



Método Monte Carlo

Sheila Amaral

Outline

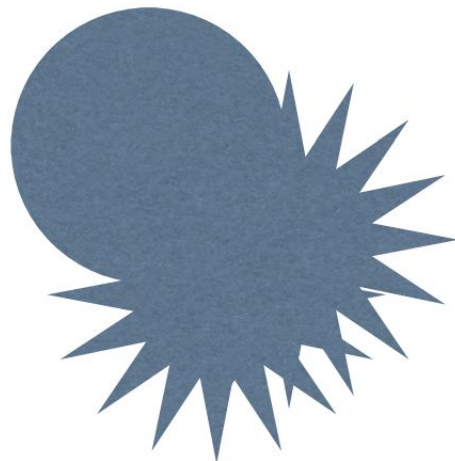
- Método Monte Carlo
 - Problema da agulha de Buffon
 - Método de amostragem por rejeição
 - Aproximação de integrais
 - Usando o método de rejeição
 - Usando o método Monte Carlo
 - Gerando eventos
- Método Monte Carlo em física de Altas Energias
 - Simulação de um evento de colisão
 - Monte Carlo em física de partículas
 - Geradores de eventos
 - Visão Geral: Geração Monte Carlo

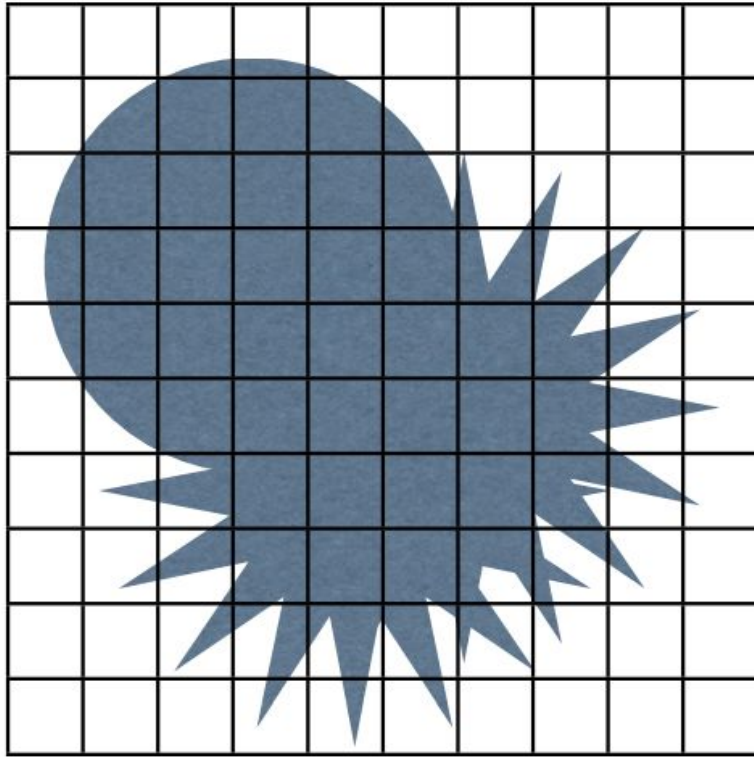
Método Monte Carlo

Qualquer método que resolva um problema através da geração apropriada de números aleatórios, e da observação da fração desses números que seguem determinada propriedade.

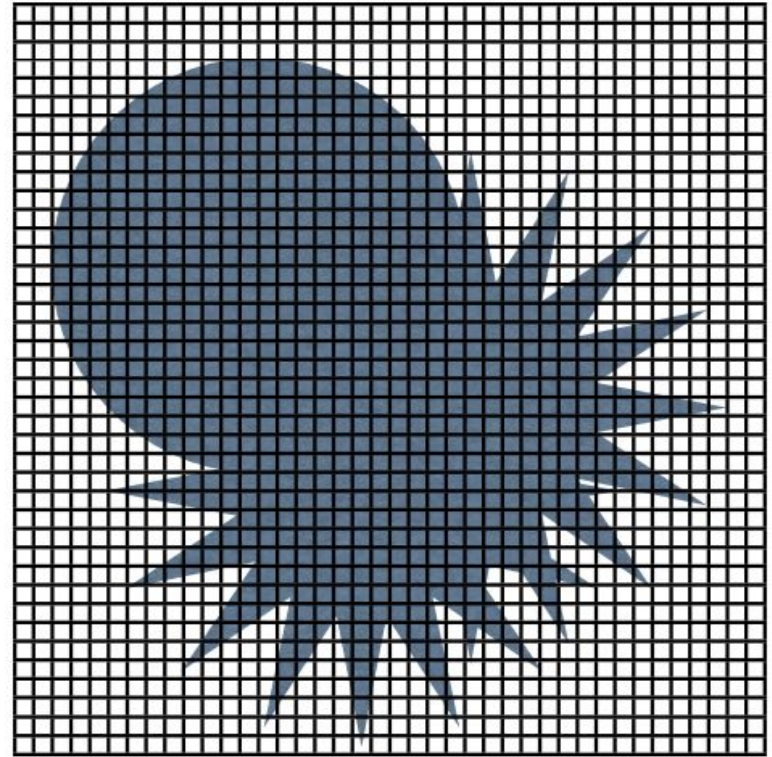
As técnicas de Monte Carlo são em geral, a única forma prática de calcular integrais complexas ou gerar variáveis aleatórias governadas por funções de densidade de probabilidade complicadas.

- A idéia geral é ao invés de realizar longos e complexos cálculos, realizar um número de experimentos usando números aleatórios e observar o que acontece.
- Por exemplo: calcular a área da forma:





10x10



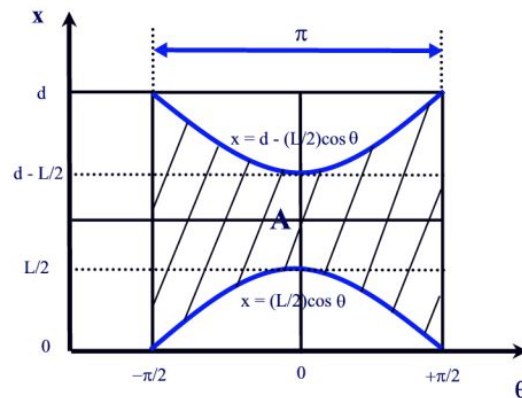
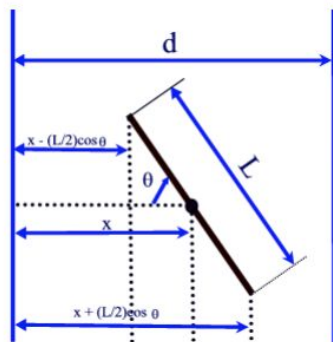
40x40

Area = total area x (number of hits) / (number of total)

Cálculo de π

Problema da agulha de Buffon (1733)

- No século XVIII o matemático Conde de Buffon propôs o seguinte problema: Considere um piso desenhado com infinitas retas paralelas cuja distância entre as mesmas denotaremos pela letra “d”. Jogando-se uma agulha de comprimento nesse piso, qual é a probabilidade de essa agulha tocar alguma linha do piso?



Vamos mostrar como a repetição desse experimento serve para estimar o valor do número π .

Problema da agulha de Buffon (1733)

Seja x a distância do centro da agulha a linha paralela mais próxima, e θ o ângulo entre a agulha e a linha paralela, onde x e θ são variáveis independentes.

$$PDF \text{ para } x = \begin{cases} \frac{2}{l} & 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \\ 0 & x > \frac{l}{2} \end{cases} \quad PDF \text{ para } \theta = \begin{cases} \frac{2}{\pi} & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \theta > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

PDF conjunta $\begin{cases} \frac{4}{l\pi} & 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \text{ e } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \theta > \frac{\pi}{2} \text{ e } x > \frac{l}{2} \end{cases}$ se $x \leq \frac{l}{2} \sin \theta$ a agulha intercepta uma linha

- A probabilidade é: $P = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{x=0}^{\frac{l}{2} \sin \theta} \frac{4}{\pi l} dx d\theta = \frac{2l}{\pi l}$
- Suponha que jogamos n agulhas e encontramos que m agulhas cruzam uma

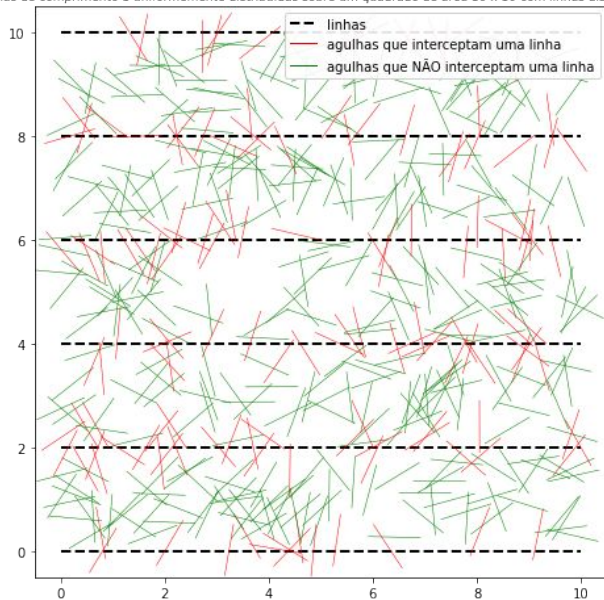
linha, então P é aproximadamente M/n , então: $\pi = \frac{2ln}{dm}$

Problema da agulha de Buffon

https://github.com/Analise-Dados-FAE/2021/blob/main/aula7_MonteCarlo/buffon.ipynb

Simulação do problema da agulha de Buffon
como um método de aproximação para Pi

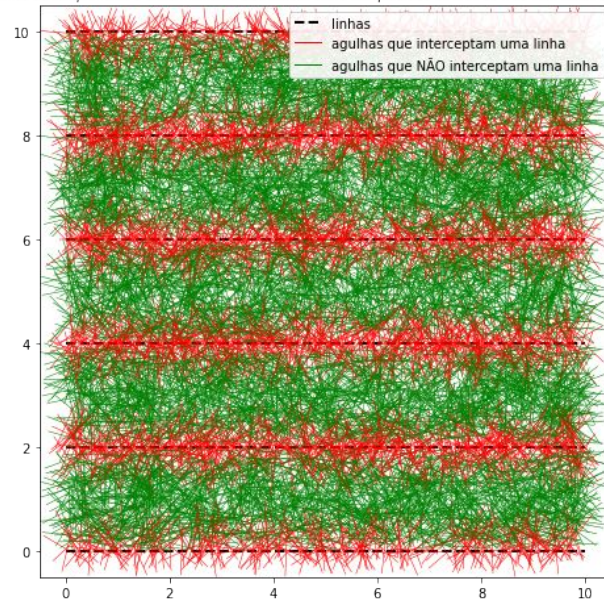
agulhas de comprimento 1 uniformemente distribuídas sobre um quadrado de área 10 x 10 com linhas distanciadas por 2



Interseções: 146
Total de agulhas: 500
Aproximação de pi: 3.4246575342465753
Erro: 9.010234994448862%

Simulação do problema da agulha de Buffon
como um método de aproximação para Pi

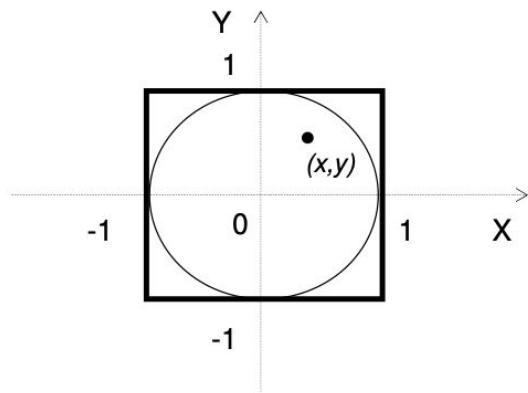
10000 agulhas de comprimento 1 uniformemente distribuídas sobre um quadrado de área 10 x 10 com linhas distanciadas por 2



Interseções: 3165
Total de agulhas: 10000
Aproximação de pi: 3.1595576619273302
Erro: 0.5718439759212289%

Exercício: Calcular o número π

- Utilizando um quadrado de lado 1, com um circunferência circunscrita de raio 1, se um ponto sorteado estiver dentro da circunferência, então marcamos um acerto. Ao final dos sorteios, espera-se que a área da circunferência seja proporcional à taxa de acertos e à área do quadrado. Esse valor é uma aproximação para π



$$P((x, y) \in \text{circunferencia}) = P(x^2 + y^2 \leq 1) = \frac{\pi}{4}$$

Aproximação de integrais

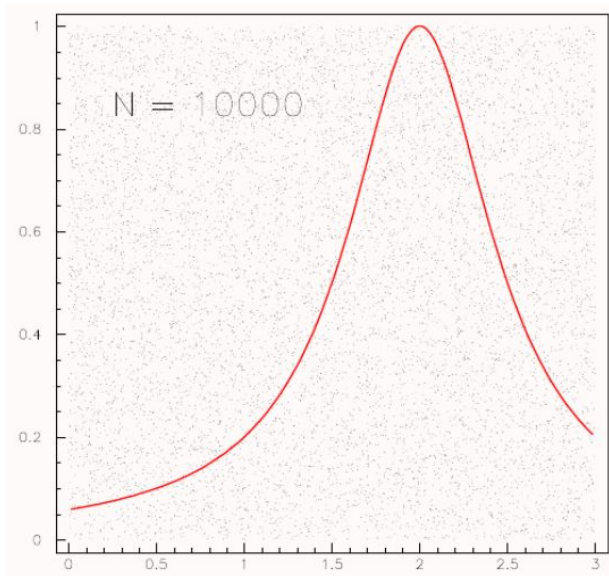
Método de amostragem por rejeição

- Amostragem por rejeição é uma técnica básica usada para gerar observações a partir de uma distribuição.
- Suponha que tenhamos um método para simular uma variável aleatória com função densidade $g(x)$.
- Podemos usar esse método como base para simular uma distribuição contínua com densidade $f(x)$ fazendo a simulação de Y a partir de g e então aceitando o valor simulado com uma probabilidade proporcional a $f(y)/g(y)$.
- Especificamente, seja c uma constante tal que

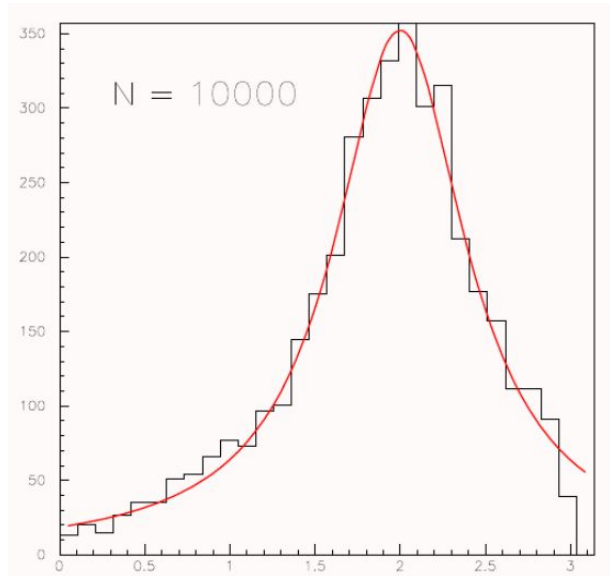
$$\frac{f(y)}{g(y)} \leq c, \quad \forall y$$
$$\text{onde } c = \max \left(\frac{f(y)}{g(y)} \right)$$

Exemplo

Queremos gerar eventos distribuídos segundo uma pdf do tipo Breit-Wigner usando o método de rejeição, a partir de 10000 valores aleatórios distribuídos uniformemente entre os intervalos $x=[0, 3]$ e $y=[0,1]$.



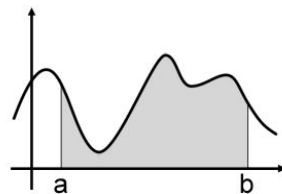
Histograma de eventos aleatórios, gerados via método de rejeição, distribuídos segundo a pdf ao lado. O valores de x são aceitos se satisfazem a condição $y \leq f(x)$



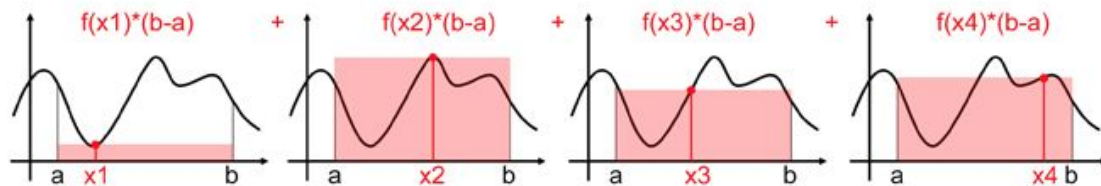
Calculando integrais

- Imagine que queremos integrar uma função unidimensional $f(x)$ no intervalo $[a,b]$:

$$F = \int_a^b f(x) dx.$$



- Lembrando que a integral de uma função $f(x)$ pode ser interpretado com a área abaixo da curva da função:



$$\frac{1}{4} * (\text{red rectangle} + \text{red rectangle} + \text{red rectangle} + \text{red rectangle}) \approx \text{black silhouette of the function curve}$$

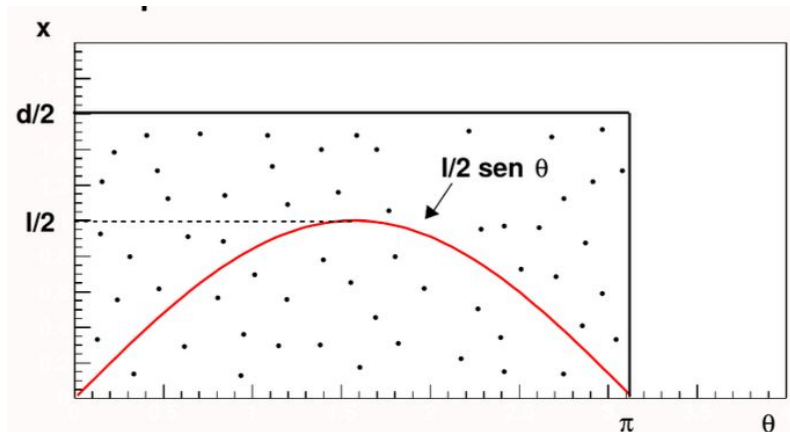
$$\langle F^N \rangle = (b-a) \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(X_i).$$

Calculando integrais usando o método de rejeição

- Primeiro calculamos a área abaixo da curva da função ($f(x) = \frac{l}{2} \sin \theta$) no intervalo entre 0 e π
- Então, geramos pontos aleatórios (x, y)
- Usando o método de amostragem por rejeição, aceitamos m pontos abaixo da curva após N eventos
- Como o problema do Buffon, o valor de uma integral será definida como:

$$I = \int_0^\pi \frac{l}{2} \sin \theta = \frac{Am}{N}$$

Onde A é a área embaixo da curva



Calculando integrais usando o método Monte Carlo

- Podemos calcular a integral no intervalo (a,b) definida como $I = \int_a^b f(x)dx$
- Podemos estimar diretamente usando distribuições uniformes de valores aleatórios no intervalo $(0,1)$
 - Transformamos a integral para uma integral no intervalo $(0,1)$:

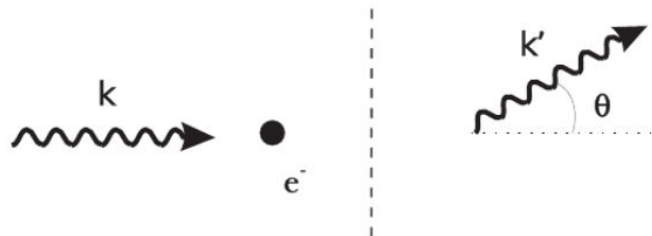
$$I = (b - a) \int_0^1 f[x'(b - a) + a]dx' \quad x' = \frac{x - a}{b - a}$$

$$I = \frac{(b - a)}{N} \sum_{i=1}^N f[x_i(b - a) + a]$$

Gerando eventos

Gerando eventos

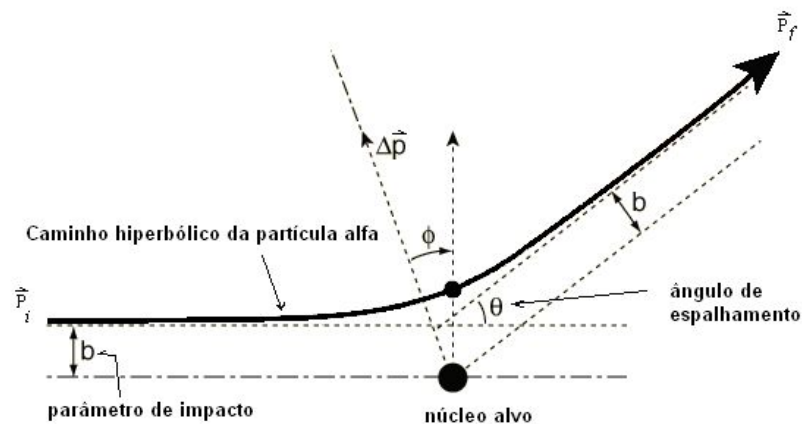
- Espalhamento Compton



$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2m^2} \left(\frac{k'}{k}\right)^2 \left(\frac{k'}{k} + \frac{k}{k'} - \sin^2 \theta\right)$$

$$k' = \frac{k}{1 + (k/m)(1 - \cos \theta)}$$

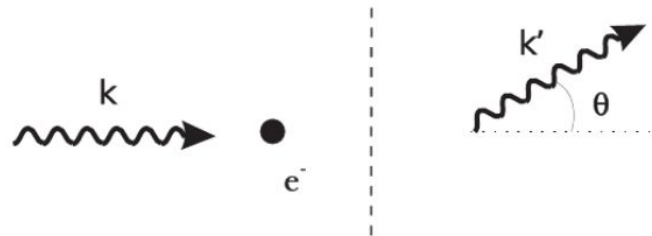
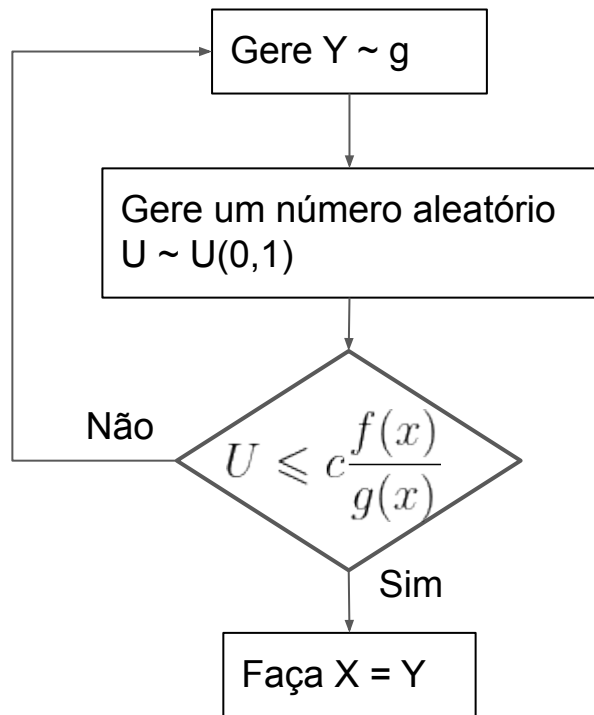
- Espalhamento Rutherford



$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 m v_0^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}.$$

Espalhamento Compton - Método de rejeição

https://github.com/Analise-Dados-FAE/2021/blob/main/aula7_MonteCarlo/compton.ipynb

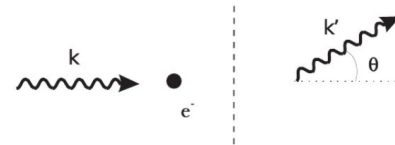


$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2m^2} \left(\frac{k'}{k} \right)^2 \left(\frac{k'}{k} + \frac{k}{k'} - \sin^2 \theta \right)$$

$$k' = \frac{k}{1 + (k/m)(1 - \cos \theta)}$$

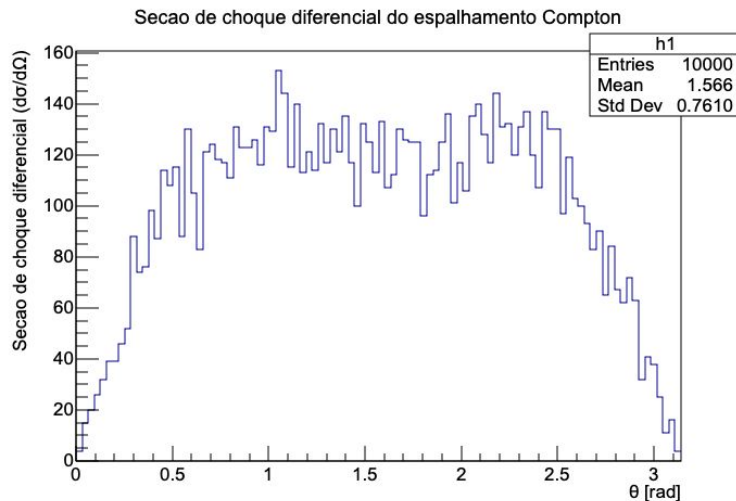
Espalhamento Compton - Método de rejeição

https://github.com/Analise-Dados-FAE/2021/blob/main/aula7_MonteCarlo/compton.ipynb

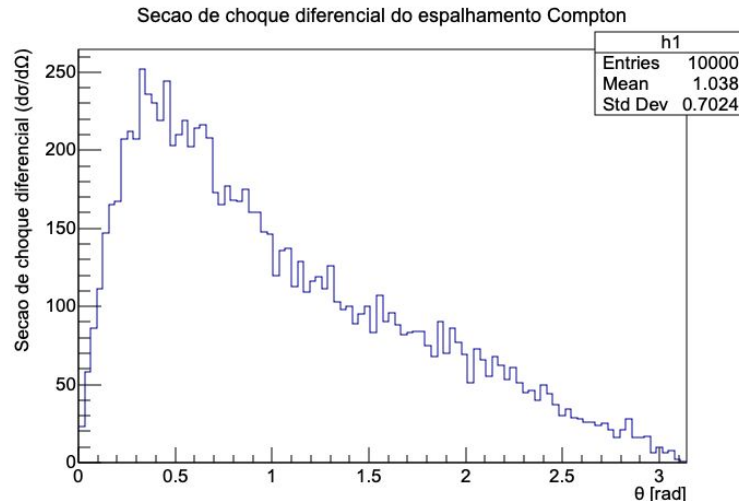


$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2m^2} \left(\frac{k'}{k}\right)^2 \left(\frac{k'}{k} + \frac{k}{k'} - \sin^2 \theta\right)$$

$k = 5e-3$ MeV



$k = 2$ MeV

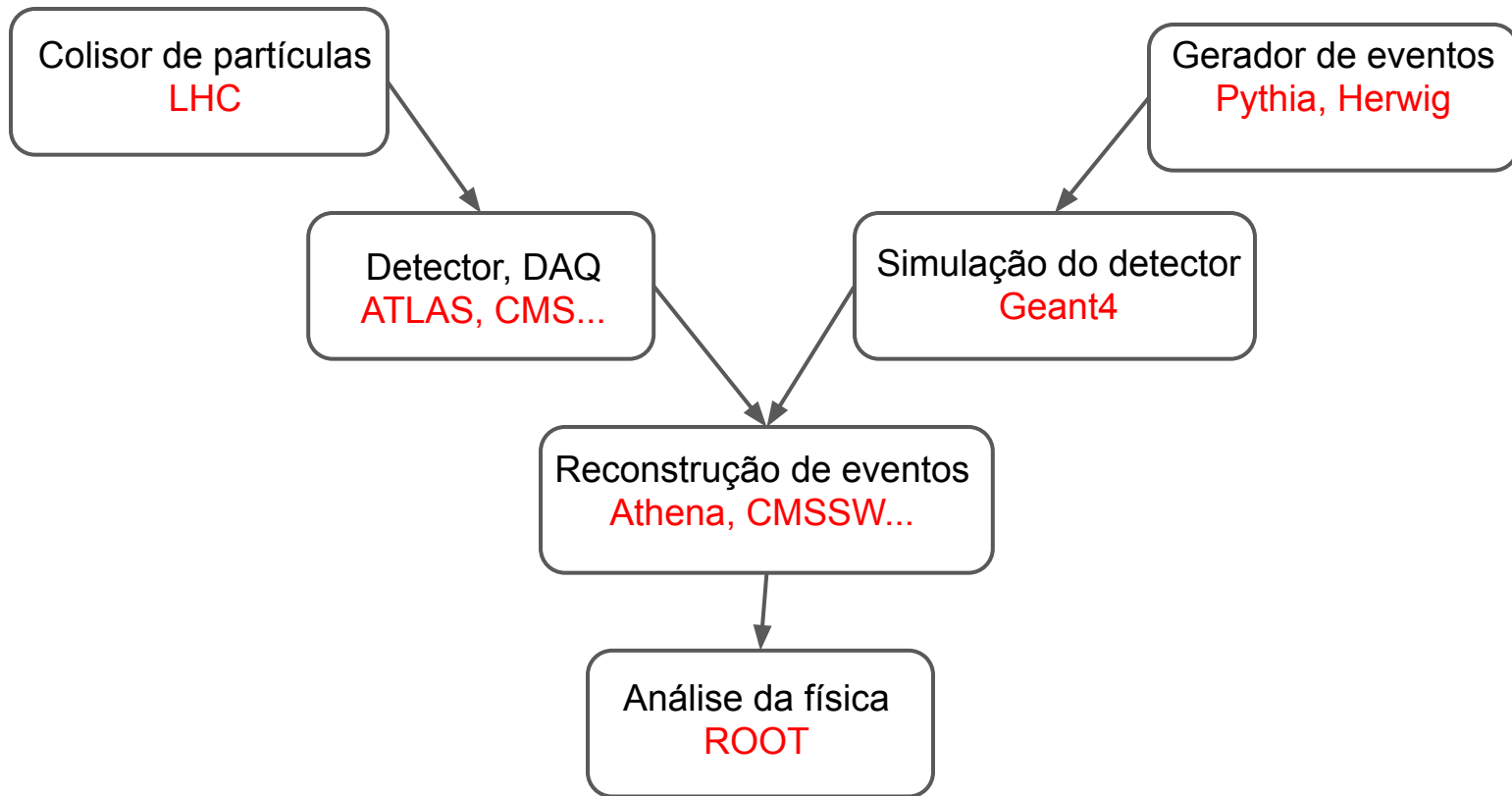


Monte Carlo em física de altas energias

MC em física de altas energias

1. Simulação do detector
 - a. Detectores em geral são muito complexos
2. Simulação da interação das partículas com o material do detector
3. Análise física
 - a. Novas previsões físicas: SUSY, UED, ...
 - b. Seleção de eventos
 - c. Estimativa de eventos de fundo
 - d. Eficiência do detector/algoritmo/...

MC em FAE



Monte Carlo em FAE

Escolha do modelo, restrições, parâmetros, canais de decaimento de interesse

Teoria

Cinemática, informações das partículas conhecidas (detectáveis)

Gerador

Simulação do detector:

- Hardware
- Software

Simulação Digitalização Trigger

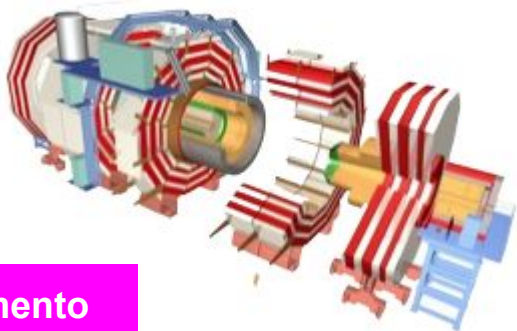
Offline software

- Seleção de eventos

Reconstrução Análise

Resultado

Experimento Trigger



Alguns geradores

	Objetivo geral	Especializado
Processos duro	HERWIG PYTHIA SHERPA 	MadGraph, AlpGen, ...
Decaimento de ressonâncias		HDECAY, ...
Chuveiros partônicos		Ariadne/LDC, VINCIA, ...
Eventos subjacentes		PHOJET/DPMJET
Hadronização		none (?)
Outros decaimentos		TAUOLA, EvtGen

Os geradores especializados, em geral, são melhores para algumas tarefas, mas usam o core dos geradores de objetivo geral

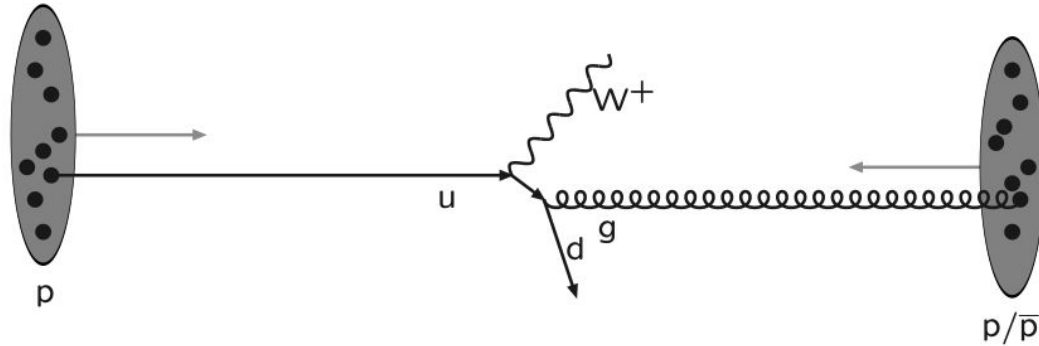
Estrutura de um evento

Figura fora de escala e simplificada.



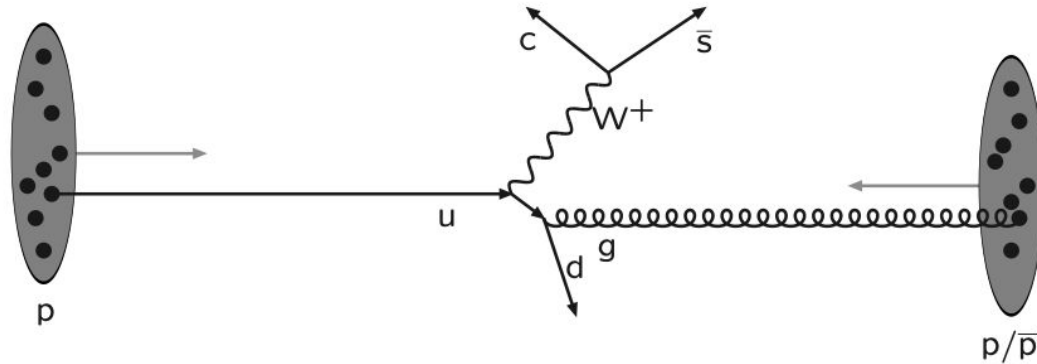
Feixe incidente: densidade partônica

Estrutura de um evento



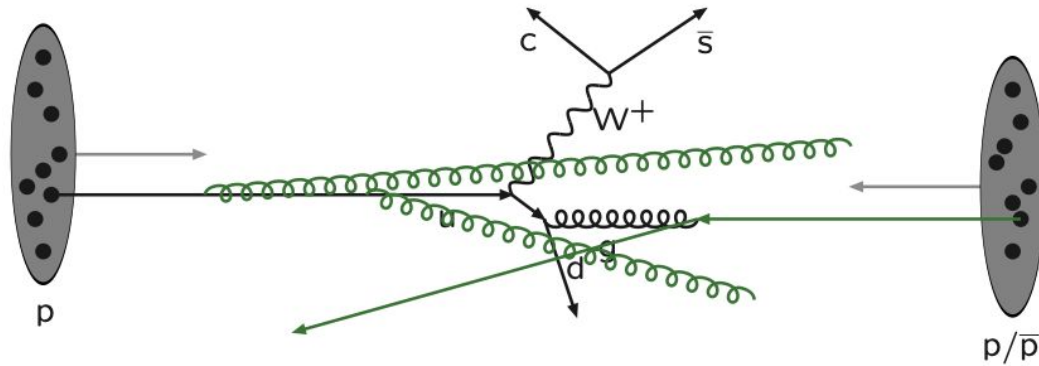
Subprocesso duro: descrito pelos elementos de matriz

Estrutura de um evento



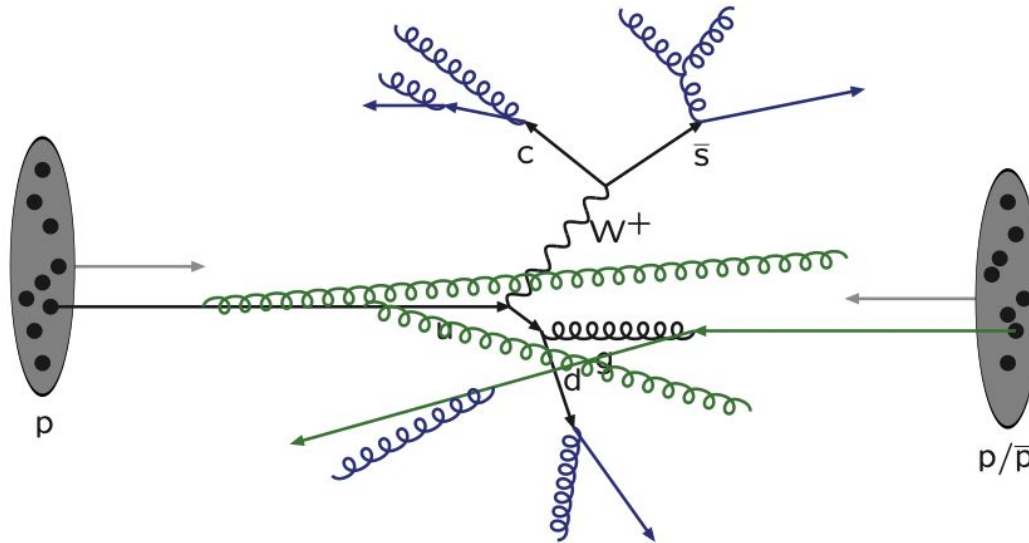
Decaimento de ressonâncias correlacionadas com o subprocesso duro

Estrutura de um evento



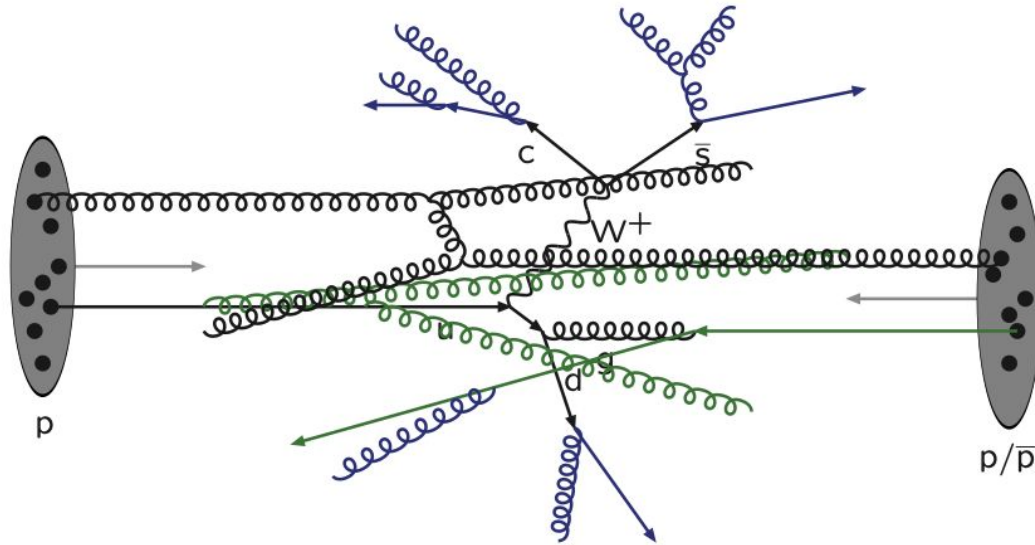
Radiação de estado inicial

Estrutura de um evento



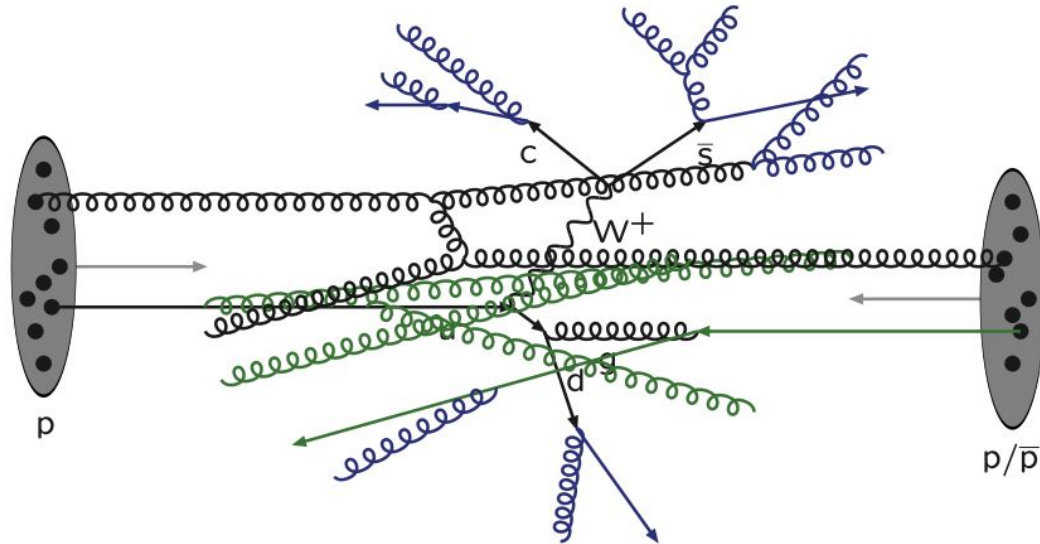
Radiação de estado final

Estrutura de um evento



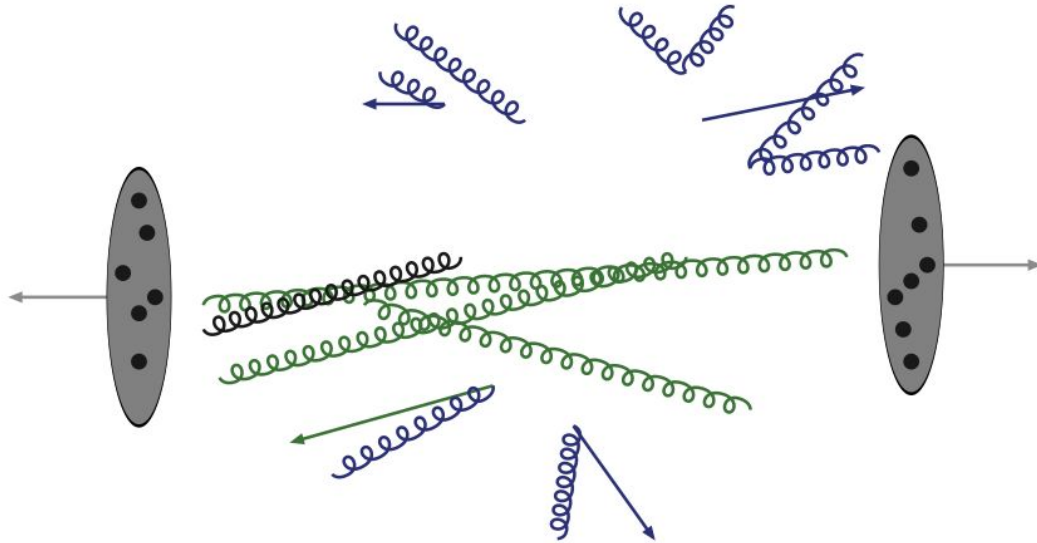
Múltiplas interações pártion-pártion

Estrutura de um evento



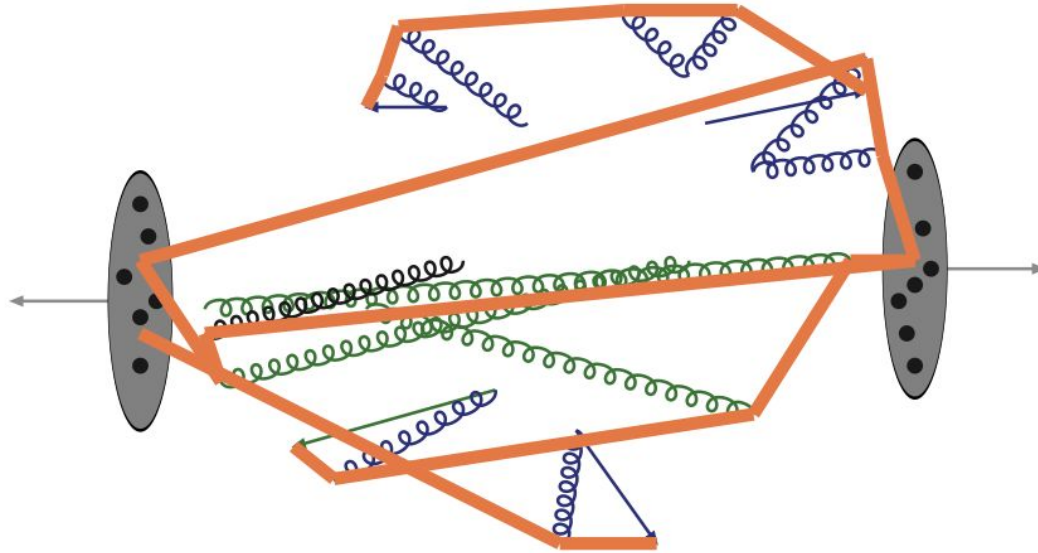
... com as suas radiações de estado inicial e final

Estrutura de um evento



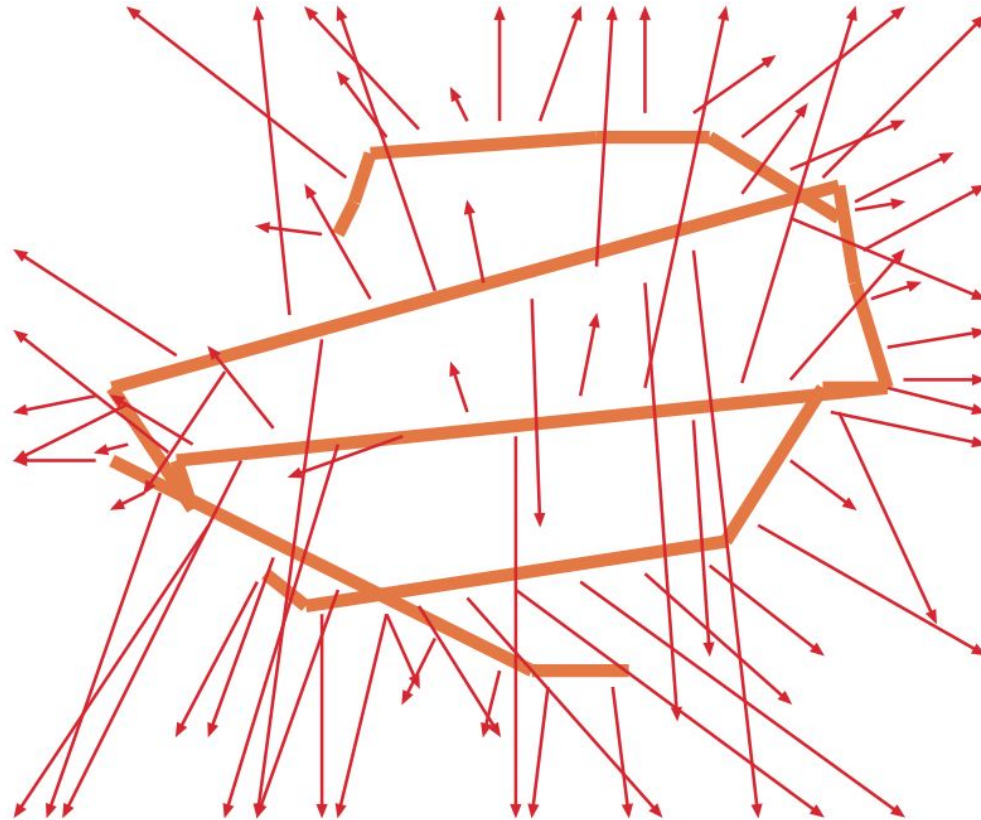
Remanescentes do feixe e outros pártons

Estrutura de um evento



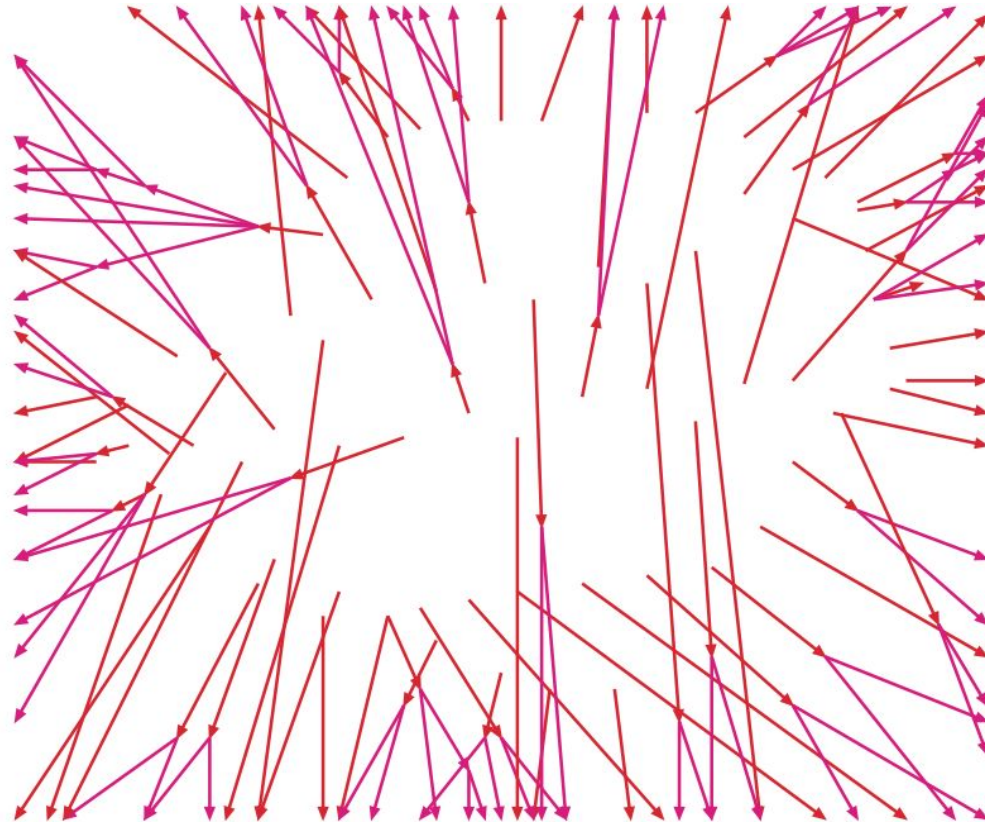
Tudo é conectado por cordas de cores
Lembre-se: fora de escala

Estrutura de um evento



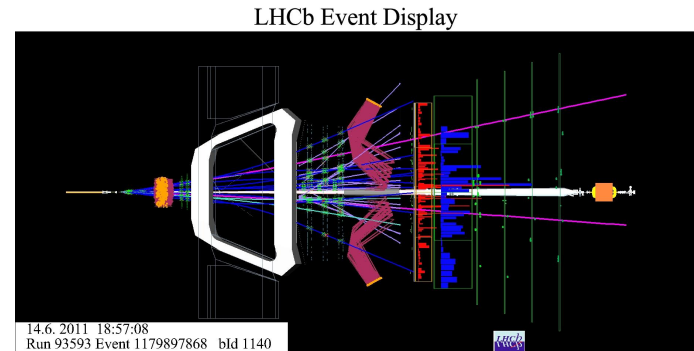
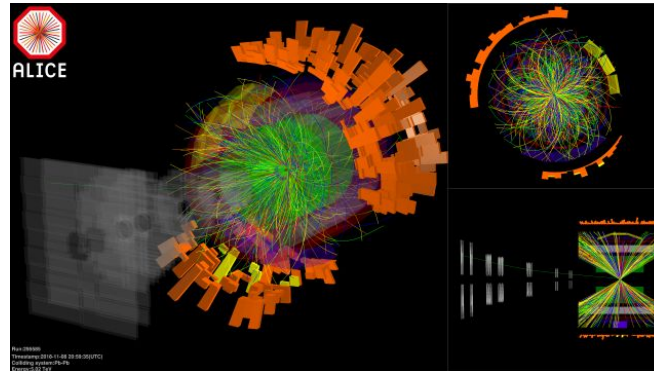
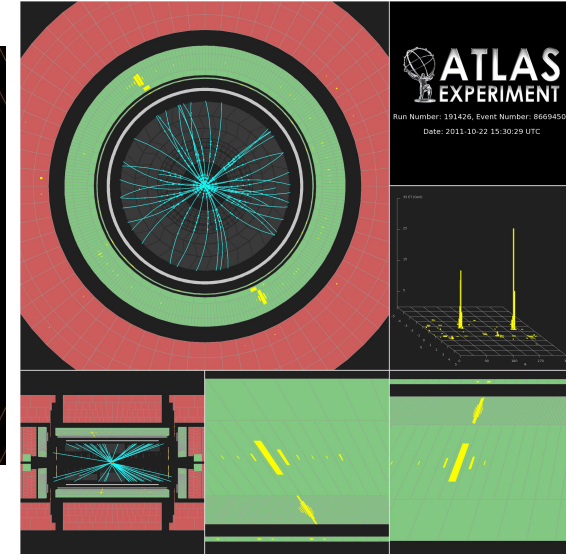
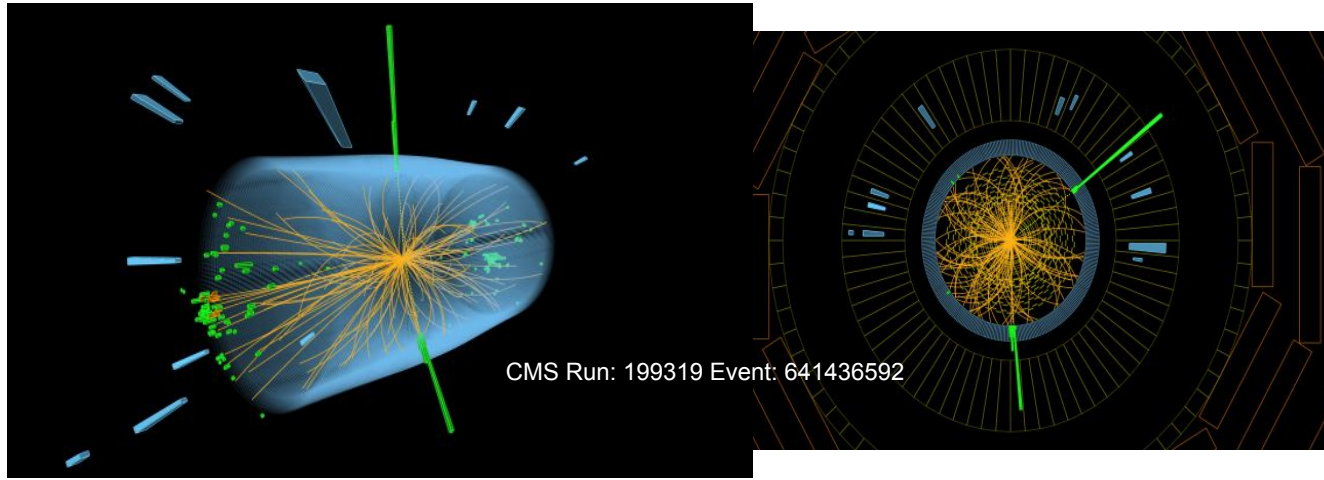
As cordas se fragmentam e produzem os hádrons primários

Estrutura de um evento



Muitos hádrons são instáveis e então decaem

Estrutura de um evento

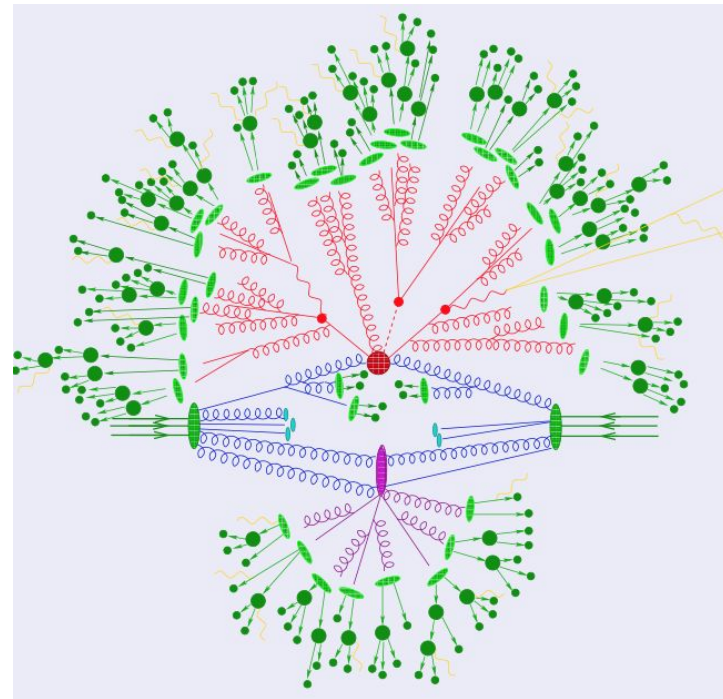


Estratégia básica: dividir o evento em partes, separados pelas diferentes escalas

- **Sinal/background**: elementos de matriz
- **QCD-bremsstrahlung**: chuva partônica (também **estado inicial**)
- **Múltiplas interações**: além da fatorização, modelagem
- **Hadronização**: não-perturbativa, modelagem

Cálculo: → subprocesso **partônico**

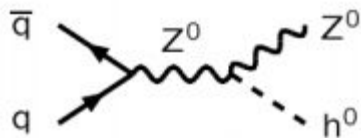
Medida: → **hádrons**



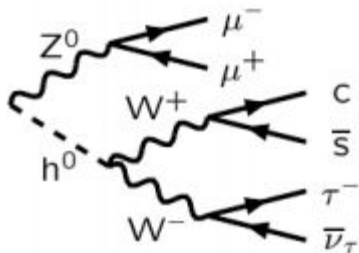
Visão global: Geração Monte Carlo

Elementos de matriz (ME):

1. Subprocesso duro: $|M^2|$, Breit-Wigners, densidades partônicas.

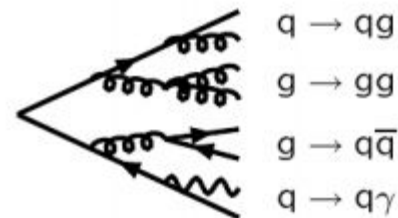


2. Decaimento de ressonâncias: incluindo correlações

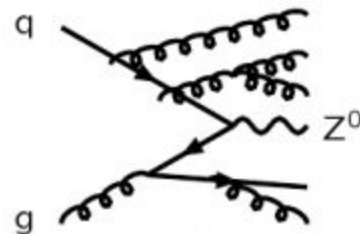


Chuveiros partônicos:

3. Chuveiro partônico de estado final

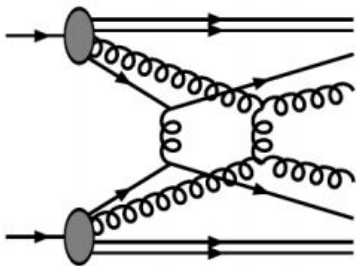


4. Chuveiro partônico de estado inicial

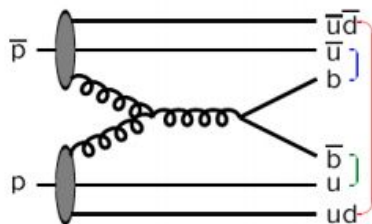


Visão global: Geração Monte Carlo

5. Múltiplas interações párton-párton

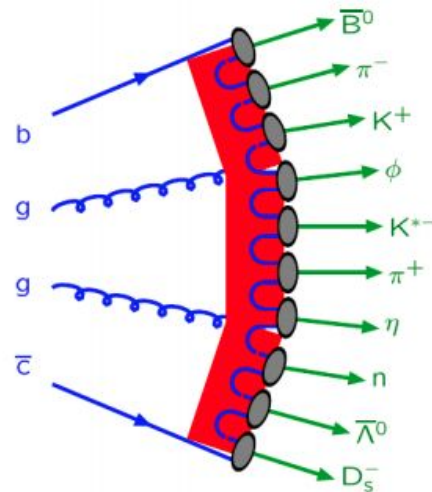


6. Remanescentes do feixe com reconexão de cores

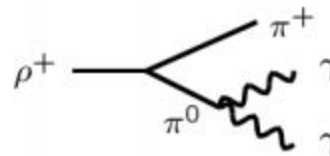


5+6 = evento subjacente

7. Hadronização

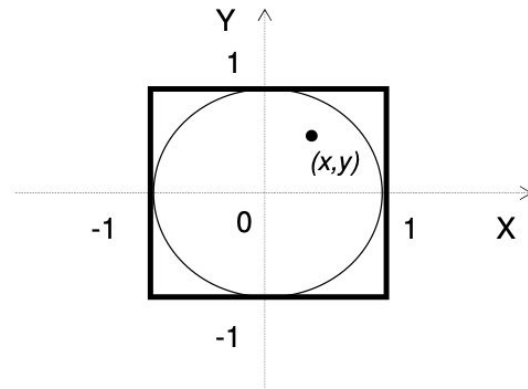


8. Outros decaimentos: hadrônicos, τ , charm,...



Exercícios

1. Escreva um código que estime a área de um disco unitário com o mesmo método usado no problema de Buffon. Sabemos que o raio do disco é 1, então o círculo está inscrito em um quadrado de lado 2.
 - Dica: Gere amostras nesse quadrado e conte os pontos que estão dentro do disco. Para testar se um ponto está dentro ou fora do disco, meça a distância do ponto à origem (o centro do disco) e cheque se a distância é menor ou igual ao raio do disco
2. Escreva um código que calcule a integral usando o método de rejeição e o método direto
3. Escreva um código que calcula a seção de choque diferencial do espalhamento de Rutherford



$$\int_0^3 (1 - x^2)^2 dx$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 m v_0^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}.$$

Backup Slides

Anatomia de um evento

- 1) Processo duro
- 2) Decaimento de ressonâncias
- 3) ISR
- 4) FSR
- 5) Eventos adjacentes
- 6) Hadronização
- 7) Decaimento de partículas

