Grupo 4

Caycho José[1] , Sahua Jaafar[2], Junco Frank[3], Limache Ebert[4], Oyola Renzo[5], Rojas Carlos[6]

Universidad Nacional de Ingeniería

2021

Índice de la presentación

Problema N°4

En un aparcamiento hay 55 vehículos entre coches y motos. Si el total de ruedas es de 170. Determine el número de coches y motos que hay según el requerimiento siguente.

- Modele el problema.
- Determine la norma matricial de A.
- Determine el número de condicionamiento de A.
- Indique si está bien o mal condicionado.

Modelación del problema

Sea:

x: El número de coches

y: El número de motos

El sistema de ecuación es el siguiente:

$$x + y = 55$$

$$4x + 2y = 170$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55 \\ 85 \end{pmatrix}$$

Modelación del problema

Hallando el número de coches y motos mediante Gauss sin pivoteo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 55 \\ 0 & -1 & | & -25 \end{pmatrix}$$

$y = 25 \quad x = 30$

Determinando la norma matricial de A

Sea

$$||A||_1 = \max_{j=1,\cdots,n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

$$||A||_\infty = \max_{i=1,\cdots,m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

En el problema

$||A||_1 = 3$ $\qquad$ $||A||_\infty = 3$

Determinando el número de condicionamiento de A

hallando la inversa de la matriz A

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$||A^{-1}||_1 = 3 \qquad\qquad ||A^{-1}||_\infty = 3$$

$$\kappa_1(A) = ||A||_1 ||A^{-1}||_1 = 3 \times 3 = 9$$

$$\kappa_\infty(A) = ||A||_\infty ||A^{-1}||_\infty = 3 \times 3 = 9$$

Indicando si está bien o mal condicionado

El numero de condición según la norma $1(||.||_1)$ y la norma infinito $(||.||_\infty)$ nos dan los mismos valores, además de ser mayores que 1 en consecuencia el sistema esta mal condicionado.

Problema N°8

Dos kilos de plátanos y tres de peras cuestan 8.80 soles. Cinco kilos de plátanos y cuatro de peras cuestan 16.40 soles. Determine el costo de kilo de plátano y de la pera según el requerimiento siguiente.

Solución 8

a)**<u>Modele el problema:</u>**
Sea (x_1) el costo de kilogramo de plátano y sea (x_2) el costo de kilogramo de pera

El sitema de ecuación en el problema es:

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1 + 3x_2 = 8.80 \\ 5x_1 + 4x_2 = 16.40 \end{array}\right\}$$

Entonces se tiene el siguiente sistema matricial:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathsf{x}_1 \\ \mathsf{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.80 \\ 16.40 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Solución 8

b)**Determine la norma matricial de A y A^{-1}**

Sabemos que:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad det(A) = -7 \tag{2}$$

Calculamos $A^{-1} = \dfrac{(Adj(A))^T}{det(A)}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{-7} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4/7 & 3/7 \\ 5/7 & -2/7 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Solución 8

Hallamos $||A||$ y $||A^{-1}||$:

$$||A||^2 = a_{11}a_{11} + a_{12}a_{12} + a_{21}a_{21} + a_{22}a_{22}$$
$$||A||^2 = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2$$
$$||A||^2 = 2^2 + 3^2 + 5^2 + 4^2 = 54$$
$$||A|| = \sqrt{54}$$

Analogamente:

$$||A^{-1}|| = \frac{\sqrt{54}}{7}$$

Solución 8

c)**<u>Determine el condicionamiento de A</u>**

Calculamos el número de condición de la matriz A:

$K(A) = ||A|| \; ||A^{-1}||$

Entonces:

$$K(A) = \sqrt{54} \times \frac{\sqrt{54}}{7} = \frac{54}{7}$$

Solución 8

d)<u>**Resolver el sistema usando Eliminación de Gauss con Pivoteo**</u>

Metodo de Pivoteo Parcial

Tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 8.80 \\ 16.40 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Sea:

$$M = (A|b) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & | & 8.80 \\ 5 & 4 & | & 16.40 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Solución 8

Elegimos el máximo valor absoluto de la primera columna de M: m_{21}=5 y realizamos la operación elemental: F_{12}

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 4 & | & 16.40 \\ 2 & 3 & | & 8.80 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Realizamos la operación elemental: $F_{21}(-2/5)$

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 4 & | & 16.40 \\ 0 & 1.4 & | & 2.24 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Solución 8

Ahora: Aplicamos **Sustitución Regresiva**

$$x_2 = \frac{2.24}{1.4} = 1.6$$

$$x_1 = \frac{16.40 - 4 * 1.6}{5} = 2$$

Solución 8

d)**Resolver el sistema usando Eliminación de Gauss con Pivoteo**

Metodo de Eliminación de Gauss

Tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 8.80 \\ 16.40 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Sea:

$$M = (A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 8.80 \\ 5 & 4 & 16.40 \end{array}\right) \tag{10}$$

Solución 8

Realizamos la operación elemental: $F_{21}(-5/2)$

$$M_1 = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 8.80 \\ 0 & -3.5 & -5.60 \end{array}\right) \tag{11}$$

Ahora: Aplicamos **Sustitución Regresiva**

$$x_2 = \frac{-5.60}{-3.5} = 1.6$$

$$x_1 = \frac{8.80 - 3 * 1.6}{2} = 2$$

Problema N°12

Dada la sucesion de Fibonacci F_n definida por $F_0 = F_1 = 1$ y su regla $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$

a) Analice la propagacion de errores y clasifique el tipo de error

Si perturbamos F_n por $\hat{F}_n = F_n + \epsilon_n$ entonces :

$$\hat{F}_{n+1} = 1(\ F_n + \epsilon_n\ ) + 1(F_{n-1} + \epsilon_{n-1})$$

Dando forma obtenemos :

$$\hat{F}_{n+1} = F_n + F_{n-1} + \epsilon_n + \epsilon_{n-1}$$

Solución 12

$\hat{F}_{n+1} = F_{n+1} + \epsilon_n + \epsilon_{n-1}$

$\epsilon_{n+1} = \epsilon_n + \epsilon_{n-1}$, $\epsilon_0 = \epsilon_1 = \epsilon$

Asumo que en los valores iniciales no se producen errores de redondeo

Para resolver la ecuacion en diferencias asumo que $\epsilon_n = r^n$

Entonces :

$r^{n+1} = r^n + r^{n-1}$

r^2 - r - 1 $=$ 0

Solución 12

Resolviendo la ecuacion r^2 - r - 1 $=$ 0 obtengo las raices $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$\epsilon_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \; A, B \in \mathbb{R}$$

$$\epsilon_n = \frac{\epsilon\left(1+\sqrt{5}\right)}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\epsilon\left(1-\sqrt{5}\right)}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

$$\epsilon_n = \frac{\epsilon}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$$

En una maquina de de 32 bits el error es cercano a 2^{-23}

Solución 12

$$\epsilon_n \approx \frac{\epsilon\left(1+\sqrt{5}\right)}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

De la misma forma se puede hallar F_n

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$$

Solución 12

n	F_n	$\hat{F}_n$	$F_n - \hat{F}_n$
0	1.00000000	1.00000000	0.00000000
1	1.00000000	1.00000000	0.00000000
2	2.00000000	1.99999977	0.00000023
3	3.00000000	2.99999963	0.00000037
4	5.00000000	4.99999941	0.00000059
5	8.00000000	7.99999904	0.00000096
6	13.00000000	12.99999845	0.00000155
7	21.00000000	20.9999975	0.00000250
8	34.00000000	33.99999595	0.00000405
9	55.00000000	54.99999344	0.00000656

Solución 12

$$\epsilon_n = \frac{\epsilon\left(1+\sqrt{5}\right)}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

De la ecuacion se puede comprobar $\epsilon_n \approx K^n \epsilon$

Por lo tanto tenemos un error exponencial creciente pues $K > 1$.

Problema N°16

Se define $\|A\|_2 = \sqrt{máx_{1\leq i\leq n}|\lambda_i(A^TA)|}$,donde $(\lambda_i(A^TA))_{1\leq i\leq n}$ es el conjunto de los valores propios de A^TA.
Y definimos el condicionamiento $k_2(A){=}\|A\|_2\|A^{-1}\|_2$
Demostrar que:

- $k_2(A) = k_2(A^T)$

Solución 16

Recordatorio

1. Si A es una matriz cuadrada de orden n entonces A tiene n autovalores(no necesariamente diferentes)
2. Si A es una matriz cuadrada y λ un autovalor cualquiera de A, se cumple que A es invertible si y sólo sí λ es diferente de cero
3. Si A es una matriz cuadrada invertible entonces λ es un autovalor de A si y sólo sí $\frac{1}{\lambda}$ es un autovalor de A^{-1}
4. λ es un autovalor de A si y sólo sí λ es un autovalor de A^T

Solución 16

Propiedades

1. Si A y B son matrices cuadradas del mismo orden, se cumple que AB y BA tiene los mismos autovalores.
2. Si A es una matriz simétrica entonces todos sus autovalores son números reales
3. $k_2(A) = \frac{\sqrt{|\lambda_n|}}{\sqrt{|\lambda_1|}}$, donde λ_n y λ_1 son el mayor y menor autovalor de la matriz $A^T A$ respectivamente .

Demostración 3

Ordenamos los autovalores de A^TA: $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ... \leq \lambda_n$
Ordenamos los autovalores de AA^T: $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ... \leq \lambda_n$
Darnos cuenta también que A^TA y AA^T son matrices simétricas entonces $\lambda_i \in \mathbb{R}$ $\forall$ i=1,2,3,...,n

★ $\|A\|_2 = \sqrt{máx_{1\leq i\leq n}|\lambda_i(A^TA)|} = \sqrt{|\lambda_n|}$

★ $\|A^{-1}\|_2 = \sqrt{máx_{1\leq i\leq n}|\theta_i[(A^{-1})^TA^{-1}]|}$

$$= \sqrt{máx_{1\leq i\leq n}|\theta_i[AA^T]^{-1}|}$$

$$= \sqrt{máx_{1\leq i\leq n}|\frac{1}{\lambda_i}[AA^T]^{-1}|} = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_1|}}$$

$\rightarrow k_2(A) = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2 = \frac{\sqrt{|\lambda_n|}}{\sqrt{|\lambda_1|}}$ QED Prop.3

Solución 16

Ahora se hallará $k_2(A^T)$:

$$k_2(A^T) = \|A^T\|_2\|(A^T)^{-1}\|_2 = \frac{\sqrt{máx_{1\leq i\leq n}|\theta_i[(A^T)^T A^T]|}}{\sqrt{mín_{1\leq i\leq n}|\theta_i[(A^T)^T A^T]|}}$$

$$= \frac{\sqrt{máx_{1\leq i\leq n}|\theta_i(AA^T)|}}{\sqrt{mín_{1\leq i\leq n}|\theta_i(AA^T)|}}$$

$$= \frac{\sqrt{máx_{1\leq i\leq n}|\lambda_i(AA^T)|}}{\sqrt{mín_{1\leq i\leq n}|\lambda_i(AA^T)|}}$$

$$= \frac{\sqrt{|\lambda_n|}}{\sqrt{|\lambda_1|}}$$

$$\rightarrow k_2(A) = k_2(A^T) = \frac{\sqrt{|\lambda_n|}}{\sqrt{|\lambda_1|}} \qquad \text{QED Ej.16}$$

donde λ_n y λ_1 son respectivamente el mayor y menor autovalor de la matriz A

Problema N°20

a)Implementar el método Cholesky en Python

```
def cholesky(M):
    n=len(M)
    #Inicializa Matriz con Ceros
    L=np.zeros((n,n))
    for i in range(n):
        for j in range(i+1):
            sumatoria=0
            for k in range(j):
                sumatoria=sumatoria+L[i][k]*L[j][k]
            if(i==j):
                L[i][j]=np.sqrt(M[i][i]-sumatoria)
            else:
                L[i][j]=(1.0/L[j][j]*(M[i][j]-sumatoria))
    return L
```

Solución 20

b) Se crean las matrices triangulares y luego las multiplicamos por su traspuesta para obtener las matrices simetricas definidas positivas, según el teorema 6 estudiado en clase.
Para ello se implementó el siguiente codigo:

```
def genera(n):
    L=np.zeros((n,n))
    for i in range(n):
        for j in range(i+1):
            L[i][j]=random.randint(1,9)
    Lt=np.transpose(L)
    A=L.dot(Lt)
    return A
```

Solución 20

c) Ahora se buscará calcular la complejidad del algoritmo de Cholesky.
Para ello iniciaremos con las operaciones que se realizan en el tercer for
for k in range(j):
sumatoria=sumatoria+L[i][k]*L[j][k]
Se tiene 1 comaparación, 2 asignaciones, 1 suma y 1 multiplicación, que se repiten:

$$1 + 2 + 3 + ... + i = \sum_{1}^{i} = i(i+1)/2$$

Luego esto también se repite n veces

$$\sum^{i=n} ((i^2 + i)/2)$$

Solución 20

$$\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n} i^2 + i)$$

$$\frac{1}{2}(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2})$$

$$\frac{1}{2}(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3n(n+1)}{6})$$

$$\frac{1}{2}(\frac{n(n+1)(2n+4)}{6})$$

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Solución 20

$$\frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6}$$

Vemos que para la función, el máximo exponente es 3, por lo que ya en este punto podemos plantear la complejidad del algoritmo, la cual es

$$O(\frac{n^3}{6})$$

O también en general su complejidad es:

$$O(n^3)$$

Solución 20

d) En este ítem se pide hacer uso de las matrices generadas en el ítem b para el método Cholesky y obtener una gráfica de tiempo para cada orden.

```
Tiempo Usado para Matriz 3x3 : 2.6599999999987745e-05

Tiempo Usado para Matriz 4x4 : 4.1499999999972115e-05

Tiempo Usado para Matriz 5x5 : 4.890000000001837e-05

Tiempo Usado para Matriz 6x6 : 6.109999999998061e-05

Tiempo Usado para Matriz 7x7 : 7.899999999999574e-05

Tiempo Usado para Matriz 8x8 : 0.00010399999999999299

Tiempo Usado para Matriz 9x9 : 0.00013219999999997123
```

Solución 20

Con los tiempos obtenidos se procede a realizar la gráfica la cual queda de la siguiente forma: