0.1 Линейные пространства, нормированные пространства, пространства Банаха

Множество элементов называется **линейным множеством**, если для его элементов определены действия сложения и умножения на число (вещественное или комплексное), не выводящие из множества X:

- если $x, y \in X$, то $x + y \in X$
- если $x \in X$, то $\lambda x \in X$

Эти действия должны удовлетворять обычным условиям (аксиомам). Если λ вещественные числа, то X — вещественное линейное множество, если λ комплексные, то X — комплексное линейное множество. Для вещественного линейного множества можно построить комплексное линейное множество Z: достаточно ввести элементы $z = x + iy, \quad x, y \in X$ и определить сумму элементов:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

и ввести умножение на комплексное число λ:

$$\lambda z = (\alpha + i\beta)(x + iy) = (\alpha x - \beta y) + i(\alpha y + \beta x)$$

(комплексификация линейного множества X).

Для комплексного линейного множества Z каждый элемент $z = x + iy$, где x и y — элементы вещественного множества. Рассмотрим вещественное пространство X пар (x, y), в котором определим сумму: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ и умножение на вещественное число λ: $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$. Множество пар (x, y) образует вещественное линейное множество X (декомплексификация комплексного линейного множества Z). Из аксиом линейного множества отметим некоторые следствия:

1. Существования нулевого элемента: $\ominus = x - x = (1-1)x = 0x$.
2. Из равенства $\lambda x = 0$ при $\lambda \neq 0$ следует $x = \ominus$.
3. Определение линейной независимости элементов $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.
4. Определение размерности линейного множества X как наибольшего числа линейно независимых элементов множества X.
5. Линейное множество бесконечномерно, если для любого натурального n существует n линейно независимых элементов.

Примеры линейных множеств:

1. Вещественное пространство V_n n-мерных векторов.
2. Множество прямоугольных матриц размерности $(n \times m)$.
3. Множество $C[t_0, t_1]$ непрерывных на $[t_0, t_1]$ функций x. Функции $x_k(t) = t^k, \ k = 1, 2, 3, \ldots$ линейно независимы, а пространство $C[t_0, t_k]$ бесконечномерно.
4. Множество решений $x \in C^n[t_0, t_1]$ уравнения

$$\tfrac{d^n x(t)}{dt^n} + a_1 \tfrac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\tfrac{dx(t)}{dt} + a_n = 0, \text{ где } a_k \in C[t_0, t_1]$$

Снабжая линейное пространство метрикой, мы получаем более богатую теорию. Связь метрики с алгебраическими действиями реализуется введением норм элементов x: норма $\|x\|$ элемента $x \in X$, согласно определению есть число, которое должно удовлетворять трем условиям:

1. $\|x\| \geq 0$; если $\|x\| = 0$, то $x = \ominus$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Норма $\|x\|$ является непрерывной функцией: $|\|x + \triangle x\| - \|x\|| \to 0$ при $\|\triangle x\| \to 0$.

Верно неравенство $\|x - y\| \geq |\|x\| - \|y\||$.

Определим метрику в линейном пространстве X: $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Ясно, что введенная таким образом метрика удовлетворяет всем аксиомам метрического пространства. Линейное множество с метрикой, определяемой нормой элементов, называется **нормированным пространством**. Если нормированное пространство полное, то оно называется **пространством Банаха** (Стефан Банах, 1892-1945, польский математик), банаховым пространством, В-пространством.

Подпространством нормированного пространства X называется любое линейное замкнутое множество $X_0 \in X$.

Примеры.

1. Банаховы пространства n-мерных векторов получаем введением различных норм векторов $\bar{x}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:
   - $\|\bar{x}\|_\infty = \max\limits_i |x_i|$,
   - $\|\bar{x}\|_1 = \sum\limits_i |x_i|$,
   - $\|\bar{x}\|_2 = (\sum\limits_i |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$
2. Бесконечномерное банахово пространство $C[t_0, t_1]$ функций $x(t)$ непрерывных на $[t_0, t_1]$. Норма:
$$\|x\| = \max_i |x|,$$
функции $x_k(t) = t^k, k = 1, 2, 3, \ldots$ линейно независимы.
3. Бесконечномерное пространство банахово пространство $C_n[t_0, t_1]$. Норма:
$$\|x\| = \sum_{k=0}^{n} \max_i \left|\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right|$$
4. Пространство Банаха $L_p(a, b)$ измеримых и суммируемых со степенью p, $p \geq 1$, функций. Норма:
$$\|x\|^p = (\int\limits_a^b |x(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}$$
Множество полиномов с комплексными коэффициентами плотно в этих пространствах.

5. Пример неполного нормированного пространства.

   В линейном множестве $C[0,1]$ непрерывных функций введем норму (и метрику):

$$\|x\| = (\int_a^b |x(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}, \quad \rho(x,y) = (\int_0^1 |x(t)-y(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}$$

   Получаемое пространство не является полным. Действительно, последовательность функций $x_k(t) = t^k$ является фундаментальной последовательностью:

$$\|x_{n+m} - x_n\|^p = \int_0^1 (t^n - t^{n+m})^p dt = \int_0^1 t^{np}(1-t^m)^p dt < \int_0^1 t^{np} dt = \tfrac{1}{np+1} \to 0, \text{ при } n \to \infty$$

   Предел же $\lim x_n(t)$ при $n \to \infty$ в пространстве $C[0,1]$ не существует.