Глава 1

Нормированные пространства

Изучение свойств отображений, как и в математическом анализе, начнём с введения определений, связанных с областями задания отображений.

1.1 Метрические пространства

Определение. В метрическом пространстве X для любых элементов $x, y \in X$ определено расстояние $\rho(x, y)$, которое удовлетворяет требованиям (аксиомам метрического пространства):

1. $\rho(x, y) \geqslant 0$, а $\rho(x, y) = 0$ означает, что элементы x и y совпадают,

2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,

3. $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ — неравенство треугольника.

Расстояние (метрика) ρ определяет сходимость последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$ к элементу $x^* \in X$:

$$x_n \to x^*, \text{ если } \rho(x_n, x^*) \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

Из аксиом метрического пространства следует непрерывность функции $\rho(x, y)$, то есть если $x_n \to x^*$, $y_n \to y^*$ при $n \to \infty$, то $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x^*, y^*)$.

Естественным образом вводятся понятия:

- открытый шар, замкнутый шар, окрестность элемента $x_0 \in X$,

- внутренняя точка множества $M \in X$, открытое множество, замкнутое множество,

- подпространство X_0 метрического пространства: метрика в X_0 определяется метрикой пространства X, множество X_0 — замкнуто,

- фундаментальная последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность, такая что $\forall \varepsilon > 0$ существует номер $n = n(\varepsilon)$ такой что $\rho(x_n, x_{n+m}) < \varepsilon$ при $n > n(\varepsilon)$, $m \geq 1$ (последовательность, сходящаяся в себе).

Основные типы метрических пространств и множеств

1. **Полное метрическое пространство** — любая фундаментальная последовательность имеет предел, принадлежащий X (в математическом анализе — признак Коши сходимости числовой последовательности).

2. Множество $D \in X$ **плотно в множестве** $M_0 \in X$, если для каждого элемента $x_0 \in M_0$ и любого $\varepsilon > 0$ найдётся элемент $z \in D$, такой что $\rho(x_0, z) < \varepsilon (z = z(\varepsilon))$. Если множество D плотно в M_0, то для любого элемента $x_0 \in M_0$ существует последовательность элементов $\{z_n\} \in D$ таких, что $\rho(z_n, x_0) \to 0$ при $n \to \infty$. Ясно, что $\overline{D} = M_0$.

3. **Сепарабельное пространство** X — в таком пространстве существует счётное всюду плотное множество D: $D = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. Для любого элемента $x_0 \in X$ можно найти такой номер $n = n(x_0, \varepsilon)$, что $\rho(x_0, z_n) < \varepsilon$.

   Пример. Пространство $C[a, b]$ непрерывных на $[a, b]$ функций сепарабельно. В математическом анализе это теорема Вейерштрасса: для каждой непрерывной функции $x_0(t)$ существует полином P_n с рациональными коэффициентами такой что

   $$\rho(x_0, P_n) = \max_{t \in [a,b]} |x_0(t) - P_n(t)| < \varepsilon$$

   Множество таких полиномов счётно.

4. **Компактное множество метрического пространства** X

   Множество K компактно в X, если в любой подпоследовательности элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in K$ существует фундаментальная подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, $n_{k+1} > n_k$(т.е. последовательность n_k возрастает).

Компактность множеств играет важную роль при исследовании приближённых методов решения задач.

Если X полное пространство, то существует предельный элемент этой фундаментальной подпоследовательности, но он может не принадлежать множеству K.

Определение компактного множества не конструктивно. Следующая теорема Хаусдорфа даёт эффективный критерий компактности множеств.

Определение. Говорят, что в множестве $M \in X$ существует **конечная ε-сеть**$\{x_1, x_2, \dots, x_{N(\varepsilon)}\}$, если для любого элемента $x \in M$ можно указать элемент x_n ε-сети, такой что

$$\rho(x_n, x) < \varepsilon, \; n = n(x_0, \varepsilon)$$

Здесь не хватает части

Примеры

1. Любое ограниченное множество в конечномерном пространстве компактно (в математическом анализе это теорема Больцано-Вейерштрасса).

2. Множества, компактные в пространстве непрерывных функций.

   Теорема (Чезаро Арцела, 1870; Джулио Асколи, 1900)**.** *Для того, чтобы множество $E \in C[a, b]$ было компактным, необходимо и достаточно выполнения двух условий:*

- *Все функции $x \in E$ ограничены в совокупности:* $\max\limits_{[a,b]}|x| < const$.
- *Все функции $x \in E$ равностепенно непрерывны:* $\forall\varepsilon > 0$ *существует такое число $\delta > 0$, что для любых значений $t^{'}, t^{''} \in [a,b]$ таких, что $|t^{''} - t^{'}| < \delta$ верно неравенство $|x(t^{''}) - x(t^{'})| < \varepsilon$, где δ не зависит от выбора функции x из E.*

Доказательство. Достаточность Пусть известно, что для функции $x \in E$ выполнены условия теоремы. Построим в E компактную ε-сеть H_ε. Для $\varepsilon > 0$ найдем значение $\delta > 0$ такое, что $|x(t^{''}) - x(t^{'})| < \varepsilon$ для всех $t^{'}, t^{''}$ таких, что $|t^{''} - t^{'}| < \delta$. Построим конечное число узлов $\{t_i\}$, $a = t_1 < t_2 < ... < t_n = b, t_{k+1} - t_k < \delta$ и зафиксируем их. Рассмотрим множество ломаных $\bar{x}(t)$ с вершинами в точках (t_k, η_k), где $\eta_k = x(t_k)$. Множество всех таких ломаных, построенных для функций множества E, обозначим H_ε.

Множество H_ε компактно в $C[a,b]$. Действительно, каждая ломаная определяется n числами $(\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)$, где все числа η_k ограничены: $|\eta_k| \leq const$. Из любой последовательности ломаных из H_ε можно образовать фундаментальную последовательность.

Покажем, что компактное множество H_ε образует в E ε-сеть. Для любой функции $x \in E$ построим ломаную $\bar{x}(t), \bar{x} \in H_\varepsilon$. Так как $x(t)$ непрерывна, то на отрезке $[t_k, t_{k+1}]$ она достигает своего максимального значения M_k и своего минимального значения m_k: $m_k \leq x(t) \leq M_k, t \in [t_k, t_{k+1}]$. В этих же пределах лежат и значения линейной функции $\bar{x}(t)$. Ясно, что $|x(t) - \bar{x}(t)| \leq M_k - m_k, t \in [t_k, t_{k+1}]$.

В силу выбора значения δ величины $M_k - m_k < \varepsilon$. Тогда и $\rho(x, \bar{x} < \varepsilon$. Согласна следствию теоремы Хаусдорфа, множество E компактно в $C[a,b]$.

Необходимость Свойства функций из компактного множества E, указанные в теореме, сразу следуют из существования в E конечной ε-сети непрерывных на $[a,b]$ функций $x_1(t), x_2(t), ..., x_N(t)$.

□

3. Множества, компактные в пространстве суммируемых со степенью $p, (p \geq 1)$ функций.

   Теорема (Марсель Рисс, 1935 г.). *Для того, чтобы множество E пространства $L_p[a,b]$ было компактным, необходимо и достаточно, чтобы*

   - $\int_a^b |x(t)|^p dt \leq const, x \in E$,
   - *при $\tau \to 0$ интегралы $\int_a^b |x(t+\tau) - x(t)|^p dt \to 0$ равномерно относительно $x \in E$.*

   Условия теоремы М. Рисса аналогичны условиям теоремы Арцела-Асколи для пространства непрерывных функций. Доказательство теоремы основано на плотности множества непрерывных на $[a,b]$ функций в пространстве $L_p[a,b]$.

4. Принцип вложенных шаров (В математическом анализе - лемма о вложенных отрезках).

   Теорема. *Пусть в полном метрическом пространстве X дана последовательность замкнутых шаров $V_{r_n}(x_n)$:*

   $$\overline{V_{r_{n+1}}}(x_{n+1}) \subset \overline{V_{r_n}}(x_n), \text{ где } r_n \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

   Тогда в X существует и единственен элемент x^*, принадлежащий всем шарам $\overline{V_{r_n}}(x_n)$

Доказательство. Для расстояний $\rho(x_n, x_{n+m})$ между центрами этих шаров верно

$$\rho(x_n, x_{n+m}) < r_n \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

и последовательность $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность. Так как пространство X полное, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^* \subset X$ и этот предел единственен.

Ясно, что x^* принадлежит всем шарам $\overline{V_{r_n}}(x_n)$.

□

1.2 Пространства первой и второй категории

Множество D всюду плотно в метрическом пространстве X, если для каждого элемента $x \in X$ и любого $\epsilon > 0$ существует элемент $z \in D$ такой что $\rho(x, z) < \epsilon$.

Сформулируем утверждение: множество E не является множеством всюду плотным в пространстве X.

Определение. Множество E **не является всюду плотным** в X (**нигде не плотным** в X), если в любом замкнутом шаре $\overline{V_r}(x)$ существует замкнутый шар, в котором нет элементов множества E.

Пример. На плоскости (в пространстве R_2) множество точек любой прямой - нигде не плотное в R_2 множество. Рассмотрим множество прямых l, параллельных оси x и пересекающих ось y в точках с рациональными значениями координат y_n. Ясно, что множество таких прямых счётно, и каждая прямая l_n этого множества есть множество нигде не плотное в пространстве R_2.

Будет ли множество точек $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} l_k$ совпадать со всем пространством R_2? Ответ отрицателен: прямые, пересекающие ось y в точках с иррациональными значениями, не принадлежат $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} l_k$.

Определение. Множество E называется множеством первой категории, если оно представимо в виде

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$$

, где все множества E_k нигде не плотные в X. Если множество E нельзя представить в виде счетного объединения нигде не плотных множеств, то E называется множеством второй категории.

В общем случае верна теорема:

Теорема (Луи Бэр, 1905 г.)**.** *Полное метрическое пространство X является множеством второй категории.*

Доказательство. (От противного)

Предположим, что $X = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$, где все множества нигде не плотные. Пусть $\overline{V_{r_0}}(x_0)$ произвольный шар. Так как E_1 нигде не плотно в X, то в этом шаре существует шар $\overline{V_{r_1}}(x_1)$, в котором нет элементов множества E_1. Можно считать, что радиус этого шара $r_1 < \frac{1}{2} r_0$.

Множество E_2 нигде не плотно: в шаре $\overline{V_{r_1}}(x_1)$ существует шар $\overline{V_{r_2}}(x_2)$, в котором нет элементов множества E_2 (и элементов множества E_1). Можно считать, что $r_2 < \frac{1}{2}r_1 < \frac{1}{2^2}r_0$.

Продолжая этот процесс, получим последовательность вложенных шаров $\overline{V_{r_1}}(x_1) \supset \overline{V_{r_2}}(x_2) \supset ... \supset \overline{V_{r_n}}(x_n) \supset ...; r_n < \frac{1}{2^n}r_0, r_n \to 0$ при $n \to \infty$, и в каждом шаре $\overline{V_{r_n}}(x_n)$ нет элементов множеств $E_1, E_2, ..., E_n$.

По теореме о вложенных шарах существует элемент $x^* \subset X$: $x_n \to x^*$ при $n \to \infty$.

Ясно, что $x^* \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \overline{V_{r_n}}(x_n)$ и следовательно $x^* \notin \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, что противоречит предположению $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Остается принять, что множество X пространство второй категории.

□

1.3 Линейные пространства, нормированные пространства, пространства Банаха

Множество элементов называется **линейным множеством**, если для его элементов определены действия сложения и умножения на число (вещественное или комплексное), не выводящие из множества X:

- если $x, y \in X$, то $x + y \in X$
- если $x \in X$, то $\lambda x \in X$

Эти действия должны удовлетворять обычным условиям (аксиомам). Если λ вещественные числа, то X — вещественное линейное множество, если λ комплексные, то X — комплексное линейное множество. Для вещественного линейного множества можно построить комплексное линейное множество Z: достаточно ввести элементы $z = x + iy, \quad x, y \in X$ и определить сумму элементов:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

и ввести умножение на комплексное число λ:

$$\lambda z = (\alpha + i\beta)(x + iy) = (\alpha x - \beta y) + i(\alpha y + \beta x)$$

(комплексификация линейного множества X).

Для комплексного линейного множества Z каждый элемент $z = x + iy$, где x и y — элементы вещественного множества.

Рассмотрим вещественное пространство X пар (x, y), в котором определим сумму: $(x_1, y_1)+(x_2, y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2)$ и умножение на вещественное число λ: $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$. Множество пар (x, y) образует вещественное линейное множество X (декомплексификация комплексного линейного множества Z).

Из аксиом линейного множества отметим некоторые следствия:

1. Существования нулевого элемента: $\ominus = x - x = (1 - 1)x = 0x$.
2. Из равенства $\lambda x = 0$ при $\lambda \neq 0$ следует $x = \ominus$.
3. Определение линейной независимости элементов $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.
4. Определение размерности линейного множества X как наибольшего числа линейно независимых элементов множества X.
5. Линейное множество бесконечномерно, если для любого натурального n существует n линейно независимых элементов.

Примеры линейных множеств

1. Вещественное пространство V_n n-мерных векторов.

2. Множество прямоугольных матриц размерности $(n \times m)$.

3. Множество $C[t_0, t_1]$ непрерывных на $[t_0, t_1]$ функций x. Функции $x_k(t) = t^k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ линейно независимы, а пространство $C[t_0, t_k]$ бесконечномерно.

4. Множество решений $x \in C^n[t_0, t_1]$ уравнения

$$\tfrac{d^n x(t)}{dt^n} + a_1 \tfrac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\tfrac{dx(t)}{dt} + a_n = 0, \text{ где } a_k \in C[t_0, t_1]$$

Снабжая линейное пространство метрикой, мы получаем более богатую теорию. Связь метрики с алгебраическими действиями реализуется введением норм элементов x: норма $\|x\|$ элемента $x \in X$, согласно определению есть число, которое должно удовлетворять трем условиям:

1. $\|x\| \geq 0$; если $\|x\| = 0$, то $x = \ominus$.

2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Норма $\|x\|$ является непрерывной функцией: $|\|x + \triangle x\| - \|x\|| \to 0$ при $\|\triangle x\| \to 0$.

Верно неравенство $\|x - y\| \geq |\|x\| - \|y\||$.

Определим метрику в линейном пространстве X: $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Ясно, что введенная таким образом метрика удовлетворяет всем аксиомам метрического пространства. Линейное множество с метрикой, определяемой нормой элементов, называется **нормированным пространством**. Если нормированное пространство полное, то оно называется **пространством Банаха** (Стефан Банах, 1892-1945, польский математик), банаховым пространством, B-пространством.

Определение. Подпространством нормированного пространства X называется любое линейное <u>замкнутое</u> множество $X_0 \in X$.

Примеры

1. Банаховы пространства n-мерных векторов получаем введением различных норм векторов $\bar{x}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

   - $\|\bar{x}\|_\infty = \max\limits_i |x_i|$,
   - $\|\bar{x}\|_1 = \sum\limits_i |x_i|$,
   - $\|\bar{x}\|_2 = (\sum\limits_i |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$

2. Бесконечномерное банахово пространство $C[t_0, t_1]$ функций $x(t)$ непрерывных на $[t_0, t_1]$. Норма:

$$\|x\| = \max_i |x|,$$

функции $x_k(t) = t^k, k = 1, 2, 3, \ldots$ линейно независимы.

3. Бесконечномерное пространство банахово пространство $C_n[t_0, t_1]$. Норма:

$$\|x\| = \sum_{k=0}^{n} \max_i \left|\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right|$$

4. Пространство Банаха $L_p(a, b)$ измеримых и суммируемых со степенью p, $p \geq 1$, функций. Норма:

$$\|x\|^p = (\int_a^b |x(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}$$

Множество полиномов с комплексными коэффициентами плотно в этих пространствах.

5. Пример неполного нормированного пространства.

В линейном множестве $C[0, 1]$ непрерывных функций введем норму (и метрику):

$$\|x\| = (\int_a^b |x(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}, \quad \rho(x, y) = (\int_0^1 |x(t) - y(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}$$

Получаемое пространство не является полным. Действительно, последовательность функций $x_k(t) = t^k$ является фундаментальной последовательностью:

$$\|x_{n+m} - x_n\|^p = \int_0^1 (t^n - t^{n+m})^p dt = \int_0^1 t^{np}(1 - t^m)^p dt < \int_0^1 t^{np} dt = \tfrac{1}{np+1} \to 0, \text{ при } n \to \infty$$

Предел же $\lim x_n(t)$ при $n \to \infty$ в пространстве $C[0, 1]$ не существует.

1.4 Пространства Гильберта

Рассматривается линейное комплексное пространство, в котором введено скалярное произведение (x, y) элементов x и y, удовлетворяющее обычным свойствам скалярного произведения:

1. $(x, y) = \overline{(x, y)}$
2. $(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda(x_1, y) + \mu(x_2, y)$
3. (x, x) - вещественное число, $(x, x) \geqslant 0$ и если $(x, x) = 0$, то $x = \ominus$

Верно неравенство Коши-Буняковского:

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x) \cdot (y, y)$$

Действительно,

$$(x + \lambda y, x + \lambda y) \geq 0$$
$$(x, x) + \lambda(y, x) + (x, \lambda y) + \lambda\bar{\lambda}(y, y) > 0$$
$$(x, x) + 2Re(\lambda y, x) + |\lambda|^2(y, y) \geq 0$$

для любых чисел λ.

1. Свойство элементов y_j.

   $\|By_j\| = \|B(u_j - u_0)\|$ (аддитивность B) $= \|Bu_j - Bu_0\| \leq \|Bu_j\| + \|Bu_0\|(u_0, u_j \in Y_n) \leq n(\|u_j\| + \|u_0\|) \cdot 1$. Оценим $\|B_j\|$ через норму элементов $\|y_j\|$. Так как $y_j \to y$, то $\|y_j\| \to \|y\| = r_0$, и при достаточно больших значениях j:

   $$\|y_j\|\frac{1}{r_0} > \frac{1}{2} \text{ и } 1 < \frac{2}{r_0}\|y_j\|.$$

   Для таких значений j: $\|By_j\| \leq \frac{2}{r_0}n(\|u_j\| + \|u_0\|)$ и так как $\|u_j\| = \|u_0 + u_j - u_0\| \leq \|u_0\| + \|u_j - u_0\| \leq \|u_0\| + r_0$, то для достаточно больших значений j:

   $$\|By_j\|_X \leq \frac{2}{r_0}(r_0 + \|u_0\|) \cdot n \cdot \|y_j\|_Y.$$

   Величину $\frac{2}{r_0}(r_0 + \|u_0\|) \cdot n$ оценим натуральным числом N:

   $$\|By_j\| \leq N\|y_j\| \text{ и } y_j \in Y_N.$$

   Так как $y_j \to y$, то множество Y_N плотно в множестве элементов y с нормой r_0. Значение N, согласно п.п. 1.2, зависит только от фиксированных значений r, n_0 и $u_0 \in Y$. Так как множество Y_N "однородно", то и для любого $y \in Y$ существует последовательность элементов $y_j \in Y_N$, такая что $y_j \to y$ при $j \to \infty$ и $\|By_j\| \leq N|y_j\|$. Обозначив $M = Y_N$ и $C_0 = N$, завершим доказательство леммы.

Теорема (Банаха)**.** *Замкнутый оператор B, действующий из банахова пространства Y в банахово пространство X и определённый на всём пространстве Y, линеен.*

Доказательство. Согласно лемме в пространстве Y существует всюду плотное множество M, для элементов которого

$$\| By \| \leq C_0 \| y \|$$

1. Пусть y_0 любой элемент пространства Y.
   Построим шар радиуса $\frac{1}{4} \| y_0 \|$ с центром $\frac{3}{4}y_0$. В этом шаре найдём элемент $y_1 \in M$:

   $$\| y_1 - \frac{3}{4}y_0 \| \leq \frac{1}{4} \| y_0 \| \ ,$$

   $$\| y_1 \| = \| y_1 - \frac{3}{4}y_0 + \frac{3}{4}y_0 \| \leq \frac{1}{4} \| y_0 \| + \frac{3}{4} \| y_0 \| = \| y_0 \|$$

2. Рассмотрим элемент $y_1 - y_0$. Для него

   $$\| y_1 - y_0 \| = \| y - \frac{3}{4}y_0 + \frac{1}{4}y_0 \| \leq \frac{1}{4} \| y_0 \| + \frac{1}{4} \| y_0 \| = \frac{1}{2} \| y_0 \|$$

   Построим шар радиуса $\frac{1}{4} \| y_1 - y_0 \|$ с центром $\frac{3}{4}(y_1 - y_0)$. В этом шаре найдём элемент $y_2 \in M$:

   $$\| y_2 + y_1 - y_0 \| = \| y_2 - \frac{3}{4}(y_1 - y_0) - \frac{1}{4}(y_1 - y_0) \| \leq \frac{1}{4} \| y_1 - y_0 \| + \frac{1}{4} \| y_1 - y_0 \| =$$

   $$= \frac{1}{2} \| y_1 - y_0 \| \leq \frac{1}{2^2} \| y_0 \| \ ,$$

   $$\| y_2 \| = \| y_2 - \frac{3}{4}(y_1 - y_0) + \frac{3}{4}(y_1 - y_0) \| \leq \frac{1}{4} \| y_1 - y_0 \| + \frac{3}{4} \| y_1 - y_0 \| = \| y_1 - y_0 \| \leq$$

$$\le \frac{1}{2} \parallel y_0 \parallel$$

3. Рассмотрим элемент $y_2 + y_1 - y_0$. Для него

$$\parallel y_2 + y_1 - y_0 \parallel \le \frac{1}{2^2} \parallel y_0 \parallel .$$

Построим шар радиуса $\frac{1}{4} \parallel y_2+y_1-y_0 \parallel$ с центром $\frac{3}{4}(y_2+y_1-y_0)$. В этом шаре найдём элемент $y_3 \in M$:

$$\parallel y_3 + y_2 + y_1 - y_0 \parallel = \parallel y_3 - \frac{3}{4}(y_0 - y_1 - y_2) - \frac{1}{4}(y_0 - y_1 - y_2) \parallel \le$$

$$\le \frac{1}{4} \parallel y_0 - y_1 - y_2 \parallel + \frac{1}{4} \parallel y_0 - y_1 - y_2 \parallel \le$$

$$\le \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} \parallel y_0 \parallel = \frac{1}{2^3} \parallel y_0 \parallel ,$$

$$\parallel y_3 \parallel = \parallel y_3 - \frac{3}{4}(y_0 - y_1 - y_2) + \frac{3}{4}(y_0 - y_1 - y_2) \parallel \le$$

$$\le \frac{1}{4} \parallel y_0 - y_1 - y_2 \parallel + \frac{3}{4} \parallel y_0 - y_1 - y_2 \parallel = \parallel y_0 - y_1 - y_2 \parallel \le \frac{1}{2^2} \parallel y_0 \parallel$$

Продолжая этот процесс, получим элементы $y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, ..., y_3, y_2, y_1 \in M$ такие что

$$\|y_n\| \le \frac{1}{2^{n-1}}\|y_0\|$$

и

$$\|y_n + y_{n-1} + y_{n-2} + ... + y_2 + y_1 + y_0\| \le \frac{1}{2^n}\|y_0\|.$$

Обозначим $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} y_k$. Тогда $s_n \to y_0$ при $n \to \infty$. Последовательность элементов Bs_n сходится в себе:

$$\|Bs_{n+m} - Bs_n\|_X = \|B(s_{n+m} - s_n)\| = \|B(y_{n+1} + y_{n+2} + ... + y_{n+m})\| \le$$

$$\le C_0\|y_0\|(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + ... + \frac{1}{2^{n+m-1}}) = C_0\frac{1}{2^n}(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^{m-1}}) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Так как пространство X полное, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = x^* \in X$.
Переходя в оценке $\|Bs_{n+m} - Bs_n\|$ к пределу при $m \to \infty$, получаем

$$\|x^* - Bs_n\| \le C_0\|y_0\|(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + ...).$$

Так как $s_n \to y_0, Bs_n \to x^*$, то в силу замкнутости оператора B:

$$By_0 = x^*.$$

Оценим $\|By_0\|_X$:

$$\|By_0\| \le \|x^* - Bs_n\| + \|Bs_n\| \le$$

$$\le C_0\|y_0\|[\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + ...] + C_0\|y_0\|[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}] = 2C_0\|y_0\|$$

$\|By_0\| \le 2C_0\|y_0\|$, т.е. оператор B линеен, $\|By_0\|_{Y\to X} \le 2C_0$.

□

Глава 2

Линейные операторы в нормированных пространствах

2.1 Линейные операторы в нормированных пространствах

Пусть X и Y два множества и множество $D \subset X$. Если каждому элементу $x \in D$ поставлен в соответствие элемент $y \in Y$, то говорят, что задано отображение F с областью задания $D = D(F)$. Множество элементов $y \in Y$, таких что $y = F(x)$, где $x \in D$, называется областью значений отображения F. Естественным образом вводятся понятия обратного отображения F^{-1} и взаимно-однозначного отображения. Для метрических пространств X и Y рассматривается непрерывность отображения на элементе $x_0 \in D$ и непрерывность отображения D на множестве $X_0 \subset D$.

Полезным свойством отображения является **замкнутость** отображения.

Определение. Отображение F замкнуто, если для любой последовательности $\{x_n\}$

1. имеющей предел $\lim x_n = x^* \in D$ при $n \to \infty$,
2. и такой, что существует $\lim F(x_n) = y^* \in Y$

верно равенство $F(x^*) = y^*$.

Пример: $D = [-1; 1]$, $Y = [0; \infty]$

$$F(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{, если } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ x^{-1} & \text{, если } 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

Ясно, что это отображение не является непрерывным на $[-1; 1]$, единственная точка разрыва $x = 0$. Но это отображение замкнуто:

1. при $x_n \to 0$ существует $\lim x_n = x^* = 0 \in D$,
2. предел $F(x_n)$ существует и равен $y^* = 1 \in Y$

верно равенство $F(x^*) = y^*$.

В определении замкнутости отображения исключаются сходящиеся последовательности $\{x_n\}$, для которых предел $F(x_n)$ не существует.

В этой главе мы будем рассматривать отображения, областями задания и областями значений которых являются линейные множества.

Определение. Отображение F называется аддитивным, если $F(x_1+x_2) = F(x_1)+F(x_2)$.

Определение. Отображение F называется однородным, если $F(\lambda x) = \lambda F(x)$. Для комплексных линейных множеств X и Y выполнено: $F(ix) = iF(x)$.

Определение. Отображения аддитивные и однородные будем называть операторами. Для оператора A верно:

$$A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A x_1 + \lambda_2 A x_2$$

В определении оператора требование непрерывности можно заменить непрерывностью на элементе $\emptyset \in D(A)$: для любого элемента $x_0 \in D(A)$ рассмотрим $x \to x_0$ и

$$z = (x - x_0) \to \emptyset.$$

Тогда

$$A(x - x_0) \to \emptyset \text{ и } Ax \to Ax_0.$$

Важнейшим классом операторов являются ограниченные операторы.

Определение. Оператор A называется ограниченным, если любое ограниченное множество он отображает в множество, ограниченное в Y.

В дальнейшем мы будем рассматривать нормированные пространства X и Y.

Для ограниченного оператора A обозначим величину

$$\sup_{\|x\|=1} \| Ax \| = \sup_{S_1} \| Ax \| = C_0 < +\infty$$

Тогда

$$\sup_{S_R} \| Ax \| = R \cdot C_0 \text{ и величина } \sup_{S_R} \| Ax \| \to \infty \text{ при } R \to \infty.$$

Линейная зависимость

$$\sup_{S_R} \| Ax \|$$

от величины R для ограниченных операторов даёт более практичное определение ограниченного оператора.

Определение. Оператор A называется линейным оператором из X в Y, если величина

$$C_0 = \sup_{S_1} \| Ax \| < +\infty.$$

Эта величина называется **нормой** линейного оператора, она обозначается

$$\| A \| \ (\ \| A \|_{X \to Y}).$$

Величина $\sup\limits_{\|x\| \leq 1} \| Ax \| = \| A \| = \sup\limits_{\|x\|=1} \| Ax \|$.

Действительно,

$$C_0 \leq \sup_{\|x\|=1} \| Ax \|.$$

С другой стороны

$$\| Ax \| = \| x \| \cdot \| A(\tfrac{x}{\|x\|}) \| \le C_0$$

при $\| x \| \le 1$; $\sup\limits_{\|x\|\le 1} \| Ax \| \le C_0$.

Тогда

$$C_0 \ge \sup_{\|x\|\le 1} \| Ax \|, \text{ и мы получаем } \sup_{\|x\|\le 1} \| Ax \| = \| A \|.$$

Для линейных операторов верна оценка: $\| Ax \|_Y = \| A \| \cdot \| x \|_X$.

Замечание. Если получена оценка $\| Ax \| \le C \| x \|$, то $\| A \| \le C$.

Пример. Интегральный оператор K из $X = L_p(a,b)$ в $Y = L_q(a,b)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$y = K \cdot x \ , \ y(t) = \int\limits_a^b K(t,\tau) \cdot x(\tau) d\tau.$$

Относительно ядра $K(t,\tau)$ будем предполагать, что

$$(\int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(t,\tau)|^q dt d\tau)^{\frac{1}{q}} < +\infty.$$

Согласно неравенству Гёльдера интеграл

$$|\int\limits_a^b K(t,\tau) \cdot x(\tau) d\tau| \le (\int\limits_a^b |K(t,\tau)|^q d\tau)^{\frac{1}{q}} \cdot (\int\limits_a^b |x(\tau)|^p d\tau)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \| x \|_{L_p(a,b)} \cdot (\int\limits_a^b |K(t,\tau)|^q d\tau)^{\frac{1}{q}}.$$

$$\| y \|^q_{L_q(a,b)} = \int\limits_a^b |\int\limits_a^b K(t,\tau) \cdot x(\tau) d\tau|^q dt \le \| x \|^q_{L_p(a,b)} \cdot \int\limits_a^b dt \int\limits_a^b |K(t,\tau)|^q d\tau.$$

$$\| y \|_{L_q(a,b)} = \| Kx \|_{L_q(a,b)} \le (\int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(t,\tau)|^q d\tau dt)^{\frac{1}{q}} \cdot \| x \|_{L_p(a,b)}$$

и $\| K \| \le (\int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(t,\tau)|^q d\tau dt)^{\frac{1}{q}}$.

Можно показать, что $\| K \| = (\int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(t,\tau)|^q d\tau dt)^{\frac{1}{q}}$

Пространство линейных операторов

2.2 Теорема Банаха-Штейнгауза

Рассмотрим последовательность линейных операторов $A_n \subset \mathcal{L}(X,Y)$. Пусть для каждого $x \subset X$ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n x = y(x) \subset Y$. Тем самым определен аддитивный и непрерывный оператор A, $Ax = y(x)$. Пример предыдущего параграфа показывает, что этот оператор может и не являться сильным пределом последовательности операторов A_n: хотя $A_n x \to Ex$, но $\lim A_n \ne E$.

Вопрос: при каких условия существует **линейный** оператор A и можно ли оценить его норму?

Мы начнем с простой леммы.

Лемма (Лемма I)**.** *Пусть оператор $A_n \subset \mathcal{L}(X,Y)$ и известно, что для всех элементов некоторого шара $S_r(x_0)$ нормы $\|A_n x\|_Y$ ограничены: $\|A_n x\| \leq c$. Тогда существует постоянная M, такая что норма оператора A_n ограничена числом M: $\|A_n\| \leq M$.*

Доказательство. Возьмем любой элемент $x \subset X$ и образуем элемент $x_0 + \frac{x}{\|x\|} r \subset S_r(x_0)$. Тогда:

$$\|A_n(x_0 + \tfrac{r}{\|x\|}x)\| \leq c, \text{ т.е.}$$
$$c \geq \|A_n(x_0 + \tfrac{r}{\|x\|}x)\|,$$
$$c \geq \|\tfrac{r}{\|x\|}A_n x + A_n x_0\| \geq \|A_n x\|\tfrac{r}{\|x\|} - \|A_n x_0\| \geq \tfrac{r}{\|x\|}\|A_n x_0\| - c,$$
$$2c \geq \tfrac{r}{\|x\|}\|A_n x\|,\ \tfrac{2c}{r}\|x\| \geq \|A_n x\|,\ \|A_n x\| \leq \tfrac{2c}{r}\|x\|$$

Достаточно положить $M = \frac{2c}{r}$: $\|A_n x\| \leq M\|x\|$ для всех $x \subset X$, следовательно норма оператора $\|A\| \leq M$. □

Следующая лемма верна для полных нормированных пространств X, т.е. для банаховых пространств.

Лемма (Лемма II)**.** *Пусть X - пространство Банаха. Пусть $\{A_n\}$ последовательность операторов множества $\mathcal{L}(X,Y)$. Тогда если нормы $\|A_n x\|$ элементов $A_n x$ ограничены для каждого $x \subset X$, то нормы операторов A_n $\|A_n\|$ ограничены в совокупности.*

Доказательство. (от противного)

Предположим, что в X существует замкнутый шар $\bar{S}_0$, для **всех** элементов которого $\|A_n x\| < c$ при всех n, но последовательность норм $\|A_n\|$ неограниченна. Это предположение неверно, так как согласно Лемме I норма каждого оператора $\|A_n\| \leq M$.

Остаётся предположить, что существует шар $\bar{S}_0$, в котором значения $\|A_n x\|$ неограниченны, т.е. найдется номер n_1 и найдется элемент $x_1 \subset \bar{S}_0$, такие что $\|A_{n1}(x_1)\| > 1$. Так как оператор A_{n1} (как и все операторы A_n) непрерывен, то существует шар $\bar{S}_1 \subset \bar{S}_0$, в котором $\|A_{n1}(x)\| > 1$.

Далее: значения $\|A_n x\|$ в шаре $\bar{S}_1$ не могут быть ограничены при всех n. Тогда должен существовать номер n_2 и элемент $x_2 \subset \bar{S}_2$, такие что $\|A_{n2}(x_2)\| > 2$, (а по непрерывности A_{n2}) и шар S_2, в котором $\|A_{n2}(x)\| > 2$ для всех $x \subset \bar{S}_2$.

Продолжая этот процесс мы получим последовательность вложенных шаров $\bar{S}_0 \supset \bar{S}_1 \supset \bar{S}_2 \ldots \supset \bar{S}_n \supset \ldots$ и последовательность элементов $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, таких что $\|A_{nk} x_k\| > k$. Ясно, что радиусы r_k шаров $\bar{S}_k$ можно выбирать так, что $r_k \to 0$.

Так как пространство X полное, то по теореме о вложенных шарах существует элемент $x^k \subset X$ принадлежащий всем шарам S_k. Тогда $\|A_n x_n\| \to \infty$ при $k \to \infty$, что противоречит условиям леммы. □

Замечание. Если $\{\|A_n x\|\}$ не ограничена, то существует элемент $x^n \subset X$, на котором $\sup\limits_n \|A_n x^n\| = \infty$ — принцип фиксации особенности в полном банаховом пространстве X.

Теперь можно указать условия, при которых из сходимости последовательности элементов $\{A_n x\}$ при любом $x \subset X$ следует поточечная сходимость последовательности операторов A_n к **линейному** оператору A: $\lim\limits_{n\to\infty} A_n x = y(x) \subset Y$, $Ax = y(x)$.

Теорема (Банаха-Штейнгауза)**.** . *Пусть $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X,Y)$, где X и Y - пространства Банаха. Для того, чтобы последовательность операторов $\{A_n\}$ сходилась поточечно к линейному оператору на всем пространстве X, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены два условия:*

1. *Нормы $\|A_n\|$ ограничены в совокупности: $\|A_n\| \leq M$.*

2. *Последовательность элементов $A_n x$ сходится в себе на множестве D плотном в X.*

Доказательство. **Необходимость.** Пусть $A_n x \to Ax$. Тогда $\|A_n x\| \to \|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$, и последовательность норм элементов $\|A_n x\|$ ограничена при каждом $x \subset X$. По Лемме II нормы $\|A_n\|$ ограничены в совокупности — условие 1 выполнено.

Так как последовательность $A_n x$ сходится на всем пространстве X (и сходится в себе на всем X), то она сходится в себе на любом множестве пространства X — условие 2 выполнено.

Достаточность. Покажем, что последовательность элементов $A_n x$ сходится в себе на всем пространстве X.

По любому заданному $\varepsilon > 0$ для любого элемента $x \subset X$ найдется элемент $x' \subset D$ такой, что $\|x - x'\| < \varepsilon$. Оценим $\|A_n x - A_m x\|$ при достаточно больших значениях m и n:

$$\|A_n x - A_m x\| = \|A_n x' - A_m x' + A_n x - A_n x' + A_m x' - A_m x\|$$

Значения $\|A_n x' - A_m x'\| < \varepsilon$ при достаточно больших m и n.

Значения $\|A_n x - A_n x'\| < M\varepsilon$, $\|A_m x' - A_m x\| < M\varepsilon$.

Итак, $\|A_n x - A_m x\| < (2M+1)\varepsilon$ при достаточно больших m и n, последовательность $A_n x$ сходится в себе на всем X, а так как пространство Y полное, то существует $\lim\limits_{n\to\inf} A_n x = y(x) \subset Y$ и тем самым определен оператор: $Ax = y(x)$. Для оценки нормы этого оператора из неравенства $\|A_n x\| < M\|x\|$ получим $\|A\| \geq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \|A_n\|$ ($\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = a$, если для любого $\varepsilon > 0$ в интервале $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ содержится бесконечное число элементов последовательности $\{a_n\}$, а справа от этого интервала существует не более чем конечное число членов последовательности $\{a_n\}$).

Напомним, что последовательность операторов A_n может и не иметь сильного предела. □

Замечание. Формулировка теоремы не предполагает знания оператора A. Если же оператор предъявлен, то вместо условия 2 можно проверить сходимость $A_n x \to Ax$ на линейном множестве D плотном в X. В этом случае предположение, что Y банахово — излишне.

2.3 Теорема Банаха

Основной целью нашего курса является изучение условий разрешимости уравнения $Ax = y$, т. е. условие существования линейного оператора $B \in L(Y, X)$: $By = A^{-1}x$. Если такой оператор существует, то задача решения уравнения $Ax = y$ поставлена корректно по Адамару:

1. решение существует для любого $y \subset Y$,

2. решение единственно,

3. вариации Δx решения непрерывно зависят от вариаций Δy элемента y: $\|\Delta x\|_X \leq \|B\|_{Y\to X}\|\Delta y\|_X$.

Оператор A предполагается линейным, а оператор B определен на всем банаховом пространстве Y. В этом случаем операторы A и B замкнуты. Действительно:

1. Из условий $\{x_n \to x^*; Ax_n \to y^*\}$ следует, что $Ax_n \to Ax^*$ и $y^* = Ax^*$, т.е. оператор A замкнут.

2. Пусть выполнены условия: $\{y_n \to y^*; By_n \to x^*\}$. Обозначим $x_n = A^{-1}y_n$ (оператор A^{-1} определен на всём пространстве Y). Тогда $x_n \to x^*$ и $y_n = Ax_n \to Ax^*$. Так как оператор A замкнут, то из условий $\{x_n \to x^*; Ax_n \to y^*\}$ следует, что $y^* = Ax^*$, т.е. $x^* = By^*$. Тогда оператор B замкнут.

Лемма. *Пусть оператор B задан на всем банаховом пространстве Y. Тогда в Y существует плотное множество элементов M, таких, что $\|By\|_X \leq C_0\|y\|_Y$, где значение постоянной C_0 не зависит от выбора элементов $y \subset M$.*

Доказательство. Построим множество M.

1. Для любого выбранного элемента $y \subset Y$ можно найти такое натуральное число k, что $\|By\| \leq k\|y\|$.

   Множество таких элементов y обозначим Y_k. Множество Y_k "однородно": если $y \subset Y_k$, то элементы $\lambda y \subset Y_k$ для всех чисел λ. Ясно, что при $m \leq k$ $Y_m \subset Y_k$ и что

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$$

   Так как Y полное пространство, то среди множеств Y_k найдется хотя бы одно множество, которое не является нигде не плотным в пространстве Y (см. теорему Бэра, глава I). Обозначим его Y_n.

2. В пространстве Y существует хотя бы один шар (например S), в котором любой шар (например $\overline{S_{r_0}}(u_0)$) содержит элементы множества Y_n.

   Таким образом, множество Y_n плотно в $\overline{S_{r_0}}(u_0) \subset S$. Можно считать, что элемент $u_0 \subset Y_n$. Зафиксируем элемент u_0 и число r_0.

3. Пусть y любой элемент Y, норма которого равна r_0 : $\|y\| = r_0$. Построим элемент $z_0 = u_0 + y$, принадлежащий границе шара $S_{r_0}(u_0)$. Далее построим последовательность элементов $u_j \subset S_{r_0}(u_0)$ таких, что

$$u_j \to z_0 \text{ и } u_j \subset Y_n.$$

   Обозначим $y_j = u_j - u_0$. Ясно, что $y_j \to y$, $y_j \subset S_{r_0}(u_j)$ (последовательность элементов y_j не обязательно принадлежит множеству Y_n!)

□

1. Прямая задача теплопроводности.

   Пример. Рассматривается бесконечная пластина толщиной π: $0 \leq \xi \leq \pi$, $-\infty < y < +\infty$. Распределение температуры $x(\xi, y, t)$ в точках этой пластины зависит только от координаты ξ и времени t: $x(\xi, y, t) = x(\xi, t)$.На граничных плоскостях при $\xi = 0$ и при $\xi = \pi$ температура равна нулю при всех $t > 0$:

$$x(0,t) = 0,\ x(\pi,t) = 0 \tag{2.1}$$

   Внутри пластины источников тепла нет. Функция $x(\xi, t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \text{ при } \xi \in (0,\pi),\ t > 0 \tag{2.2}$$

В момент времени $t = 0$ распределение температуры известно:

$$x(\xi, 0) = x(\xi) \tag{2.3}$$

Прямая задача теплопроводности состоит в нахождении функции $x(\xi, t)$ при всех $t > 0$, т.е. в решении уравнения (2.2) при граничных условиях (2.1) и при начальном условии (2.3).

«Обобщенное» решение этой простейшей задачи при условии $x(\xi) \in L_2(0,\pi)$ получаем методом Фурье:

$$x(\xi, t) = \sum_{k=1}^{n} x_k e^{-k^2 t} X_k(\xi),$$

$$\text{где } X_k(\xi) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\sin(k\xi), \text{ а числа } x_k = (x, X_k) = \int_0^{\pi} x(\xi) X_k(\xi) d\xi.$$

Ясно, что $\|x(\cdot,t)\|^2_{L_2(0,\pi)} \le \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2 = \|x\|^2$, т.е. функция $x(\xi,t)$ как функция переменной ξ принадлежит пространству $L_2(0,\pi)$.

$$x(\xi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2 t} X_k(\xi) \int_0^{\pi} x(\eta) X_k(\eta) d\eta = \int_0^{\pi} K(\xi, \eta, t) x(\eta) d\eta.$$

В частности $x(\xi, T) = \int\limits_0^{\pi} K(\xi,\eta,T)x(\eta)d\eta = Ax$. Оператор A линейный интегральный оператор из пространства $L_2(0,\pi)$ в пространство $L_2(0,\pi)$. Норма этого оператора не превосходит 1, оператор A замкнут.

2. Обратная задача теплопроводности.

   В момент времени $t = T$ измеряется распределение температуры:

   $$x(\xi, T) = y(\xi)$$

   Требуется «восстановить» неизвестное начальное распределение $x(\xi)$, т.е. требуется решить уравнение $Ax = y$, где $A \in \mathscr{L}(X,Y)$, $X = L_2(0,\pi)$, $Y = L_2(0,\pi)$ – банаховы пространства.

   Будет ли эта задача корректно поставлена по Адамару?

   Довольно просто доказать, что если решение задачи существует, то это решение единственно. Для того, чтобы задача была поставлена корректно по Адамару, остается доказать (согласно теореме Банаха), что задача разрешима при любой функции

$y \in Y$, т.е. доказать, что обратный оператор $B = A^{-1}$ заданы на всем пространстве $Y = L_2(0, \pi)$.

Это утверждение неверно.

Действительно, рассмотрим функцию

$$y(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} X_k(\xi),\ y \in L_2(0,\pi),\ \|y\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6},\ \|y\| = \frac{1}{\sqrt{6}}\pi.$$

Предположим, что решение $x(\xi)$ такой обратной задачи существует. Тогда коэффициенты Фурье x_k этого решения должны быть равными

$$x_k = e^{k^2 T}\tfrac{1}{k} \ \text{ и } \ x(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k X_k(\xi)$$

Но ряд $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} e^{2k^2 T}\frac{1}{k^2}$ при $T > 0$ расходится, следовательно функция x не принадлежит пространству $L_2(0, \pi)$. Наше предположение неверно.

Ясно, что отсутствует и непрерывная зависимость решения от вариации правых частей. Действительно, пусть x^* есть точное решение уравнения $Ax^* = y^*$. Рассмотрим вариацию правой части Δy:

$$\Delta y = \varepsilon \int\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} X_k(\xi),\quad \|\Delta y\|^2 = \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < \varepsilon^2 \frac{\pi^2}{6} \ \text{ и } \ \|\Delta y\| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{6}}\pi.$$

Для соответствующей вариации решения Δx получаем

$$\|\Delta x\|^2_{L_2(0,\pi)} = \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} e^{2k^2 T},$$

и величина $\|\Delta x\|$ сколь угодно велика при $n \longrightarrow \infty$.

2.4 Вполне непрерывные операторы

Определение. Линейный оператор $A \subset Z(X, Y)$ называется **вполне непрерывным**, если любое ограниченное в X множество он отображает в множество, компактное в Y.

Напомню, что в компактном множестве в любой последовательности $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ содержится фундаментальная последовательность. Если же пространство Y полно, то согласно определению эта фундаментальная последовательность имеет предел в Y.

Множество всех вполне непрерывных операторов обозначим $\sigma(X, Y)$.

Теорема. *Множество $\sigma(X, Y)$ является подпространством пространства $Z(X, Y)$.*

Доказательство. Состроит в доказательстве двух пунктов (согласно определению подпространства).

I. Если $A_1, A_2 \subset \sigma(X,Y)$, то их линейная комбинация $A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \in \sigma(X,Y)$. Рассмотрим множество AS_1, где S_1 — единичная сфера в пространстве X. Покажем, что множество AS_1 компактно в Y. Возьмем любую последовательность элементов $x_n \subset S_1$, $\|x_n\| = 1$. Обозначим элементы $Ax_n = y_n$, $y_n = \lambda_1 A_1 x_n + \lambda_2 A_2 x_n$.

Так как множество $A_1 S_1$ компактно в Y, то из последовательности $\{A_2 x_{n_k}\}$ можно выделить фундаментальную последовательность $\{A_2 x'_i\}$. Ясно, что последовательность $\{(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)x'_i\}$ является фундаментальной последовательностью в Y.

II. Покажем, что множество $\sigma(X,Y)$ замкнуто. Так как $\|A_n - A\| \to 0$ при $n \to \infty$, то для выбранного $\varepsilon > 0$ рассмотрим операторы A_n такие что $\|A_n - A\| \le \varepsilon$ и при $x \subset S_1$ $\|A_n x - Ax\| \le \varepsilon$. Зафиксируем n. Рассмотрим множество элементов $A_n S_1$. Так как множество $A_n S_1$ компактно в Y, то в множестве $A_n S_1$ существует конечная ε-сеть $\{y_k\}$ $y_k = A_n x_k$, $x_k \subset S_1$. Тогда $\|y_k - Ax\| \le \|y_k - A_n x\| + \|A_n x - Ax\| \le 2\varepsilon$. Следовательно, элементы y_k образуют 2ε-сеть в множестве Y и, согласно теореме Хаусдорфа, множество AS_1 компактно. $\square$

Контр-пример. Тождественный оператор E в сепарабельном гильбертовом пространстве не является вполне непрерывным оператором.

Действительно, пусть $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n, ..., \|\psi_n\| = 1$ — ортонормальный базис пространства. Множество S_1 ограничено, но множество $ES_1 (= S_1)$ не является компактным: из последовательности $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ нельзя выбрать фундаментальную последовательность, так как $\|\psi_n - \psi_m\|^2 = (\psi_n - \psi_m, \psi_n - \psi_m) = (\psi_n, \psi_n) + (\psi_m, \psi_m) = 2$ при $n \ne m$

Пример. Интегральный оператор $\widetilde{K}$ из $L_2(a,b)$ в $L_2(a,b)$.

$$y = \widetilde{K}x,\ y(t) = \int_a^b \widetilde{K}(t,\tau)x(\tau)d\tau,$$

где ядро $\widetilde{K}(t,\tau)$ непрерывно в области $D = [a,b] \times [a,b]$, $|\widetilde{K}(t,\tau)| \le M$.

В этом случае функции $y(t)$ непрерывны:

$$|y(t_2) - y(t_1)|^2 \le \int_a^b |\widetilde{K}(t_2,\tau) - \widetilde{K}(t_1,\tau)|^2 d\tau \cdot \int_a^b |x(\tau)|^2 d\tau \le \varepsilon^2 (b-a) \|x\|^2{}_{L_2(a,b)},$$

Величина $|y(t_2) - y(t_1)| \to 0$ при $|t_2 - t_1| \to 0$ в силу непрерывности функции $\widetilde{K}(t,\tau)$ как функции двух переменных. Таким образом, множество функций $\widetilde{K}S_1$ равностепенно непрерывно.

Ясно, что функции множества $\widetilde{K}S_1$ ограничены в совокупности: $|y(t)|^2 \le M^2(b-a)$.

По теореме Арцела-Асколи множество $\widetilde{K}S_1$ компактно в $C[a,b]$: из любой последовательности элементов $y_n = \widetilde{K}x_n$ можно выделить фундаментальную последовательность в $C[a,b]$, которая является фундаментальной последовательностью и в пространстве $L_2(a,b)$).

Пример. Интегральный оператор K из $L_2(a,b)$ в $L_2(a,b)$.

$$y = Kx,\ y(t) = \int_a^b K(t,\tau)x(\tau)d\tau,$$

где $K(t,\tau) \subset L_2(D)$ (интегральный оператор Гильберта-Шмидта).

По теореме Лебега для функции $K(t,\tau)$ существует последовательность непрерывных в D функций $\widetilde{K}_n(t,\tau)$, таких что

$$\int_a^b |K(t,\tau) - K_n(t,\tau)|^2 d\tau dt \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

$$\text{т.е. } \|K - \widetilde{K}_n\| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Так как интегральные операторы $\widetilde{K}_n$ вполне непрерывны, то и интегральный оператор Гильберта-Шмидта вполне непрерывен.

Теорема. *Пусть оператор $A \subset \sigma(H,H)$, где H бесконечномерное сепарабельное пространство Гильберта. Задача решения уравнения $Ax = y$ поставлена некорректно по Адамару.*

Доказательство. В этом случае легко доказать, что нарушено условие непрерывной зависимости решения при вариации первой части. Действительно, так как множество AS_1 компактно в H, то из последовательности $\{A\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность элементов $\{A\psi_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$, а так как пространство Гильберта полное, то эта фундаментальная последовательность сходится к элементу $y_0 \subset H$: $y_0 = \lim\limits_{k\to\infty} A\psi_{n_k}$.
Рассмотрим вариацию правой части $\Delta y_k = A\psi_{n_k} - y_0 \to \infty$ при $k \to \infty$. Соответствующая вариация решения $\Delta x_k = \psi_{n_k}$ и $\|\Delta x_k\| = 1$, т.е. вариация решения Δx_k не стремится к нулю при $\|\Delta y_k\| \to \infty$.

□