Глава 1

Нормированные пространства

Изучение свойств отображений, как и в математическом анализе, начнём с введения определений, связанных с областями задания отображения.

1.1 Метрические пространства

Определение 1. В метрическом пространстве X для любых элементов $x, y \in X$ определено расстояние $\rho(x, y)$, которое удовлетворяет требованиям(аксиомам метрического пространства):

1. $\rho(x, y) \geqslant 0$, а $\rho(x, y) = 0$ означает, что элементы x и y совпадают,
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
3. $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ - неравенство треугольника

Расстояние(метрика)ρ определяет сходимость последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$ к элементу $x^* \in X$:

$$x_n \to x^*, \text{ если } \rho(x_n, x^*) \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

Из аксиом метрического пространства следует непрерывность функции $\rho(x, y)$, т.е. если $x_n \to x^*$, $y_n \to y^*$ при $n \to \infty$, то $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x^*, y^*)$.

Естественным образом вводятся понятия:

- открытый шар, замкнутый шар, окрестность элемента $x_0 \in X$,
- внутренняя точка множества $M \in X$, открытое множество, замкнутое множество,
- подпространство X_0 метрического пространства: метрика в X_0 определяется метрикой пространства X, множество X_0 - замкнуто,
- фундаментальная последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - последовательность, такая что $\forall \varepsilon > 0$ существует номер $n = n(\varepsilon)$ такой что $\rho(x_n, x_{n+m}) < \varepsilon$ при $n > n(\varepsilon)$, $m \geq 1$ (последовательность, сходящаяся в себе)

Основные типы метрических пространств и множеств

- **Полное метрическое пространство** — любая фундаментальная последовательность имеет предел, принадлежащий X (в математическом анализе - признак Коши сходимости числовой последовательности).

- Множество $D \in X$ **плотно в множестве** $M_0 \in X$, если для каждого элемента $x_0 \in M_0$ и любого $\varepsilon > 0$ найдётся элемент $z \in D$, такой что $\rho(x_0, z) < \varepsilon(z = z(\varepsilon))$. Если множество D плотно в M_0, то для любого элемента $x_0 \in M_0$ существует последовательность элементов $\{z_n\} \in D$ таких, что $\rho(z_n, x_0) \to 0$ при $n \to \infty$. Ясно, что $\overline{D} = M_0$.

- **Сепарабельное пространство** X — в таком пространстве существует счётное всюду плотное множество D: $D = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Для любого элемента $x_0 \in X$ можно найти такой номер $n = n(x_0, \varepsilon)$, что $\rho(x_0, z_n) < \varepsilon$.

  Пример: пространство $C[a, b]$ непрерывных на $[a, b]$ функций сепарабельно. В математическом анализе это теорема Вейерштрасса: для каждой непрерывной функции $x_0(t)$ существует полином P_n с рациональными коэффициентами такой что

  $$\rho(x_0, P_n) = \max_{t \in [a,b]} |x_0(t) - P_n(t)| < \varepsilon.$$

  Множество таких полиномов счётно.

- **Компактное множество метрического пространства** X.

  Множество K компактно в X, если в любой подпоследовательности элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in K$ существует фундаментальная подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, $n_{k+1} > n_k$(т.е. последовательность n_k возрастает).

Компактность множеств играет важную роль при исследовании приближённых методов решения задач.

Если X полное пространство, то существует предельный элемент этой фундаментальной подпоследовательности, но он может не принадлежать множеству K.

Определение компактного множества неконструктивно. Следующая теорема Хаусдорфа даёт эффективный критерий компактности множеств.

Определение 2. Говорят, что в множестве $M \in X$ существует **конечная ε-сеть**$\{x_1, x_2, \ldots, x_{N(\varepsilon)}\}$, если для любого элемента $x \in M$ можно указать элемент x_n ε-сети, такой что

$$\rho(x_n, x) < \varepsilon,\ n = n(x_0, \varepsilon).$$