Método Monte Carlo

Sheila Amaral

Outline

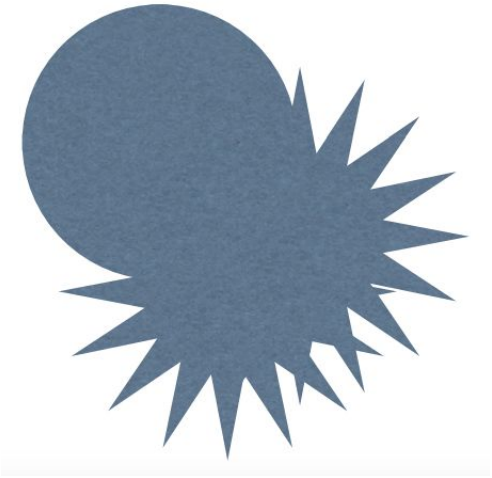
- Método Monte Carlo
  - Problema da agulha de Buffon
  - Método de amostragem por rejeição
  - Aproximação de integrais
    - Usando o método de rejeição
    - Usando o método Monte Carlo
  - Gerando eventos
- Método Monte Carlo em física de Altas Energias
  - Simulação de um evento de colisão
  - Monte Carlo em física de partículas
  - Geradores de eventos
  - Visão Geral: Geração Monte Carlo

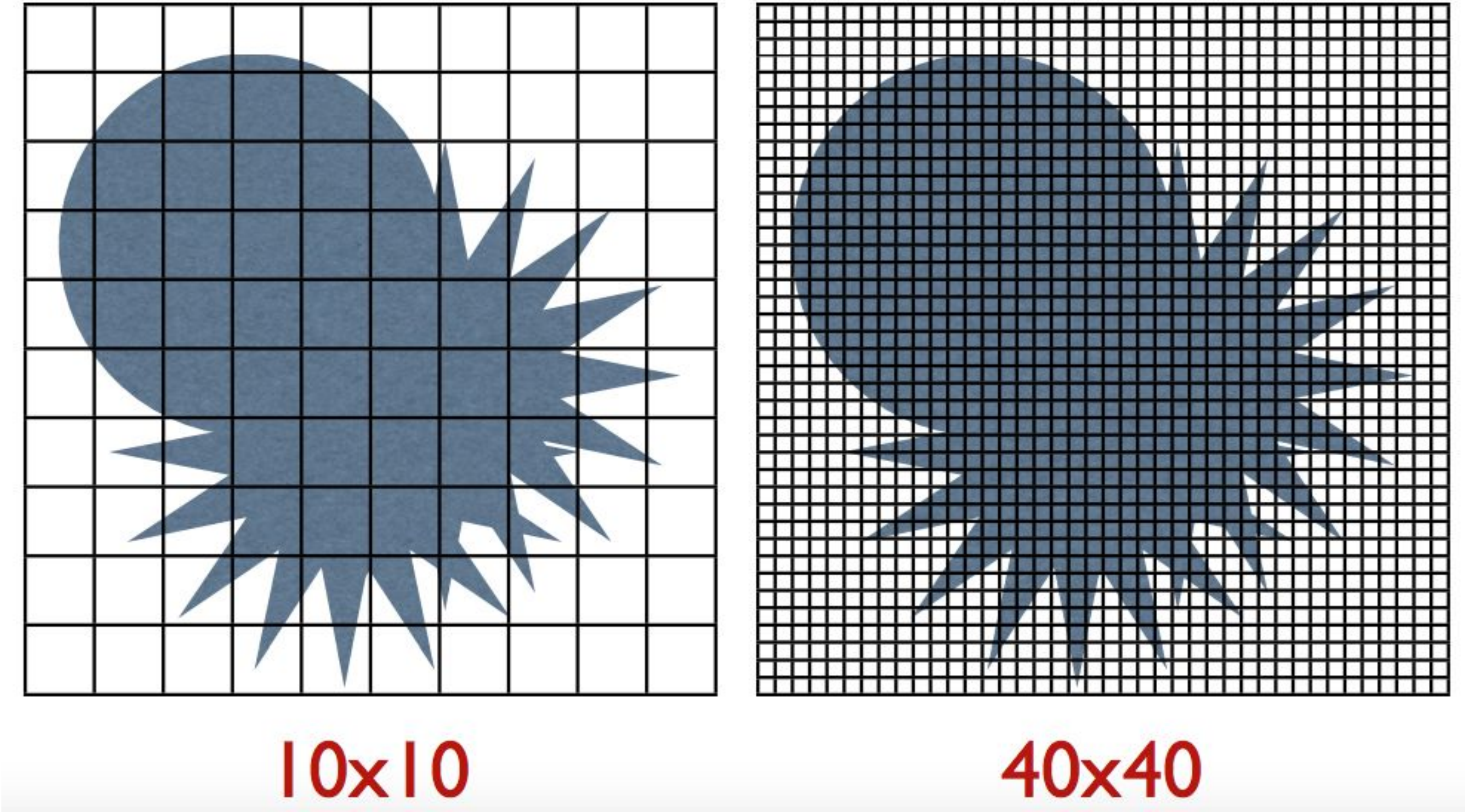
Método Monte Carlo

Qualquer método que resolva um problema através da geração apropriada de números aleatórios, e da observação da fração desses números que seguem determinada propriedade.

As técnicas de Monte Carlo são em geral, a única forma prática de calcular integrais complexas ou gerar variáveis aleatórias governadas por funções de densidade de probabilidade complicadas.

- A idéia geral é ao invés de realizar longos e complexos cálculos, realizar um número de experimentos usando números aleatórios e observar o que acontece.
- Por exemplo: calcular a área da forma:



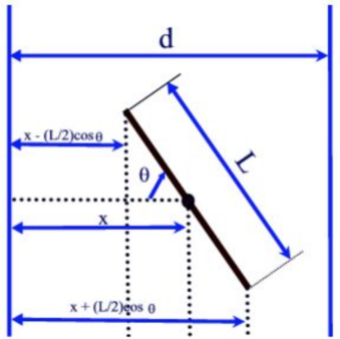


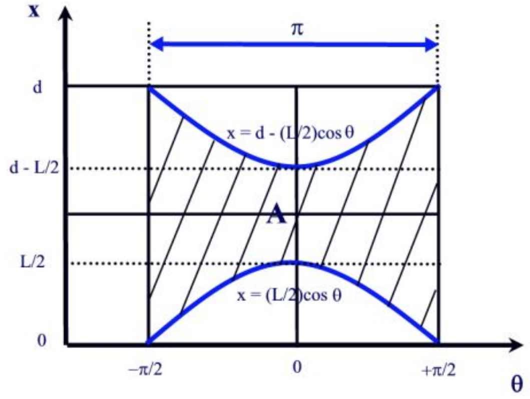
Area = total area x (number of hits) / (number of total)

Cálculo de π

Problema da agulha de Buffon (1733)

- No século XVIII o matemático Conde de Buffon propôs o seguinte problema: Considere um piso desenhado com infinitas retas paralelas cuja distância entre as mesmas denotaremos pela letra “d”. Jogando-se uma agulha de comprimento nesse piso, qual é a probabilidade de essa agulha tocar alguma linha do piso?





Vamos mostrar como a repetição desse experimento serve para estimar o valor do número π.

Problema da agulha de Buffon (1733)

Seja *x* a distância do centro da agulha a linha paralela mais próxima, e θ o ângulo entre a agulha e a linha paralela, onde *x* e θ são variáveis independentes.

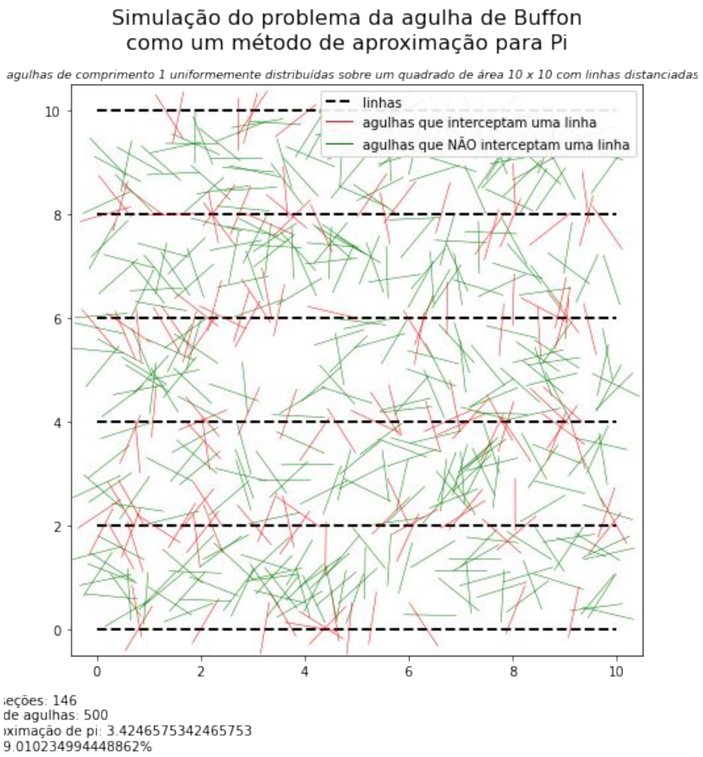
$$PDF\ para\ x = \begin{cases} \frac{2}{l} & 0 \le x \le \frac{2}{l} \\ 0 & x > \frac{2}{l} \end{cases} \qquad PDF\ para\ \theta = \begin{cases} \frac{2}{\pi} & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \theta > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

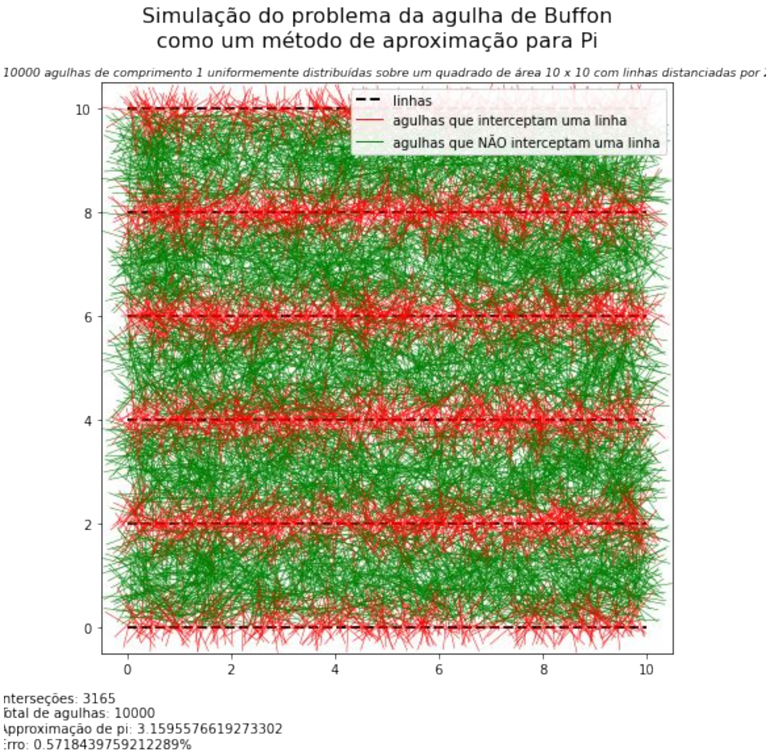
$PDF\ conjunta \begin{cases} \frac{4}{l\pi} & 0 \le x \le \frac{\pi}{2}\ e\ 0 \le x \le \frac{2}{l} \\ 0 & \theta > \frac{\pi}{2}\ e\ x > \frac{2}{l} \end{cases}$ se $x \le \frac{l}{2}\sin\theta$ a agulha intercepta uma linha

- A probabilidade é: $P = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{x=0}^{\frac{l}{2}\sin\theta} \frac{4}{\pi d} dx d\theta = \frac{2l}{\pi d}$
- Suponha que jogamos n agulhas e encontramos que m agulhas cruzam uma linha, então P é aproximadamente M/n, então: $\pi = \frac{2ln}{dm}$

Problema da agulha de Buffon

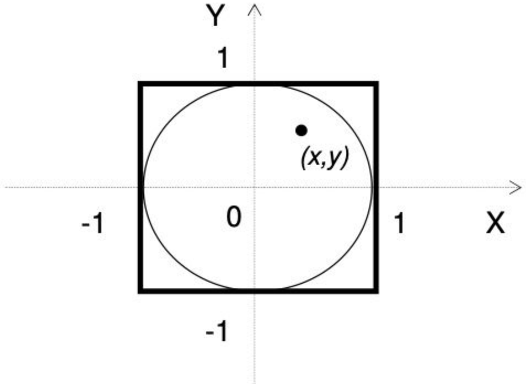
https://github.com/Analise-Dados-FAE/2021/blob/main/aula7_MonteCarlo/buffon.ipynb





Exercício: Calcular o número π

- Utilizando um quadrado de lado 1, com um circunferência circunscrita de raio 1, se um ponto sorteado estiver dentro da circunferência, então marcamos um acerto. Ao final dos sorteios, espera-se que a área da circunferência seja proporcional à taxa de acertos e à área do quadrado. Esse valor é uma aproximação para π



$$P((x,y) \in circunferencia) = P(x^2 + y^2 \leq 1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\pi r^2}{4}\ mas\ r = 1$$

$$\therefore \frac{\pi}{4} = \frac{numero\ de\ pontos\ que\ satisfacam\ x^2 + y^2 \leq 1}{numero\, total\ de\ pontos\ gerados}$$

$$\Rightarrow \pi = 4 \times \frac{numero\ de\ pontos\ que\ satisfacam\ x^2 + y^2 \leq 1}{numero\ total\ de\ pontos\ gerados}$$

Aproximação de integrais

Método de amostragem por rejeição

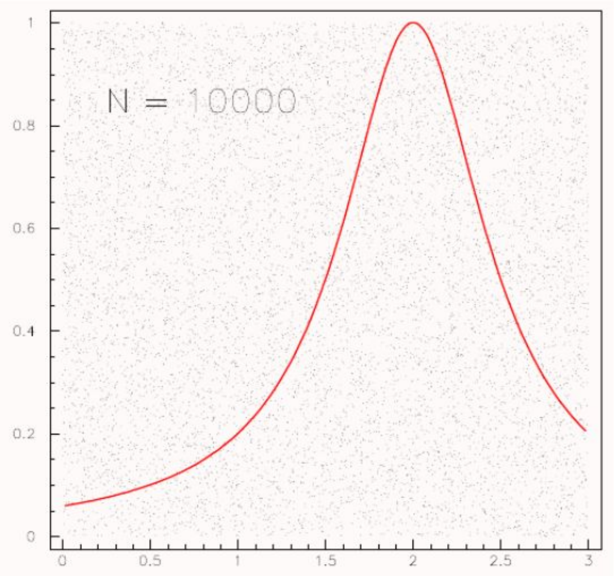
- Amostragem por rejeição é uma técnica básica usada para gerar observações a partir de uma distribuição.
- Suponha que tenhamos um método para simular uma variável aleatória com função densidade g(x).
- Podemos usar esse método como base para simular uma distribuição contínua com densidade f(x) fazendo a simulação de Y a partir de g e então aceitando o valor simulado com uma probabilidade proporcional a f (y)/g(y).
- Especificamente, seja c uma constante tal que

$$\frac{f(y)}{g(y)} \leq c, \quad \forall y$$

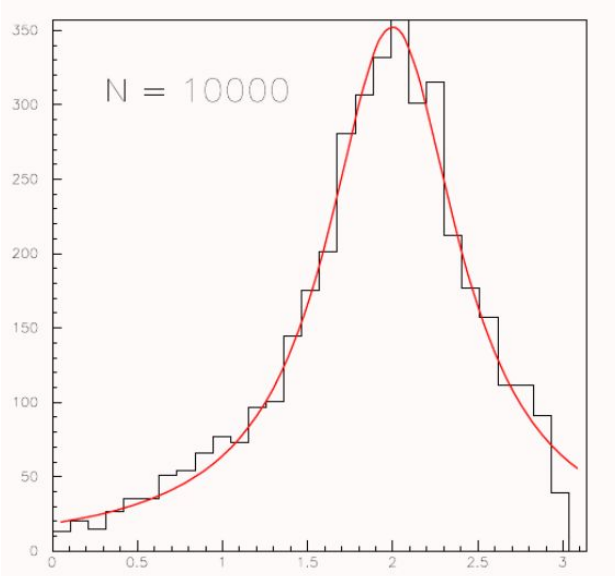
$$onde\ c = max\left(\frac{f(y)}{g(y)}\right)$$

Exemplo

Queremos gerar eventos distribuídos segundo uma pdf do tipo Breit-Wigner usando o método de rejeição, a partir de 10000 valores aleatórios distribuídos uniformemente entre os intervalos x=[0, 3] e y=[0,1].



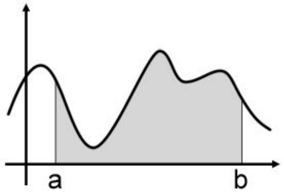
Histograma de eventos aleatórios, gerados via método de rejeição, distribuídos segundo a pdf ao lado. O valores de x são aceitos se satisfazem a condição y ≤ f(x)



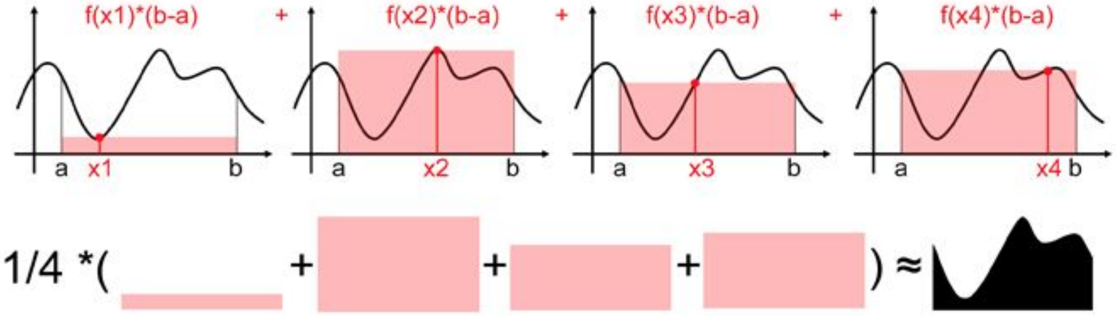
Calculando integrais

- Imagine que queremos integrar uma função unidimensional f(x) no intervalo [a,b]:

$$F = \int_a^b f(x)\, dx.$$



- Lembrando que a integral de uma função f(x) pode ser interpretado com a área abaixo da curva da função:



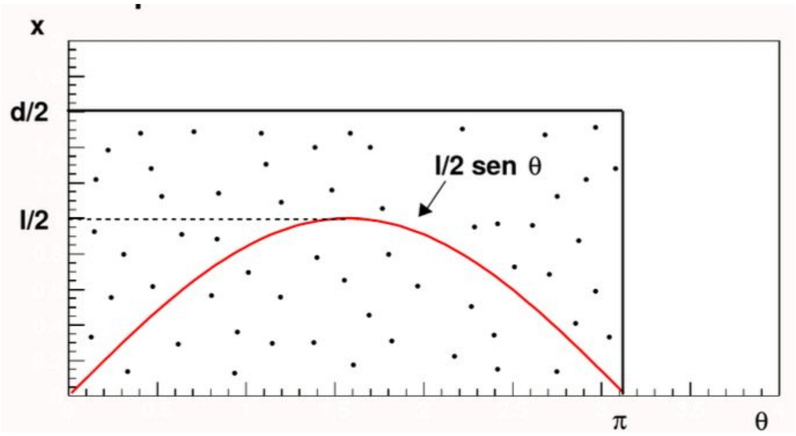
$$\langle F^N \rangle = (b-a)\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f(X_i).$$

Calculando integrais usando o método de rejeição

- Primeiro calculamos a área abaixo da curva da função ($f(x) = \frac{l}{2}\sin\theta$) no intervalo entre *0* e π
- Então, geramos pontos aleatórios (*x, y*)
- Usando o método de amostragem por rejeição, aceitamos *m* pontos abaixo da curva após *N* eventos
- Como o problema do Buffon, o valor de uma integral será definida como:

$$I = \int_0^\pi \frac{l}{2}\sin\theta = \frac{Am}{N}$$

Onde A é a área embaixo da curva



Calculando integrais usando o método Monte Carlo

- Podemos calcular a integral no intervalo (a,b) definida como $I = \int_a^b f(x)dx$
- Podemos estimar diretamente usando distribuições uniformes de valores aleatórios no intervalo (0,1)
  - Transformamos a integral para uma integral no intervalo (0,1):

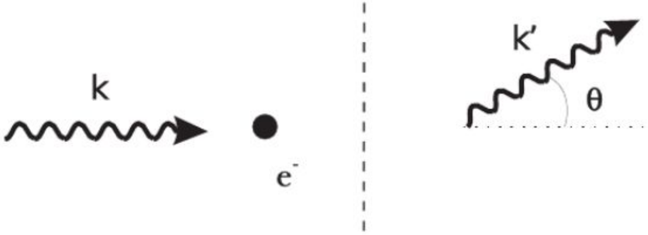
$$I = (b-a)\int_0^1 f[x'(b-a)+a]dx' \qquad x' = \frac{x-a}{b-a}$$

$$I = \frac{(b-a)}{N}\sum_{i=1}^{N} f[x_i(b-a)+a]$$

Gerando eventos

Gerando eventos

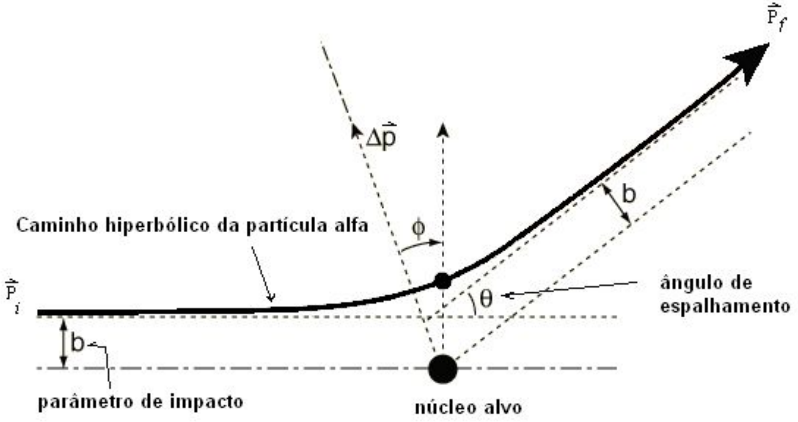
- Espalhamento Compton



$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2m^2}\left(\frac{k'}{k}\right)^2\left(\frac{k'}{k}+\frac{k}{k'}-\sin^2\theta\right)$$

$$k' = \frac{k}{1+(k/m)(1-\cos\theta)}$$

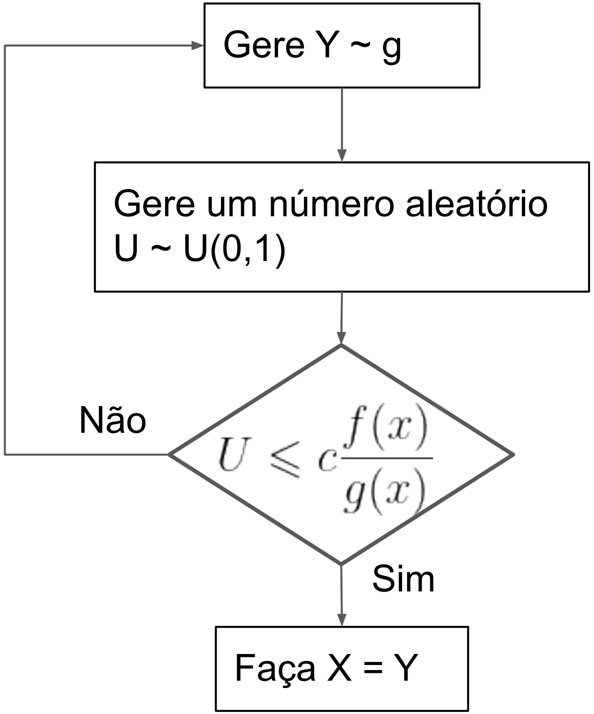
- Espalhamento Rutherford

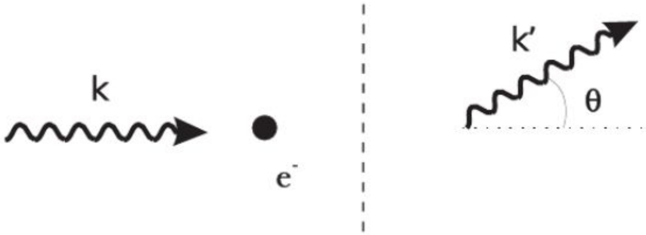


$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 m v_0^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}.$$

Espalhamento Compton - Método de rejeição

https://github.com/Analise-Dados-FAE/2021/blob/main/aula7_MonteCarlo/compton.ipynb



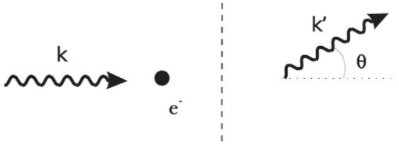


$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2m^2}\left(\frac{k'}{k}\right)^2\left(\frac{k'}{k} + \frac{k}{k'} - \sin^2\theta\right)$$

$$k' = \frac{k}{1 + (k/m)(1 - \cos\theta)}$$

Espalhamento Compton - Método de rejeição

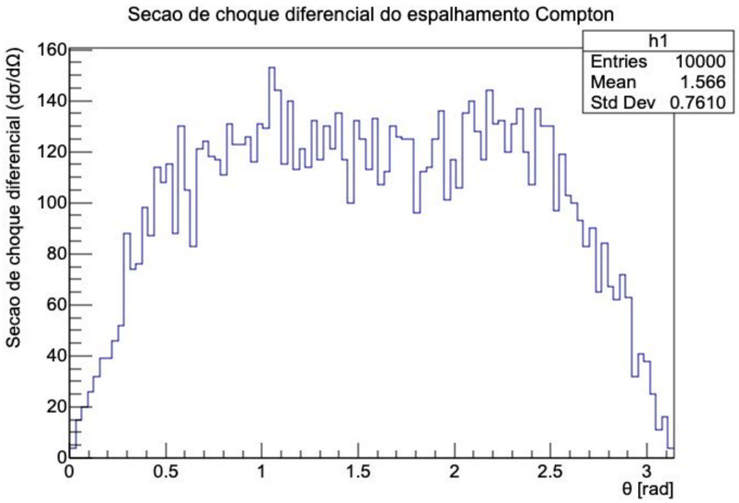
https://github.com/Analise-Dados-FAE/2021/blob/main/aula7_Monte Carlo/compton.ipynb



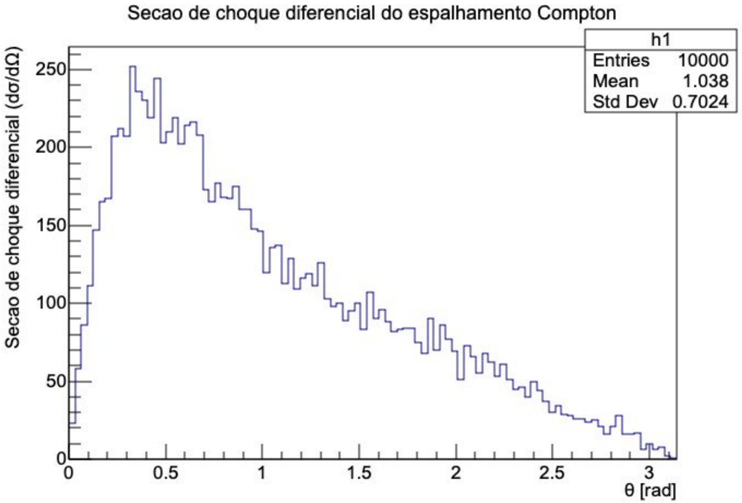
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2m^2}\left(\frac{k'}{k}\right)^2\left(\frac{k'}{k}+\frac{k}{k'}-\sin^2\theta\right)$$

$$k' = \frac{k}{1+(k/m)(1-\cos\theta)}$$

k = 5e-3 MeV



k = 2 MeV

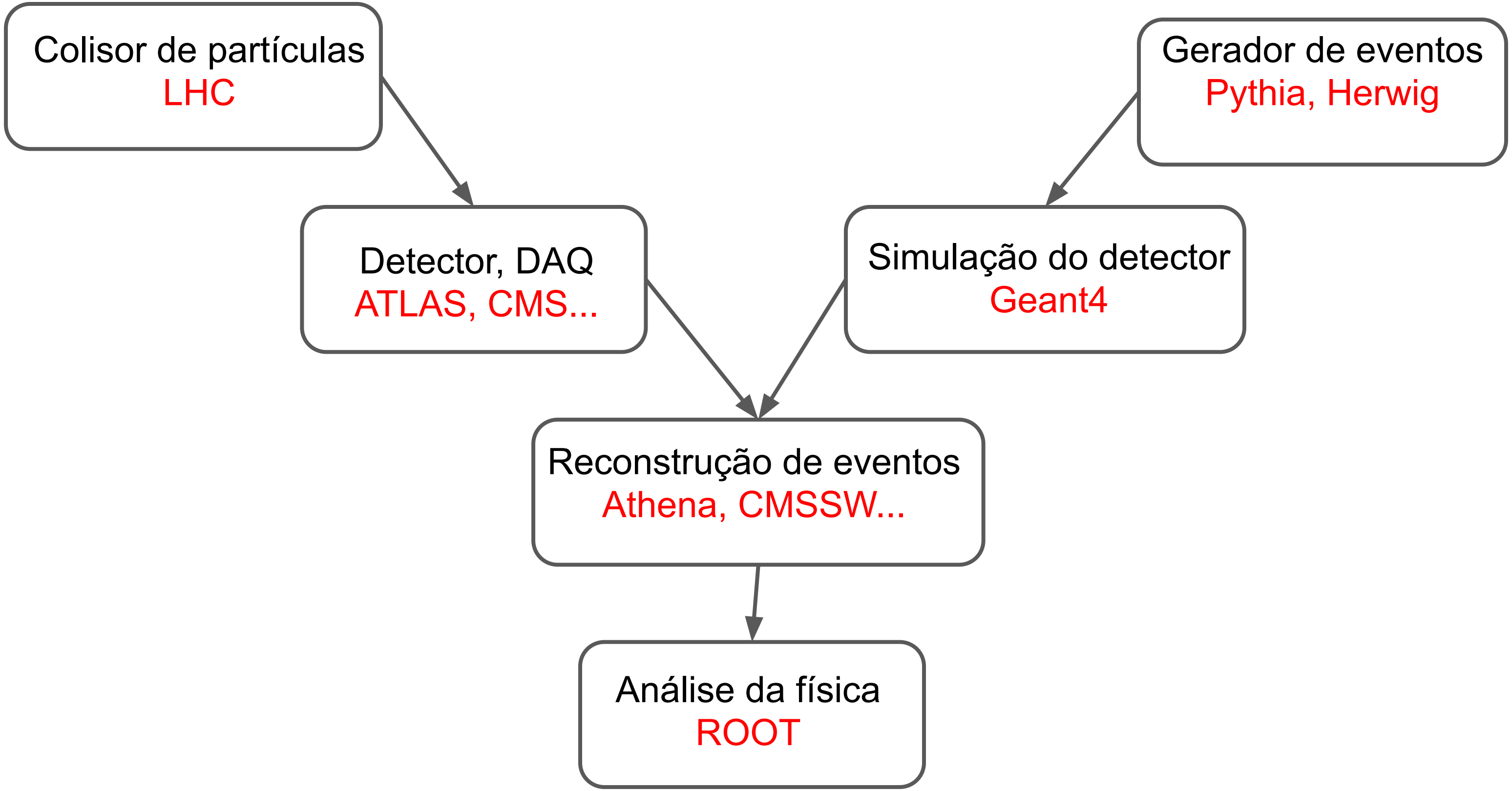


Monte Carlo em física de altas energias

MC em física de altas energias

1. Simulação do detector
    a. Detectores em geral são muito complexos
2. Simulação da interação das partículas com o material do detector
3. Análise física
    a. Novas predições físicas: SUSY, UED, …
    b. Seleção de eventos
    c. Estimativa de eventos de fundo
    d. Eficiência do detector/algoritmo/...

MC em FAE



Colisor de partículas
LHC
Gerador de eventos
Pythia, Herwig
Detector, DAQ
ATLAS, CMS...
Simulação do detector
Geant4
Reconstrução de eventos
Athena, CMSSW...
Análise da física
ROOT

Monte Carlo em FAE

Escolha do modelo, restrições, parâmetros, canais de decaimento de interesse

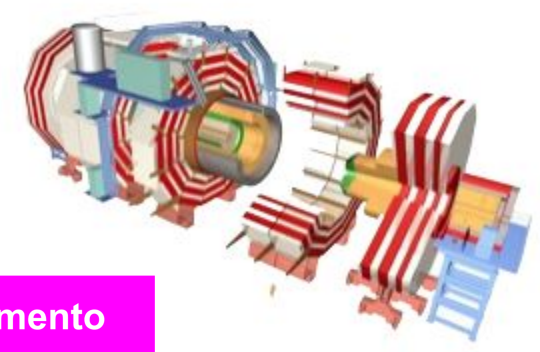
Teoria

Cinemática, informações das partículas conhecidas (detectáveis)

Gerador

Simulação do detector:
- Hardware
- Software

Simulação
Digitalização
Trigger



Offline software
- Seleção de eventos

Reconstrução
Análise

Experimento
Trigger

Resultado

Alguns geradores

	Objetivo geral	Especializado
Processos duro	HERWIG PYTHIA SHERPA	MadGraph, AlpGen, . . .
Decaimento de ressonâncias		HDECAY, . . .
Chuveiros partônicos		Ariadne/LDC, VINCIA, . . .
Eventos subjacentes		PHOJET/DPMJET
Hadronização		none (?)
Outros decaimentos		TAUOLA, EvtGen

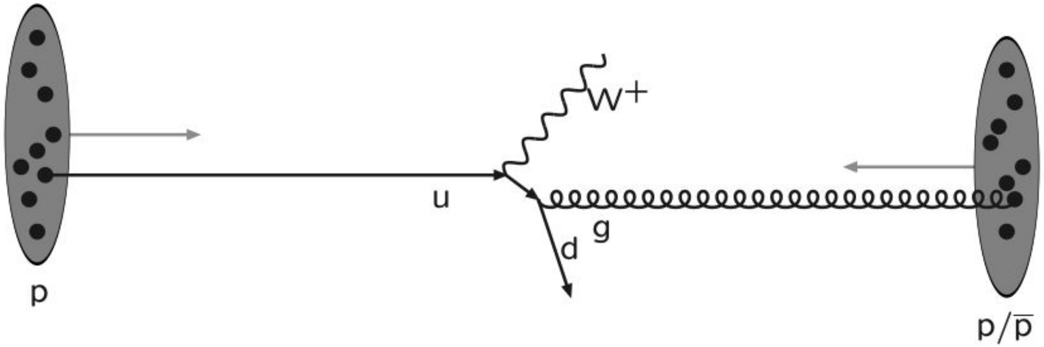
Os geradores especializados, em geral, são melhores para algumas tarefas, mas usam o core dos geradores de objetivo geral

Estrutura de um evento

Figura fora de escala e simplificada.

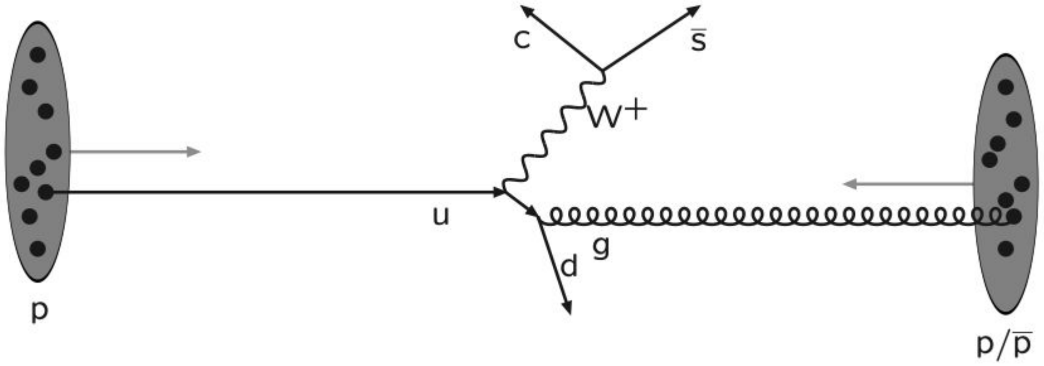
Feixe incidente: densidade partônica

Estrutura de um evento



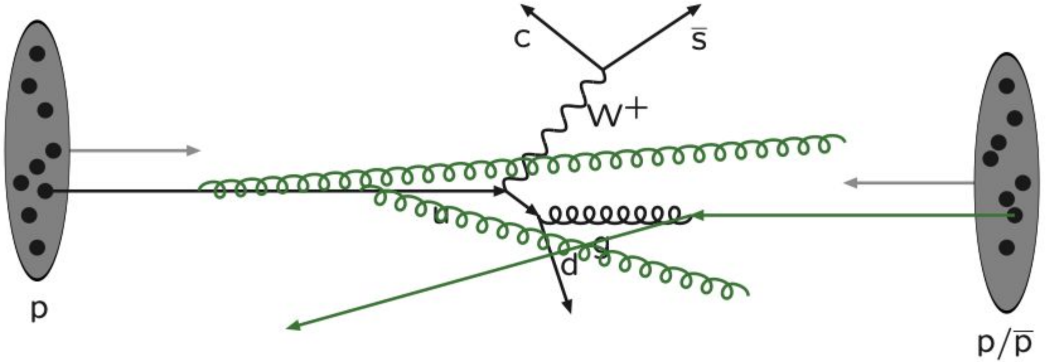
Subprocesso duro: descrito pelos elementos de matriz

Estrutura de um evento



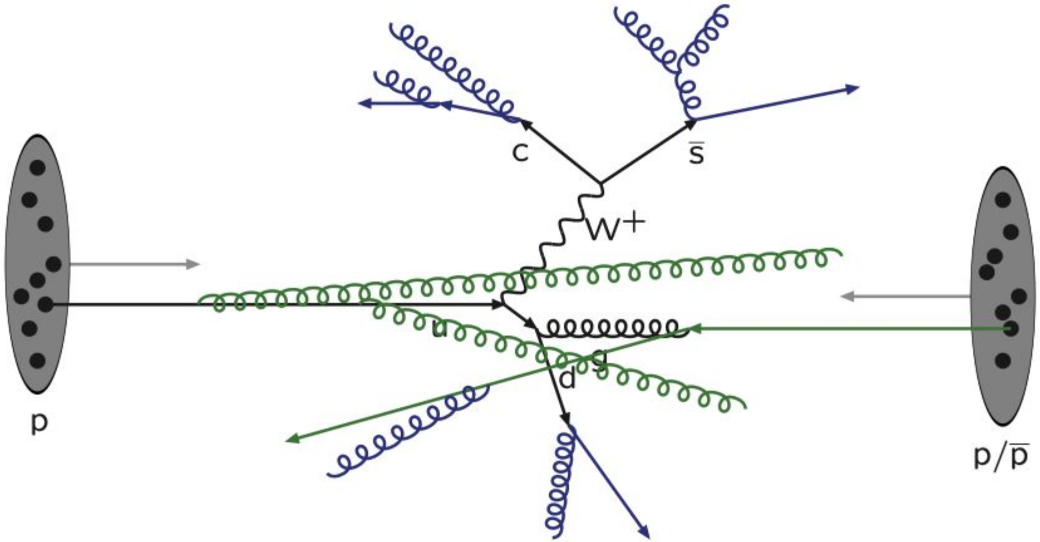
Decaimento de ressonâncias correlacionadas com o subprocesso duro

Estrutura de um evento



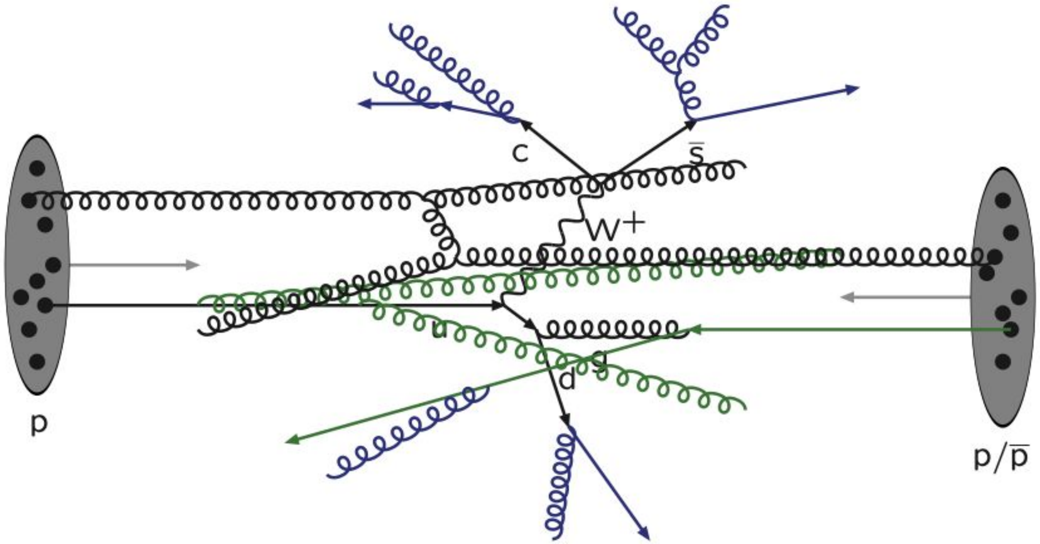
Radiação de estado inicial

Estrutura de um evento



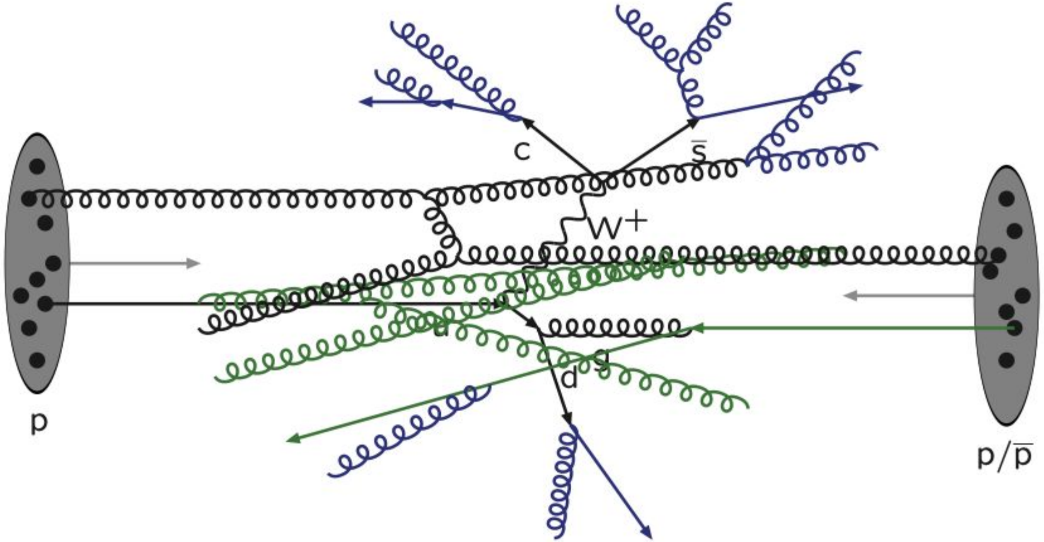
Radiação de estado final

Estrutura de um evento



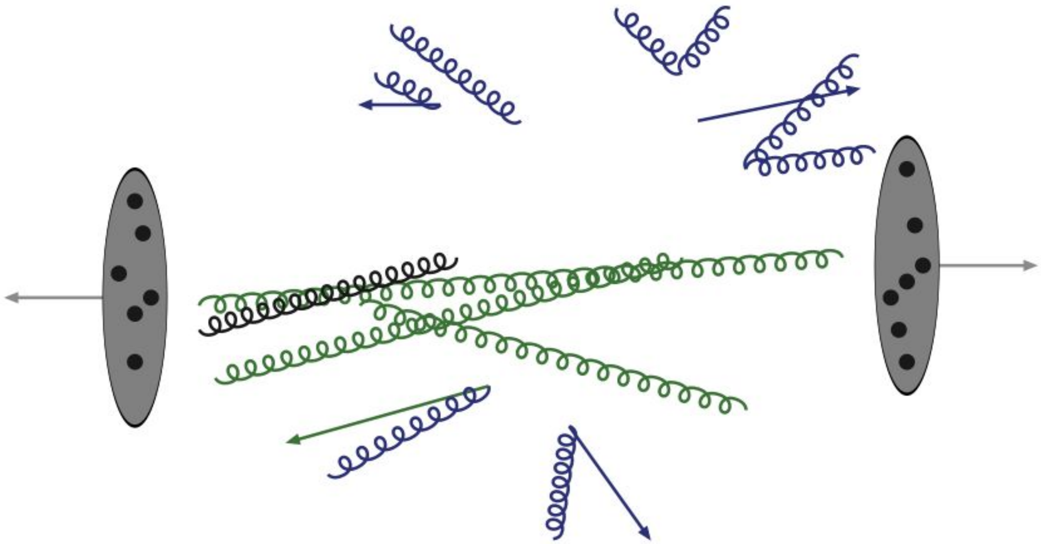
Múltiplas interações párton-párton

Estrutura de um evento



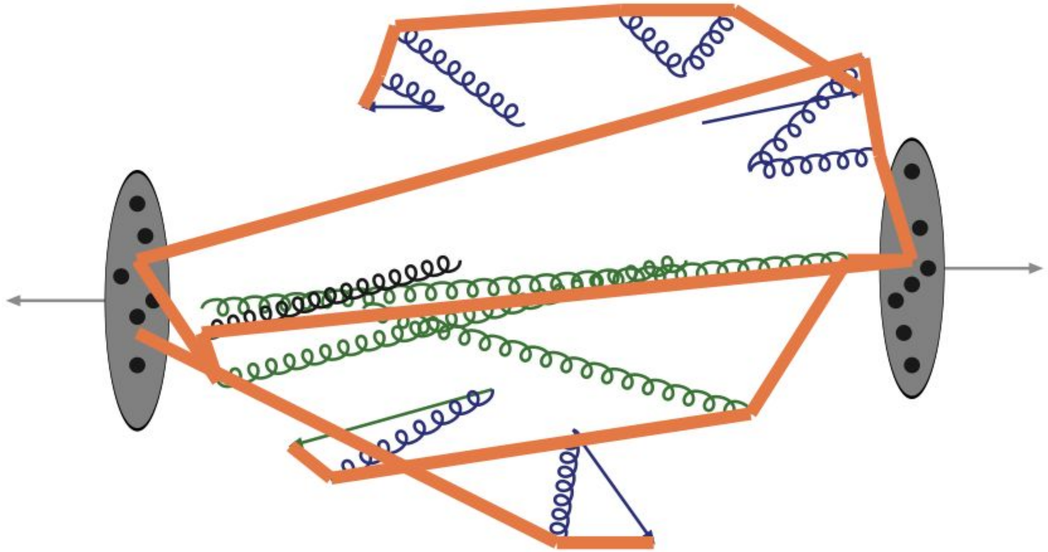
… com as suas radiações de estado inicial e final

Estrutura de um evento



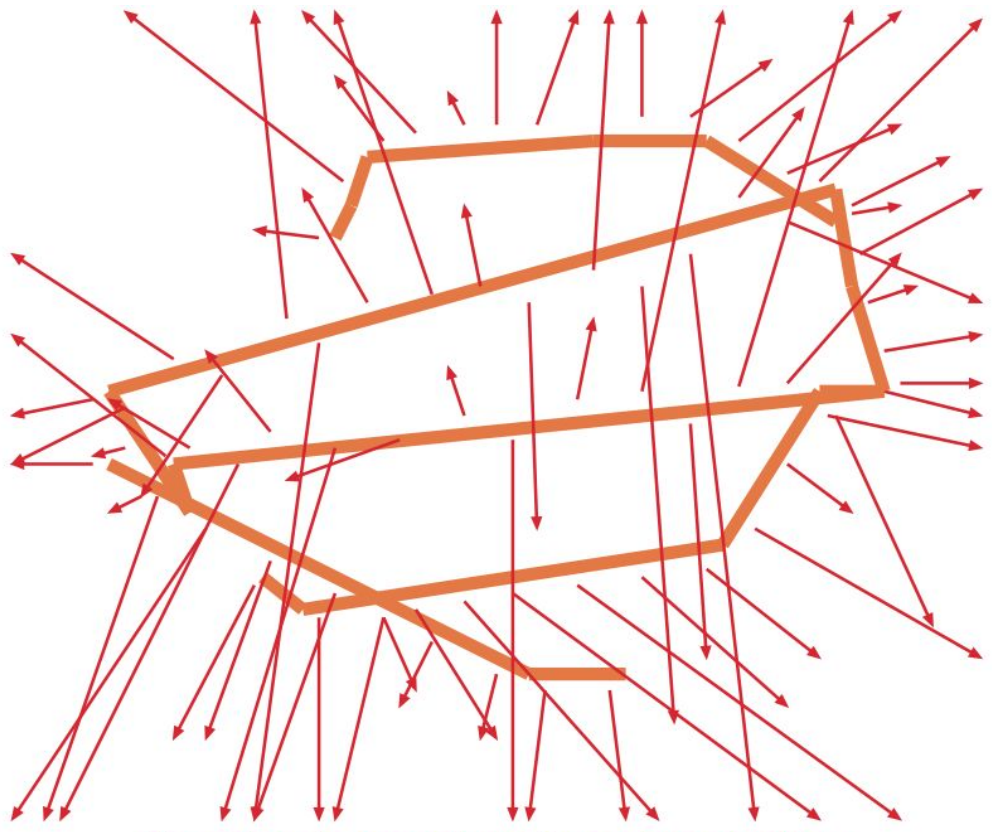
Remanescentes do feixe e outros pártons

Estrutura de um evento



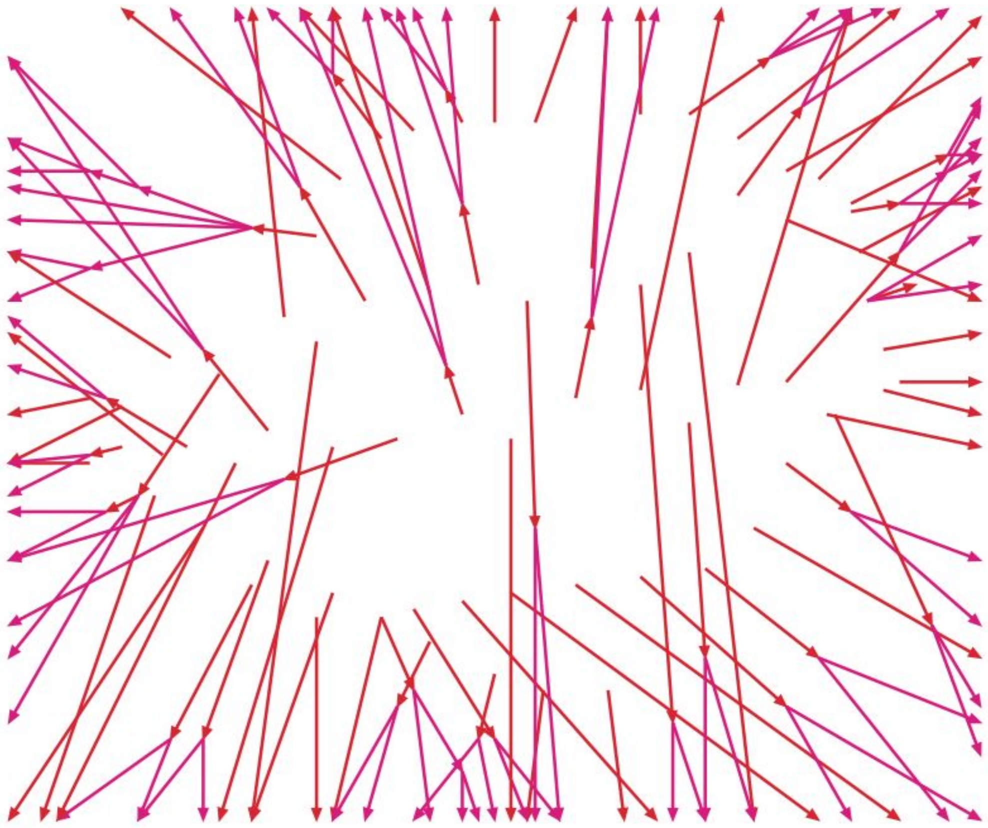
Tudo é conectado por cordas de cores
Lembre-se: fora de escala

Estrutura de um evento



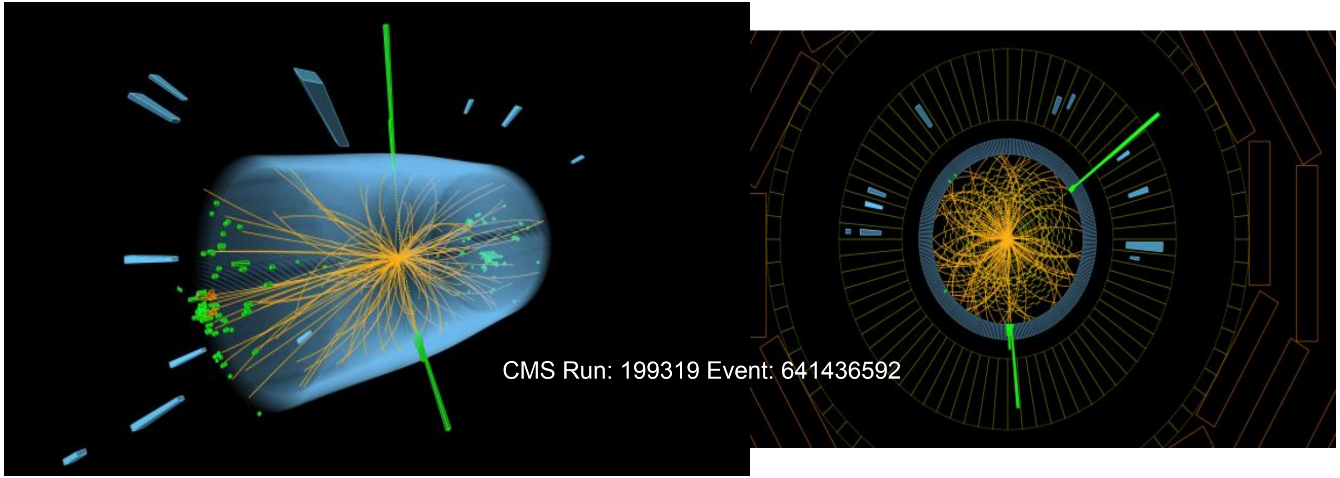
As cordas se fragmentam e produzem os hádrons primários

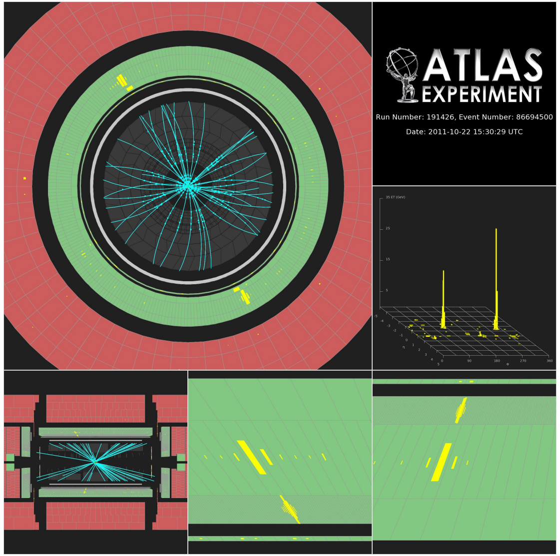
Estrutura de um evento

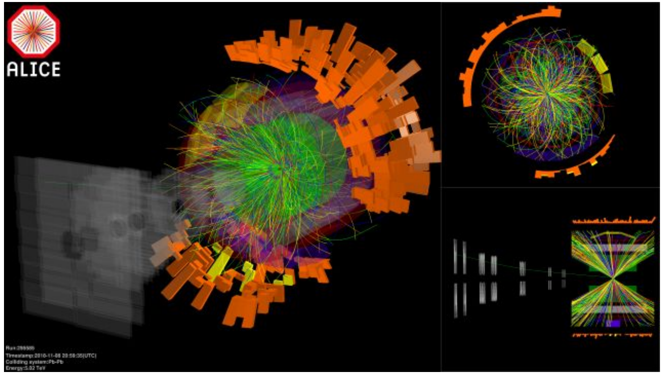


Muitos hádrons são instáveis e então decaem

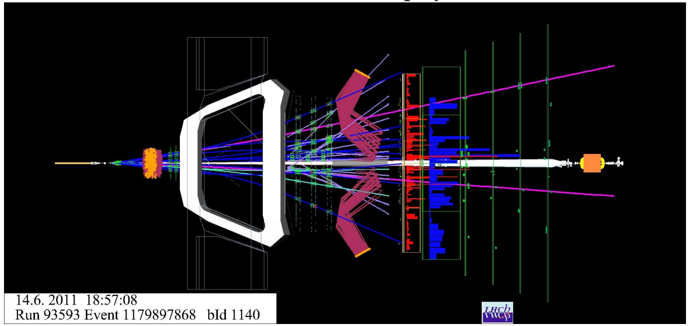
Estrutura de um evento







LHCb Event Display

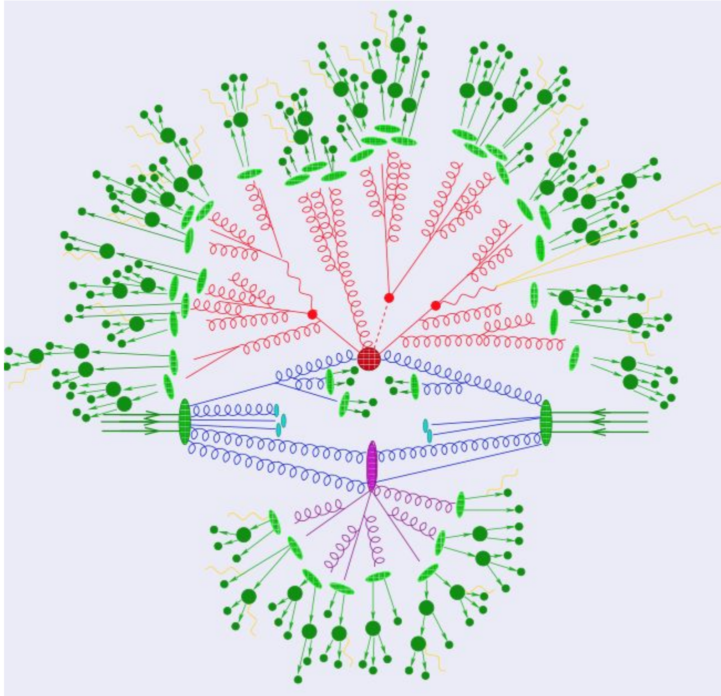


Simulação de um evento de colisão

JHEP 0402 (2004) 056

Estratégia básica: dividir o evento em partes, separados pelas diferentes escalas

- Sinal/background: elementos de matriz
- QCD-bremsstrahlung: chuveiro partônico (também estado inicial)
- Múltiplas interações: além da fatorização, modelagem
- Hadronização: não-perturbativa, modelagem



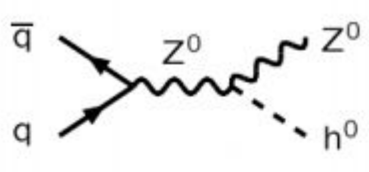
Cálculo: → subprocesso **partônico**

Medida: → **hádrons**

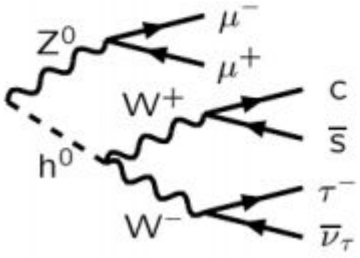
Visão global: Geração Monte Carlo

Elementos de matriz (ME):

1. Subprocesso duro: $|M^2|$, Breit-Wigners, densidades partônicas.

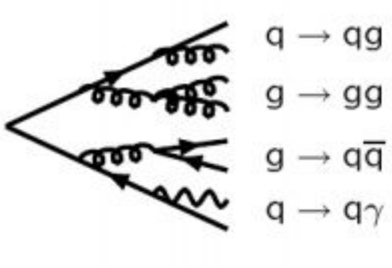


2. Decaimento de ressonâncias: incluindo correlações

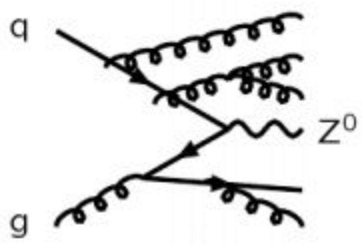


Chuveiros partônicos:

3. Chuveiro partônico de estado final

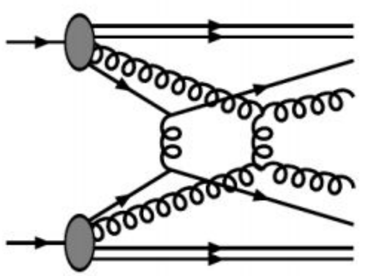


4. Chuveiro partônico de estado inicial

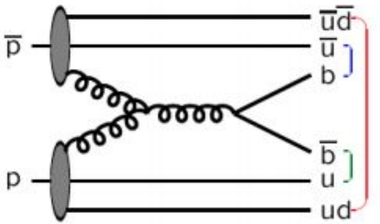


Visão global: Geração Monte Carlo

5. Múltiplas interações párton-párton

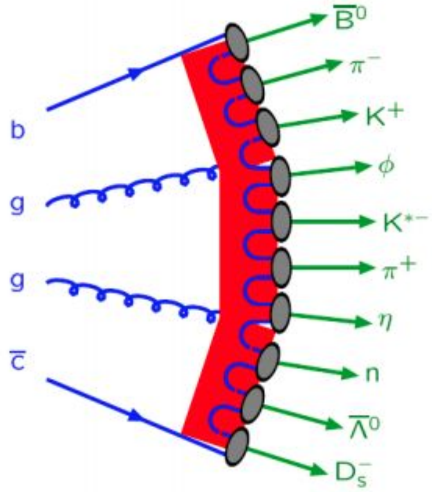


6. Remanescentes do feixe com reconexão de cores

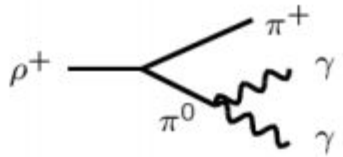


5+6 = evento subjacente

7. Hadronização

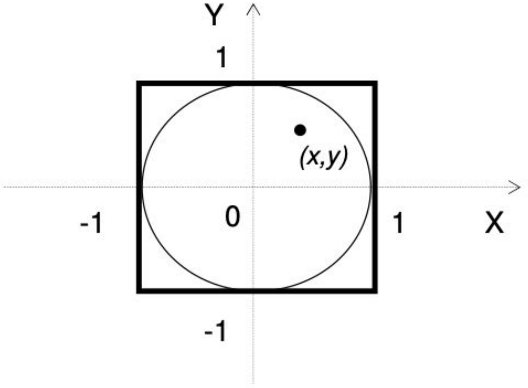


8. Outros decaimentos: hadrônicos, τ ,charm,...



Exercícios

1. Escreva um código que estime a área de um disco unitário com o mesmo método usado no problema de Buffon. Sabemos que o raio do disco é 1, então o círculo está inscrito em um quadrado de lado 2 (slide 9)



    ○ Dica: Gere amostras nesse quadrado e conte os pontos que estão dentro do disco. Para testar se um ponto está dentro ou fora do disco, meça a distância do ponto à origem (o centro do disco) e cheque se a distância é menor ou igual ao raio do disco

2. Escreva um código que calcule a integral usando o método de rejeição e o método direto

$$\int_0^3 (1 - x^2)^2 dx$$

3. Escreva um código que calcula a seção de choque diferencial do espalhamento de Rutherford (slide 17)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 m v_0^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}.$$

Backup Slides

Anatomia de um evento

1) Processo duro
2) Decaimento de ressonâncias
3) ISR
4) FSR
5) Eventos adjacentes
6) Hadronização
7) Decaimento de partículas