Задача 1

а) Найдем производную данного нам выражения по p:

$$\left(Np\cdot(1-p)^{N-1}\right)' =$$

$$= N(1-p)^{N-1} - Np(N-1)(1-p)^{N-2} =$$

$$= N(1-p)^{N-2}\left(1-p-p(N-1)\right) =$$

$$= N(1-p)^{N-2}(1-p-pN+p) =$$

$$= N(1-p)^{N-2}(1-pN)$$

Приравняем её к 0:

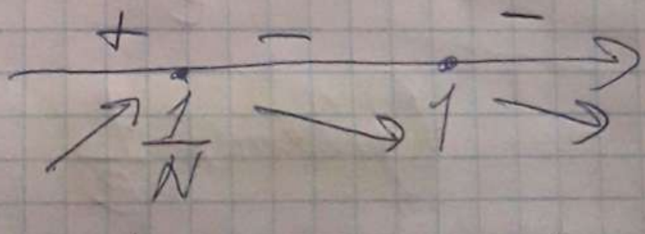
$$N(1-p)^{N-2}(1-pN)=0$$

$(1-p)^{N-2}=0$ $1-pN=0$

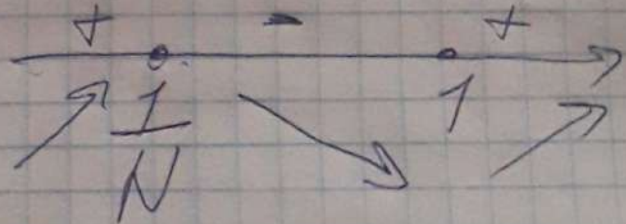
$1-p=0$ $pN=1$

$p=1$ $p=\frac{1}{N}$

Если N чётно:



Если N нечётно:



Максимум достигается в точке $\frac{1}{N}$

Ответ: $\frac{1}{N}$

б) $\lim\limits_{N\to\infty} N\cdot\frac{1}{N}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{N-1} = \lim\limits_{N\to\infty}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{(N-1)} =$

$$= \lim\limits_{N\to\infty}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{N}$$

Знаем, что $\lim\limits_{N\to\infty}\left(1+\frac{1}{N}\right)^{N} = e$

(замечательный предел)

Тогда $\lim\limits_{N\to\infty}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{N}\right)^{N}}\right) =$

$$= \lim\limits_{N\to\infty}\left(\frac{1}{\left(\frac{N+1}{N}\right)^{N}}\right) =$$

$$= \lim\limits_{N\to\infty}\left(\frac{1}{\left(\frac{N+1}{N}\right)}\right)^{N} =$$

$$= \lim\limits_{N\to\infty}\left(\frac{N}{N+1}\right)^{N} = \lim\limits_{N\to\infty}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{N} =$$

$$= \frac{1}{e}$$

Ответ: $\frac{1}{e}$