1. Determine la notación de Landau de las siguientes funciones.

   a) $\frac{1}{n^2}$.
   b) $\cos(n)$.
   c) $\sin\left(\frac{x}{n}\right)$.
   d) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

2. La pérdida de cifras significativas se puede evitar reordenando los cálculos. Determine en los siguientes casos una forma equivalente que evite la pérdida de cifras significativas para valores indicados de x.

   a) $\ln(x+1)-\ln(x)$.
   b) $\sqrt{x^2+1}-x$.
   c) $1-\cos(x)$.
   d) $\sin(x)-x$.

3. Sea $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

   a) $f(x)=\frac{x}{4}$, $n=1$.
   b) $f(x)=\sqrt{x}$, $n=1$.
   c) $f(x_1,x_2)=x_1\cdot x_2$, $n=2$.

   Determine el número de condición.

4. En un aparcamiento hay 55 vehículos entre coches y motos. Si el total de ruedas es de 170. Determine

   a) Modele el problema.
   b) Determine la norma matricial de A.
   c) Determine el número de condicionamiento de A.
   d) Indique si está bien o mal condicionado.

5. Un fabricante de bombillas gana $0,3$ dólares por cada bombilla que sale de la fábrica, pero pierde $0,4$ dolares por cada una que sale defectuosa. Un día en el que fabricó 2100 bombillas obtuvo un beneficio de $484,4$ dólares. Determine el número de bombillas buenas y defectuosa según el requerimiento siguiente.

   a) Modele el problema.
   b) Determine la norma matricial de A.
   c) Determine el número de condicionamiento de A.
   d) Indique si está bien o mal condicionado.

6. Sean dos números tales que la suma de un tercio del primero más un quinto del segundo sea igual a 13 y que si se multiplica el primero por 5 y el segundo por 7 se obtiene 247 como suma de los dos productos. Determine los números según el requerimiento siguiente.

   a) Modele el problema.
   b) Determine la norma matricial de A y A^{-1}.
   c) Determine el condicionamiento de A.
   d) Resolver el sistema usando eliminación de Gauß.

7. El perímetro de un rectángulo es 64 cm y la diferencia entre las medidas de la base y la altura es 6 cm. Determine las dimensiones de dicho rectángulo según el requerimiento siguiente.

   a) Modele el problema.
   b) Determine la norma matricial de A y A^{-1}.
   c) Determine el condicionamiento de A.
   d) Resolver el sistema usando eliminación de Gauß.

8. Dos kilos de plátanos y tres de peras cuestan $8,80$ soles. Cinco kilos de plátanos y cuatro de peras cuestan $16,40$ soles. Determine el costo de kilo del plátano y de la pera según el requerimiento siguiente.

   a) Modele el problema.
   b) Determine la norma matricial de A y A^{-1}.
   c) Determine el condicionamiento de A.
   d) Resolver el sistema usando eliminación de Gauß con pivoteo.

9. La edad de Manuel es el doble de la edad de su hija Ana. Hace diez años, la suma de las edades de ambos era igual a la edad actual de Manuel. Determine la edad de ambos según el requerimiento siguiente.

   a) Modele el problema.
   b) Determine la norma matricial de A y A^{-1}.
   c) Determine el condicionamiento de A.
   d) Resolver el sistema usando eliminación de Gauß-Jordan.

10. José dice a Eva: mi colección de discos compactos es mejor que la tuya ya que si te cedo 10 tendríamos la misma cantidad. Eva le responde: reconozco que tienes razón. Solo te faltan 10 para doblarme en número. Determine la cantidad de discos que tiene cada uno según el requerimiento siguiente.

    a) Modele el problema.
    b) Determine la norma matricial de A y A^{-1}.
    c) Determine el condicionamiento de A.
    d) Resolver el sistema usando eliminación de Gauß-Jordan.

11. Dada la sucesión $u_{n+1} = 2003 - \dfrac{6002}{u_n} + \dfrac{4000}{u_n u_{n-1}}$.

   a) Opcional Muestre, brevemente, que la solución general es de la forma $v_n = \dfrac{\alpha + \beta 2^{n+1} + \gamma 2000^{n+1}}{\alpha + \beta 2^n + \gamma 2^n}$

   b) Verifique que $\gamma = 0$ para $u_0 = \dfrac{3}{2}$ y $u_1 = \dfrac{5}{3}$.

   c) Realice su código en `python` y verifique que u_n converge computacionalmente hacia 2000, verifique si esto es correcto con el límite teórico.

   d) Analice la propagación de errores y clasifique el tipo de error.

12. Dada la sucesión de Fibonacci F_n definida por $F_0 = F_1 = 1$y su regla $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

   a) Analice la propagación de errores y clasifique el tipo de error.

13. Construir las siguientes matrices de $N \times N$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 16/3 & -8/3 & 0 & & 0 & & & 0 \\ -8/3 & 14/3 & -8/3 & 1/3 & 0 & & & \\ 0 & -8/3 & 16/3 & -8/3 & 0 & & & \\ 0 & 1/3 & -8/3 & 14/3 & -8/3 & 1/3 & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 0 & -8/3 & 16/3 & -8/3 & 0 \\ 0 & & & 0 & 1/3 & -8/3 & 14/3 & -8/3 \\ 0 & & & & & 0 & -8/3 & 16/3 \end{pmatrix},$$

   a) Determine el número de condición para $N = 8$ para cada matriz.

   b) Determine el número de condición para $N = 12$ para cada matriz.

   c) Determine el número de condición para $N = 14$ para cada matriz.

14. Dada la ecuación $Ax = b$:

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

a) Determine la inversa de A, su determinante, y verifique si es simétrica y definida positiva, de manera similar determine su solución.
b) Resuelva la ecuación matricial perturbando $b^T = (32, 122, 933, 130, 9)$.
c) Resuelva ahora con la perturbación

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8,1 & 7,2 \\ 7,08 & 5,04 & 6 & 5 \\ 8 & 5,98 & 9,89 & 9 \\ 6,99 & 4,99 & 9 & 9,98 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

d) Explique claramente lo determinado en los ítemes anteriores.

15. Sea A una matriz cuadrada invertible y $\alpha \in \mathbb{R}$. Demuestre: $\kappa(A) = \kappa(\alpha A) = \kappa\left(A^{-1}\right)$.

16. Denotamos por $\|A\|_2 = \sqrt{\rho\left(A^T A\right)}$ donde $\rho(B) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i(B)|$ y $(\lambda_i(B))_{1 \leq i \leq n}$ es el conjunto de los valores propios de B. Con esta norma definimos el condicionamiento $\kappa_2 = \|A\|_2 \left\|A^{-1}\right\|_2$. Demostrar que:

a) $\kappa_2(A) = \kappa_2\left(A^T\right)$.

17. Sean $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ definida positiva y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$. Denotamos $\Delta = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, definimos también $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Mostrar que para cualquier elección de α y β tenemos:

    a) $\kappa_2\left(D^{-1}A\right) \leq \kappa_2\left(\Delta^{-1}A\right)$,
    b) $\kappa_2\left(D^{-1}A\right) \leq \kappa_2\left(A\right)$,
    c) $\kappa_2\left(D\right) \leq \kappa_2\left(A\right)$.

18. Sobre el método de Doolitle.
    a) Implementar dicho método en `python` llamado `doolitle`.
    b) Crear matrices L_n y U_n de orden $n \times n$ para $n = 3, 4, \ldots, 15$ como las mencionadas en el teorema 3 del tema factorización LU de la semana 3, luego almacenar $A_n = L_n U_n$.
    c) Obtener la complejidad de dicho algoritmo de forma teórica.
    d) Del ítem b. Obtener una gráfica de tiempo que toma el método `doolitle` contra el orden de la matriz n.

19. Sobre el método de Crout.
    a) Implementar dicho método en `python` llamado `crout`.
    b) Crear matrices L_n y U_n de orden $n \times n$ para $n = 3, 4, \ldots, 15$ como las mencionadas en el teorema 2 del tema factorización LU de la semana 3, luego almacenar $A_n = L_n U_n$.
    c) Obtener la complejidad de dicho algoritmo de forma teórica.
    d) Del item b. Obtener una gráfica de tiempo que toma el método `crout` contra el orden de la matriz n.

    s

20. Sobre el método de Cholesky.
    a) Implementar dicho método en `python` llamado `cholesky`.
    b) Crear una matriz L_n de orden $n \times n$ para $n = 3, 4, \ldots, 15$ como las mencionadas en el teorema 6 del tema factorización LU de la semana 3, luego almacenar $A_n = L_n L_n^T$.
    c) Obtener la complejidad de dicho algoritmo de forma teórica.
    d) Del ítem b. Obtener una gráfica de tiempo que toma el método cholesky contra el orden de la matriz n.