

# Cinemática das Colisões em Altas Energias

**Sandro Fonseca de Souza**

# Sumário

- Motivações
- Transformações de Galileu
- Transformações de Lorentz
- Breve introdução sobre os conceitos de Relatividade Restrita
- Sistemas de referência para processos de colisão em FAE
- Variáveis cinemáticas
- Variáveis de Mandelstam

# Bibliografia Sugerida

- Transformações de Galileu e de Lorentz: um estudo via teoria de grupos ([link](#))
- E. Byckling and K. Kajantie - Particle Kinematics, March 1971, Finland.
- R. Hagedorn - Relativistic Kinematics: A guide to the Kinematic problems of High Energy Physics
- S. Novaes - Cinemática Relativística, UNESP-SP, Brasil
- Baird, S - Accelerators for pedestrians, AB-Note-2007-014,CERN. Geneva. AB Department ([link](#))

# Motivações

- Introdução dos princípios básicos, aplicações práticas e métodos conhecidos dos aspectos da FAE que são baseados puramente na cinemática.
- Cinemática pode ser definida como “a geometria do movimento”
- Cinemática relativística é uma aplicação da relatividade especial para reações com partículas elementares.

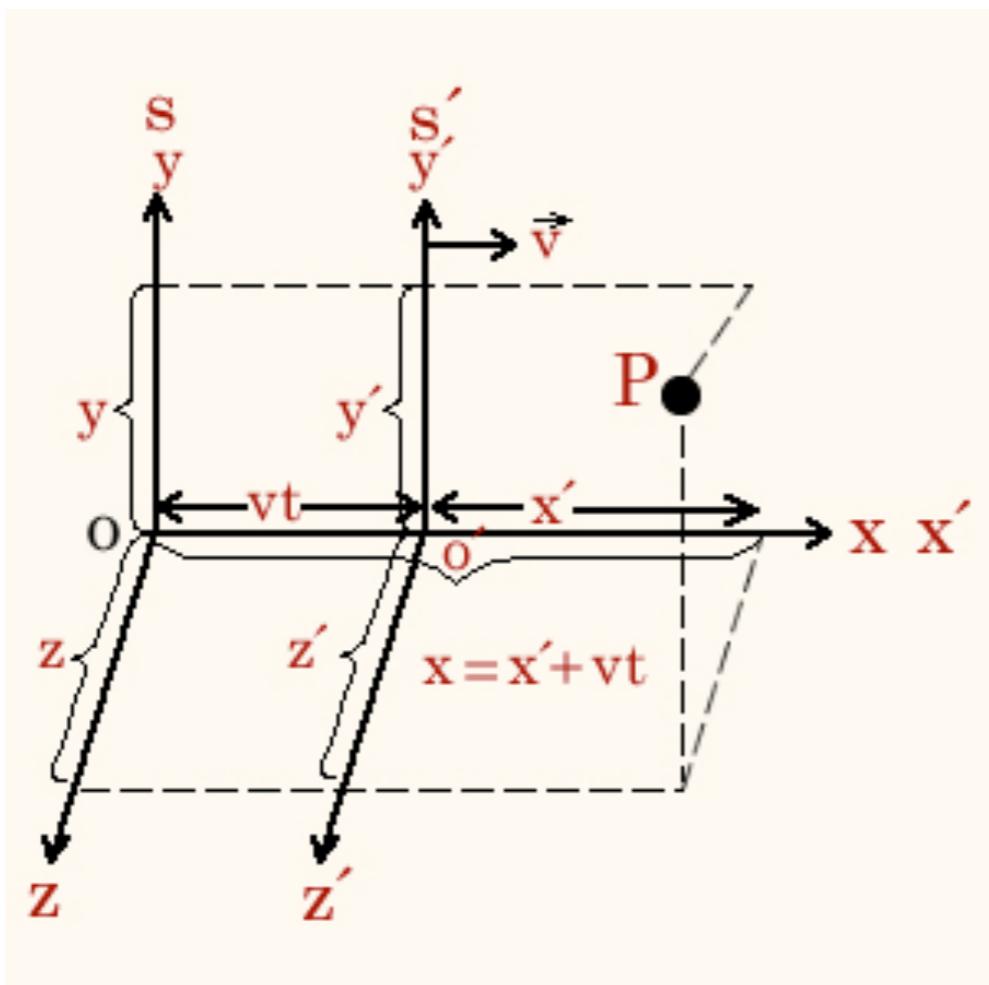
# Motivações

- Do ponto de vista puramente cinemático, partículas são completamente caracterizadas por suas energias e momenta (ex. seus quadrimomenta  $\mathbf{p}$ );
- As reações de partículas observáveis são portanto os decaimentos ou colisões;
- Os números quânticos internos são irrelevantes para a cinemática das partículas elementares.

# ...na Mecânica Clássica

## (Transformações de Galileu)

- As leis básicas da Mecânica assumem sua forma mais simples nos referenciais inerciais.
- Se o referencial ( $S'$ ) se move em relação a ( $S$ ) com velocidade constante  $\mathbf{V}$  e as origens  $O$  e  $O'$  dos dois referenciais coincidem no instante  $t = t' = 0$ , a relação entre as coordenadas  $(x,y,z,t)$  e  $(x',y',z',t')$  são dadas por:



$$\begin{aligned}x' &= x - Vt \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= t\end{aligned}$$

# ...na Mecânica Clássica (Transformações de Galileu)

- Da qual decorre a lei de composição de velocidades:

$$v' = v - V$$

onde  $v$  e  $v'$  são velocidades relativas a ( $S$ ) e ( $S'$ ), respectivamente.

- Decorre também a igualdade das acelerações:

$$\frac{dv}{dt} = a = a' = \frac{dv'}{dt'}$$

- Como a transformação de Galileu não afeta as distâncias entre partículas nem a massa, também não afeta uma força  $\mathbf{F}$  que só dependa dessas distâncias (como a gravitação), de modo que

$$F = ma \Rightarrow F' = m'a' \quad \text{onde} \quad (m' = m)$$

e a lei básica da dinâmica não se altera.

# ...na Mecânica Clássica

- Princípio de Relatividade da Mecânica (Galileu): É impossível detectar um movimento retilíneo uniforme de um referencial em relação a outro qualquer por qualquer efeito sobre as leis da dinâmica. (experiências feitas no convés de um navio, com as escotilhas fechadas, que seriam incapazes de distinguir se o navio estaria ancorado ou em MRU).
- Esse princípio deixa de valer para referenciais não inerciais: aparecem efeitos detectáveis sobre as leis da mecânica através das forças de inércia.

# ...na Mecânica Clássica

- Se procurarmos estender a Eletrodinâmica, deparamo-nos imediatamente com um problema: decorre das leis da eletrodinâmica que a luz se propaga, no vácuo, com velocidade  $c$ . Admitindo que isso vale num dado referencial inercial, e que valem as leis da Mecânica Clássica, o resultado não poderia valer num outro referencial inercial em MRU em relação ao primeiro com velocidade  $V$ , pela lei de composição de velocidades de Galileu, seria:

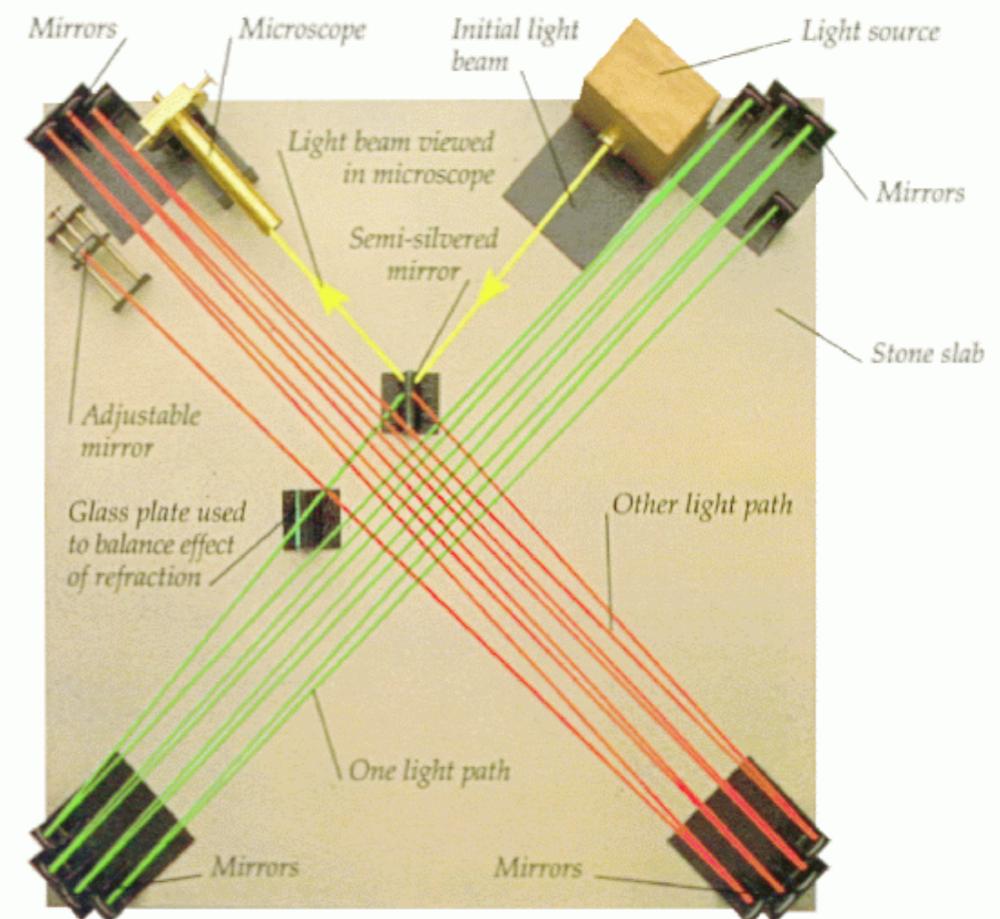
$$c' = c - V$$

e  $c' \neq c$  (e  $c'$  variaria com a direção de propagação), contradizendo o princípio de relatividade no caso da Eletrodinâmica.

A validade das equações de Maxwell estaria restrita então a um referencial inercial privilegiado, onde a velocidade da luz é  $c$  em todas as direções.

# ...o experimento de Michelson e Morley

- Deveria ser possível detectar um MRU em relação ao éter usando a lei de Galileu de composição de velocidades, a velocidade da luz num referencial em movimento relativo ao éter deveria ser diferente em direções diferentes.
- Numa série de experiências realizadas entre 1881 e 1887, Michelson e Morley procuraram detectar esses desvios (muito pequenos) usando o interferômetro de Michelson.



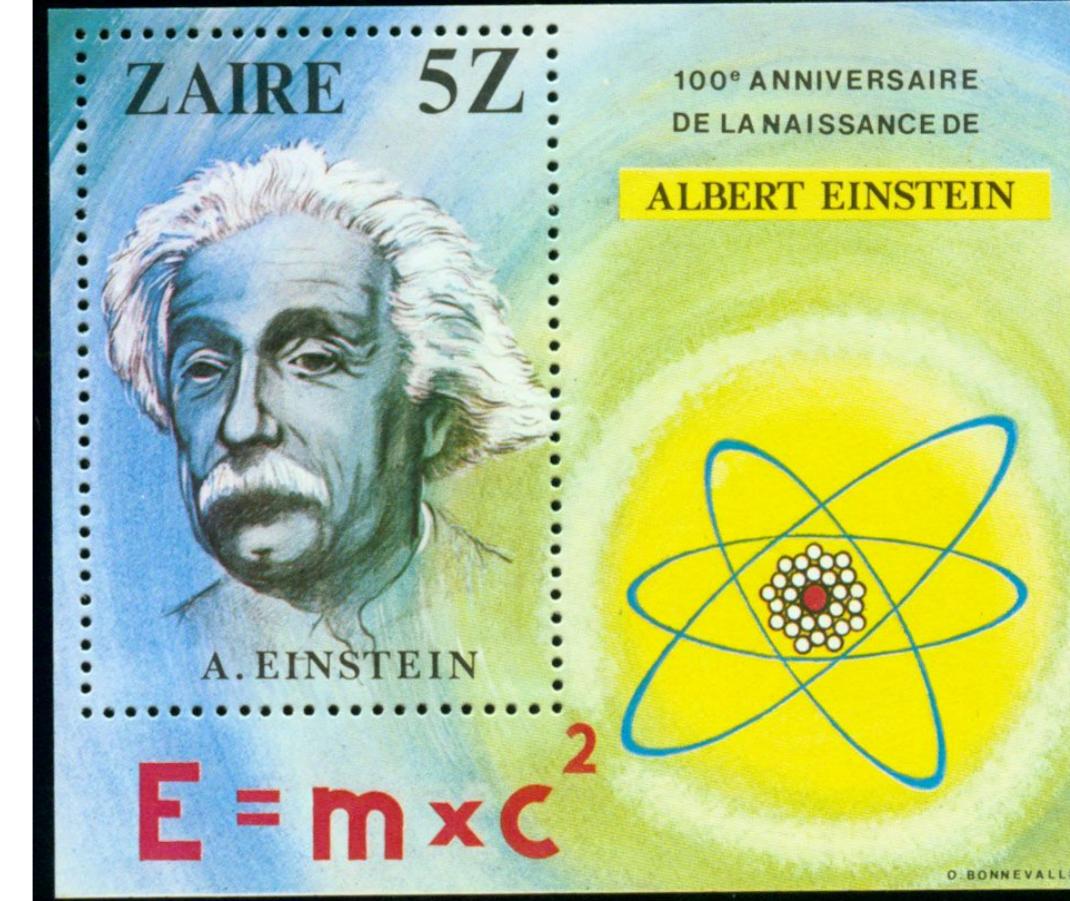
# ...o experimento de Michelson e Morley

- A experiência foi repetida muitas vezes, com diferentes orientações da montagem, chegando-se à conclusão que a velocidade da luz é constante e que a hipótese de um éter estacionário estava incorreta.
- Assim o princípio da relatividade aplica-se a todas as leis físicas. As equações de Maxwell são corretas e, nesse caso, a mecânica newtoniana e as transformações de Galileu não podem estar corretas.

# ...Postulados:

(1) As leis físicas são as mesmas em todos os referenciais inerciais.

(2) A velocidade da luz no vácuo,  $c$ , é a mesma em todas as direções e em todos os referenciais inerciais, e é independente do movimento da fonte.



Esses dois princípios, porém, são incompatíveis com a mecânica newtoniana, tornando necessário modificá-la. As modificações necessárias, tomando (1) e (2) como pontos de partida, foram propostas por Albert Einstein em 1905.

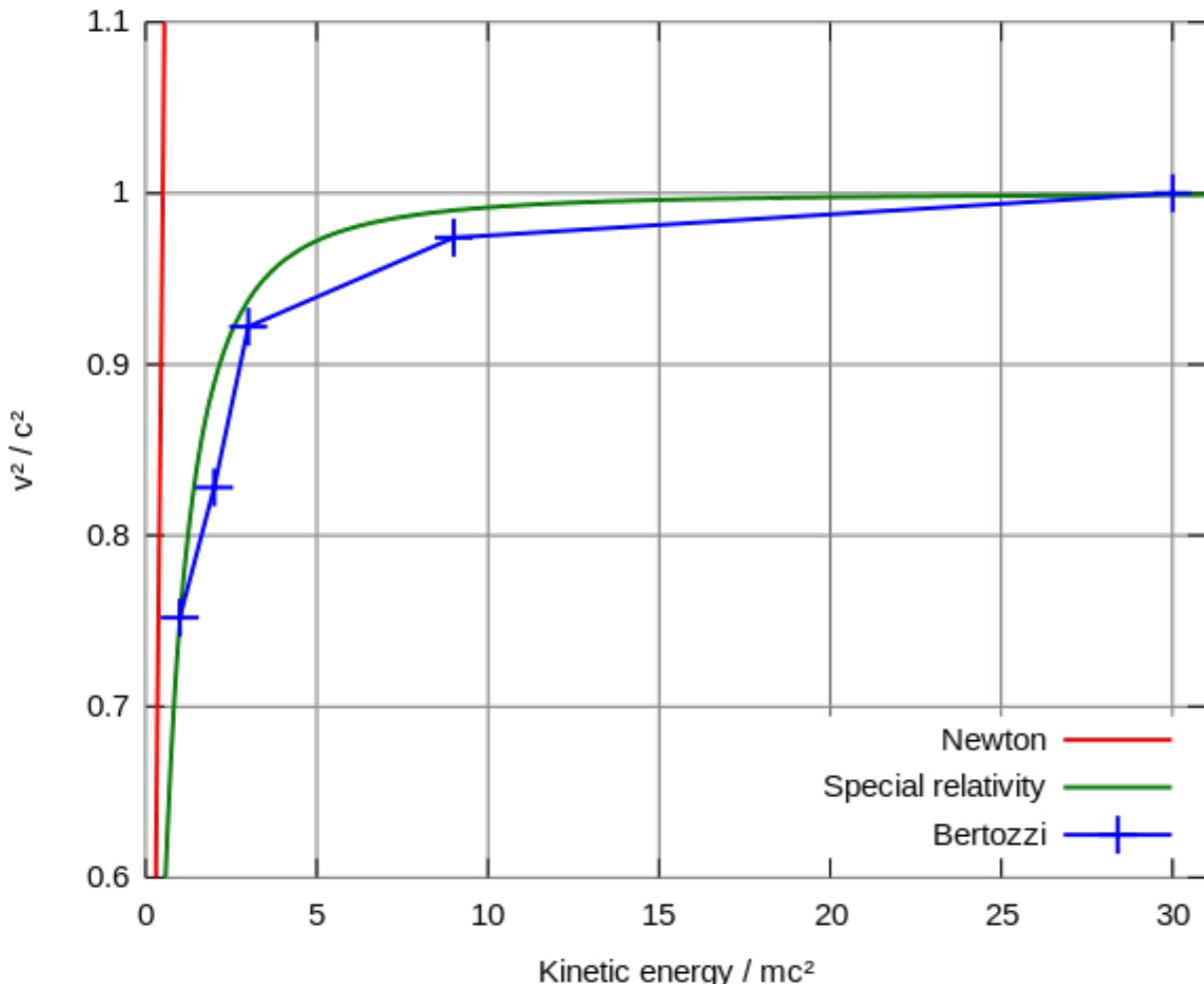
# Experimento de Bertozzi



Cinemática das Colisões em Altas Energias

# Velocidade Limite

[https://en.wikipedia.org/wiki/Tests\\_of\\_relativistic\\_energy\\_and\\_momentum](https://en.wikipedia.org/wiki/Tests_of_relativistic_energy_and_momentum)



- Os dados do experimento Bertozzi mostram estreita concordância com a relatividade restrita. Energia cinética de cinco faixas: 0,5, 1, 1,5, 4,5, 15 MeV (ou 1, 2, 3, 9, 30 em  $mc^2$ ).
- Velocidade: 0,752, 0,828, 0,922, 0,974, 1,0 em  $c$  (ou 0,867, 0,910, 0,960, 0,987, 1 em  $c^2$ ).

# ...Simultaneidade

- “Se um evento 1 ocorre em P1 no instante  $t_1$ , sendo marcado pela emissão de um sinal luminoso que parte de P1 nesse instante, e o mesmo vale para P2 em  $t_2$  (evento 2), dizemos que estes dois eventos são simultâneos ( $t_1=t_2$ ), enquanto o ponto de encontro dos dois sinais luminosos é o ponto médio do segmento P1P2.” (Definição de simultaneidade segundo Einstein)

Essa definição implica imediatamente que a simultaneidade de eventos distantes não tem caráter absoluto: dois eventos simultâneos num particular referencial S podem não ser simultâneos noutro referencial inercial S' que se move em relação a S com MRU.



# ... Transformação de Lorentz

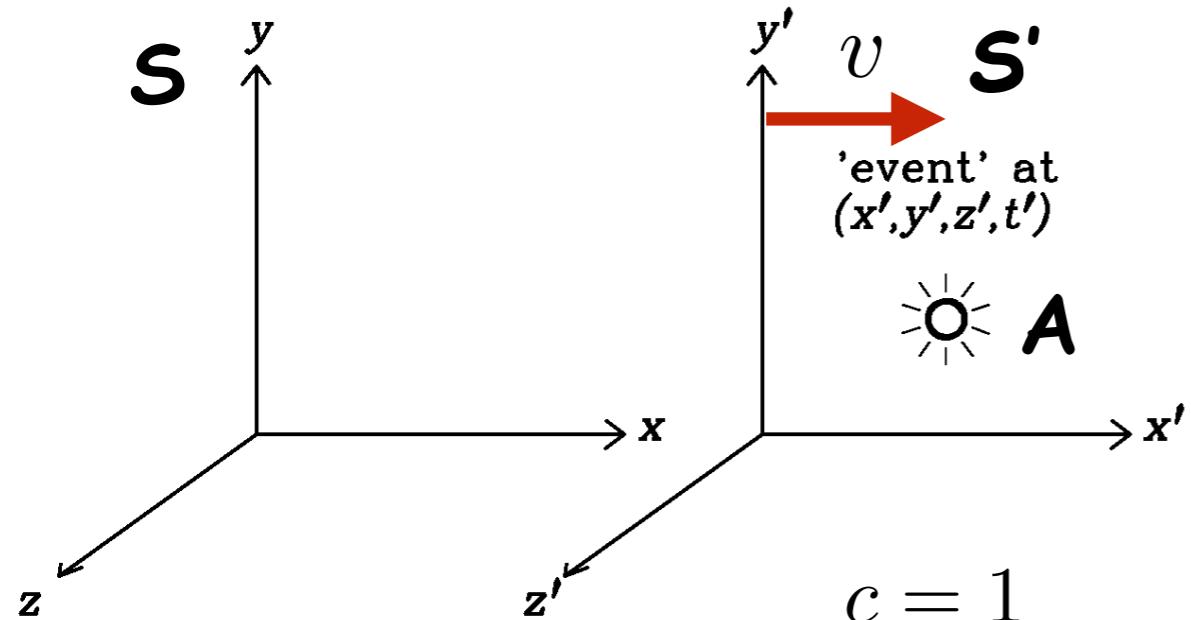
- Para encontrar a transformação que substituisse a de Galileu, era conveniente ter uma imagem bastante concreta de um referencial onde se emprega a definição de Einstein de simultaneidade.
- A transformação  $(x,y,z,t) \rightarrow (x',y',z',t')$  tinha de satisfazer as seguintes condições:
  - (i) Um MRU em relação a  $(S)$  também deve ser MRU em  $(S')$ .
  - (ii) Para  $V=0$  ( $V$  é a velocidade de  $S'$  em relação a  $S$ ), a transformação deve reduzir-se a identidade.
  - (iii) Se um sinal luminoso é enviado de  $O=O'$  em  $t=t'=0$ , a sua frente de onda deve propagar-se com velocidade  $c$  em ambos os referenciais, de modo que:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0 \Leftrightarrow x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0$$

E essa é uma transformação necessariamente linear.

# Transformações de Lorentz

$$v_x = |v| = v$$



- Considerando um ponto A no espaço-tempo, onde:
    - ▶ S pode ser descrito  $(x, y, z, t)$
    - ▶ e S' (em movimento) pode ser descrito  $(x', y', z', t')$
- (1)** Considerando que o sistema S' se move com uma velocidade constante  $v$  ao longo do eixo x

$$S \Rightarrow S'$$

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma(t - vx) \end{aligned}$$

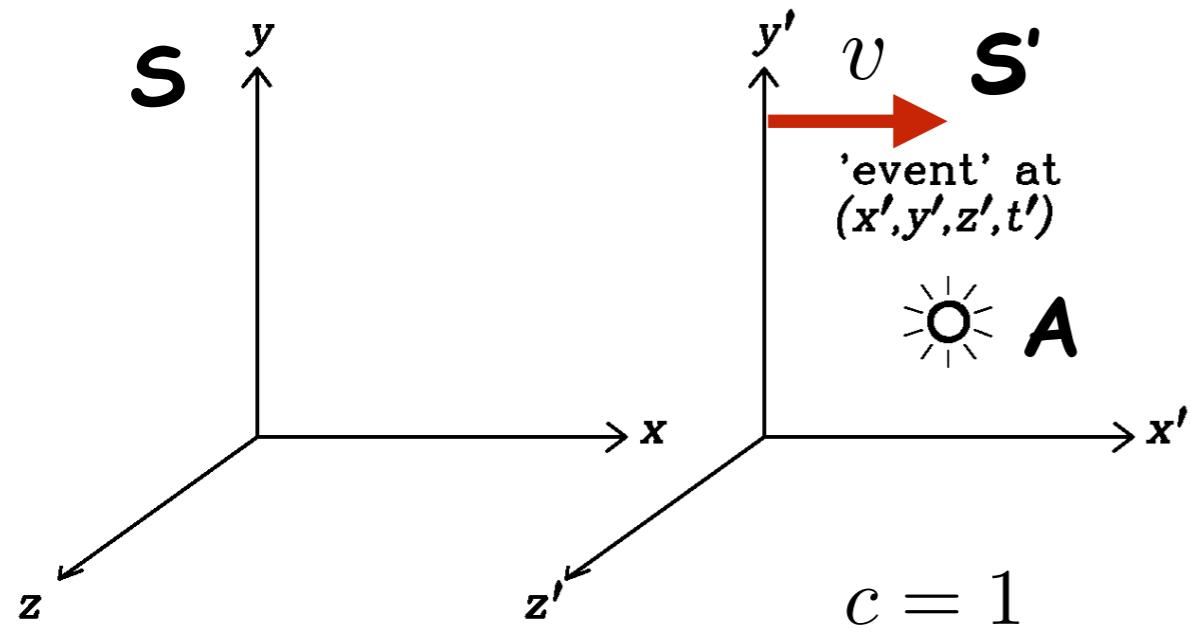
$$S' \Rightarrow S$$

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + vt) \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma(t' + vt) \end{aligned}$$

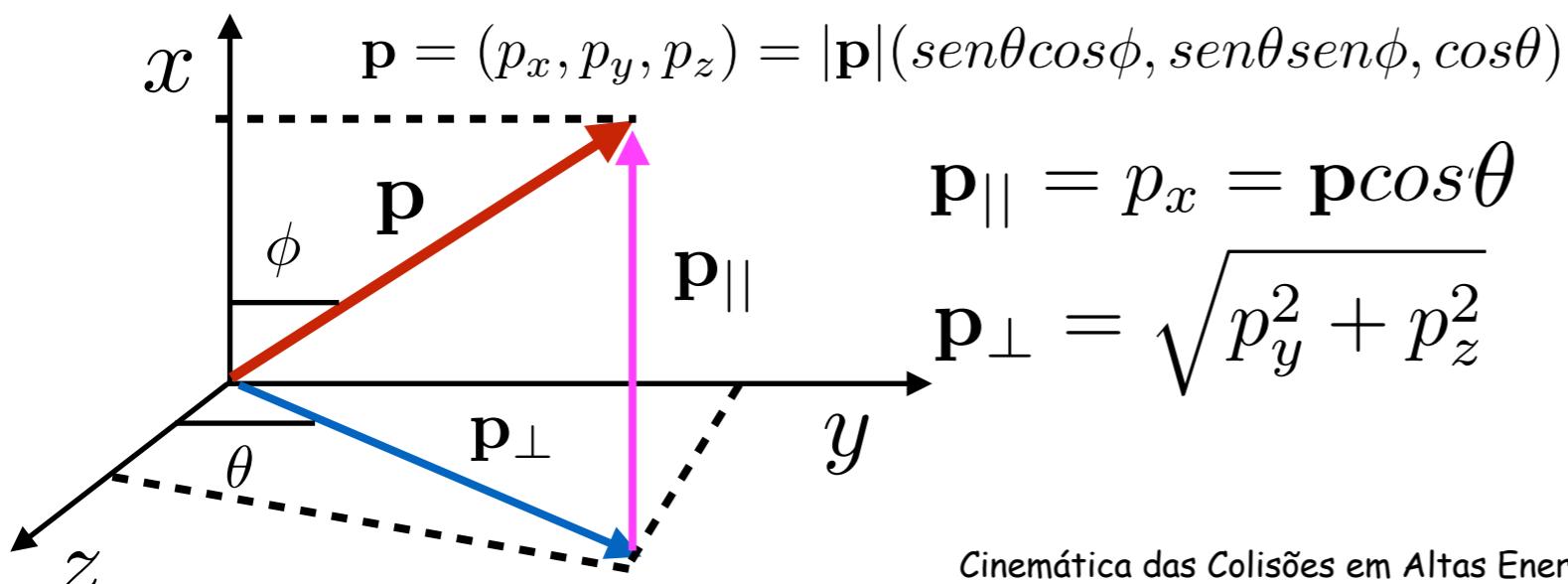
fator de Lorentz  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}$

# Transformações de Lorentz

$$v_x = |v| = v$$



**fator de Lorentz**  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}$



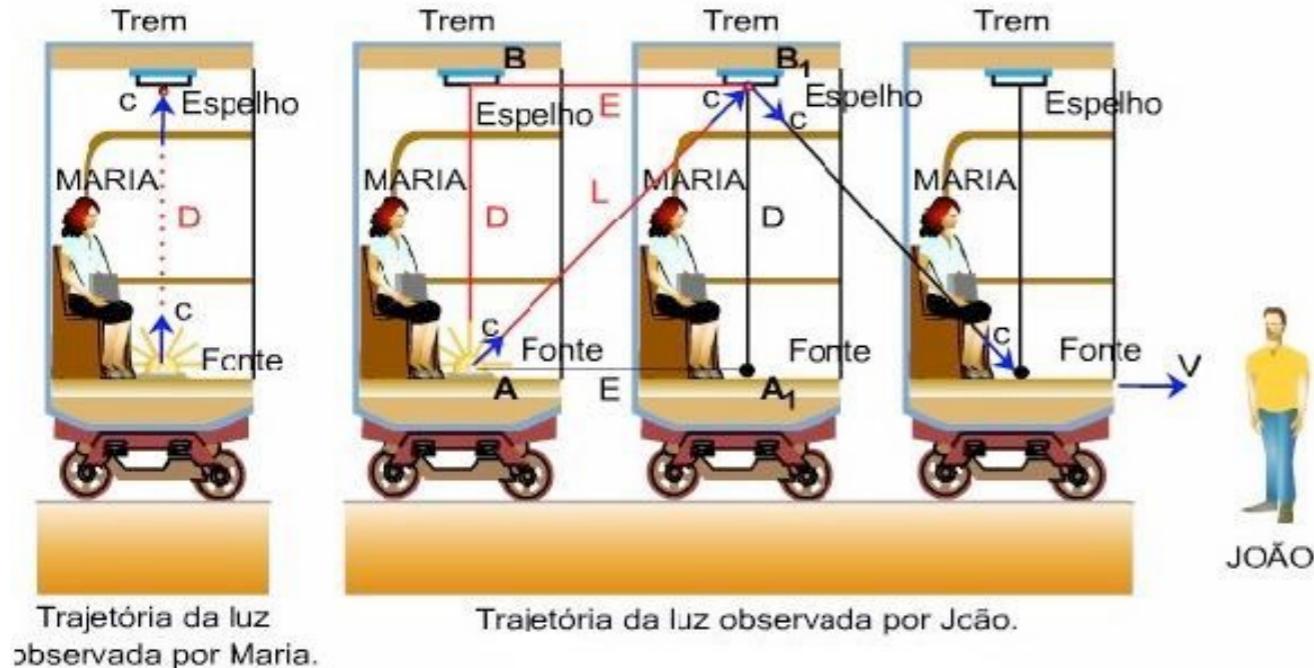
- Considerando o quadrimomento
    - ▶ **S** pode ser descrito  $\mathbf{p} \equiv (\mathbf{E}, \mathbf{p}) = (\mathbf{E}, p_x, p_y, p_z)$
    - ▶ e **S'** (**em movimento**) pode ser:
- $\mathbf{p}' \equiv (\mathbf{E}', \mathbf{p}') = (\mathbf{E}, p'_x, p'_y, p'_z)$
- ▶ As transformações de Lorentz para o quadrimomenta são:

$$S \Rightarrow S'$$

$$\begin{aligned} p'_x &= \gamma(p_x - vE) \\ p'_y &= p_y \\ p'_z &= p_z \\ E' &= \gamma(E - vp_x) \end{aligned}$$

# Consequências das TL

## 1) Dilatação do tempo:



O tempo não é mais absoluto,  
depende do referencial!!!

$$\Delta t_0 = \frac{2D}{c}$$

Por Pitágoras, chega-se que:

$$\Delta t^2 = \left( \frac{2D}{c} \right)^2 \left( \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) \rightarrow \Delta t = \gamma \cdot \Delta t_0$$

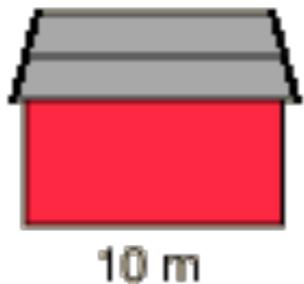
onde:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad c = 1$$

que é o fator de Lorentz.

# Consequências das TL

2) Contração do Espaço:



$$L = \frac{L_0}{\gamma}$$

$$L = L_0 \sqrt{1 - \beta^2}$$

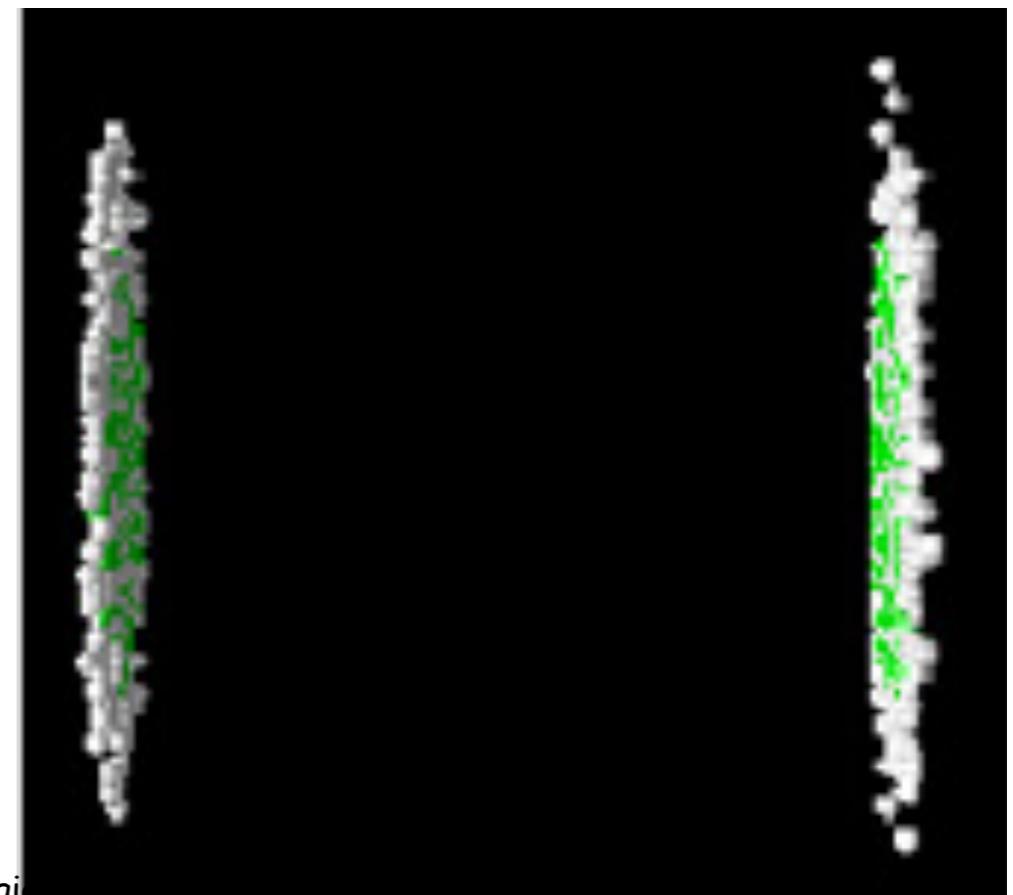
$$\beta = \frac{v}{c}$$

Ocorre com os núcleos colidindo a altas energias:

$$v = 0.9c$$



$$v = -0.9c$$



# Uma nova interpretação do momento

$$p = mv = m \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (\text{momento clássico})$$

$$p = m \frac{\Delta x}{\Delta t_0} \quad (\text{nova definição})$$

$$p = m \frac{\Delta x}{\Delta t_0} = m \frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{\Delta t}{\Delta t_0} = m \frac{\Delta x}{\Delta t} \gamma$$

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v}$$

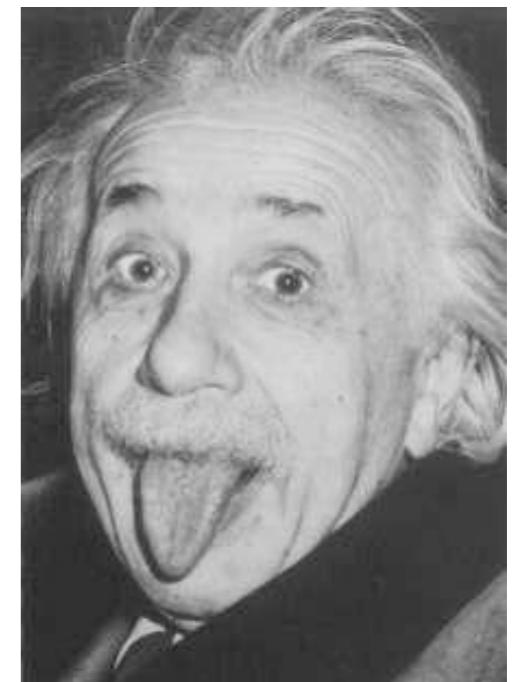
(momento relativístico)

# Uma nova interpretação da energia

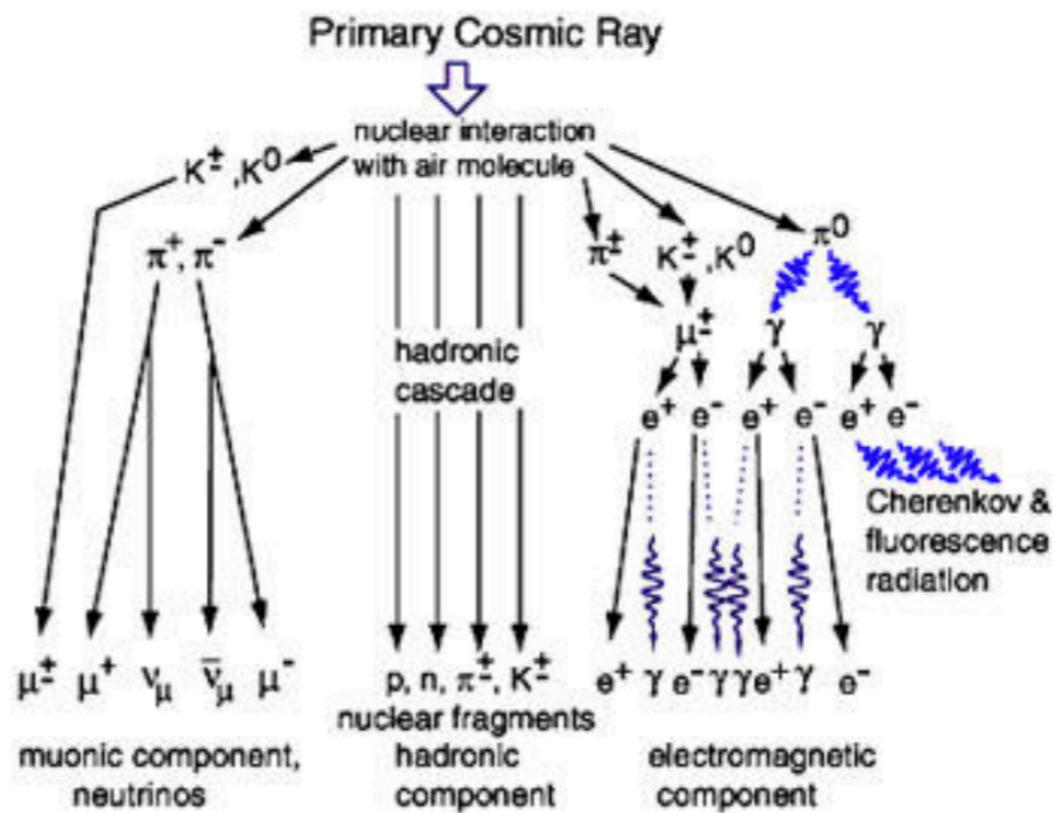
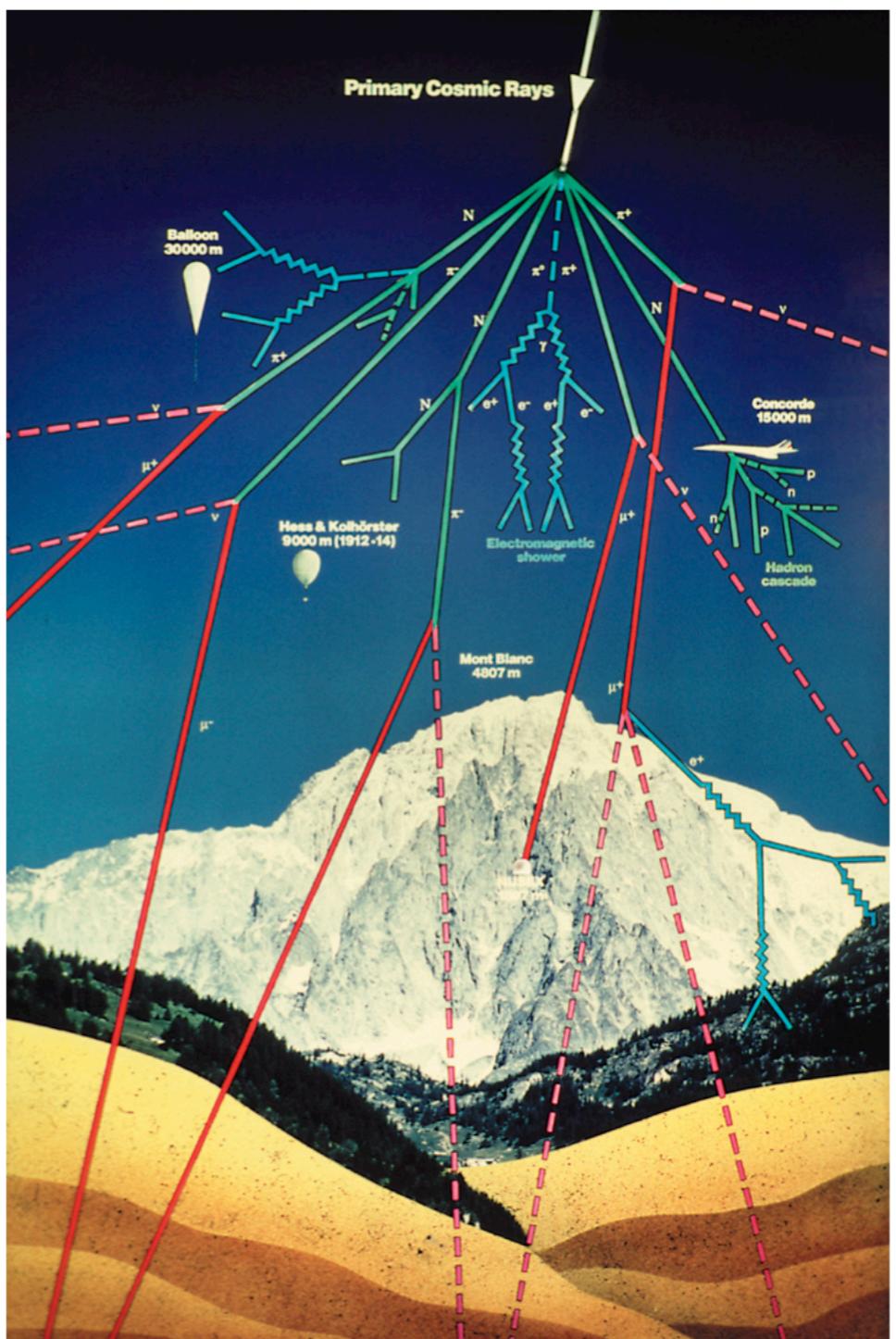
Massa como forma de energia

$$E_0 = mc^2$$

Energia de repouso



Corpo	Massa(Kg)	Energia equivalente
Eletron	$9,11 \times 10^{-31}$	$8,19 \times 10^{-14} \text{J}$ (= 511 keV)
Proton	$1,67 \times 10^{-27}$	$1,50 \times 10^{-10} \text{J}$ (= 938 MeV)
Atomo de uranio	$3,95 \times 10^{-25}$	$3,55 \times 10^{-8} \text{J}$ (= 225 GeV)
Particula de poeira	$1 \times 10^{-13}$	$1 \times 10^4 \text{J}$ (= 2 kcal)
Moeda pequena	$3,1 \times 10^{-3}$	$2,8 \times 10^{14} \text{J}$ (= 78 GW · h)



# Exercícios e Problemas

O tempo de vida médio dos múons em repouso é de  $2,20 \mu s$ . As medidas dos múons produzidos em um acelerador de partículas mostram que eles têm um tempo de vida de  $6,90 \mu s$ . Determine (a) a velocidade, (b) a energia cinética e (c) o momento destes múons no referencial do laboratório. A massa de um múon é 207 vezes maior que a do elétron.

Sabemos:

$$\Delta t_0 = 2,20 \mu s$$

$$\Delta t = 6,90 \mu s$$

$$m_\mu = 207 m_e$$

(a)

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{\Delta t}{\Delta t_0}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

$$\frac{\Delta t}{\Delta t_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad \Rightarrow \quad v = c \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta t_0}{\Delta t}\right)^2}$$

$$v = 2,998 \times 10^8 \sqrt{1 - \left(\frac{2,2}{6,90}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad v = 2,8415 \times 10^8 m/s$$

(b)

$$K = mc^2(\gamma - 1)$$

$$m_\mu = 207 \text{ } m_e = 0,1136 \text{ u}$$

$$c^2 = 9,315 \times 10^8 \text{ eV/u}$$

$$\gamma = \frac{\Delta t}{\Delta t_0} = 3,1364$$

$$K = mc^2(\gamma - 1) = 0,1136 \cdot 9,315 \times 10^8 (3,1364 - 1) \approx 226 \text{ MeV}$$

(c)

$$p = \gamma m v$$

$$1 \text{ eV} = 1,60 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$\gamma = \frac{\Delta t}{\Delta t_0} = 3,1364$$

$$m_\mu = 207 m_e = 0,1136 \text{ u} = 1,89 \times 10^{-28} \text{ kg}$$

$$v = 2,8415 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow p = 3,1364 \cdot 1,89 \times 10^{-28} \cdot 2,8415 \times 10^8 = 1,68 \times 10^{-19} \text{ kg m/s}$$

$$p = (1,68 \times 10^{-19} / 1,60 \times 10^{-19}) \cdot 2,998 \times 10^8 \approx 314 \text{ MeV/c}$$

Ou então:

$$(pc)^2 = K^2 + 2Kmc^2 \Rightarrow p = \frac{\sqrt{K^2 + 2Kmc^2}}{c}$$

$$p \approx 314 \text{ MeV/c}$$

# Definição de Quadrivetores

- Os vetores em coordenadas espaciais são definidos como objetos com três componentes que possuem propriedades de transformação particulares sobre um conjunto de transformações de coordenadas.
- Em Relatividade Restrita, estamos lidando com espaço-tempo quadridimensional, definido através de quatro vetores que configuram as quatro componentes de um objeto que têm propriedades de transformação particulares sob transformações de coordenadas espaço-tempo (transformações de Lorentz).

Considerando o tempo e a posição espacial de um quadrivetor

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv \underbrace{(ct, x, y, z)}$$

As componentes devem ter  
as mesmas unidades

Reescrevendo a transformação de Lorentz com a mesma notação:

$$(x^0)' = \gamma(x^0 - \beta x^1)$$

novamente, para velocidade ao longo de x (aqui  $x^1$ ).

$$(x^1)' = \gamma(x^1 - \beta x^0)$$

$$(x^2)' = x^2$$

$$(x^3)' = x^3$$

Observe a simetria quando as equações são escritas  
utilizando esta notação

# Notações de Einstein

## Einstein notation

From Wikipedia, the free encyclopedia

In [mathematics](#), especially in applications of [linear algebra](#) to [physics](#), the **Einstein notation** or **Einstein summation convention** is a notational convention that implies summation over a set of indexed terms in a formula, thus achieving notational brevity. As part of mathematics it is a notational subset of [Ricci calculus](#); however, it is often used in applications in physics that do not distinguish between [tangent](#) and [cotangent](#) spaces. It was introduced to physics by [Albert Einstein](#) in 1916.<sup>[1]</sup>

### Contents [hide]

- 1 [Introduction](#)
  - 1.1 [Statement of convention](#)
  - 1.2 [Application](#)
- 2 [Vector representations](#)
  - 2.1 [Superscripts and subscripts versus only subscripts](#)
  - 2.2 [Mnemonics](#)
  - 2.3 [Abstract description](#)
- 3 [Common operations in this notation](#)
  - 3.1 [Inner product \(hence also vector dot product\)](#)
  - 3.2 [Vector cross product](#)
  - 3.3 [Matrix-vector multiplication](#)
  - 3.4 [Matrix multiplication](#)
  - 3.5 [Trace](#)
  - 3.6 [Outer product](#)
  - 3.7 [Raising and lowering indices](#)
- 4 [See also](#)
- 5 [Notes](#)
- 6 [References](#)
- 7 [Bibliography](#)
- 8 [External links](#)

<http://www.fem.unicamp.br/~em421/semlI-1999/textos/ni.pdf>

# Notações de Einstein

Podemos escrever a forma tensorial como

$$(x^\mu)' = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda_\nu^\mu x^\nu \quad \mu = 0,1,2,3$$

2<sup>nd</sup> rank tensor

Podemos escrever o lambda no forma de uma matriz  $4 \times 4$ , onde a transformação de Lorenz acontece ao longo do eixo X

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Usando uma forma mais compacta para representar o quadrivetor utilizando a notação de Einstein, na qual a soma sobre índices repetidos é assumida como:

$$(x^\mu)' = \Lambda_\nu^\mu x^\nu \quad (\text{sum over } \nu \text{ assumed})$$

# Invariante de Lorentz

Um dos conceitos mais críticos na cinemática relativística é o dos invariantes relativísticos (invariantes de Lorentz, I), que são quantidades que são iguais, independentemente do referencial em que são avaliados.

Considerando:

$$I = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$$

Reescrevendo a equação acima com relação ao sistema de referência S'

$$\begin{aligned} I &= (\gamma x^0' + \gamma \beta x^1')^2 - (\gamma x^1' + \gamma \beta x^0')^2 - (x^2')^2 - (x^3')^2 \\ &= \gamma^2 (x^0')^2 + \gamma^2 \beta^2 (x^1')^2 + 2\gamma^2 \beta (x^0')(x^1') \quad \text{cancel} \\ &\quad - \gamma^2 (x^1')^2 - \gamma^2 \beta^2 (x^0')^2 - 2\gamma^2 \beta (x^0')(x^1') - (x^2')^2 - (x^3')^2 \\ &= \gamma^2 (1 - \beta^2) (x^0')^2 - \gamma^2 (1 - \beta^2) (x^1')^2 - (x^2')^2 - (x^3')^2 \\ &= (x^0')^2 - (x^1')^2 - (x^2')^2 - (x^3')^2 = I' \end{aligned}$$

I = I' Mesmo resultado em qualquer referencial. É um invariante de Lorentz

reminder

$$\gamma^2 (1 - \beta^2) = \frac{1}{(1 - \beta^2)} (1 - \beta^2) = 1$$

# Notação

Os cálculos na cinemática relativística dependem fortemente do uso de quantidades invariantes de Lorentz, como veremos.

Para escrever este invariante de uma forma mais compacta, definimos a métrica  $g_{\mu\nu}$ :

Este é um tensor de segunda ordem que pode ser representado por uma matriz 4x4:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad I = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$$

Summation  
convention

$x^\mu$  é referido como o quadrvetor posição-tempo contravariante.

Usando a métrica  $g_{\mu\nu}$  se define o quadrvetor covariante do tempo de posição:

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$$

Podemos, então, escrever nosso invariante compactamente como

$$I = x_\mu x^\mu$$

# Outros quadrivetores

$x^\mu$  é o quadrvetor arquetípico

Qualquer objeto de quatro componentes  $a^\mu$  É chamado de quadrvetor, se ele se transformar como  $x^\mu$  sob as transformações de Lorentz.

$$(a^\mu)' = \Lambda_\nu^\mu a^\nu$$

With  $\Lambda$  as defined earlier

$$a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu$$

$$a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu$$

$$\begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Technically, these are the elements of  $g^{-1}$ , but in this case  $g^{-1} = g$ .

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

# Produto escalar

Para quaisquer dois quadrivetores  $a^\mu$  e  $b^\mu$  o produto  $a_\mu b^\mu$  é invariante

Você deve provar esta relação:

Isso é conhecido como o produto escalar de a e b.

$$a \cdot b = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 = a_\mu b^\mu = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$a = (a^0, \vec{a}) \quad b = (b^0, \vec{b})$$

$$a^2 = a \cdot a = a_\mu a^\mu = (a^0)^2 - |\vec{a}|^2$$

$$a^\mu \left\{ \begin{array}{ll} \text{é tipo tempo, se} & a^2 > 0 \\ \text{é tipo espaço, se} & a^2 < 0 \\ \text{é tipo luz, se} & a^2 = 0 \end{array} \right.$$

# Quadrivetores Momento-Energia

A velocidade própria é usada para descrever o quadrivetor Momento-Energia

$$\vec{\eta} = \gamma \vec{v} \equiv \frac{d\vec{x}}{d\tau}$$

Tempo próprio

Isso faz parte do quadrivetor  
com  $\eta^0 = \gamma c$ .

$$\eta^\mu = (\eta^0, \vec{\eta})$$

$$\eta_\mu \eta^\mu = \gamma^2 (c^2 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2) = \gamma^2 c^2 (1 - v^2/c^2) = c^2 \quad (\text{que é invariante})$$

Define-se o trimomento relativístico como  $\vec{p} = m\vec{\eta}$  ( Em analogia com  $\vec{p} = m\vec{v}$ )

Também pode mostrar que isso é parte de um quadrivetor:  $p^\mu = m\eta^\mu = (\gamma mc, \gamma m\vec{v})$

A energia relativística é  $E = \gamma mc^2$ , onde m é a massa de repouso das partículas

E assim podemos escrever:

$$p^\mu = \left( \frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right) \quad p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - |\vec{p}|^2 = m^2 \eta_\mu \eta^\mu = m^2 c^2$$

Que é invariante

# Momento-Energia Relativística

Note que a definição  $E = \gamma mc^2$  é usada somente para partículas massivas

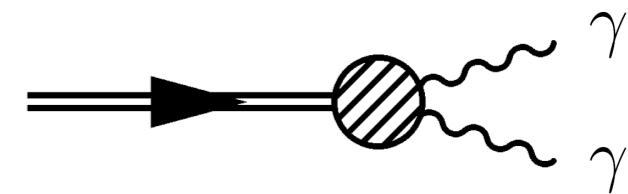
No caso de partículas sem massa como o fóton  $E = |\vec{p}|c$

Podemos “redefinir” a energia como:  $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$

O comprimento de onda de Broglie associado para uma partícula com momento é descrito por

$$\lambda = \frac{h}{p} \Rightarrow E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{h/p} = pc = |\vec{p}|c$$

# Noções e Convenções



Unidades Naturais

$$c = \hbar = 1$$

Exercício 0 : Quando um píon decai um  
dois fótons, qual a energia do fóton?

Coordenadas Espaço-Tempo  
Vetor contravariante

$$x^\nu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \vec{x}) = (t, x, y, z)$$

Momentum e Energia Relativística

$$p = \gamma \beta m \quad E = \gamma m \quad \mathbf{m} = \text{massa de repouso}$$

Vetor quadrimomentum

$$p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) = (E, \vec{p}) = (E, \vec{p}_T, p_z) = (E, p_x, p_y, p_z)$$

Momentum escalar de dois quadrvetores  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$$

Relação entre energia e momentum

$$E^2 = p^2 + m^2 \quad p^2 = p^\mu p_\mu = E^2 - |\mathbf{p}|^2 = m^2$$

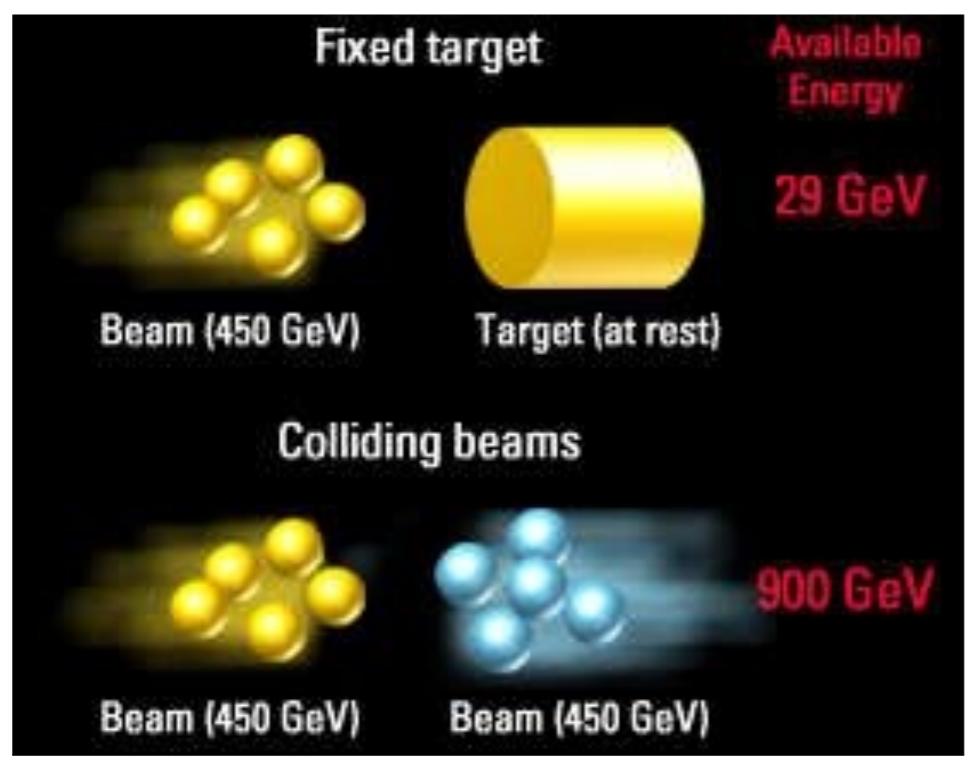
Velocidade da partícula:

$$\beta = \frac{\mathbf{p}}{E} \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} = E/m$$

# Sistemas de coordenadas

Consideremos a colisão de duas partículas de quadrimomentum

$$(E_a, \vec{p}_a) \quad (E_b, \vec{p}_b)$$



Na descrição destas colisões, dois sistemas de referência são usualmente utilizados:

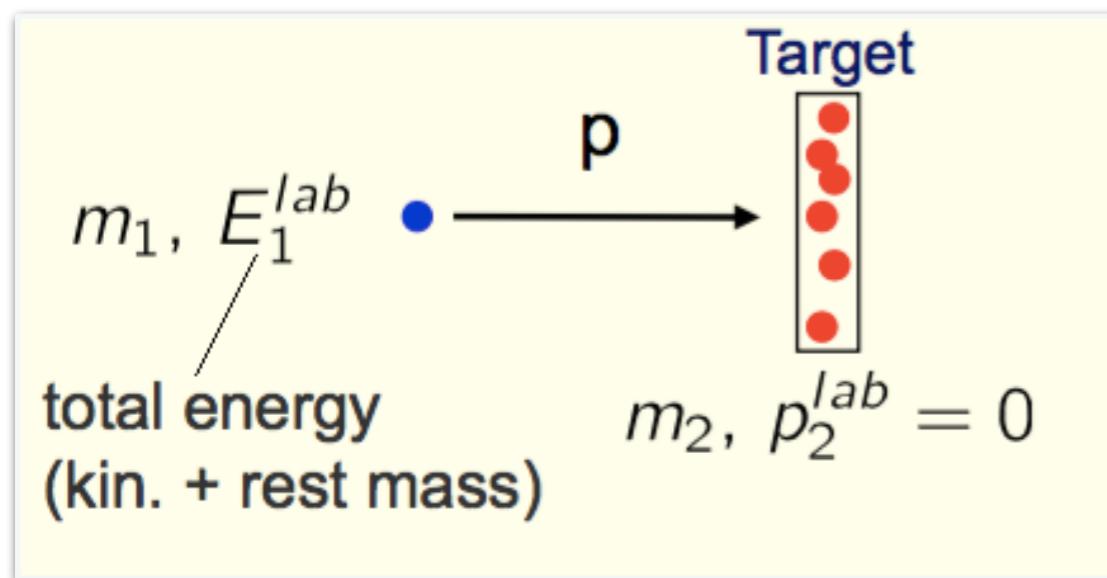
- **Sistema de Centro de Massa (CM):** é o sistema onde:

$$\vec{p}_a + \vec{p}_b = 0$$

- **Sistema de Laboratório (LAB):** é o sistema no qual são feitas as medidas.
  - Em experimentos de alvo fixo, este sistema coincide com o sistema do alvo, onde uma das partículas encontra-se em repouso (e.g. b):
$$\vec{p}_b = 0$$
  - Nos experimentos de anéis de colisão, onde feixes de partículas idênticas colidem em direções opostas, este sistema coincide com o CM.

# Sistemas de coordenadas

## Sistema de Laboratório (LAB)



A energia total da colisão como sendo:

$$E_T = \sqrt{s} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1^{lab}m_2}$$

**Exercício 1:** Prove a equação acima.

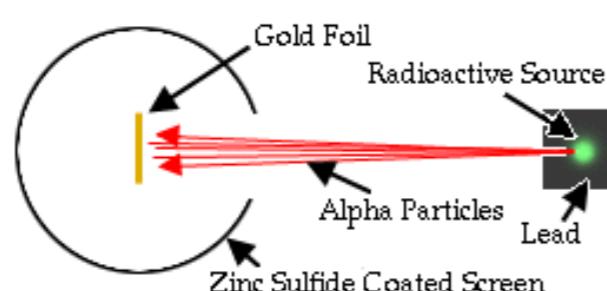


**Exercício 2:** Considerando

$$E_1^{lab} \gg m_1, m_2$$

Prove esta aproximação;

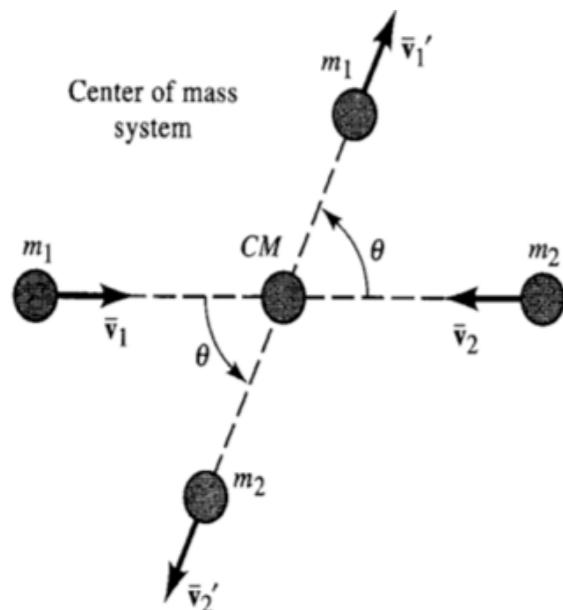
$$E_T \approx \sqrt{s} \approx \sqrt{2E_1^{lab}m_2}$$



$$\beta = \frac{p}{E}$$

# Sistemas de coordenadas

## Sistema de Centro de Massa (CM)



A energia total da colisão como sendo:

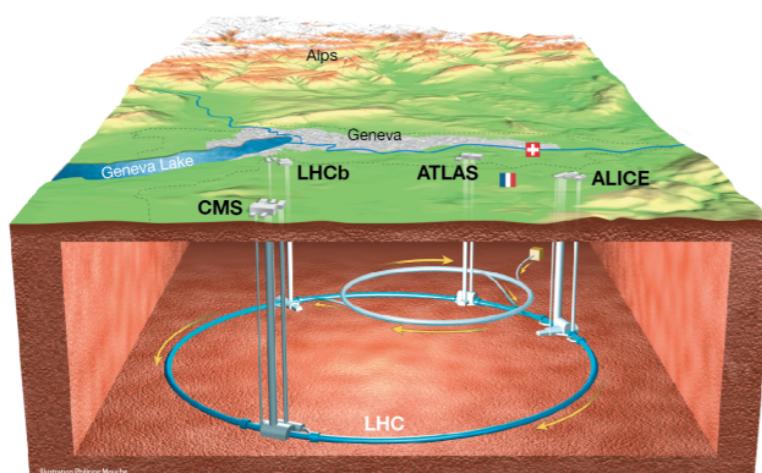
$$E_T = \sqrt{s} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 E_2 (1 - \beta_1 \beta_2 \cos\theta)}$$

Exercício 3: Prove a equação acima.

Collider:

$$m_1, E_1^{lab} \quad m_2, E_2^{lab}$$

The diagram shows two particles,  $m_1$  and  $m_2$ , with their respective lab-frame momenta  $E_1^{lab}$  and  $E_2^{lab}$ . The particles are shown moving towards each other, indicated by arrows pointing towards a central interaction region.



Exercício 4: Considerando

Prove esta aproximação;

$$\boxed{\begin{array}{l} p_1 = -p_2 \\ m_1 = m_2 \end{array}}$$

$$E_T = \sqrt{s} = 2E_1$$

$$\beta = \frac{p}{E}$$

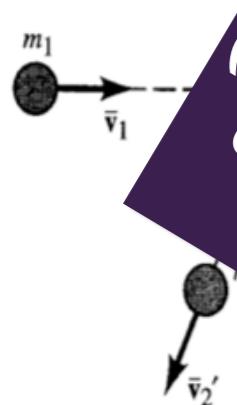
# Sistemas de coordenadas

Exercício 5: Sistema de Centro de Massa (CM)

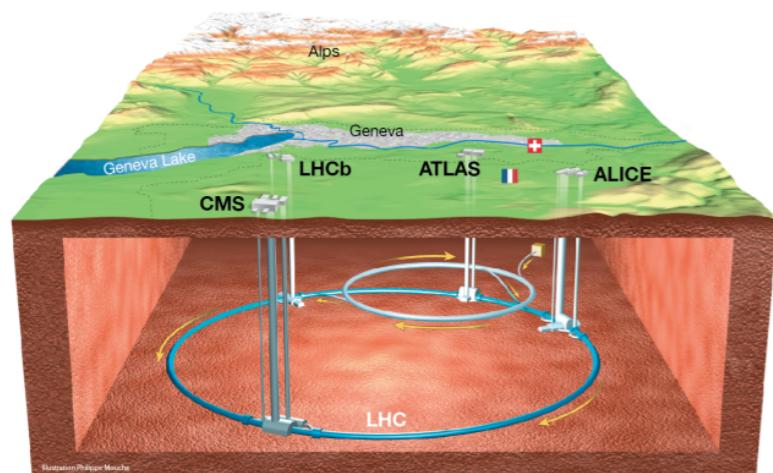
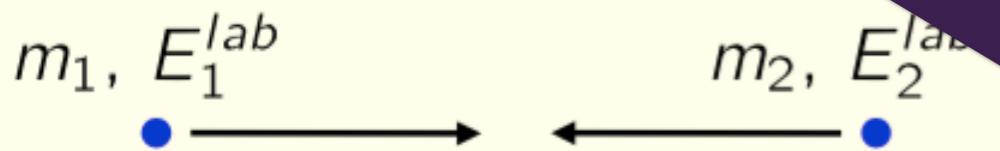
A energia total da colisão como sendo:

$$\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 E_2 (1 - \beta_1 \beta_2 \cos\theta)}$$

Center of mass system



Collider:



$E_T$  -

40

# Sistemas de coordenadas

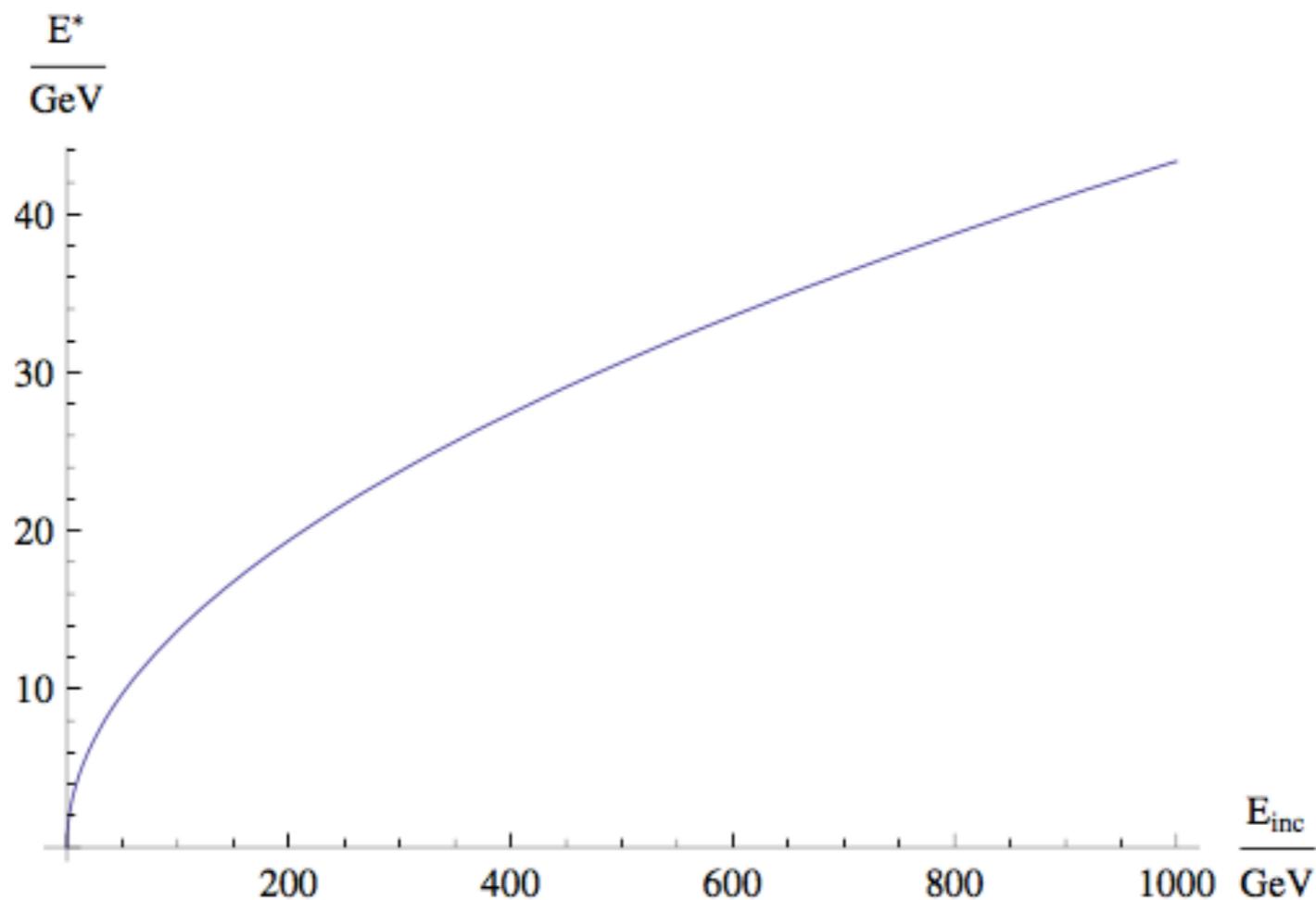


Figure 4.3: *Center of mass energy of the colliding beam for a fixed target experiment.* The energy increases with the square root of the beam energy.

# Comparando Colisões

Apresentamos na tabela abaixo os valores da energia total ( $E_T$ ) e do momento ( $p_a^*$ ) no CM para a colisão de **feixes de elétrons** ( $m_a = m_e \cong 0$ ) e **prótons** ( $m_a = m_p \cong 0.938$  GeV) colidindo com um **próton fixo** em função do momento do feixe ( $p_a^{lab}$ ).

$p_a^{lab}$ (GeV)	$E_T$ (GeV)		$p_a^*$ (GeV)	
	ep	pp	ep	pp
1	1.66	2.08	0.57	0.45
10	4.43	4.54	2.12	2.07
100	13.73	13.76	6.83	6.82
500	30.65	30.66	15.3	15.3
1000	43.33	43.34	21.7	21.6
10000	137.0	137.0	68.5	68.5

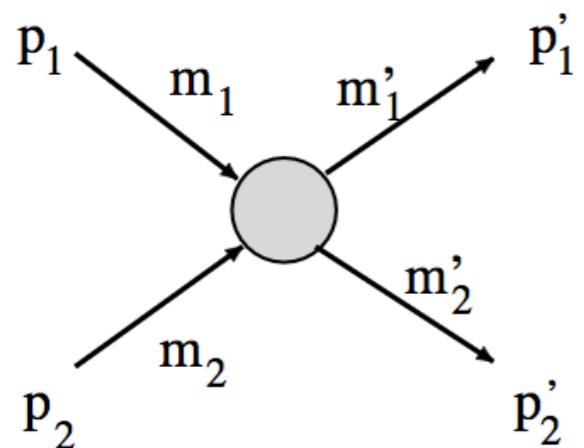
# Comparando Colisões

Apresentamos na tabela abaixo os valores da energia total ( $E_T$ ) e do momento ( $p_a^*$ ) no CM para a colisão de **feixes de elétrons** ( $m_a = m_e \cong 0$ ) e **prótons** ( $m_a = m_p \cong 0.938$  GeV) colidindo com um alvo fixo em função do momento do feixe ( $p_a^{lab}$ ).

$p_a^{lab}$ (GeV)	$E_T$ (GeV)	Centro de massa	
		ep	pp
1	4.54	0.57	0.45
10	43.33	2.12	2.07
30	137.0	6.83	6.82
100	30.65	15.3	15.3
1000	43.33	21.7	21.6
10000	137.0	68.5	68.5

Exercício 5 a: Encontre a energia de centro de massa para o experimento de colisor de partículas cujo feixe de prótons tem uma energia de 3,5 TeV.

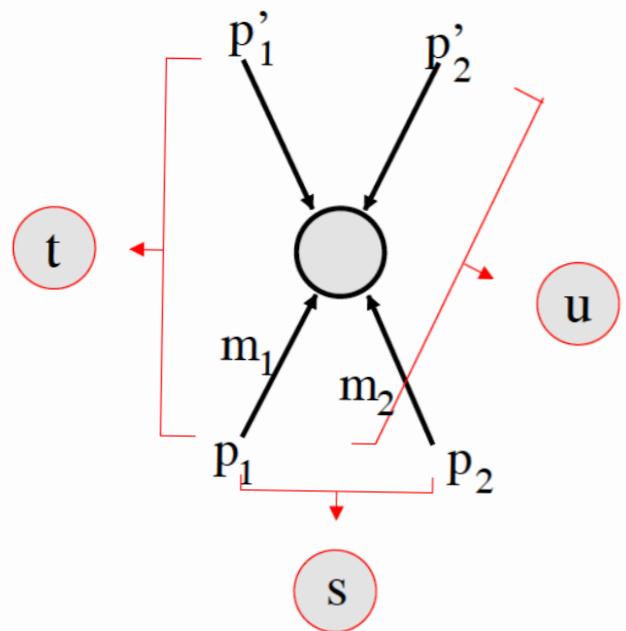
# Variáveis de Mandelstam



Em Física de Altas Energias seção de choque e razão de decaimentos são descritos por variáveis cinemáticas que são invariantes relativísticos. Nos decaimentos de dois corpos existem de fato quatro invariantes disponíveis desde que a energia e momentum seja conservada de somente dois deles para definir a cinemática do evento.

# Variáveis de Mandelstam

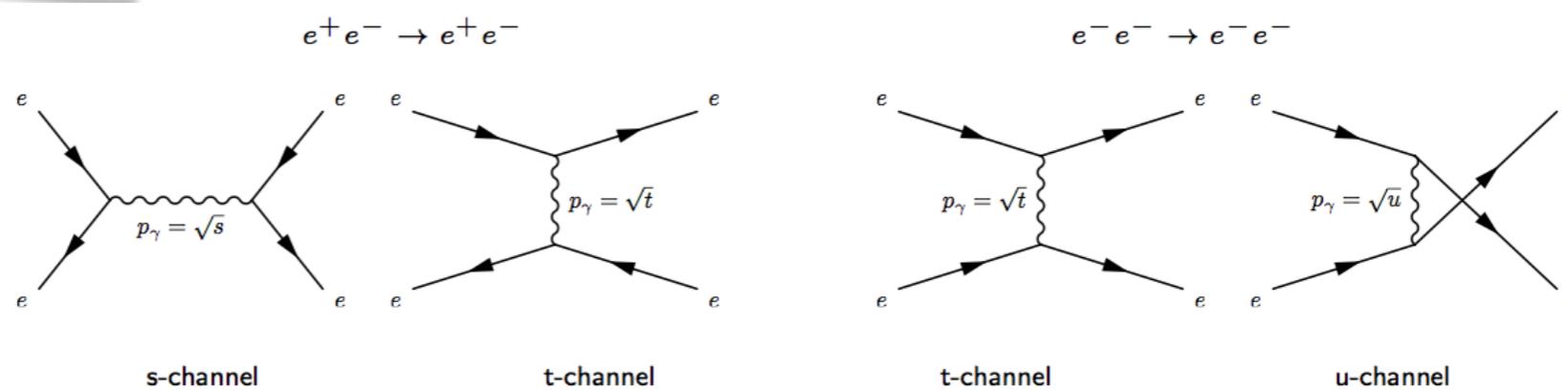
As variáveis de Mandelstam são invariantes de Lorentz em decaimentos de tipo 2->2



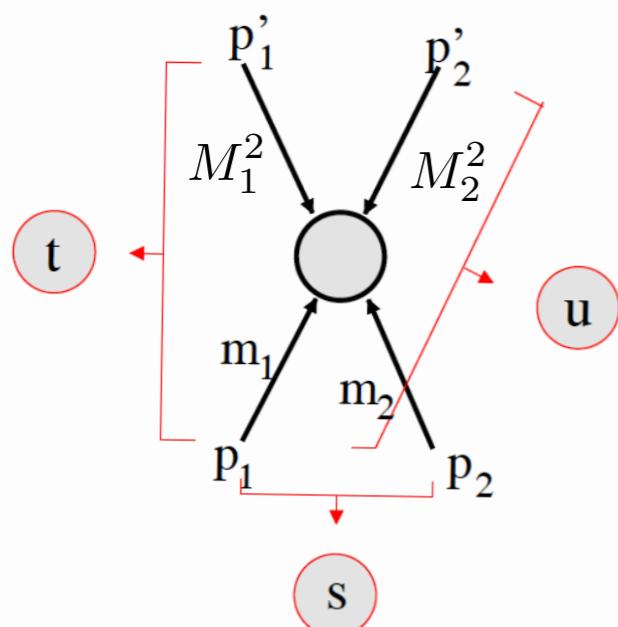
$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p'_1 + p'_2)^2 = -(p_1 + p_2)(p'_1 + p'_2)$$

$$t = (p_1 + p'_1)^2 = (p_2 + p'_2)^2 = -(p_1 + p'_1)(p_2 + p'_2)$$

$$u = (p_1 + p'_2)^2 = (p_2 + p'_1)^2 = -(p_1 + p'_2)(p_2 + p'_1)$$



# Variáveis de Mandelstam



**As variáveis de Mandelstam são invariantes de Lorentz em decaimentos de tipo 2->2**

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p'_1 + p'_2)^2 = -(p_1 + p_2)(p'_1 + p'_2)$$

$$t = (p_1 + p'_1)^2 = (p_2 + p'_2)^2 = -(p_1 + p'_1)(p_2 + p'_2)$$

$$u = (p_1 + p'_2)^2 = (p_2 + p'_1)^2 = -(p_1 + p'_2)(p_2 + p'_1)$$

**Exercício 6 : Em espalhamento elástico do tipo: A+A =A+A, quais são as variáveis de Mandelstam?**

**As variáveis de Mandelstam devem satisfazer a seguinte equação:**

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + M_1^2 + M_2^2$$

**Exercício 7: Prove a relação acima.**

# Regiões do Espaço de Fase

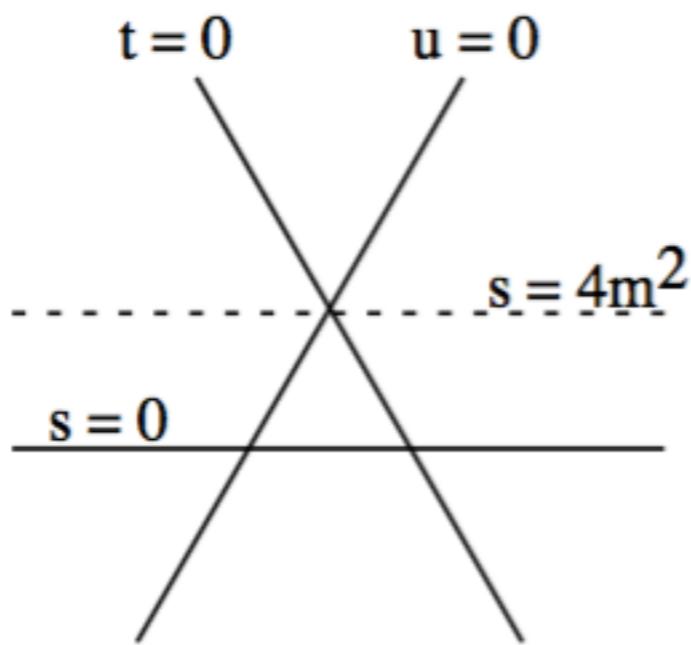
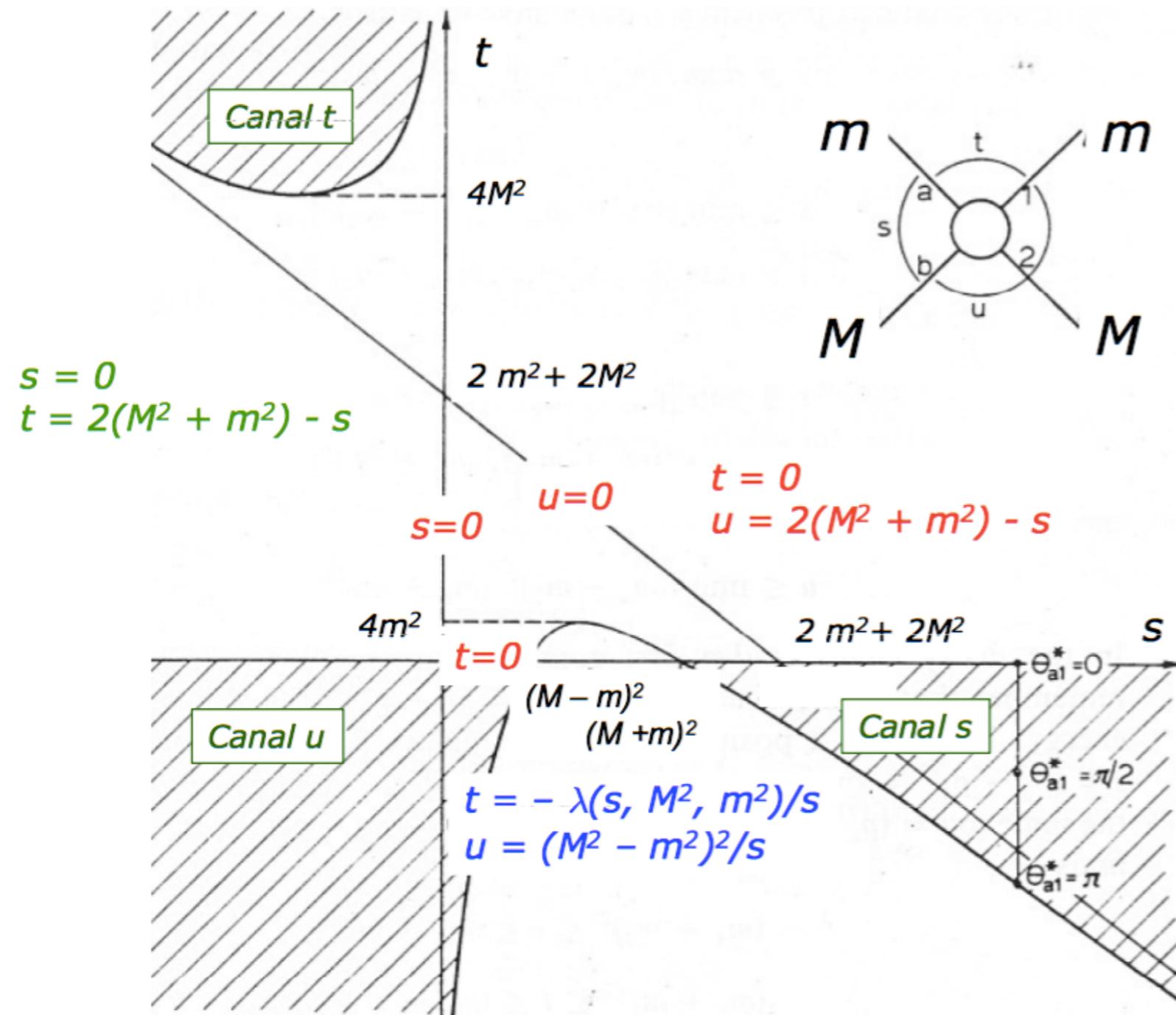


Figure 2: The figure shows the valid regions of phase space allowed by energy and momentum conservation.

Variable	Definition	Value in CM Frame
$s$	the center of mass energy	$s = (E_A + E_B)^2$
$t$	the 4-momentum transfer of $e^+$ or $e^-$	$-2p^2(1 - \cos \theta)$
$u$	the 4-momentum difference between $e^+$ and $e^-$	$-2p^2(1 + \cos \theta)$

# Regiões do Espaço de Fase



# Rapidez

$$\begin{pmatrix} E' \\ p'_\parallel \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_s & -\gamma_s \beta_s \\ -\gamma_s \beta_s & \gamma_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_\parallel \end{pmatrix}, \quad p'_\perp = p_\perp$$

**Transformação de Lorentz na direção do eixo Z. Exercício 8 (a) : Mostre esta transformação abaixo.**

Para introduzirmos o conceito de rapidez vamos escrever a transformação de Lorentz como:

$$\begin{pmatrix} E' \\ p'_\parallel \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh y & -\sinh y \\ -\sinh y & \cosh y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_\parallel \end{pmatrix}, \quad p'_\perp = p_\perp$$

onde definimos o parâmetro  $y$  chamado de rapidez através de:

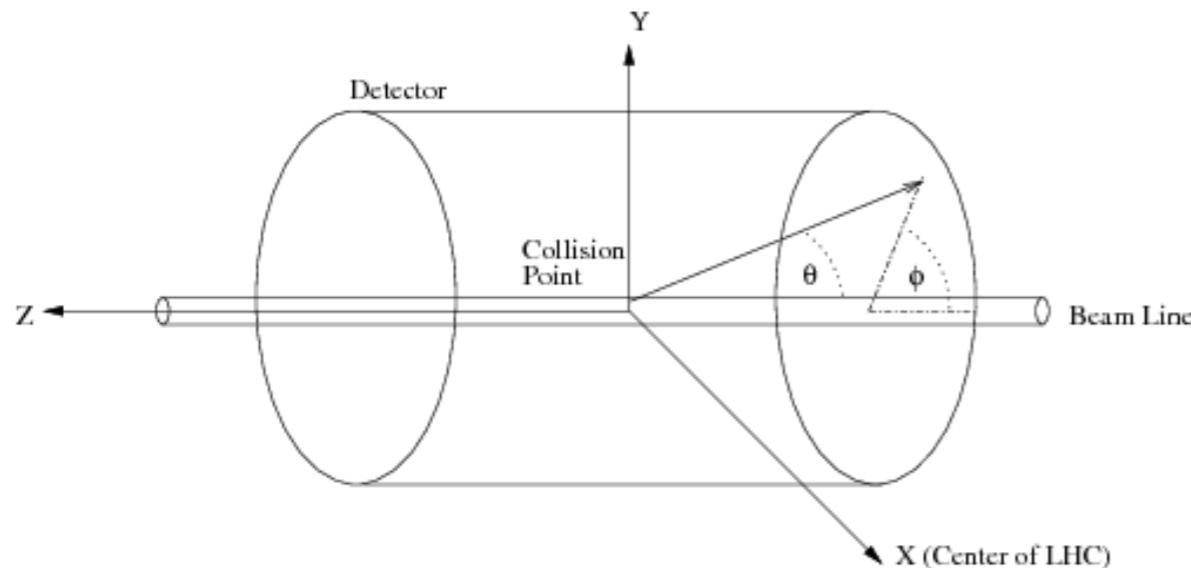
$$\beta_s = \tanh y, \quad \gamma_s = \cosh y, \quad \gamma_s \beta_s = \sinh y$$

Lembrando que:

$$\sinh^{-1}(z) = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1}), \quad \cosh^{-1}(z) = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}), \quad \text{e} \quad \tanh^{-1}(z) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

Temos:

$$\begin{aligned} y &= \cosh^{-1}(\gamma) = \ln(\gamma + \gamma \beta_s) \\ &= \tanh^{-1}(\beta_s) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + \beta_s}{1 - \beta_s}\right) \end{aligned}$$



$$\begin{pmatrix} E' \\ p'_\parallel \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_s & -\gamma_s \beta_s \\ -\gamma_s \beta_s & \gamma_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_\parallel \end{pmatrix}, \quad p'_\perp = p_\perp$$

**Transformação de Lorentz na direção do eixo Z. Exercício 8 (a) : Mostre esta transformação abaixo.**

Para introduzirmos o conceito de rapidez vamos escrever a transformação de Lorentz como:

$$\begin{pmatrix} E' \\ p'_\parallel \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh y & -\sinh y \\ -\sinh y & \cosh y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_\parallel \end{pmatrix}, \quad p'_\perp = p_\perp$$

onde definimos o parâmetro  $y$  chamado de rapidez através de:

$$\beta_s = \tanh y, \quad \gamma_s = \cosh y, \quad \gamma_s \beta_s = \sinh y$$

Lembrando que:

$$\sinh^{-1}(z) = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1}), \quad \cosh^{-1}(z) = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}), \quad \text{e} \quad \tanh^{-1}(z) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

Temos:

$$\begin{aligned} y &= \cosh^{-1}(\gamma) = \ln(\gamma + \gamma \beta_s) \\ &= \tanh^{-1}(\beta_s) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + \beta_s}{1 - \beta_s}\right) \end{aligned}$$

# Rapidez

Supondo a partícula parada em  $S'$ , temos  $\beta = \beta_s$  e, como:

$$E \pm p_{\parallel} = m\gamma(1 \pm \beta)$$

podemos escrever a rapidez de uma partícula como:

$$y = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{E + p_{\parallel}}{E - p_{\parallel}} \right)$$

Enquanto a velocidade varia no intervalo  $-1 \leq \beta \leq +1$  a rapidez varia entre  $-\infty \leq y \leq +\infty$ .

Pode-se também definir a massa transversal por  $M_{\perp}^2 = p_{\perp}^2 + m^2$  e escrever

$$y = \ln \left( \frac{E + p_{\parallel}}{M_{\perp}} \right)$$

Quando executamos duas transformações de Lorentz paralelas consecutivas de parâmetros  $\beta_1$  e  $\beta_2$  o resultado combinado é expresso pelos parâmetros:

$$\begin{aligned}\beta_3 &= \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2} \\ \gamma_3 &= \gamma_1\gamma_2(1 + \beta_1\beta_2)\end{aligned}$$

# Rapidez

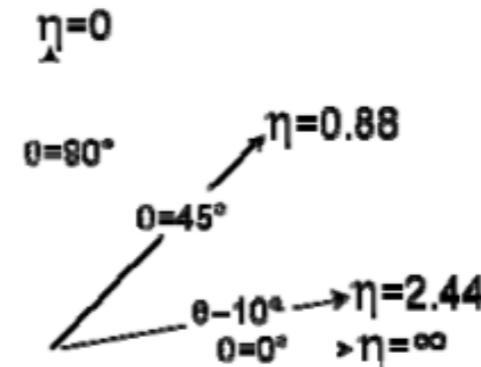
Desta forma, em termos da rapidez, temos:

$$\begin{aligned}\beta_3 &= \tanh y_3 = \frac{\tanh y_1 + \tanh y_2}{1 + \tanh y_1 \tanh y_2} \\ &\equiv \tanh(y_1 + y_2)\end{aligned}$$

ou seja, a rapidez é aditiva sob transformações de Lorentz paralelas.

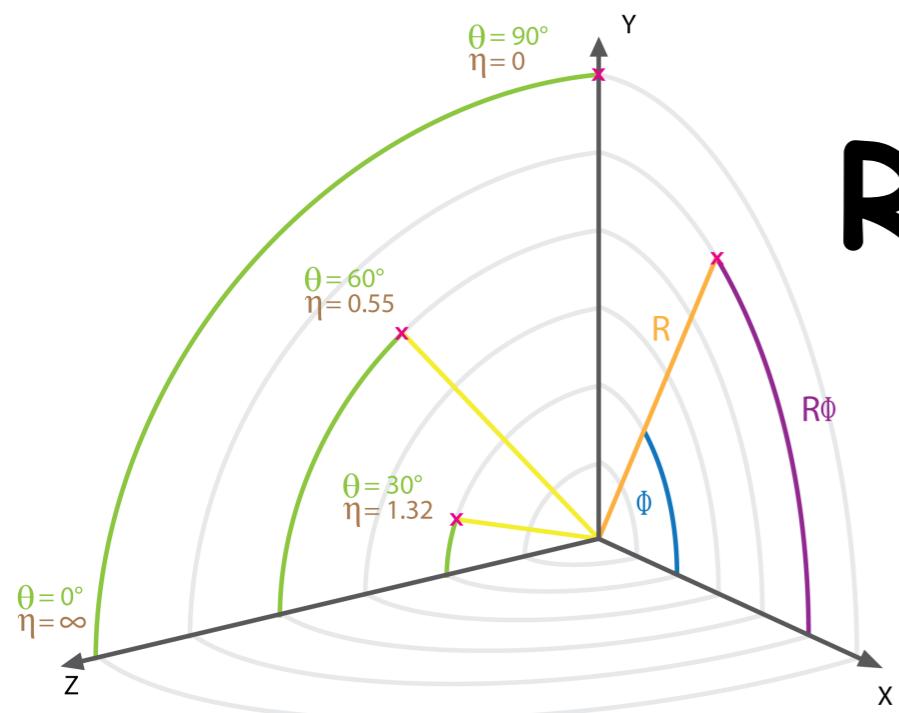
No limite de altas energias, a rapidez é chamada de **pseudo-rapidez** ( $\eta$ ) e possui uma relação simples com o ângulo de espalhamento  $\theta$ :

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} \right) = -\ln \tan \theta/2$$

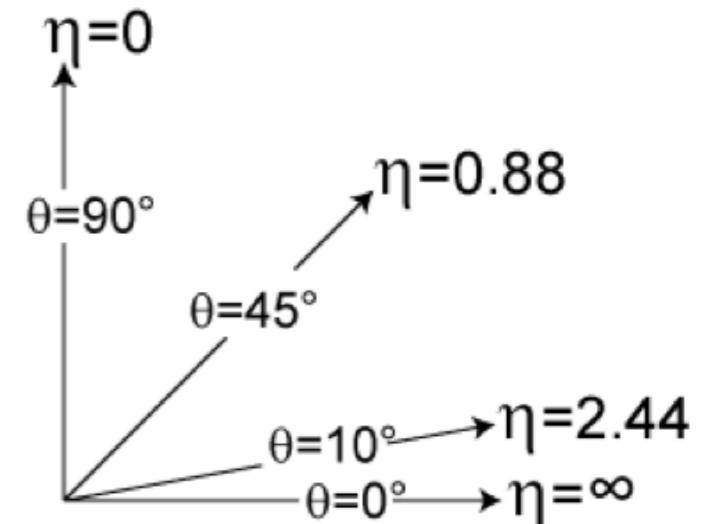
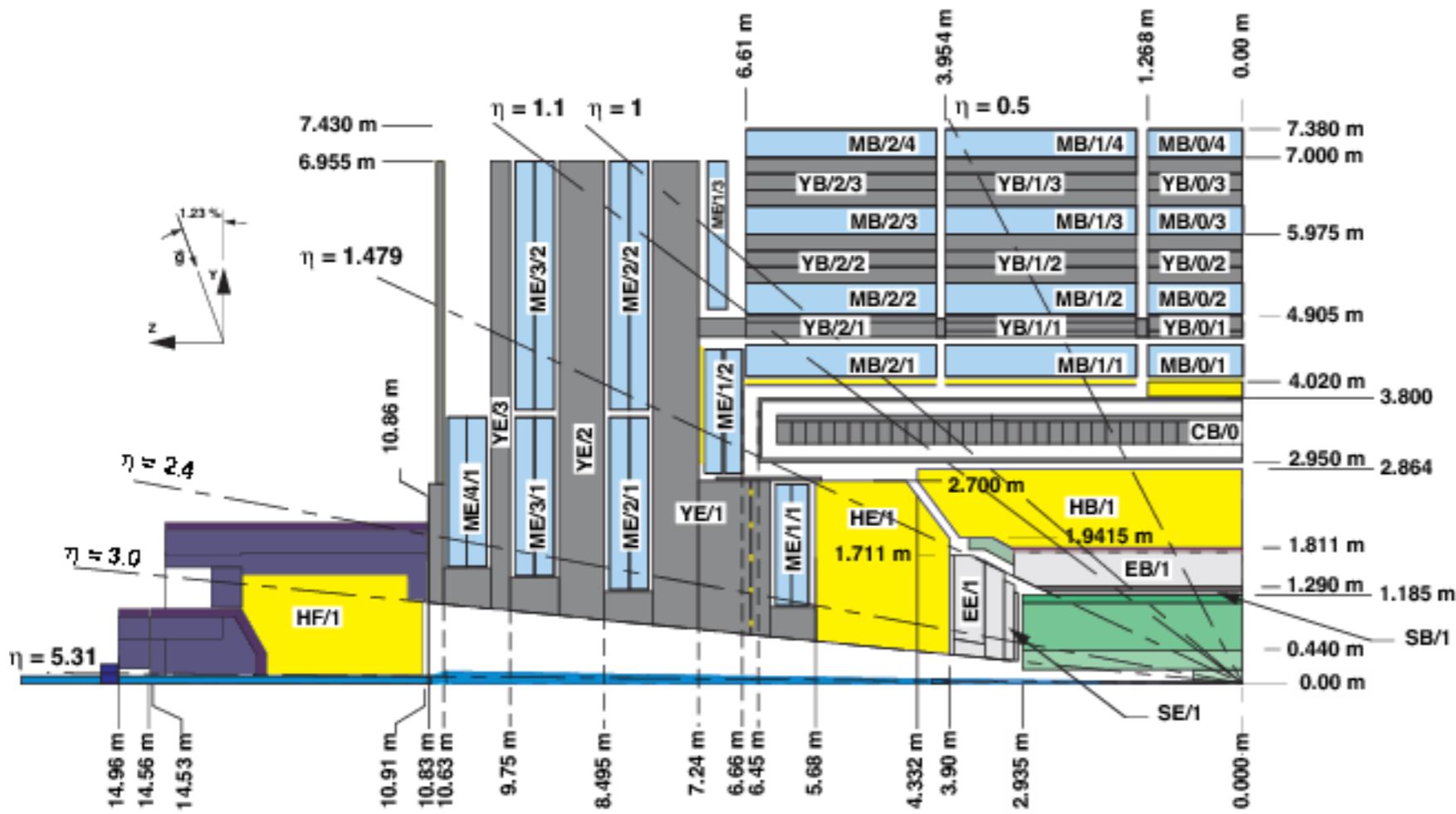
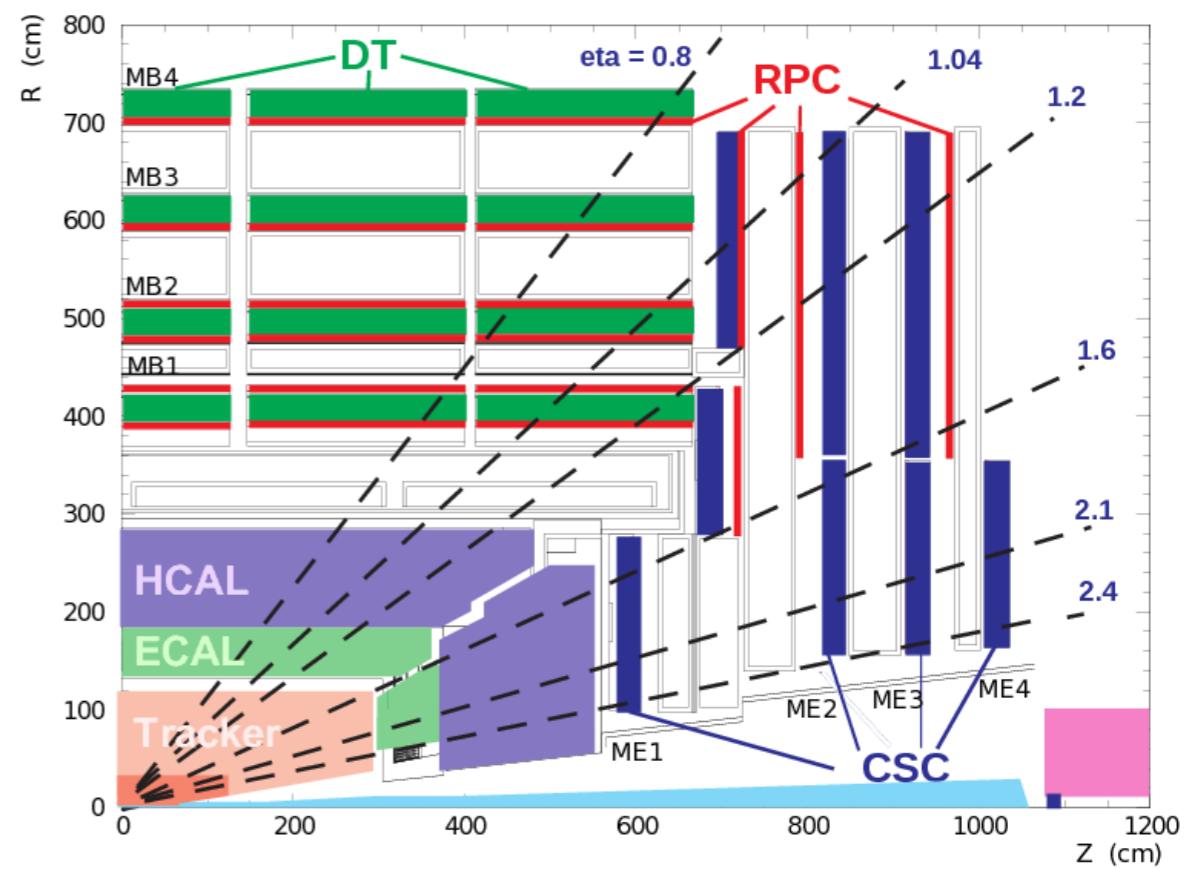


Note que a definição de  $\eta$  depende apenas de  $\theta$  e, portanto, ela é útil como uma aproximação para a rapidez quando o momento ou a massa de uma partícula são desconhecidos.

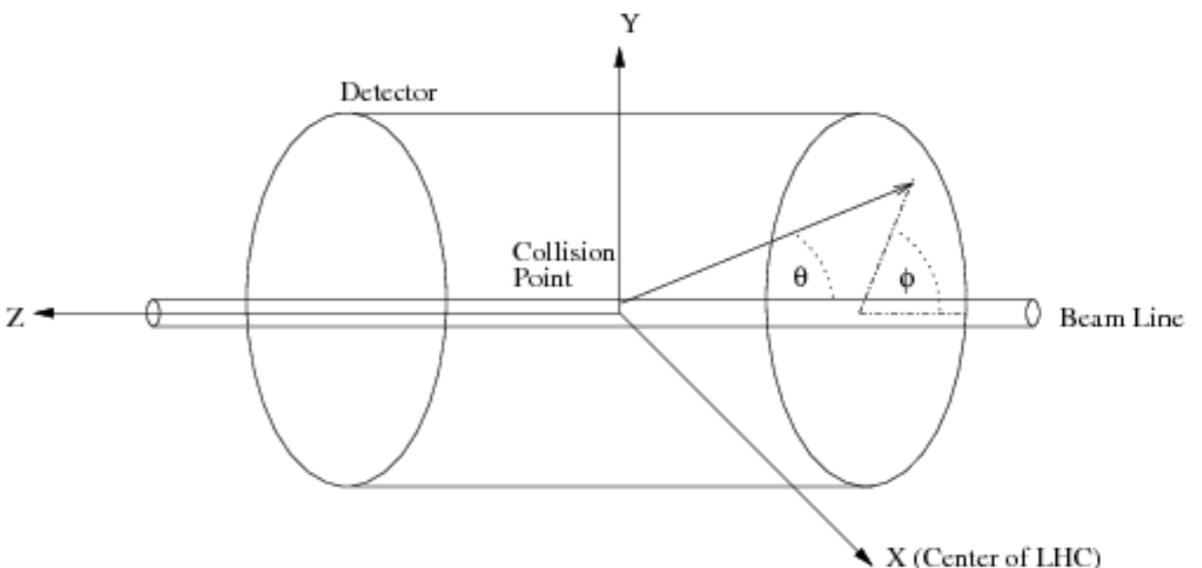
Ela é usada para parametrizar a cobertura dos detectores, localizando por exemplo as células de um calorímetro no plano  $(\eta, \phi)$ .



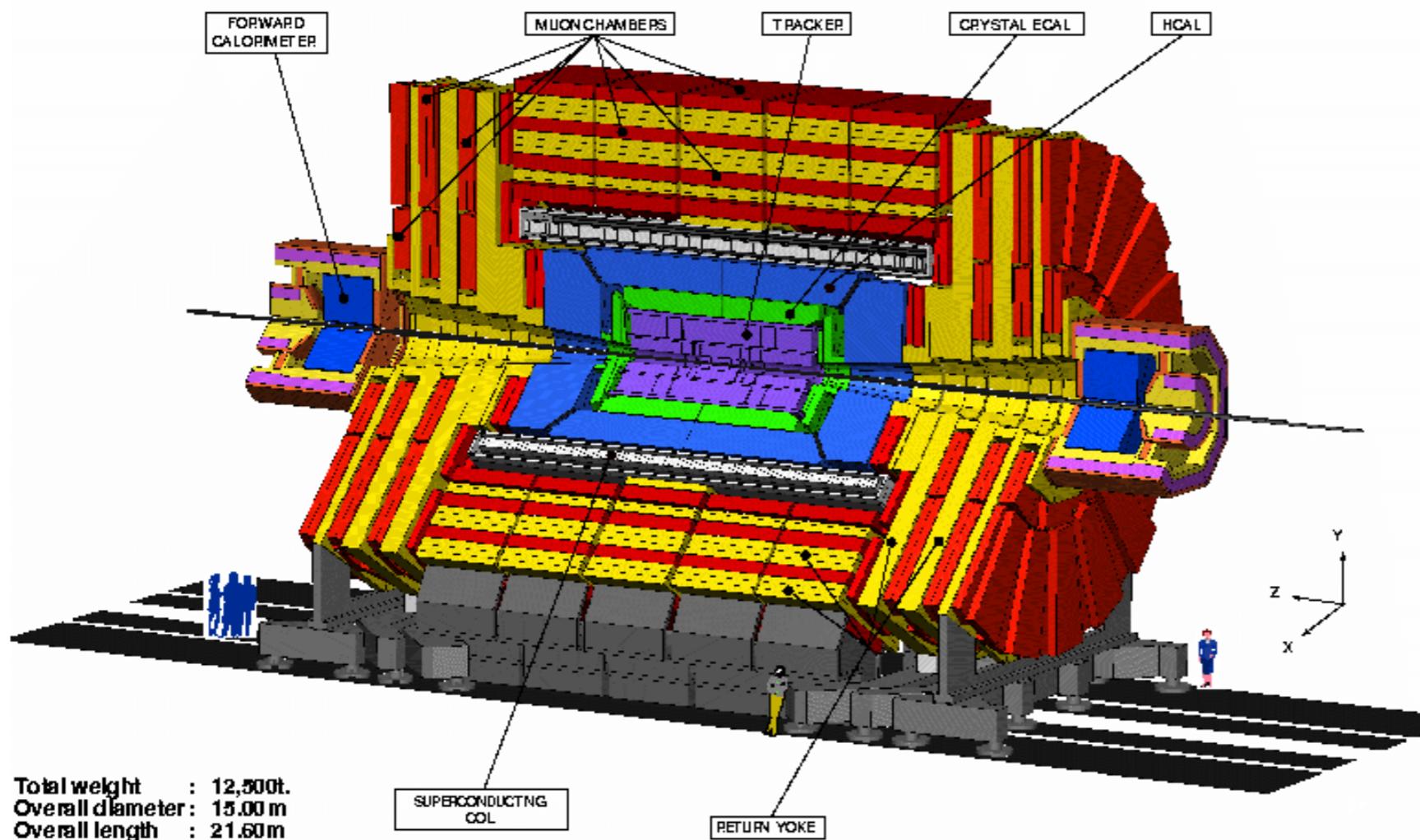
# Rapidez



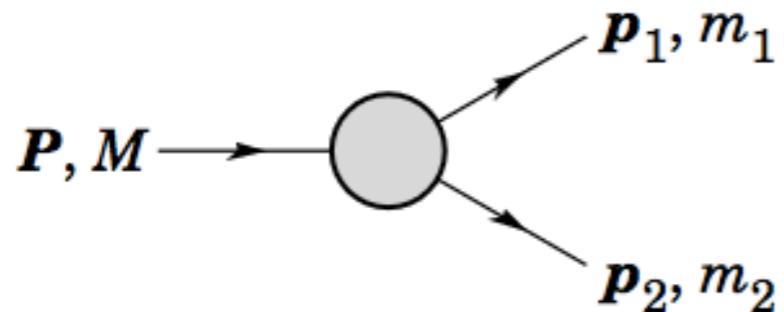
# Rapidez



**CMS**  
A Compact Solenoidal Detector for LHC



# Decaimento de dois corpos



**Exercício 8 (b): Mostre em detalhes que o decaimento de dois corpos pode ser descrito por:**

$$E_1 = \frac{M^2 - m_2^2 + m_1^2}{2M} ,$$

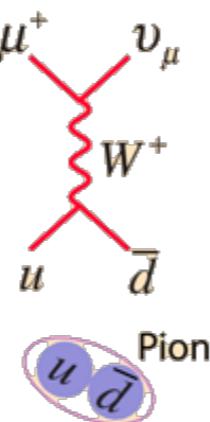
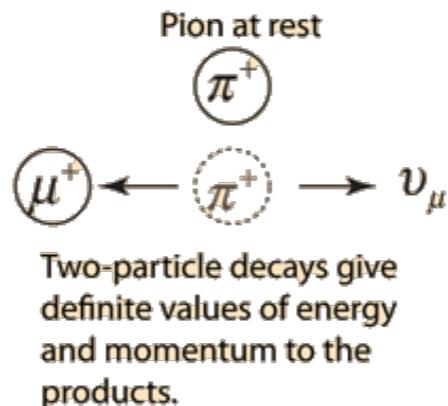
$$|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$$

$$= \frac{[(M^2 - (m_1 + m_2)^2) (M^2 - (m_1 - m_2)^2)]^{1/2}}{2M} ,$$

**Exercício 9: Determine a energia e momentum para os seguintes decaimentos de dois corpos**

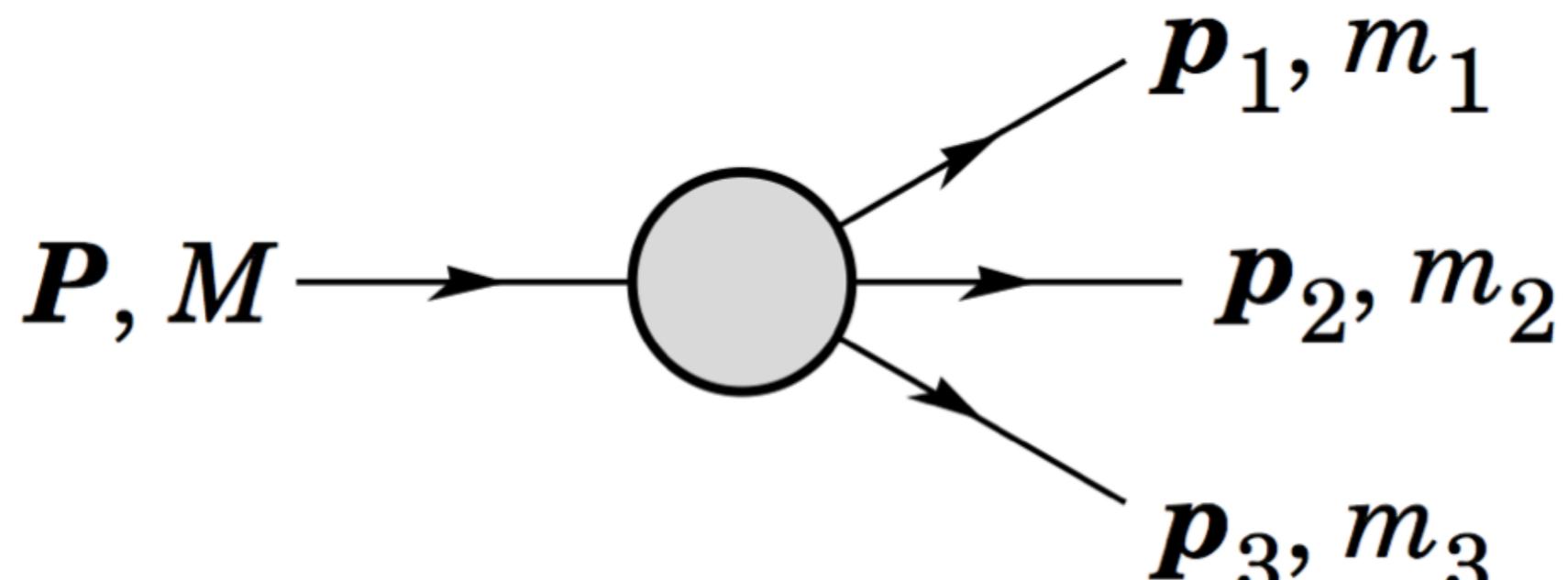
$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$$

139.57 MeV    105.66 MeV  
 $Q = 33.91 \text{ MeV}$



# Decaimento de Três corpos

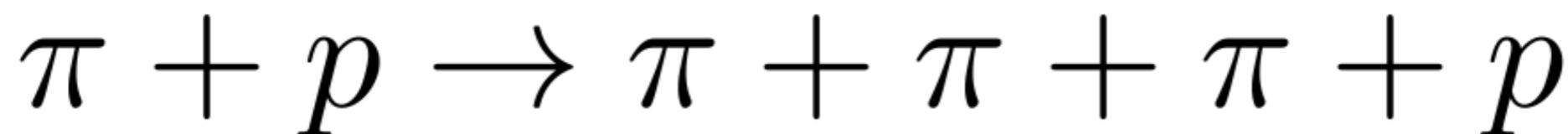
**Exercício 10: Prove o decaimento de 3 corpos.**



$$|\mathbf{p}_3| = \frac{\left[ (M^2 - (m_{12} + m_3)^2) (M^2 - (m_{12} - m_3)^2) \right]^{1/2}}{2M}$$

# Decaimento de Três corpos

**Exercício 10 (a) Prove o decaimento abaixo**



$$\sqrt{s} \geq \sum_i m_i c^2$$

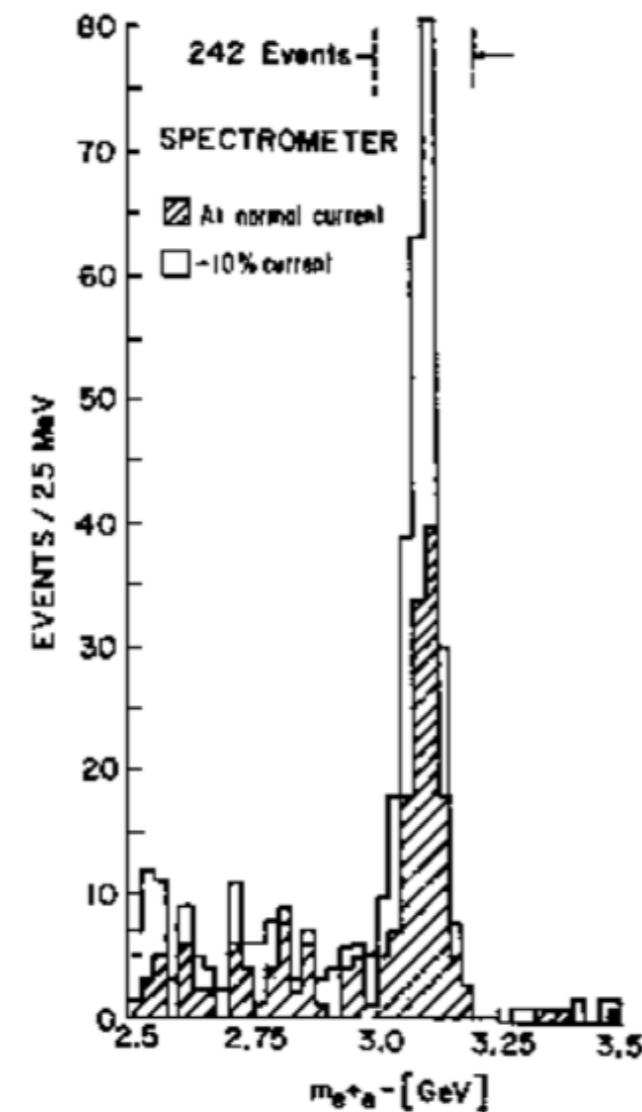
$$\begin{aligned} s &= (p_\pi + p_p)^2 c^2 = (E_\pi + m_p c^2)^2 - |\mathbf{p}_\pi|^2 \\ &= (m_\pi c^2)^2 + (m_p c^2)^2 + 2E_\pi(m_p c^2) \end{aligned}$$

$$E_\pi \geq \frac{(\sum_i m_i c^2)^2 - (m_\pi c^2)^2 - (m_p c^2)^2}{2m_p c^2} \simeq 500 \text{ MeV}$$

# Massa Invariante

**Exercício 11: Prove a equação abaixo**

$$M = \sqrt{\left(\sum E_i\right)^2 - \left(\sum \vec{p}_i\right)^2}$$



[https://en.wikipedia.org/wiki/Invariant\\_mass](https://en.wikipedia.org/wiki/Invariant_mass)

# Energia Faltante Transversa

- Se partículas invisíveis são criadas, apenas o seu momentum transversal pode ser limitado: falta de energia transversa.

$$E_T^{\text{miss}} = \sum p_T(i)$$

- Se uma partícula pesada é produzida e decai em duas partículas, uma das quais é invisível, a massa da partícula principal pode ser restringida com a quantidade de massa transversa.

$$\begin{aligned} M_T^2 &\equiv [E_T(1) + E_T(2)]^2 - [\mathbf{p}_T(1) + \mathbf{p}_T(2)]^2 \\ &= m_1^2 + m_2^2 + 2[E_T(1)E_T(2) - \mathbf{p}_T(1) \cdot \mathbf{p}_T(2)] \end{aligned}$$

$$m_1 = m_2 = 0 \quad M_T^2 = 2|\mathbf{p}_T(1)||\mathbf{p}_T(2)|(1 - \cos \phi_{12})$$

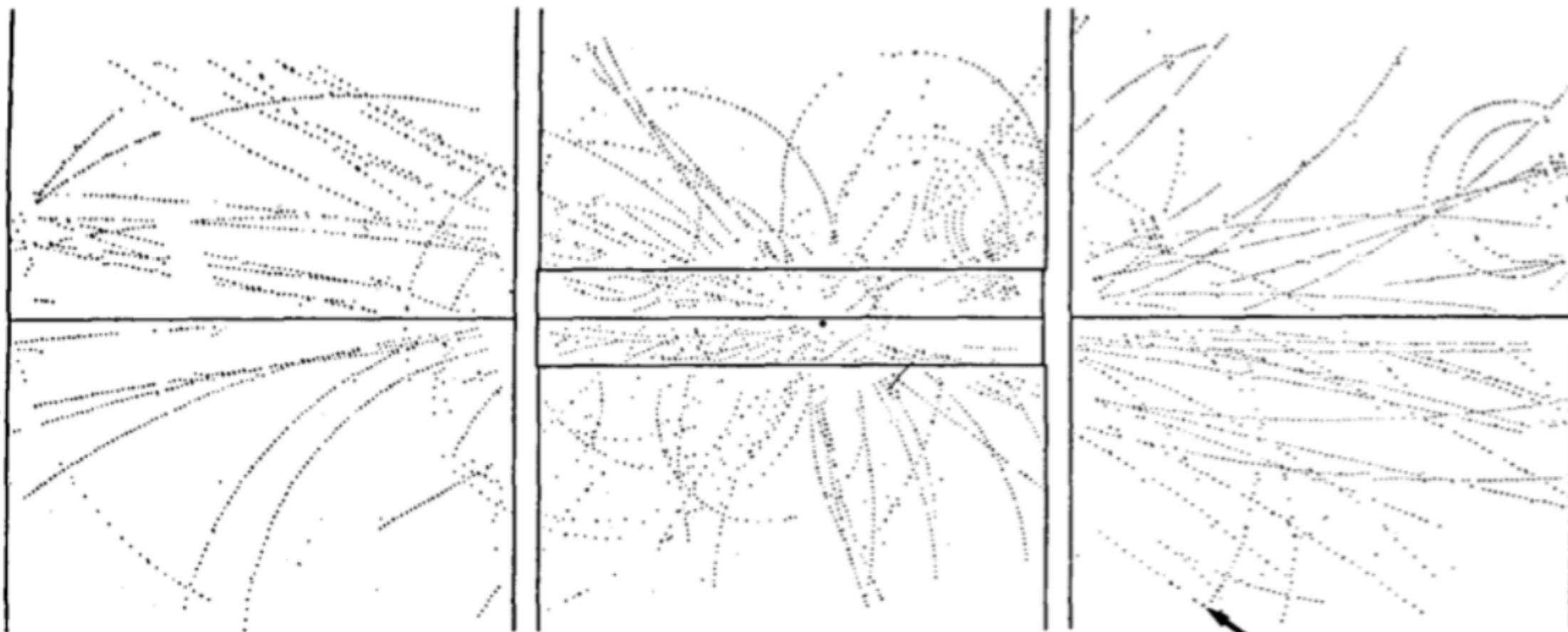
# Descoberta do $W \rightarrow e + \text{neutrino}$

Volume 122B, number 1

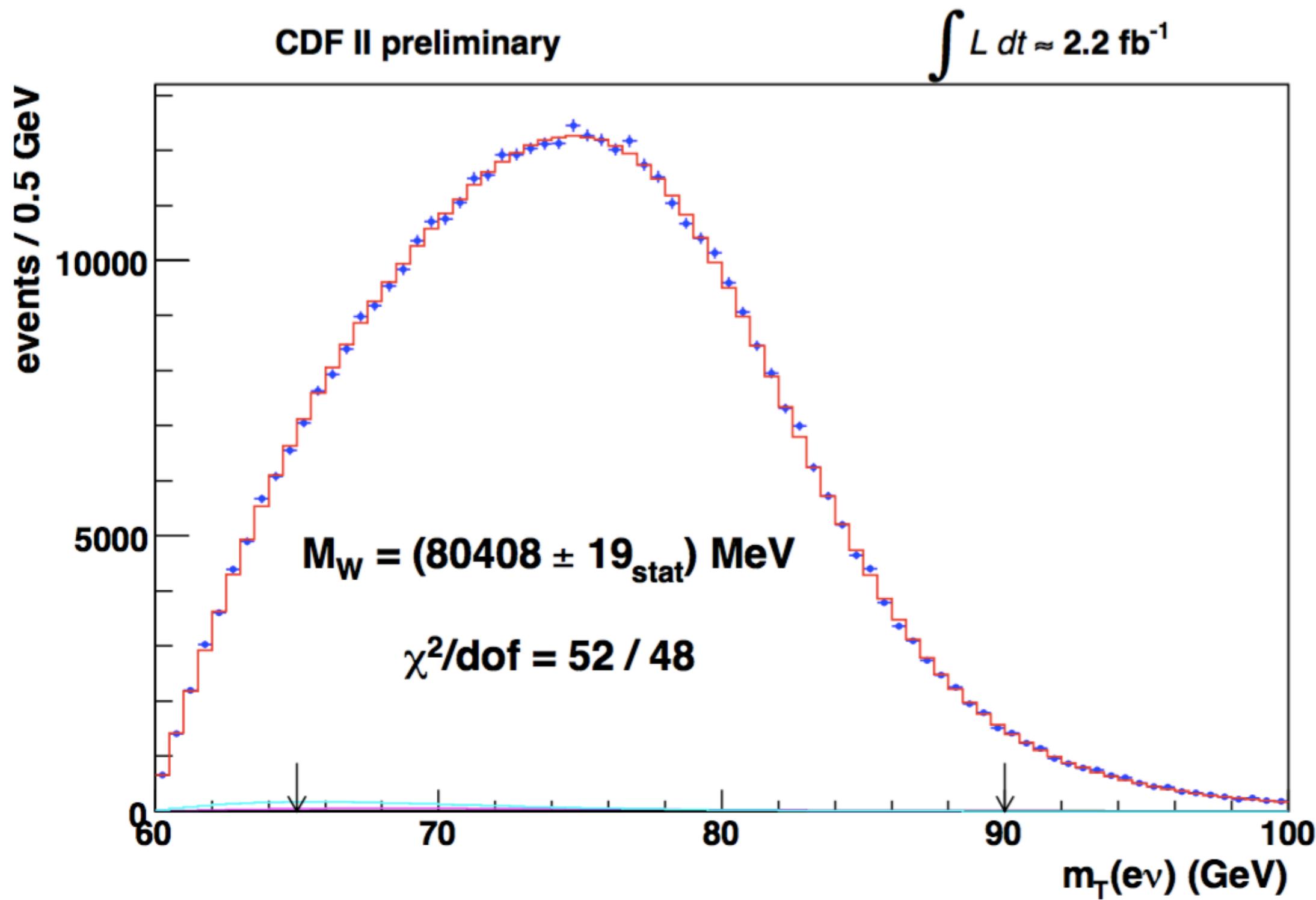
PHYSICS LETTERS

24 February 1983

**a**  
EVENT 2958. 1279.



# Descoberta do $W \rightarrow e + \text{neutrino}$



# **Backup slides**

# ...o experimento de Michelson e Morley

$$\beta = \frac{v_{orbital}}{c} = \frac{v}{c}$$

$$v_{orbital} = 3,0 \times 10^4 \text{ m/s}$$

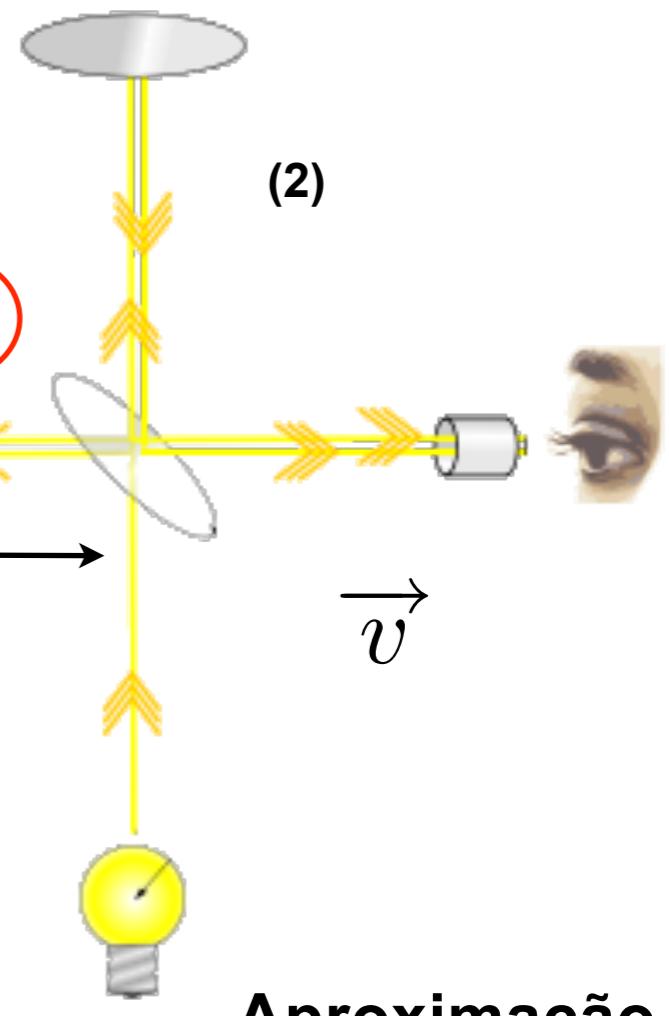
$$\frac{v_{orbital}}{c} = \frac{3,0 \times 10^4 \text{ m/s}}{3,0 \times 10^8 \text{ m/s}} \cong 10^{-4}$$

$$v_{proa} = c + v_{orbital}$$

$$v_{popa} = c - v_{orbital}$$

$$(1) \quad t_1 = \frac{l}{c+v} + \frac{l}{c-v} = \frac{l(c-v+c+v)}{(c^2-v^2)} = \frac{2lc}{(c^2-v^2)}$$

$$t_1 = \frac{2l}{c} \frac{1}{(1-v^2/c^2)} = \frac{2l}{c} \frac{1}{(1-\beta^2)}$$



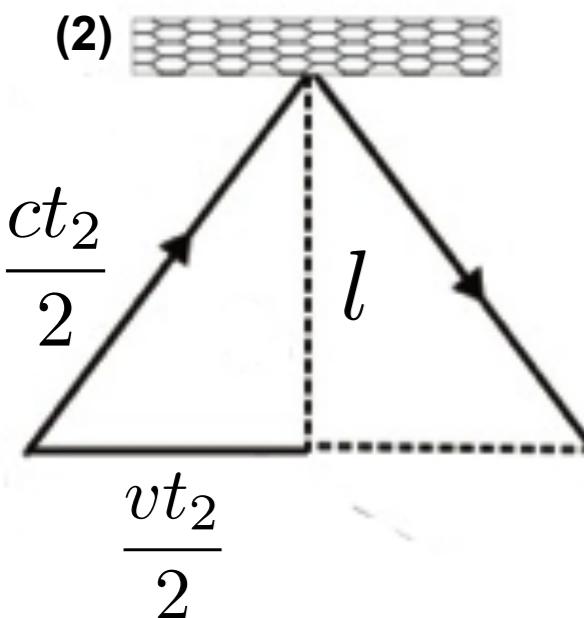
**Aproximação**

$$(1+x)^m \approx (1+mx)$$

$x \ll 1$

$$t_1 \approx \frac{2l}{c} (1+\beta^2)$$

# ...o experimento de Michelson e Morley



$$\left(\frac{ct_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{vt_2}{2}\right)^2 + l^2$$

$$\frac{t_2^2}{4}(c^2 + v^2) = l^2$$

$$t_2 = \frac{2l}{\sqrt{(c^2 + v^2)}} = \frac{2l}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

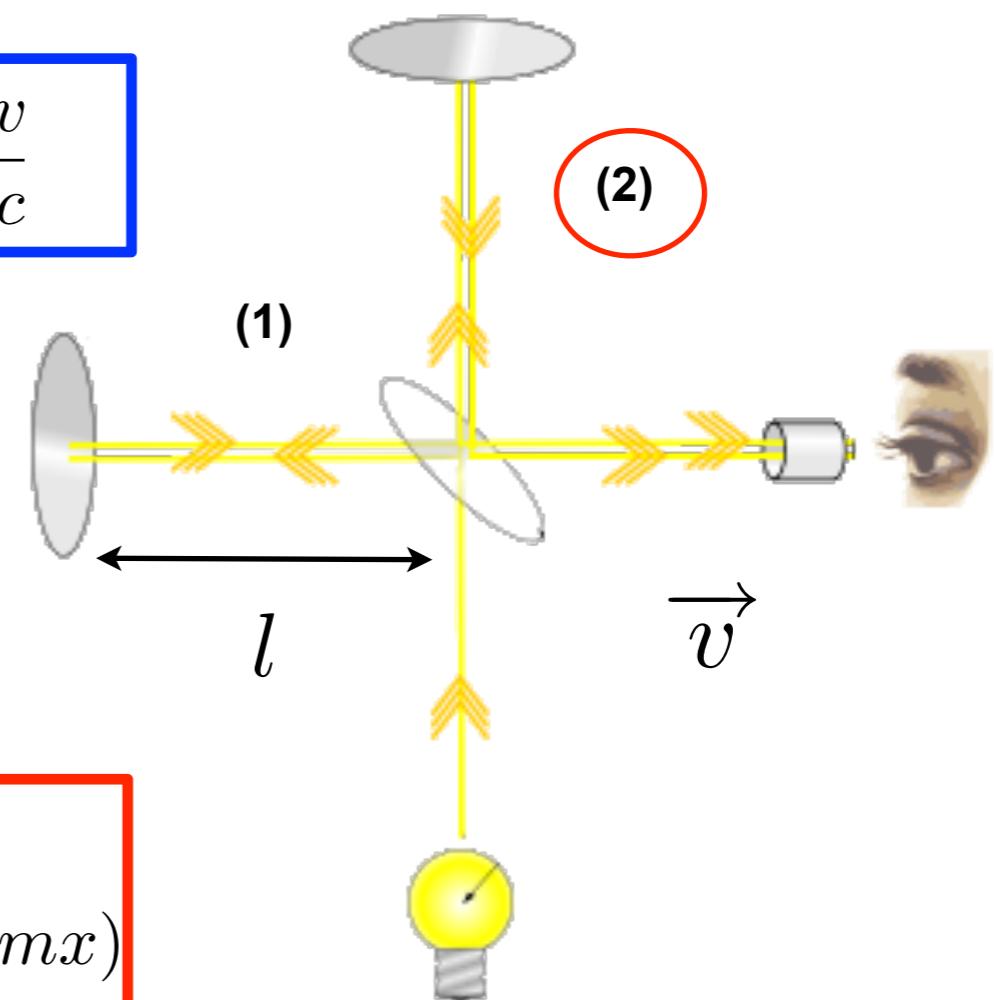
$$\beta = \frac{v_{orbital}}{c} = \frac{v}{c}$$

**Aproximação**

$$(1 + x)^m \approx (1 + mx)$$

$$x \ll 1$$

$$t_2 \approx \frac{2l}{c} \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2\right)$$

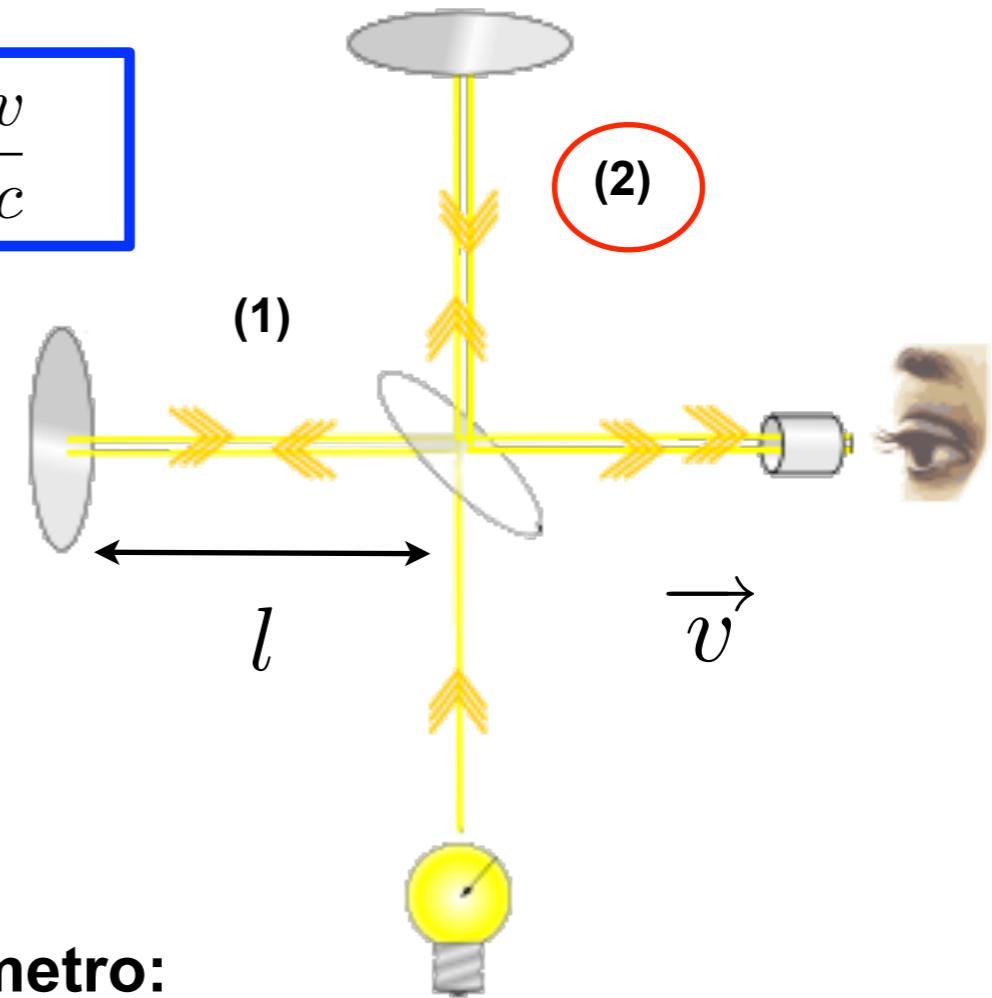


# ...o experimento de Michelson e Morley

$$t_1 \approx \frac{2l}{c} (1 + \beta^2)$$

$$t_2 \approx \frac{2l}{c} \left( 1 + \frac{1}{2} \beta^2 \right)$$

$$\beta = \frac{v_{orbital}}{c} = \frac{v}{c}$$



Diferença de tempo entre os braços do interferômetro:

$$\Delta T = t_1 - t_2 = \frac{l}{c} \beta^2$$

$$\bar{T}_C = \lambda \quad \longleftrightarrow \quad \frac{\Delta T}{\bar{T}} = \frac{l \beta^2}{\lambda}$$

Usando os seguintes valores:

$$l = 11\text{m} \quad \boxed{\text{Inter. Destruiva !!}}$$

$$\lambda = 600\text{nm}$$

$$\frac{\Delta T}{\bar{T}} = 0$$

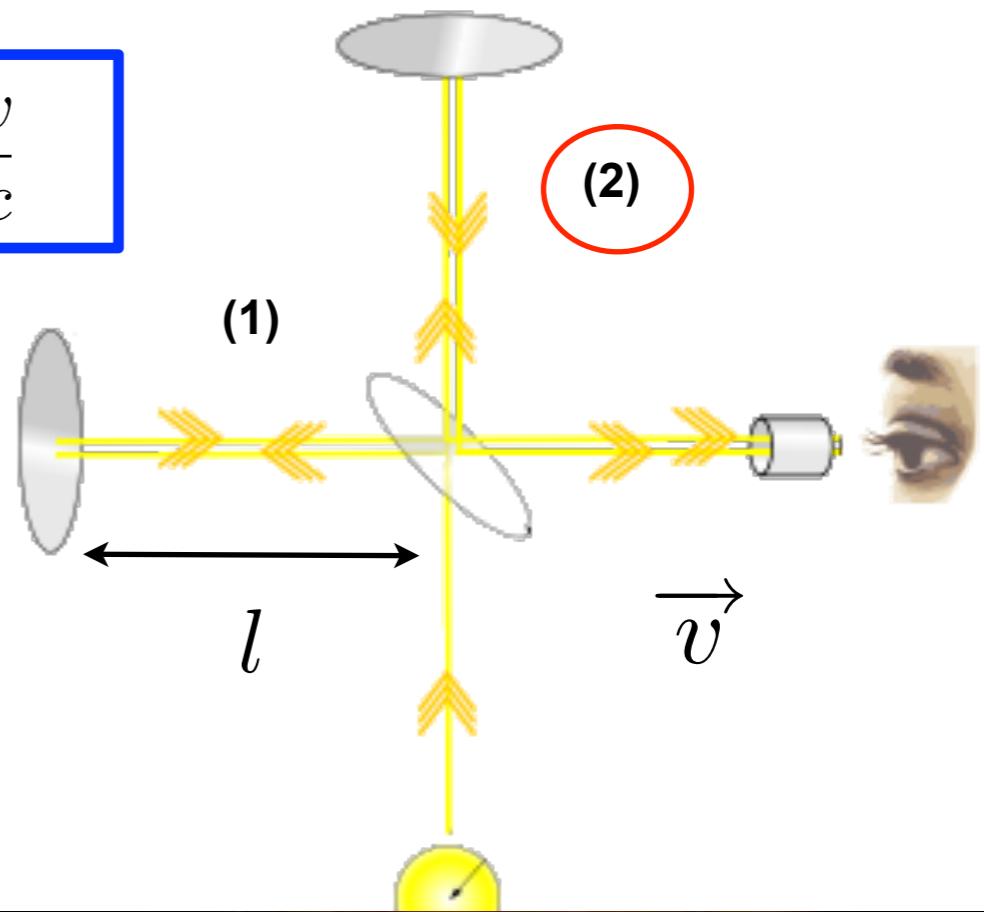
Experimental  
Inter. construtiva

# ...o experimento de Michelson e Morley

$$t_1 \approx \frac{2l}{c} (1 + \beta^2)$$

$$t_2 \approx \frac{2l}{c} \left( 1 + \frac{1}{2} \beta^2 \right)$$

$$\beta = \frac{v_{orbital}}{c} = \frac{v}{c}$$



Diferença de tempo entre os braços do interferômetro

$$\Delta T = t_1 - t_2 = \frac{l}{c} \beta^2$$

$$\bar{T}_C = \lambda \quad \longleftrightarrow \quad \frac{\Delta T}{\bar{T}} = \frac{l \beta^2}{\lambda}$$

# Unidades práticas

Unidade de massa atômica:

$$1 \text{ u} = 1,66 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

Elétron-volt:

$$1 \text{ eV} = 1,60 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$c^2$ :

$$c^2 = 9,315 \times 10^8 \text{ eV/u} = 9,315 \times 10^5 \text{ keV/u} = 931,5 \text{ MeV/u}$$

Energia total (supondo  $E_{\text{pot}}=0$ )

$$E = E_0 + K = mc^2 + K$$

$$E = \gamma mc^2$$

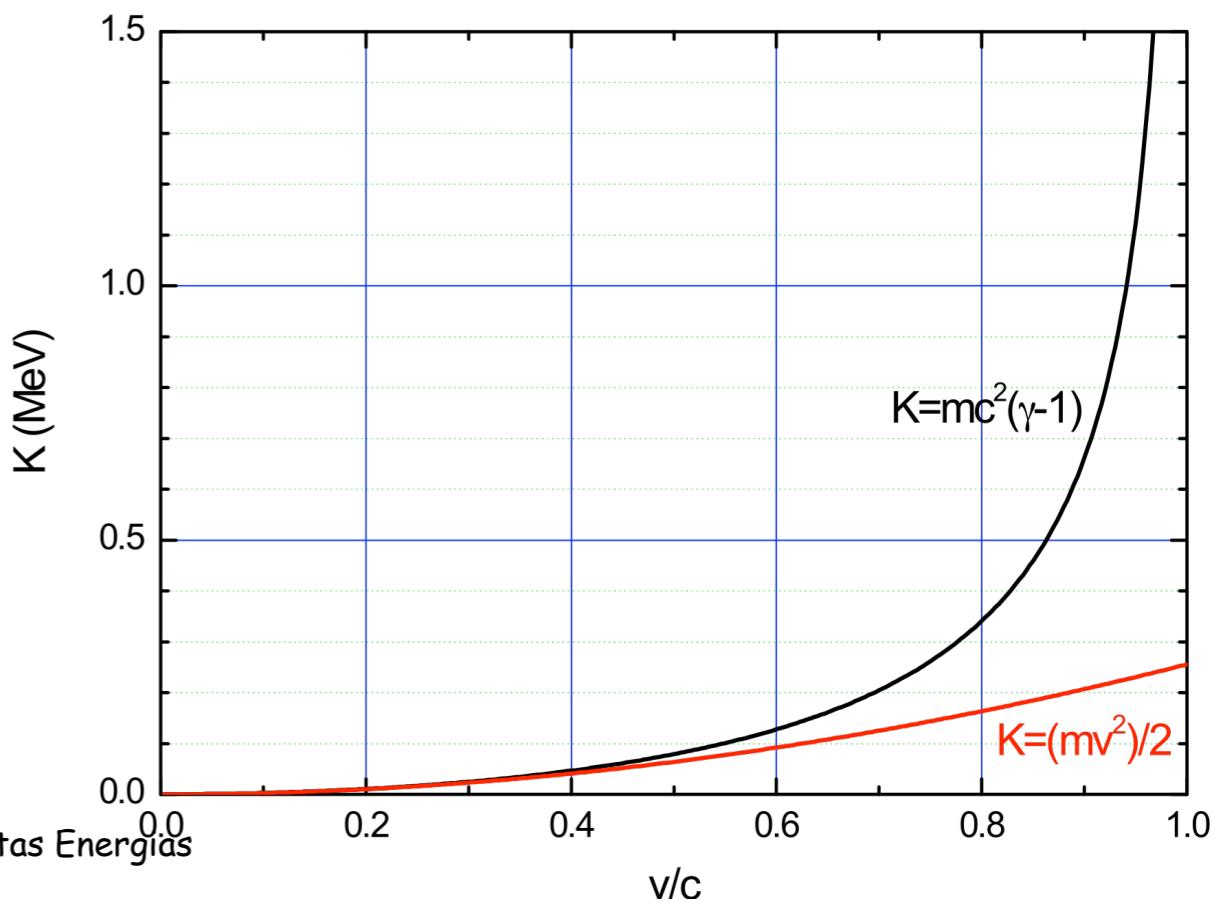
“A energia total  $E$  de um sistema isolado não pode mudar.”

$$Q = -\Delta M c^2$$

Energia cinética

$$K = E - mc^2 = mc^2(\gamma - 1)$$

Cinemática das Colisões em Altas Energias

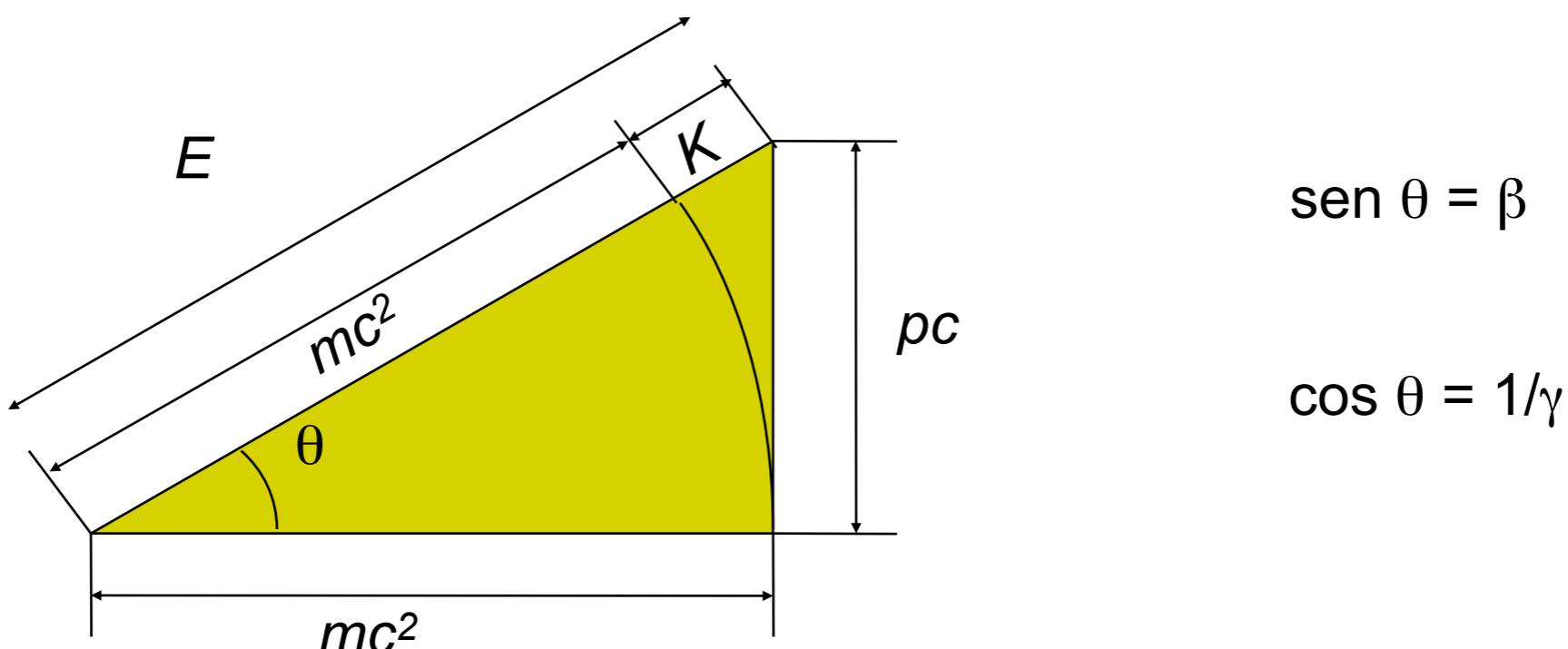


## Momento e energia cinética

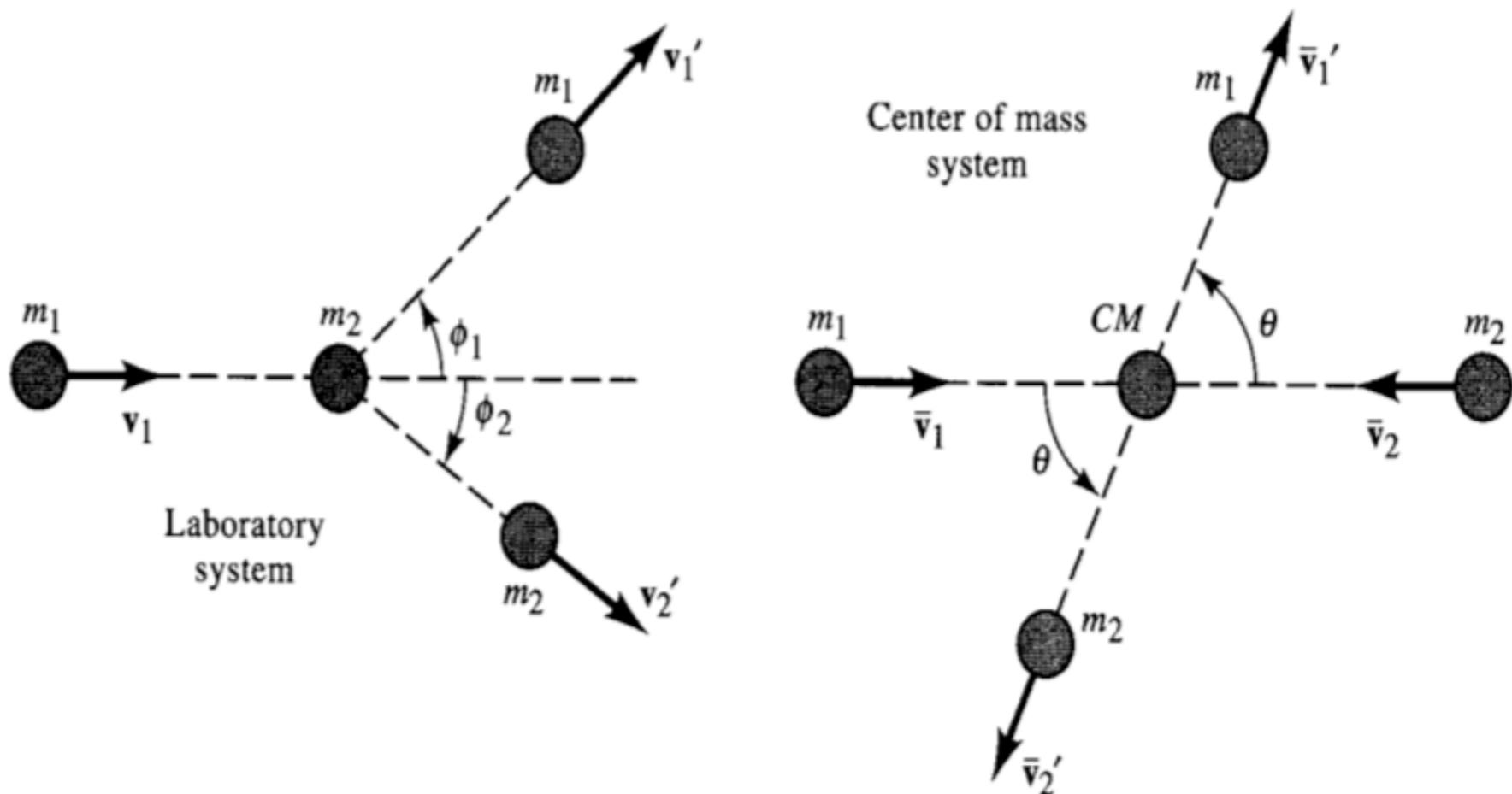
$$\left. \begin{array}{l} K = mc^2(\gamma - 1) \\ p = \gamma mv \end{array} \right\} \Rightarrow (pc)^2 = K^2 + 2Kmc^2$$

Ou:

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$$

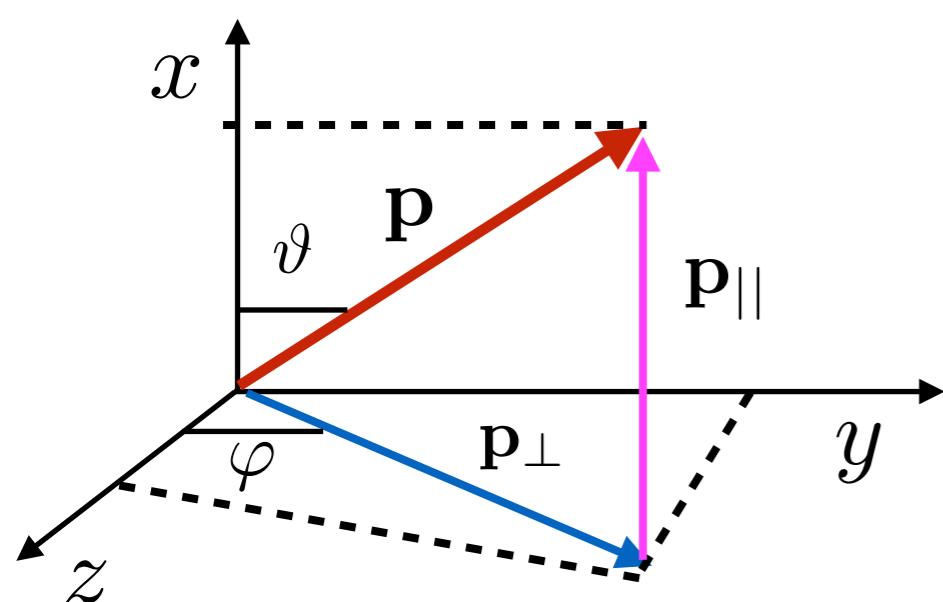
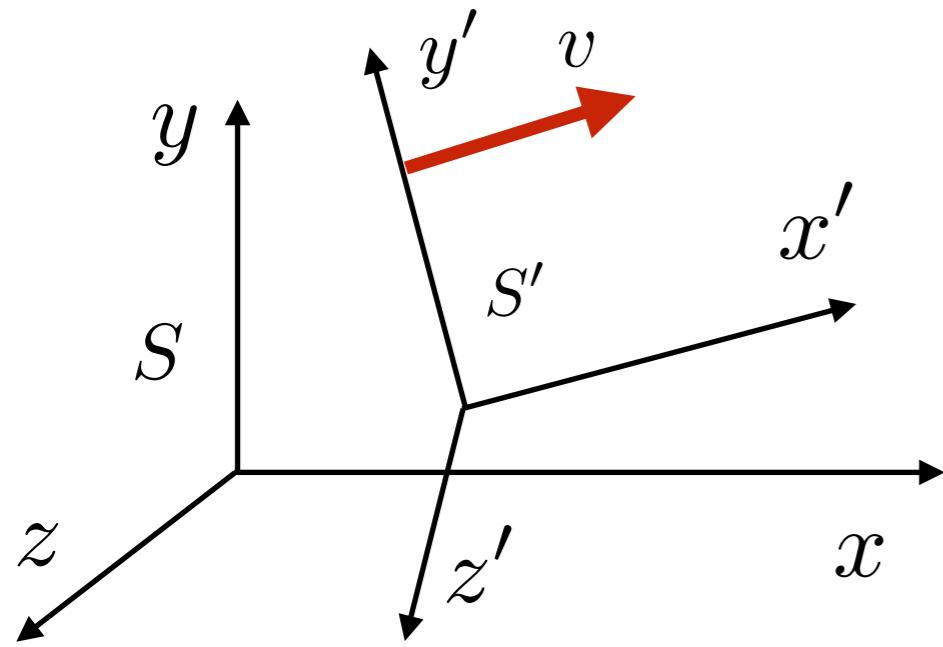


# Sistemas de coordenadas



**Figure 7.6.1** Comparison of laboratory and center of mass coordinates.

# Transformações de Lorentz



$$\mathbf{p}_{||} = p_x = \mathbf{p} \cos \vartheta$$

$$\mathbf{p}_{\perp} = \sqrt{p_y^2 + p_z^2}$$