1. Показать, что $\|w^*\|^2$ монотонно убывает с ростом λ.

$$\frac{d}{dx}\|w^*\|^2 = \frac{d}{d\lambda}(w^*)^T w^* = \frac{d}{d\lambda}(((\lambda I + X^T X)^{-1} X^T y)^T (\lambda I + X^T X)^{-1} X^T y = y^T X \frac{d}{d\lambda}((\lambda I + X^T X)^{-1})^2 X^T y) = y^T X \cdot 2(\lambda I + X^T X)^{-1} \frac{d}{d\lambda}(\lambda I + X^T X)^{-1} X^T y = 2y^T X(\lambda I + X^T X)^{-1}(-(\lambda I + X^T X)^{-1} \frac{d(\lambda I + X^T X)}{d\lambda}(\lambda I + X^T X)^{-1}) \cdot X^T y = -2 \cdot y^T X((\lambda I + X^T X)^{-1})^3 X^T y,$$

где $(\lambda I + X^T X)$ - положительно определена, откуда следует, что производная меньше нуля и $\|w^*\|^2$ убывает с ростом λ.

2. Hat-matrix: $w^* = (\lambda I + X^T X)^{-1} X^T y$

$E_{LOO}(\lambda) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - x_i^T w_{\neg i}^*)^2$

Можно представить $w_{\neg i}^*$ как:

$$w_{\neg i}^* = (X^T X + \lambda I - x_i x_i^T)^{-1}(X^T y - x_i y_i) = \left((X^T X + \lambda I)^{-1} + \frac{(X^T X + \lambda I)^{-1} x_i x_i^T (X^T X + \lambda I)^{-1}}{1 + x_i^T (X^T X + \lambda I)^{-1} x_i}\right) \cdot (X^T y - x_i y_i) = (A^{-1} + \frac{A^{-1} x_i x_i^T A^{-1}}{1 - x_i^T A^{-1} x_i})(X^T y - x_i y_i) = A^{-1} X^T y - A^{-1} x_i y_i + \frac{A^{-1} x_i x_i^T A^{-1}}{1 - x_i^T A^{-1} x_i} X^T y - \frac{A^{-1} x_i x_i^T A^{-1}}{1 - x_i^T A^{-1} x_i} x_i y_i = w^* + \frac{A^{-1} x_i x_i^T w^* - A^{-1} x_i y_i (1 - x_i^T A^{-1} x_i + x_i x_i^T A^{-1})}{1 - x_i^T A^{-1} x_i} = w^* + \frac{A^{-1} x_i x_i^T w^* - A^{-1} x_i y_i}{1 - x_i^T A^{-1} x_i}$$

$w_{\neg i}^* = w^* + \frac{A^{-1} x_i x_i^T w^* - A^{-1} x_i y_i}{1 - H_{ii}}$

$$E_{LOO}(\lambda) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i^T w_{\neg i}^* - y_i)^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^T w^* + \frac{x_i^T A^{-1} x_i x_i^T w^* - x_i^T A^{-1} x_i y_i - y_i + y_i x_i^T A^{-1} x_i}{1 - x_i^T A^{-1} x_i}\right)^2 =$$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^T w^* + \frac{x_i^T A^{-1} x_i x_i^T A^{-1} X^T y - y_i}{1 - x_i^T A^{-1} x_i}\right)^2 =$$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{x_i^T A^{-1} X^T y - x_i^T A^{-1} x^T y x_i^T A^{-1} x_i + x_i^T A^{-1} X^T y X^T y x_i^T A^{-1} x_i - y_i}{1 - x_i^T A^{-1} x_i}\right)^2 =$$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{x_i w^* - y_i}{1 - H_{ii}}\right)^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{(y_i - x_i^T w^*)^2}{(1 - H_{ii})^2}$$