0.1 Теорема Банаха-Штейнгауза

Рассмотрим последовательность линейных операторов $A_n \in \mathcal{L}(X,Y)$. Пусть для каждого $x \in X \ \exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n x = y(x) \in Y$. Тем самым определен аддитивный и непрерывный оператор A, $Ax = y(x)$. Пример предыдущего параграфа показывает, что этот оператор может и не являться сильным пределом последовательности операторов A_n: хотя $A_n x \to Ex$, но $\lim A_n \neq E$.

Вопрос: при каких условия существует **линейный** оператор A и можно ли оценить его норму?

Мы начнем с простой леммы.

Лемма 1 (Лемма I)**.** *Пусть оператор $A_n \in \mathcal{L}(X,Y)$ и известно, что для всех элементов некоторого шара $S_r(x_0)$ нормы $\|A_n x\|_Y$ ограничены: $\|A_n x\| \leq c$. Тогда существует постоянная M, такая что норма оператора A_n ограничена числом M: $\|A_n\| \leq M$.*

Доказательство. Возьмем любой элемент $x \in X$ и образуем элемент $x_0 + \frac{x}{\|x\|} r \in S_r(x_0)$. Тогда:

$$\begin{gathered}
\|A_n(x_0 + \tfrac{r}{\|x\|}x)\| \leq c, \text{ т.е.} \\
c \geq \|A_n(x_0 + \tfrac{r}{\|x\|}x)\|, \\
c \geq \|\tfrac{r}{\|x\|}A_n x + A_n x_0\| \geq \|A_n x\|\tfrac{r}{\|x\|} - \|A_n x_0\| \geq \tfrac{r}{\|x\|}\|A_n x_0\| - c, \\
2c \geq \tfrac{r}{\|x\|}\|A_n x\|,\ \tfrac{2c}{r}\|x\| \geq \|A_n x\|,\ \|A_n x\| \leq \tfrac{2c}{r}\|x\|
\end{gathered}$$

Достаточно положить $M = \frac{2c}{r}$: $\|A_n x\| \leq M\|x\|$ для всех $x \in X$, следовательно норма оператора $\|A\| \leq M$. □

Следующая лемма верна для полных нормированных пространств X, т.е. для банаховых пространств.

Лемма 2 (Лемма II)**.** *Пусть X - пространство Банаха. Пусть $\{A_n\}$ последовательность операторов множества $\mathcal{L}(X,Y)$. Тогда если нормы $\|A_n x\|$ элементов $A_n x$ ограничены для каждого $x \in X$, то нормы операторов A_n $\|A_n\|$ ограничены в совокупности.*

Доказательство. (от противного)

Предположим, что в X существует замкнутый шар $\bar{S}_0$, для **всех** элементов которого $\|A_n x\| < c$ при всех n, но последовательность норм $\|A_n\|$ неограниченна. Это предположение неверно, так как согласно Лемме I норма каждого оператора $\|A_n\| \leq M$.

Остаётся предположить, что существует шар $\bar{S}_0$, в котором значения $\|A_n x\|$ неограниченны, т.е. найдется номер n_1 и найдется элемент $x_1 \in \bar{S}_0$, такие что $\|A_{n1}(x_1)\| > 1$. Так как оператор A_{n1} (как и все операторы A_n) непрерывен, то существует шар $\bar{S}_1 \subset \bar{S}_0$, в котором $\|A_{n1}(x)\| > 1$.

Далее: значения $\|A_n x\|$ в шаре $\bar{S}_1$ не могут быть ограничены при всех n. Тогда должен существовать номер n_2 и элемент $x_2 \in \bar{S}_2$, такие что $\|A_{n2}(x_2)\| > 2$, (а по непрерывности A_{n2}) и шар S_2, в котором $\|A_{n2}(x)\| > 2$ для всех $x \in \bar{S}_2$.

Продолжая этот процесс мы получим последовательность вложенных шаров $\bar{S}_0 \supset \bar{S}_1 \supset \bar{S}_2 \ldots \supset \bar{S}_n \supset \ldots$ и последовательность элементов $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, таких что $\|A_{nk} x_k\| > k$. Ясно, что радиусы r_k шаров $\bar{S}_k$ можно выбирать так, что $r_k \to 0$.

Так как пространство X полное, то по теореме о вложенных шарах существует элемент $x^k \in X$ принадлежащий всем шарам S_k. Тогда $\|A_n x_n\| \to \infty$ при $k \to \infty$, что противоречит условиям леммы. □

Замечание. Если $\{\|A_n x\|\}$ не ограничена, то существует элемент $x^n \subset X$, на котором $\sup\limits_n \|A_n x^n\| = \infty$ — принцип фиксации особенности в полном банаховом пространстве X.

Теперь можно указать условия, при которых из сходимости последовательности элементов $\{A_n x\}$ при любом $x \in X$ следует поточечная сходимость последовательности операторов A_n к **линейному** оператору A: $\lim\limits_{n\to\infty} A_n x = y(x) \in Y$, $Ax = y(x)$.

Теорема 1 (Банаха-Штейнгауза)**.** . *Пусть* $\{A_n\} \in \mathcal{L}(X,Y)$, *где* X *и* Y *- пространства Банаха. Для того, чтобы последовательность операторов* $\{A_n\}$ *сходилась поточечно к линейному оператору на всем пространстве* X, *необходимо и достаточно, чтобы были выполнены два условия:*

1. *Нормы* $\|A_n\|$ *ограничены в совокупности:* $\|A_n\| \le M$.
2. *Последовательность элементов* $A_n x$ *сходится в себе на множестве* D *плотном в* X.

Доказательство. **Необходимость.** Пусть $A_n x \to Ax$. Тогда $\|A_n x\| \to \|Ax\| \le \|A\|\|x\|$, и последовательность норм элементов $\|A_n x\|$ ограничена при каждом $x \in X$. По Лемме II нормы $\|A_n\|$ ограничены в совокупности — условие 1 выполнено.

Так как последовательность $A_n x$ сходится на всем пространстве X (и сходится в себе на всем X), то она сходится в себе на любом множестве пространства X — условие 2 выполнено.

Достаточность. Покажем, что последовательность элементов $A_n x$ сходится в себе на всем пространстве X.

По любому заданному $\varepsilon > 0$ для любого элемента $x \in X$ найдется элемент $x' \in D$ такой, что $\|x - x'\| < \varepsilon$. Оценим $\|A_n x - A_m x\|$ при достаточно больших значениях m и n:

$$\|A_n x - A_m x\| = \|A_n x' - A_m x' + A_n x - A_n x' + A_m x' - A_m x\|$$

Значения $\|A_n x' - A_m x'\| < \varepsilon$ при достаточно больших m и n.

Значения $\|A_n x - A_n x'\| < M\varepsilon$, $\|A_m x' - A_m x\| < M\varepsilon$.

Итак, $\|A_n x - A_m x\| < (2M+1)\varepsilon$ при достаточно больших m и n, последовательность $A_n x$ сходится в себе на всем X, а так как пространство Y полное, то существует $\lim\limits_{n\to\inf} A_n x = y(x) \in Y$ и тем самым определен оператор: $Ax = y(x)$. Для оценки нормы этого оператора из неравенства $\|A_n x\| < M\|x\|$ получим $\|A\| \ge \bar{\lim\limits_{n\to\infty}} \|A_n\|$ ($\bar{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = a$, если для любого $\varepsilon > 0$ в интервале $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ содержится бесконечное число элементов последовательности $\{a_n\}$, а справа от этого интервала существует не более чем конечное число членов последовательности $\{a_n\}$).

Напомним, что последовательность операторов A_n может и не иметь сильного предела.

□

Замечание. Формулировка теоремы не предполагает знания оператора A. Если же оператор предъявлен, то вместо условия 2 можно проверить сходимость $A_n x \to Ax$ на линейном множестве D плотном в X. В этом случае предположение, что Y банахово — излишне.