

**Теорема** (Хаусдорф, около 1914 г.). *Для того, чтобы множество  $K \subset X$  было компактно в  $X$ , необходимо и достаточно чтобы для любого  $\varepsilon > 0$  в множестве  $K$  существовала конечная  $\varepsilon$  - сеть.*

*Доказательство. Необходимость (Доказывается от противного).*

Пусть  $K$  - компактное в  $X$  множество. Предположим, что для заданного  $\varepsilon > 0$  не существует конечной  $\varepsilon$  - сети. Возьмем любой элемент  $x_1 \in K$ . Согласно предположению он не образует конечной  $\varepsilon$  - сети и существует элемент  $x_2 \in K$  такой что  $\rho(x_1, x_2) > \varepsilon$ . Два элемента  $x_1$  и  $x_2$  не образуют  $\varepsilon$  - сети, и существует третий элемент  $x_3 \in K$  такой что значения  $\rho(x_3, x_1)$ ,  $\rho(x_3, x_2)$ ,  $\rho(x_2, x_1) > \varepsilon$ .

Продолжая этот процесс, получим последовательность элементов  $x_1, x_2, x_3, \dots x_n \dots \in K$  таких что  $\rho(x_i, x_j) > \varepsilon$  при  $i \neq j$ . Из этой последовательности нельзя составить ни одной фундаментальной подпоследовательности, что противоречит компактности множества  $K$ .

Достаточность Пусть  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  любая последовательность элементов множества  $K$ . Образуем последовательность чисел  $\varepsilon_k > 0$ , монотонно стремящуюся к 0.

Для значения  $\varepsilon_1$  в множестве  $K$  существует конечная  $\varepsilon_1$  - сеть, т.е. все множество  $K$  может быть покрыто конечным числом шаров радиуса  $\varepsilon_1$ . Так как последовательность  $\{x_n\}$  содержит бесконечное число элементов, то среди упомянутых шаров найдется хотя бы один шар  $V_{\varepsilon_1}(z_1)$ , в котором содержится бесконечное число элементов последовательности  $\{x_n\}$ . Обозначим  $x_{n_1}$  первый из таких элементов:  $x_{n_1} \in V_{\varepsilon_1}(z_1)$ .

Далее, шар  $V_{\varepsilon_1}(z_1)$  может быть покрыт конечным числом шаров радиуса  $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ . Тогда в одном из таких шаров  $V_{\varepsilon_2}(z_2)$  содержится бесконечное число элементов последовательности  $\{x_n\}$ , и первый после  $x_{n_1}$  такой элемент обозначим  $x_{n_2}$  :

$$x_{n_1} \in V_{\varepsilon_1}(z_1) \cap V_{\varepsilon_2}(z_2),$$

Продолжая этот процесс, получим последовательность элементов  $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$  таких что  $x_{n_k} \in V_{\varepsilon_k}(z_k)$ ,

$$x_{n_k} \in \bigcap_{i=1}^k V_{\varepsilon_i}(z_i),$$

где  $n_k$  возрастающая последовательность чисел. При  $m > k$  оба элемента  $x_{n_k}$  и  $x_{n_m}$  принадлежат шару  $V_{\varepsilon_k}(z_k)$ . По неравенству треугольника

$$\rho(x_{n_k}, x_{n_m}) \leq \rho(x_{n_k}, z_k) + \rho(z_k, x_{n_m}) \leq \varepsilon_k + \varepsilon_k = 2\varepsilon_k.$$

Следовательно подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}$  последовательности  $\{x_n\}$  является фундаментальной.  $\square$

**Следствие.** *Если в множестве  $K \subset X$  существует компактная в  $X$   $\varepsilon$  - сеть  $H_\varepsilon$ , то множество  $K$  компактно в  $X$ .*

Действительно, так как  $H_\varepsilon$  является  $\varepsilon$  - сетью для множества  $K$ , то для любого элемента  $x \in K$  существует элемент  $x_\varepsilon \in H_\varepsilon$  такой что  $\rho(x, x_\varepsilon) < \varepsilon$ . Из условия компактности множества  $H_\varepsilon$  в пространстве  $X$  следует, что в  $H_\varepsilon$  существует конечная  $\varepsilon$  - сеть элементов  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots \bar{x}_n$ , и для элемента  $x_\varepsilon$  существует элемент  $\bar{x}_k \in H_\varepsilon$  такой что  $\rho(x_\varepsilon, \bar{x}_k) < \varepsilon$ . Тогда  $\rho(x, \bar{x}_k) \leq \rho(x, x_\varepsilon) + \rho(x_\varepsilon, \bar{x}_k) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ .

Следовательно элементы  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots \bar{x}_n$ , множества  $H_\varepsilon$  образуют в множестве  $K$  конечную  $2\varepsilon$  - сеть. По теореме Хаусдорфа множество  $K$  компактно в  $X$ .

Ясно, что компактное множество ограничено: существует шар конечного радиуса, которому принадлежит компактное множество.