Теоретические задачи по курсу Вычислительной Математики

Фомин Артем, группа 799

September 28, 2020

1

Вместо этой задачи первое семинарское задание.

2

Матрица $A = I + \alpha uu^*$ унитарна $\iff$

$$AA^* = I \iff (I + \alpha uu^*)(I + \alpha uu^*)^* = I \iff$$

$$\iff (I + \alpha uu^*)(I + \overline{\alpha} uu^*) = I \iff I + \alpha uu^* + \overline{\alpha} uu^* + \alpha\overline{\alpha}(uu^*)(uu^*) = I \iff$$

$$\iff \alpha uu^* + \overline{\alpha} uu^* + \alpha\overline{\alpha} u(u^*u)u^* = 0^{n\times n} \iff (u^*u = \|u\|_2^2 = 1) uu^*(\alpha + \overline{\alpha} + \alpha\overline{\alpha}) = 0^{n\times n} \iff$$

$$\iff (uu^* \neq 0) \quad 1 + \alpha + \overline{\alpha} + \alpha\overline{\alpha} = 1 \iff (1+\alpha)(1+\overline{\alpha}) = 1 \iff$$

$$\iff (1+\alpha)\overline{(1+\alpha)} = 1 \iff |1+\alpha| = 1$$

Итого, подойдут α с окружности $|1+\alpha| = 1$.

3

По определению числа обусловленности и свойству субмультипликативности матричной нормы

$$cond(A)cond(B) = (\|A\|\|A^{-1}\|)(\|B\|\|B^{-1}\|) = (\|A\|\|B\|)(\|B^{-1}\|\|A^{-1}\|) \geq \|AB\| \cdot \|B^{-1}A^{-1}\| =$$
$$= \|AB\|\|(AB)^{-1}\| = cond(AB)$$

4

Будем выражать число обусловленности через матричную 2-норму:

$$cond(A) = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2.$$

Также мы знаем формулу 2-нормы через сингулярные числа:

$$\|A\|_2 = \max_k \sigma_k, \text{ где } \sigma_k = \sqrt{\lambda_k(A^*A)}.$$

Так как матрица B невырождена, то существует B^{-1}. То же верно и для A. Матрица сингулярных чисел у B^{-1} обратна матрице сингулярных числе матрицы B, а значит:

$$\|A^{-1}\|_2 = \min_k \frac{1}{\sigma_k}.$$

Так как $A = B^T B$, а матрица B вещественна, то $\sigma_k = \sqrt{\lambda_k(A^*A)} = \sqrt{\lambda_k(A^2)}$. К тому же матрица A нормальна: $A^*A = (B^TB)^TB^TB = B^TBB^TB = B^TB(B^TB)^T = AA^*$. Это означает, что у матрицы A есть разложение через ортонормированный базис собственных векторов:

$$A = U\Lambda U^*, \text{ где } \Lambda = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_2).$$

И квадрат такой матрицы выражается как:

$$A^2 = U\Lambda^2 U^*.$$

Подставляя в формулу для 2-нормы:

$$\|A\|_2 = \max_k \sqrt{\lambda_k(A^2)} = \max_k \sqrt{\lambda_k^2(A)} = \max_k |\lambda_k(A)|.$$

Так как B вещественна, и $B * B = B^T B$, собственные числа матрицы A — квадраты сингулярных чисел матрицы B. Значит, они положительны, и модуль в формуле выше можно опустить. Тогда:

$$\|A\|_2 = \max_k \lambda_k(A) = \max_k \sigma_k(B)^2 = (\max_k \sigma_k(B))^2 = \|B\|_2^2,$$

$$\|A^{-1}\|_2 = \min_k \frac{1}{\lambda_k(A)} = \min_k \frac{1}{\sigma_k(B)^2} = (\min_k \frac{1}{\sigma_k(B)})^2 = \|B^{-1}\|_2^2.$$

Возвращаясь к числу обусловленности:

$$cond(A) = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2 = \|B\|_2^2\|B^{-1}\|_2^2 = cond(B)^2.$$