



Introdução à análise de dados em FAE

Exercícios de Estatística básica - 1

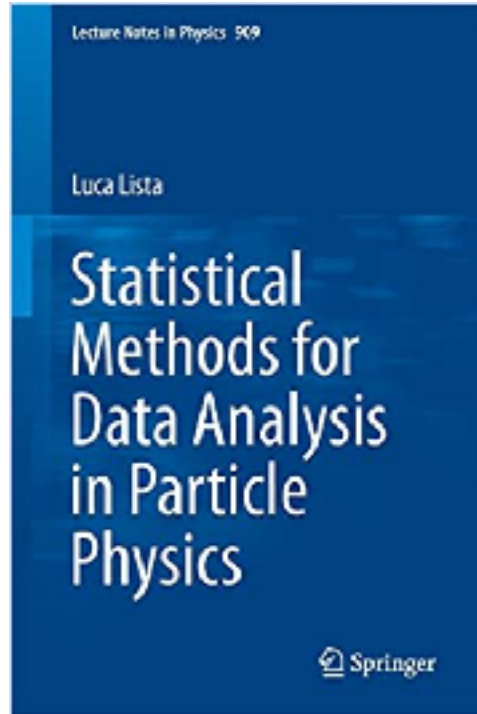
PROFESSORES:

SANDRO FONSECA DE SOUZA

SHEILA MARA DA SILVA

ELIZA MELO DA COSTA

Bibliografia Sugerida



<http://dfnae.fis.uerj.br/~oguri/trata.html>



<http://dfnae.fis.uerj.br/~oguri/FG-slide-em-pdf.pdf>

Instruções

- Prazo de entrega: 15 dias a partir da aula;
- Formato: todos os exercícios devem ser entregues em formato latex/PDF com a resolução de cada exercício em detalhes;
- Todos devem ter a identificação do estudante e data de entrega;

Propagação de erros para diferentes funções

- **Ver capítulo 4 de V. Oguri, et. al., Estimativas e erros em experimentos de Física, 2013**

Exercício 1 :Dedução!!!

Em geral: $u = f(x, y)$

$$\sigma_u^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \bigg|_{(\bar{x}, \bar{y})} \sigma_{\bar{x}}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \bigg|_{(\bar{x}, \bar{y})} \sigma_{\bar{y}}^2 + \frac{2}{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \bigg|_{(\bar{x}, \bar{y})} \sigma_{xy}$$

Propagação de erros para diferentes funções

- Ver capítulo 4 de V. Oguri, et. al., Estimativas e erros em experimentos de Física, 2013

Exercício 2:Dedução!!!

$$\bar{u} = f(\bar{x}, \bar{y})$$

$$\text{i) } u = x \pm y \quad \longrightarrow \quad \sigma_{\bar{u}} = \sqrt{\sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2 \pm 2r\sigma_{\bar{x}}\sigma_{\bar{y}}}$$

$$\begin{array}{l} \text{ii) } u = xy \\ \text{ou} \\ u = x/y \end{array} \quad \longrightarrow \quad \frac{\sigma_{\bar{u}}}{|u|} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{y}\right)^2 \pm 2r\left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{x}\right)\left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{y}\right)}$$

Combinação de resultados

Exercício 3

- Ver capítulo 4 de V. Oguri, et. al., Estimativas e erros em experimentos de Física, 2013

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

$$\frac{1}{\sigma_{\bar{x}}^2} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}$$

ou

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}}}$$

Fazer todos os exercícios da referência

Exercício 4

- Eleger cinco partículas do Particle Data Group (PDG) e combinar os resultados para suas massas. Para combinar resultados entre medidas, usamos as seguintes estimativas para o valor esperado (\bar{x}) e erro associado (σ) definidas a seguir:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}},$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}}},$$

Ajuste de funções

- No caso anterior assumimos que as incertezas nas medidas de y e x são constantes. Em geral devemos considerar o erro em cada medida (σ_i):

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{y_i - y(x_i)}{\sigma_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^N \left[\frac{y_i - (ax_i + b)}{\sigma_i} \right]^2$$

Erro efetivo em
cada medida



Exercício 5 :Dedução!!!

- V. Oguri, et. al., Estimativas e erros em experimentos de Física, 2013

Ajuste de funções

□ Podemos mostrar (Exercício - Ver Apêndice F do livro texto) que as estimativas dos parâmetros e suas incertezas são dadas por:

Exercício 6 :Dedução!!!

$$a = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$$
$$b = \bar{y} - a\bar{x}$$

$$\sigma_a = \frac{1}{\sigma_x} \frac{\epsilon_y}{\sqrt{N}}$$
$$\sigma_b = \sigma_a \sqrt{\bar{x}^2}$$

$$\epsilon_y = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{[y_i - (ax_i + b)]^2}{N-2}} = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{N-2} (1 - r^2)}$$

- V. Oguri, et. al., Estimativas e erros em experimentos de Física, 2013

2.5 Exercícios

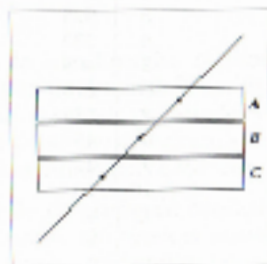
- 2.5.1) Dentre os calouros de uma Universidade, 2587 são alunos e 2832 são alunas. Inscreveram-se nos cursos da área tecnológica 1291 alunos e 547 alunas. Determine a probabilidade de se sortear aleatoriamente um estudante do sexo masculino da área tecnológica.
- 2.5.2) Em uma cidade, 15% dos táxis são azuis e o restante são verdes. Em uma noite, um táxi atropelou uma pessoa e fugiu. Uma testemunha identificou como azul o táxi envolvido no acidente. A polícia constatou que, nas mesmas circunstâncias da noite do acidente, essa testemunha identificou cada cor corretamente em 80% das vezes, e confundiu as cores em 20% das vezes. Determine a probabilidade de ter sido azul o táxi envolvido no acidente.
- 2.5.3) Enquanto 7% das mamografias identificam um caso de câncer quando ele não existe (taxa de falsos-positivos), 10% não identificam a doença quando ela existe (taxa de falsos-negativos). Sabendo que a incidência de câncer na população feminina é cerca de 0,8%, determine a probabilidade de que uma mulher esteja doente ao receber um resultado de teste positivo.
- 2.5.4) Três urnas têm a seguinte composição: a primeira contém 5 bolas brancas e 6 pretas; a segunda contém 4 brancas e 5 pretas; a terceira 4 brancas e 4 pretas. Após escolher por acaso uma urna e se retirar uma bola preta, determine a probabilidade de que a bola sorteada tenha sido extraída da terceira urna.

Exercícios 7-10

3.8 Exercícios

3.8.1) Seja x uma variável contínua, como as possíveis posições de uma partícula confinada em uma região de dimensão a , cuja densidade de probabilidade $p(x)$ é proporcional a função $\sin^2 \frac{\pi}{a}x$. Determine o valor médio e o desvio padrão associados à variável x .

3.8.2) A figura abaixo representa um sistema de detecção de múons incidentes, constituído por três tubos de ionização,⁴⁸ A, B e C.



Se a localização do ponto de ionização em cada tubo é determinada com 60% de eficiência (ou seja, com probabilidade igual a 0,6) e a reconstrução da trajetória de um múon requer a determinação de pelo menos três pontos em câmaras distintas, a eficiência do sistema é dada por

$$B(3|3; 0,6) \Rightarrow 21,6\%$$

Determine as eficiências para sistemas compostos por quatro e cinco câmaras.

3.8.3) Qual a probabilidade de que dentre 720 pessoas duas aniversariem em um mesmo dia? (compare binomial e Poisson)

3.8.4) Cada uma das 15 questões de um teste tem 4 alternativas e apenas uma delas é correta. Desse modo, a probabilidade (p), a priori, de acerto ao acaso de uma questão é $1/4$.

- Determine a distribuição de probabilidades de acertos ao acaso de $m = 0, 1, 2, 3, \dots, 15$ das 15 questões.
- Represente em um histograma.
- Se 1000 alunos fizerem o teste respondendo as questões ao acaso, quantos, em média, acertarão pelo menos 3 questões?

⁴⁸Esses tubos são câmaras de fios onde um gás é ionizado pela passagem de um múon, e a partir da medida do tempo de deriva dos íons até um fio, localiza-se o ponto onde o gás foi ionizado.

3.8.5) Um problema clássico envolvendo a distribuição de Poisson é o experimento de Rutherford-Geiger da contagem do número de partículas α emitidas por uma amostra de polônio, em intervalos de 7,5 s, num total de 2608 intervalos.

A tabela abaixo mostra as frequências (f_m) correspondentes ao número de contagens (m) em cada intervalo.

m	f_m
0	57
1	203
2	383
3	525
4	532
5	408
6	273
7	139
8	45
9	27
10	10
11	4
12	2
13	0
14	0

- Determine o número médio de contagens em cada intervalo de 7,5 s.
 - Compare a distribuição de frequências das contagens do experimento com a distribuição de Poisson de média igual ao número médio de contagens.
- 3.8.6) Em um grupo de pessoas a altura média é de 170 cm com desvio padrão de 5 cm. Calcule a altura acima da qual estão os 10% mais altos.
- 3.8.7) A média dos diâmetros dos rolamentos de esfera produzidos por uma determinada máquina é de 0,482 cm com desvio padrão de 0,004 cm. Uma peça é considerada defeituosa se tiver mais que 0,491 cm ou menos que 0,473 cm. Qual a porcentagem de peças defeituosas produzidas?

Exercícios 8-14

5.13.4) Mostre que no ajuste de uma função linear:

a) $\chi^2 = \left(\frac{\sigma_y}{\sigma}\right)^2 (1 - r^2)$ (para uma amostra heterocedástica);

b) $\chi^2 = \frac{\sigma_y^2}{(\sigma_y^2/N)} (1 - r^2)$ (para uma amostra homocedástica).

5.13.5) Ao colidir com a superfície terrestre, um meteoro provoca uma cratera. A relação esperada entre o diâmetro (D) da cratera e a energia cinética (E) do meteoro no instante do impacto é dada por

$$D = kE^{1/4}$$

em que k é uma constante.

A tabela abaixo mostra os diâmetros das depressões causadas pelo impacto de diversas esferas de aço sobre a areia contida em uma caixa, e as correspondentes incertezas (e_D) e energias cinéticas das esferas ao colidirem com a areia da caixa. As esferas são utilizadas para simular a queda de meteoros.

$E(J)$	$D(cm)$	$e_D(cm)$
0,07	4,9	0,3
0,10	6,7	0,3
0,30	7,3	0,4
0,45	8,1	0,4
0,69	9,2	0,4

A partir de um ajuste linear, determine uma estimativa para o expoente da relação esperada entre a energia e o diâmetro.

Exercícios 15-16

6.7 Exercícios

- 6.7.1) O desvio padrão de uma população é igual a 22. Se uma amostra de 100 elementos dessa população fornece a média $\bar{x} = 115,8$, pode-se afirmar que o valor médio da população é inferior a 120, ao nível de significância de 5%?
- 6.7.2) As notas $\{x_i\}$ de mecânica dos alunos todas as turmas de uma faculdade constituem uma população distribuída normalmente com média 3,0 e desvio padrão 2,0.
A média de uma nova turma de 100 alunos é de 3,4. A média dessa nova turma é superior às outras ao nível de significância de 5% ($\alpha = 0,05$)?
- 6.7.3) Determine a constante de normalização e o valor médio para a distribuição de χ^2 por integração por um método de Monte Carlo.
- 6.7.4) Avalie a compatibilidade dos dados do experimento de Rutherford-Geiger, listados no exercício 3.8.5 com uma distribuição de Poisson de média igual ao número médio de contagens.
- 6.7.5) O número total de eventos (n) em um experimento obedece uma distribuição de Poisson.
Sendo $n = n_s + n_b$, em que n_s (signal) é a contribuição associada a presença de uma nova classe de eventos e $n_b = 4,5$ o número esperado de eventos associado ao background, determine a evidência do resultado a favor da descoberta de um novo fenômeno, ao se observar um total de 15 eventos.
- 6.7.6) Avalie a compatibilidade dos dados do exercício 5.13.2 com uma distribuição de Gauss de mesma média e desvio padrão.
- 6.7.7) Avalie a compatibilidade dos dados do exercício 5.13.5 com a relação esperada.

Exercícios 17-23