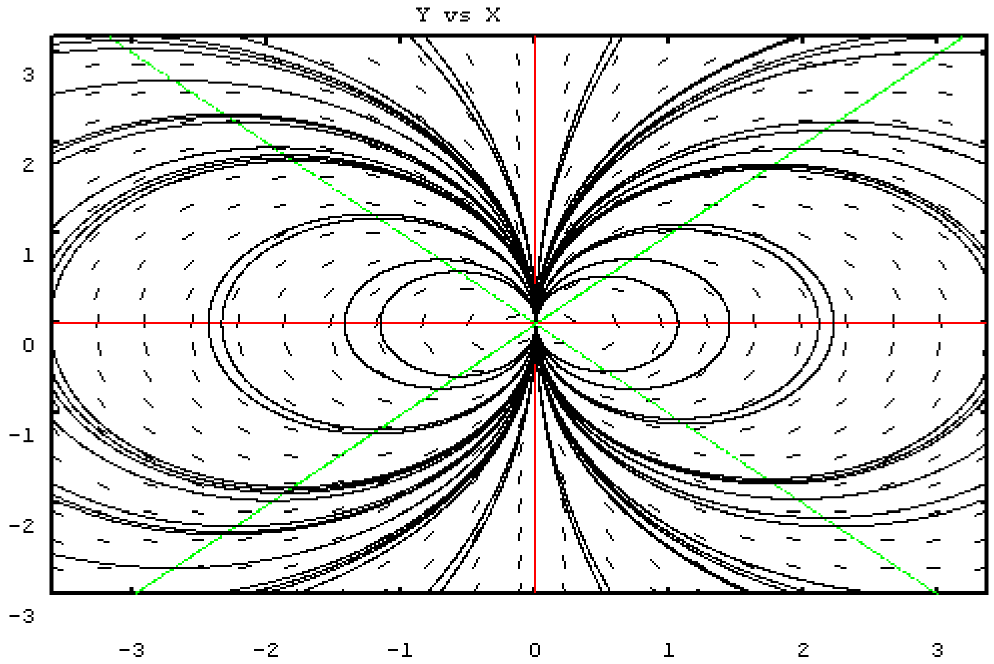
Exercice 3.3 - Solution

$$\frac{dx}{dt}=y\,;\,\frac{dy}{dt}=-x+y(1-x^2)\,;$$



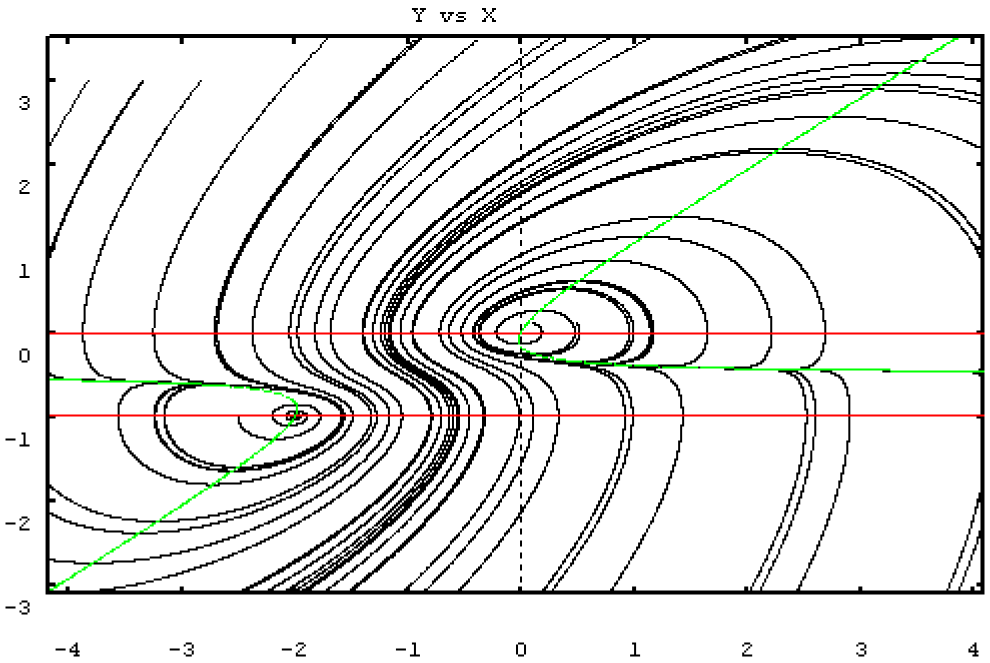
Exercice 3.3 - Solution

$$\frac{dx}{dt} = 2\text{xy}\,;\, \frac{dy}{dt} = y^2 - x^2\,;$$



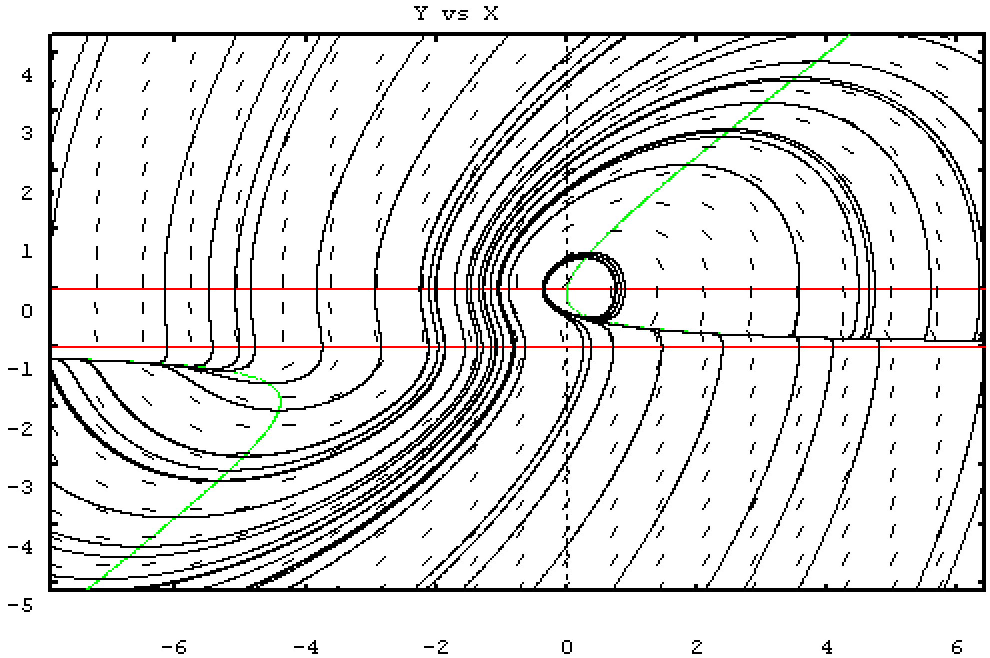
Exercice 3.3 - Solution

$$\frac{dx}{dt} = y + y^2 \, ; \; \frac{dy}{dt} = \frac{-1}{2} x + \frac{1}{5} y - xy + \frac{6}{5} y^2 \, ;$$



Exercice 3.3 - Solution

$$\frac{dx}{dt} = y + y^2 ; \frac{dy}{dt} = -x + \frac{1}{5} y - xy + \frac{6}{5} y^2 ;$$



Exercice 3.4

Pour chacun des systèmes suivants, tracer le portrait de phase et étudier les point fixes en utilisant l'analyse de stabilité linéaire.

$$\frac{dx}{dt} = x - y \,;\, \frac{dy}{dt} = x^2 - 4 \,;$$

$$\frac{dx}{dt} = 1 + y - e^{-x} \,;\, \frac{dy}{dt} = x^3 - y \,;$$

$$\frac{dx}{dt} = \sin(y);\, \frac{dy}{dt} = \cos(x) \,;$$

$$\frac{dx}{dt} = \sin(y) \,;\, \frac{dy}{dt} = x - x^3 \,;$$

$$\frac{dx}{dt} = y + x - x^3 \,;\, \frac{dy}{dt} = - y \,;$$

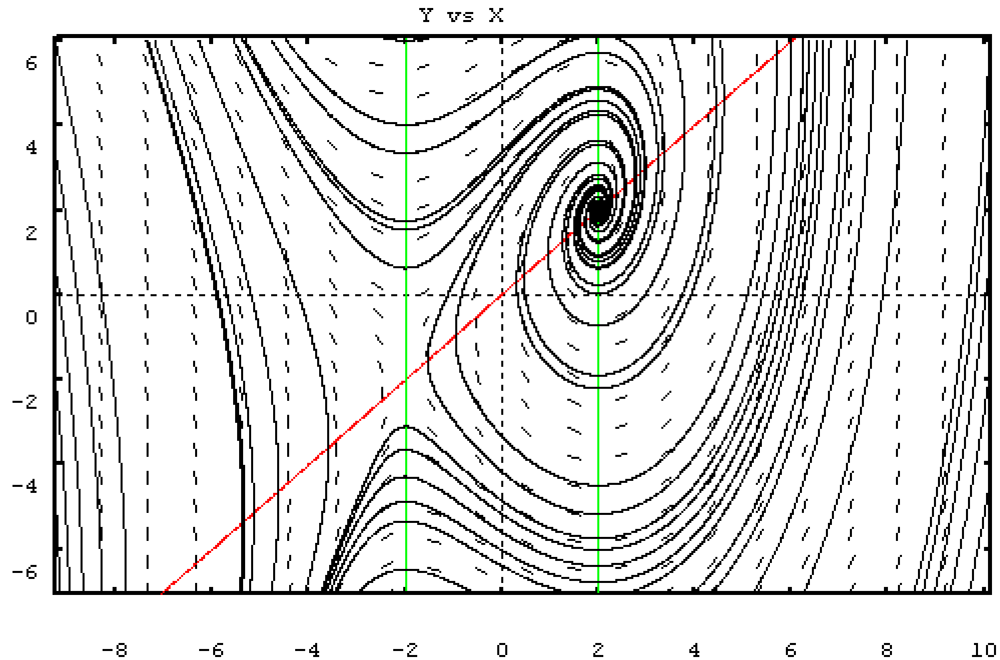
$$\frac{dx}{dt} = xy - 1 \,;\, \frac{dy}{dt} = x - y^3.$$

Exercice 3.4 - Solution

$$\frac{dx}{dt}=x-y\,;\;\frac{dy}{dt}=x^2-4\,;$$

Un petit coup d'oeil global pour commencer

(2,2) spirale?
(-2,-2) point de selle?

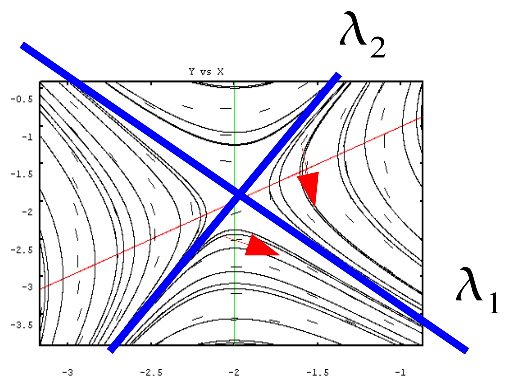


$$(2,2)\rightarrow J=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 4 & 0\end{bmatrix}\rightarrow\lambda_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{(-15)}}{2}$$

Spirale sortante

$$(-2,-2)\rightarrow J=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -4 & 0\end{bmatrix}\rightarrow\lambda_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{(17)}}{2}$$

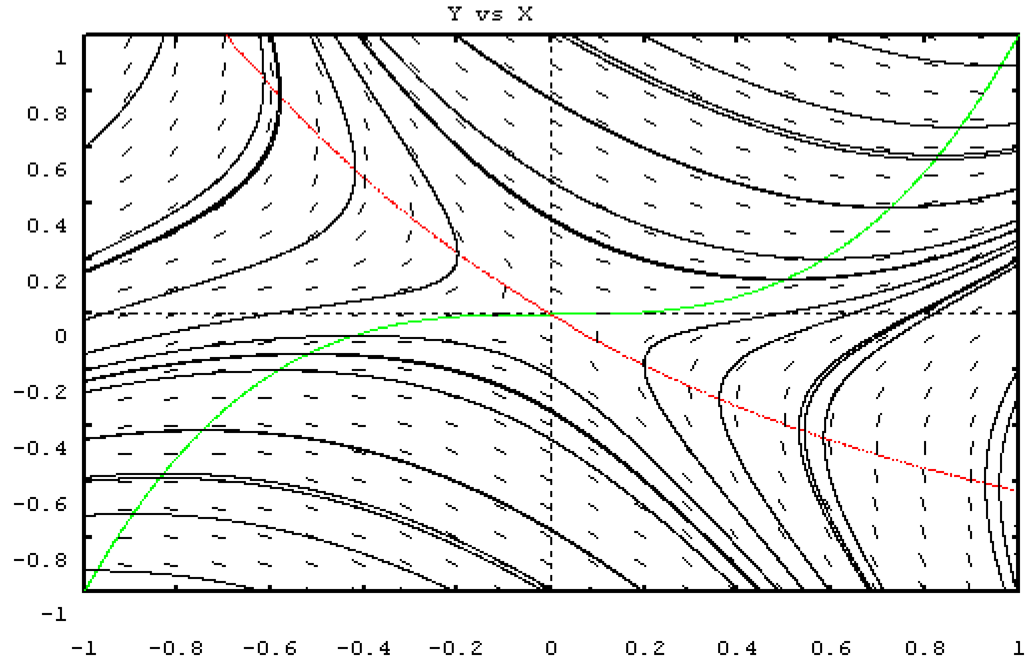
Point de selle



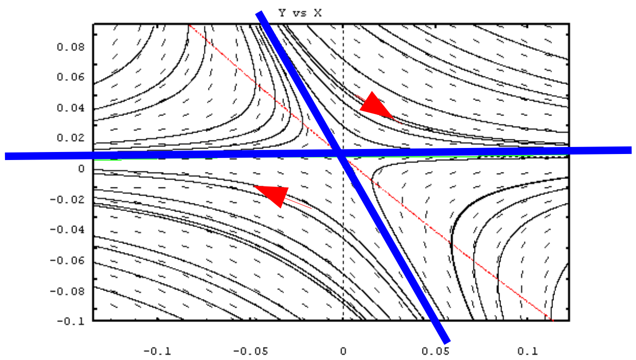
Exercice 3.4 - Solution

$$\frac{dx}{dt} = 1 + y - e^{-x}\,;\ \frac{dy}{dt} = x^3 - y$$

(0,0) point de selle?



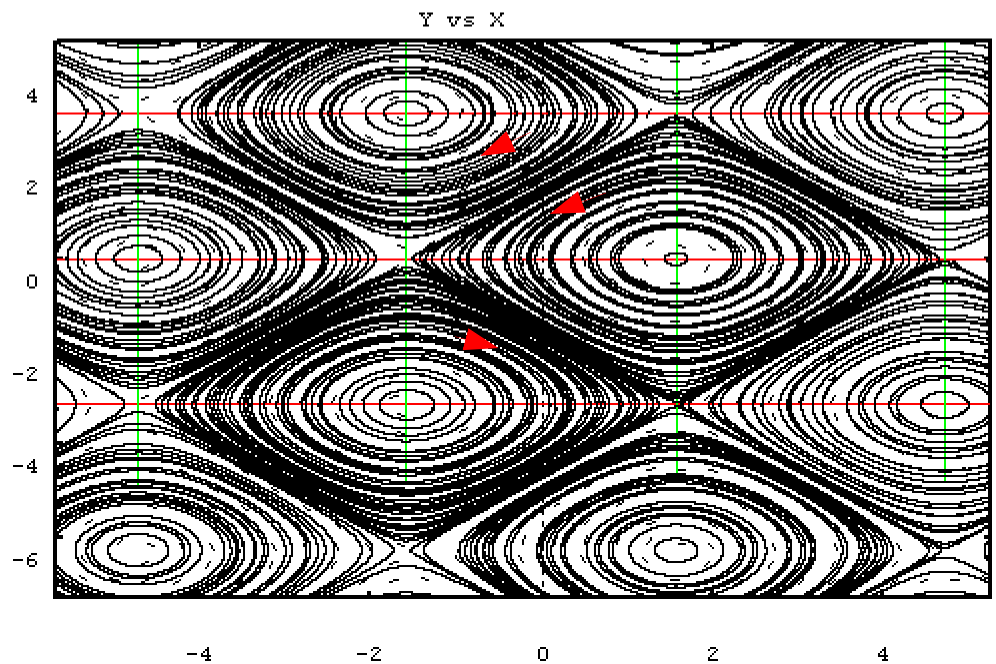
$$(0,0) \rightarrow J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$



Exercice 3.4 - Solution

$$\frac{dx}{dt}=\sin(y)\,;\;\frac{dy}{dt}=\cos(x)\,;$$

(π/2 +2kπ, 2k'π) points focaux isolé?
(3π/2+2kπ,π+2k'π) points focaux isolé?
(π/2 +2kπ,π+2k'π) points de selle?
(3π/2+2k'π,2k'π) points de selle?

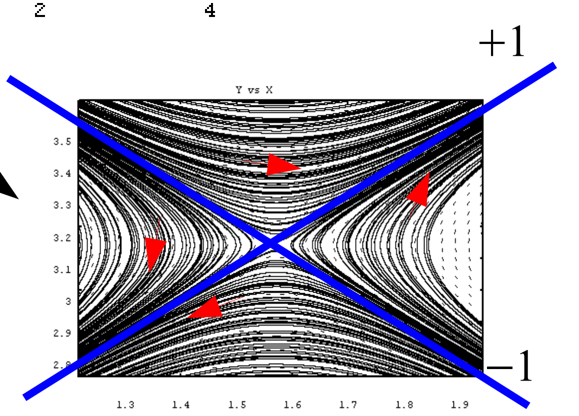


$$J=\begin{bmatrix} 0 & \cos(y) \\ -\sin(x) & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{(3\pi/2+2k\pi,2k'\pi)}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} J_{(\pi/2+2k\pi,\,\pi+2k'\pi)}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\lambda=\pm 1$$

$$J_{(3\pi/2+2k\pi\,,\pi+2k'\pi)}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} J_{(\pi/2+2k\pi,2k'\pi)}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\rightarrow\lambda=\pm i$$

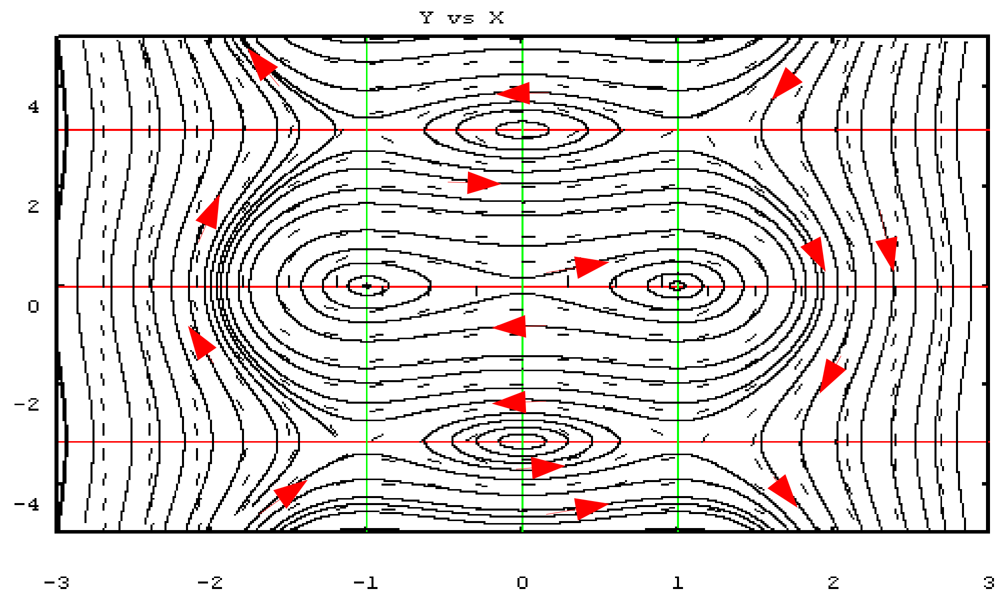
Points de selle



Exercice 3.4 - Solution

$$\frac{dx}{dt} = \sin(y)\,;\ \frac{dy}{dt} = x - x^3\,;$$

(+/-1, 2kπ) points focaux isolé?
(0,π+2kπ) points focaux isolé?
(+/-1,π+2kπ) points de selle?
(0,2k'π) points de selle?



$$J_{(\pm 1, 2k\pi)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \lambda = \pm i\sqrt{(2)}$$

$$J_{(0, \pi+2k\pi)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \lambda = \pm i$$

$$J_{(\pm 1, \pi+2k\pi)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \lambda = \pm\sqrt{(2)}$$

$$J_{(0, 2k\pi)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda = \pm 1$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & \cos(y) \\ 1-3x^2 & 0 \end{bmatrix}$$

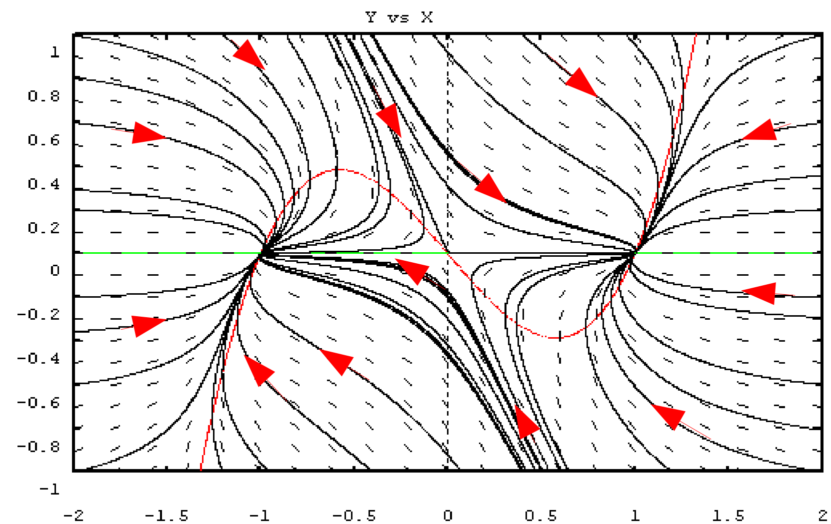
Et le sens de parcours?

Exa.miner le signe de dx/dt pour voir le sens de parcours!

Exercice 3.4 - Solution

$$\frac{dx}{dt} = y + x - x^3 \,;\, \frac{dy}{dt} = -y\,,$$

(0,0) point de selle?
(+/-1,0) points stables/instables?



$$J = \begin{bmatrix} 1-3x^2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$J_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \lambda = \pm 1$$

$$J_{(1,0)} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \lambda = -2, -1$$

$$J_{(-1,0)} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \lambda = -2, -1$$

Points fixes stables

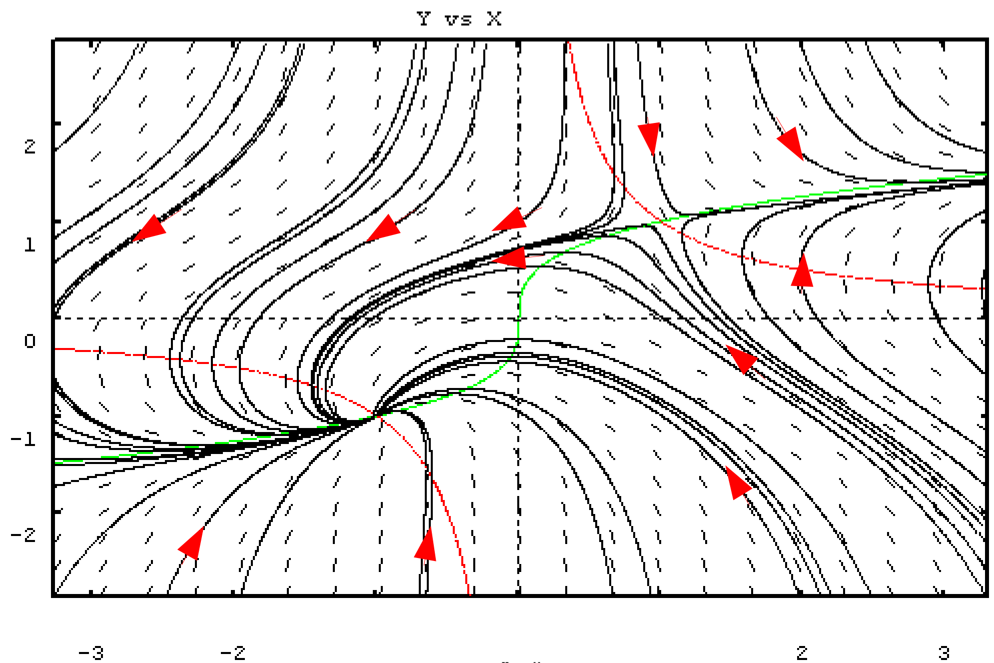
Le sens de parcours est donné par la convergence des trajectoires sur les deux points fixes.

Exercice 3.4 - Solution

$$\frac{dx}{dt} = xy - 1\ ;\ \frac{dy}{dt} = x - y^{3}.$$

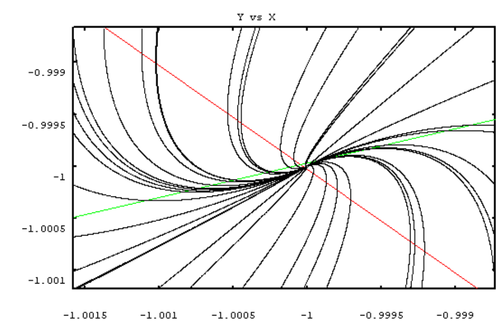
(-1,-1) point focal stable?
(1,1) point de selle?

$$J = \begin{bmatrix} y & x \\ 1 & -3y^2 \end{bmatrix}$$



$$J_{(-1,-1)} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \lambda = -2$$

$$J_{(1,1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \lambda = -1 \pm \sqrt{(5)}$$



Exercice 3.5

Montrer que le système :

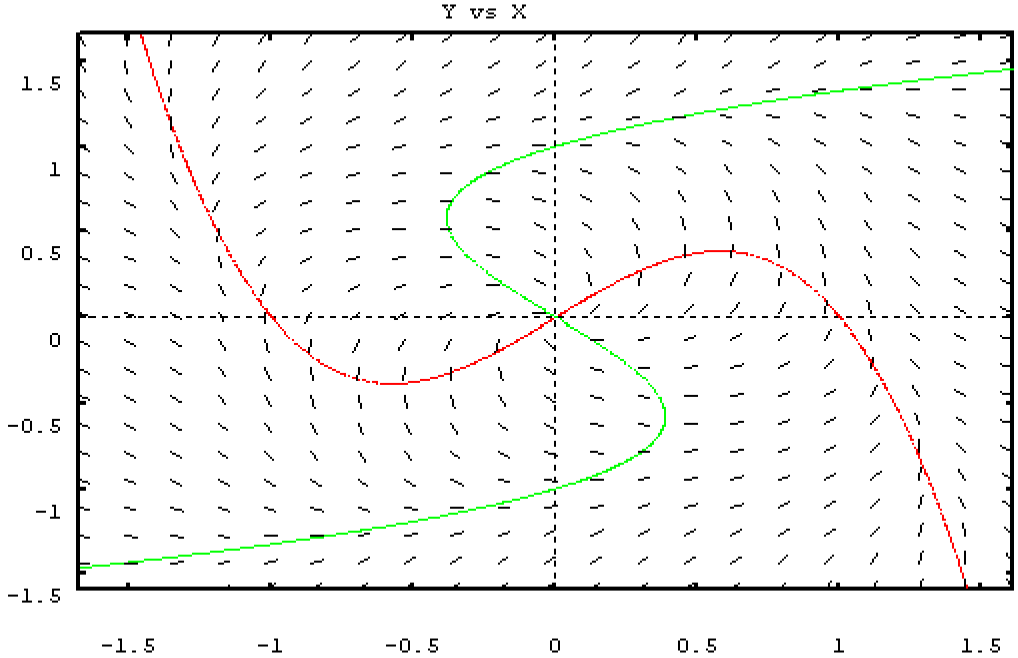
$$\frac{dx}{dt} = x - y - x^3;$$
$$\frac{dy}{dt} = x + y - y^3.$$

Possède un cycle limite, en utilisant le théorème de Poincaré-Bendixon.

Exercice 3.5 - Solution

Nature du point fixe en (0,0)

$$J = \begin{bmatrix} 1-3x^2 & -1 \\ 1 & 1-3y^2 \end{bmatrix}$$



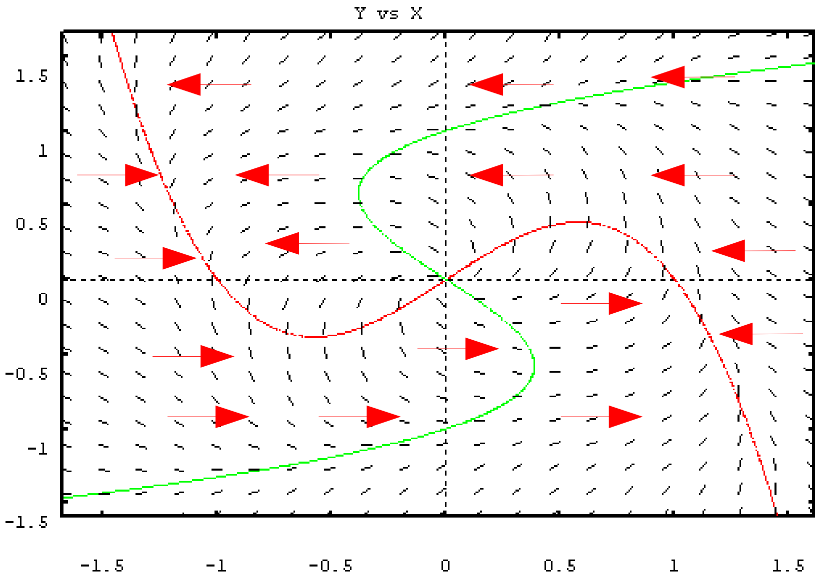
$$J_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \lambda = 1 \pm i$$

Point focal instable

Exercice 3.5 - Solution

Existence d'une zone de confinement

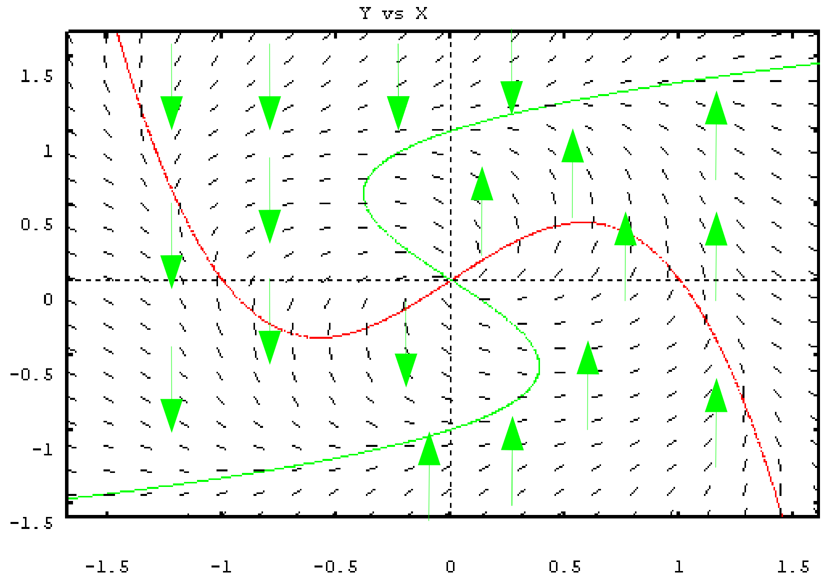
$$\frac{dx}{dt} > 0 \rightarrow y < x - x^3$$



Exercice 3.5 - Solution

Existence d'une zone de confinement

$$\frac{dy}{dt} > 0 \rightarrow x > y^3 - y$$



Exercice 3.5 - Solution

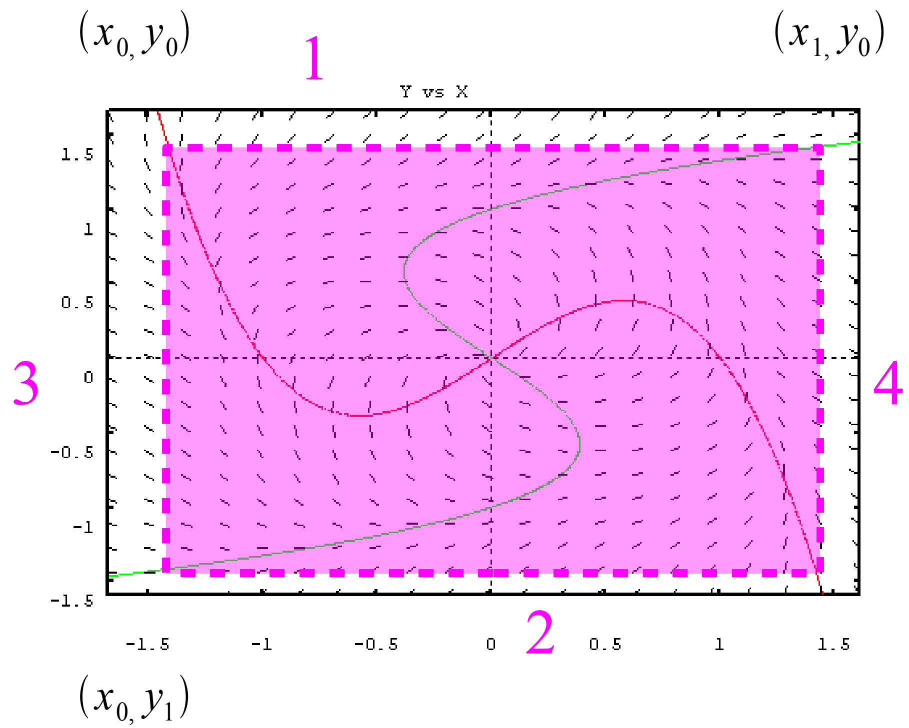
Existence d'une zone de confinement

Ligne 1 $\frac{dy}{dt} < 0$

Ligne 2 $\frac{dy}{dt} > 0$

Ligne 3 $\frac{dx}{dt} > 0$

Ligne 4 $\frac{dx}{dt} < 0$



Condition d'existence de cette zone :
Il doit exister un point tel que

$$y_0 = x_0 - x_0^3;$$
$$x_1 = y_0^3 - y_0;$$
$$x_0 = y_1^3 - y_1;$$

Avec $x_1 = -x_0;\ y_1 = -y_{0.}$

Cela donne la condition : $1-(1-y_0^2)(1-y_0^2(1-y_0^2)^2)=0\,!$ $\longrightarrow$ $y_0 \approx \pm 1.41$

Exercice 3.5 - Solution

Existence d'une zone de confinement : autre méthode

On passe en coordonnées polaires :

$$r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

Une expression utile est alors :

$$r\frac{dr}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}$$

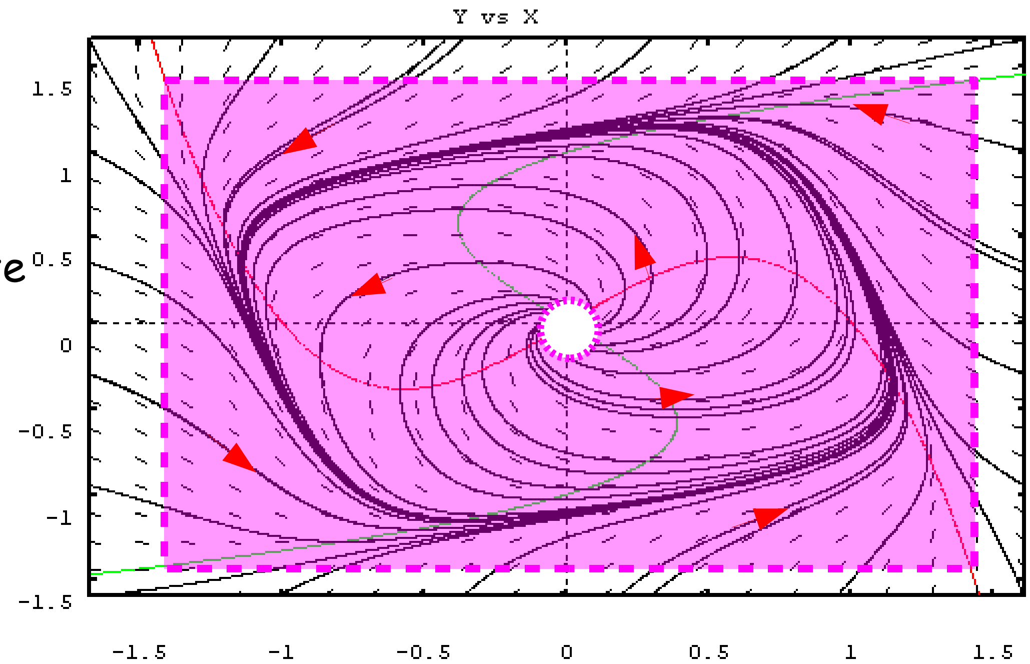
Dans notre cas, cela donne :

$$r\frac{dr}{dt} = x^2 + y^2 - (x^4 + y^4).$$

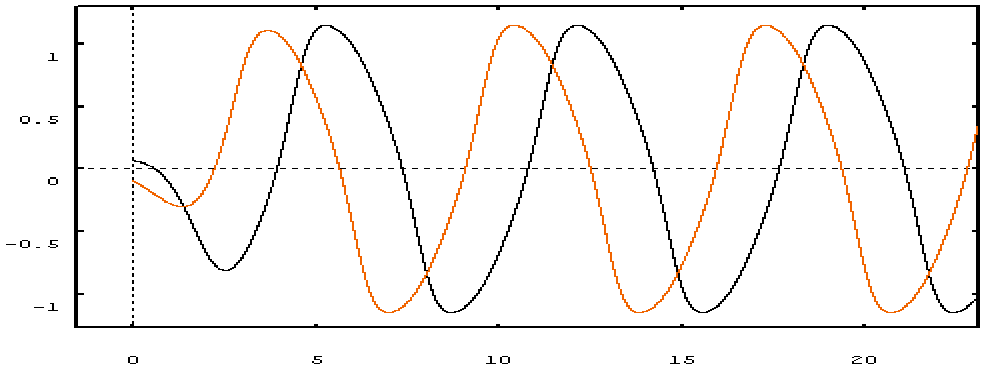
Cette expression permet de conclure : en effet , pour r assez grand, dr/dt devient négatif. Les trajectoires sont toutes rentrantes! LA zone de confinement est ici un disque.

Exercice 3.5 - Solution

Confirmation numérique par winpp de l'existence d'un cycle limite



$x(t)$, $y(t)$



Exercice 3.6

Un modèle global du cycle cellulaire basé comme celui du cours sur l'interaction entre les cyclines et une kinase cycline-dépendante, se traduit, aprés changement de variable, par les équations suivantes (Tyson 1991) :

$$\frac{du}{dt} = 10\,(v-u)\left(\frac{1}{100}+u^2\right)-u\,;$$

$$\frac{dv}{dt} = c-u.$$

où *u(t)* est proportionnel à la concentration en complexe cdc2-cycline, et *v(t)* proportionnel à la concentration en cyclines. Le paramètre *c* est ajustable.

(1) Montrer que pour une gamme du paramètre *c*, le système a un cycle limite.

(2) Caractériser le comportement lorsque *c* est légèrement en dessous de la gamme précédente.

Exercice 3.5 - Solution

Exercice 3.5 - Solution

Exercice 3.5 - Solution

Exercice 3.5 - Solution