# Глава 1

# Нормированные пространства

**Изучение свойств отображений, как и в математическом анализе, начнём с введения определений, связанных с областями задания отображения.**

## 1.1 Метрические пространства

**Определение 1.** В метрическом пространстве $\chi$ для любых элементов $x, y \in \chi$ определено расстояние $\rho(x, y)$, которое удовлетворяет требованиям(аксиомам метрического пространства):

1. $\rho(x, y) \geqslant 0$, а $\rho(x, y) = 0$ означает, что элементы $x$ и $y$ совпадают,
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
3. $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ - неравенство треугольника

Расстояние(метрика)$\rho$ определяет сходимость последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \chi$ к элементу $x^* \in \chi$:

$$x_n \to x^*, \text{ если } \rho(x_n, x^*) \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

Из аксиом метрического пространства следует непрерывность функции $\rho(x, y)$, т.е. если $x_n \to x^*$, $y_n \to y^*$ при $n \to \infty$, то $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x^*, y^*)$.

Естественным образом вводятся понятия:

- открытый шар, замкнутый шар, окрестность элемента $x_0 \in \chi$,
- внутренняя точка множества $M \in \chi$, открытое множество, замкнутое множество,
- подпространство $\chi_0$ метрического пространства: метрика в $\chi_0$ определяется метрикой пространства $\chi$, множество $\chi_0$ - замкнуто,
- фундаментальная последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - последовательность, такая что $\forall \varepsilon > 0$ существует номер $n = n(\varepsilon)$ такой что $\rho(x_n, x_{n+m}) < \varepsilon$ при $n > n(\varepsilon)$, $m \geq 1$ (последовательность, сходящаяся в себе)

### Основные типы метрических пространств и множеств

- **Полное метрическое пространство** — любая фундаментальная последовательность имеет предел, принадлежащий $\chi$ (в математическом анализе - признак Коши сходимости числовой последовательности).

- Множество $D \in \chi$ **плотно в множестве** $M_0 \in \chi$, если для каждого элемента $x_0 \in M_0$ и любого $\varepsilon > 0$ найдётся элемент $z \in D$, такой что $\rho(x_0, z) < \varepsilon(z = z(\varepsilon))$. Если множество $D$ плотно в $M_0$, то для любого элемента $x_0 \in M_0$ существует последовательность элементов $\{z_n\} \in D$ таких, что $\rho(z_n, x_0) \to 0$ при $n \to \infty$. Ясно, что $\overline{D} = M_0$.

- **Сепарабельное пространство** $\chi$ — в таком пространстве существует счётное всюду плотное множество $D$: $D = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Для любого элемента $x_0 \in \chi$ можно найти такой номер $n = n(x_0, \varepsilon)$, что $\rho(x_0, z_n) < \varepsilon$.

  **Пример**: пространство $C[a, b]$ непрерывных на $[a, b]$ функций сепарабельно. В математическом анализе это теорема Вейерштрасса: для каждой непрерывной функции $x_0(t)$ существует полином $P_n$ с рациональными коэффициентами такой что

$$\rho(x_0, P_n) = \max_{t\in[a,b]} |x_0(t) - P_n(t)| < \varepsilon.$$

  Множество таких полиномов счётно.

- **Компактное множество метрического пространства** $\chi$.

  Множество $K$ компактно в $\chi$, если в любой подпоследовательности элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in K$ существует фундаментальная подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, $n_{k+1} > n_k$(т.е. последовательность $n_k$ возрастает).

Компактность множеств играет важную роль при исследовании приближённых методов решения задач.

Если $\chi$ полное пространство, то существует предельный элемент этой фундаментальной подпоследовательности, но он может не принадлежать множеству $K$.

Определение компактного множества неконструктивно. Следующая теорема Хаусдорфа даёт эффективный критерий компактности множеств.

**Определение 2.** Говорят, что в множестве $M \in \chi$ существует **конечная $\varepsilon$-сеть**$\{x_1, x_2, \ldots, x_{N(\varepsilon)}\}$, если для любого элемента $x \in M$ можно указать элемент $x_n$ $\varepsilon$-сети, такой что

$$\rho(x_n, x) < \varepsilon,\ n = n(x_0, \varepsilon).$$