Теоретическая задача 6

Фомин Артем, группа 799

1

2

3

4

5

Докажем, что после первого прямого шага метода Гаусса матрица будет иметь строчное диагональное преобладание.

На первом шаге элементы матрицы заменяются на a'_{kj}, вычисляемые по формуле

$$a'_{kj} = a_{kj} - \frac{a_{k1}}{a_{11}} a_{1j}$$

Выберем любую строку k. Для нее

$$\sum_{j \neq k} |a'_{kj}| = \sum_{j \geq 2, j \neq k} |a'_{kj}| = \sum_{j \geq 2, j \neq k} |a_{kj} - \frac{a_{k1}}{a_{11}} a_{1j}| \leq \sum_{j \geq 2, j \neq k} (|a_{kj}| + |\frac{a_{k1}}{a_{11}} a_{1j}|) = \sum_{j \geq 2, j \neq k} |a_{kj}| + |\frac{a_{k1}}{a_{11}}| \sum_{j \geq 2, j \neq k} |a_{1j}| <$$

Так как A имеет строчное диагональное преобладание, то

$$< (|a_{kk}| - |a_{k1}|) + |\frac{a_{k1}}{a_{11}}|(|a_{11}| - |a_{1k}|) = |a_{kk}| - |\frac{a_{k1}}{a_{11}} a_{1k}| \leq |a_{kk} - \frac{a_{k1}}{a_{11}} a_{1k}| = |a'_{kk}|$$

Что и требовалось для строчного преобладания.

Пусть D — матрица с той же диагональю, что и U, и остальными нулями. Возьмем U' такую, что $DU' = U$. Тогда на диагонали в U' стоят единицы, и, так как она обладает строчным диагональным преобладанием, все остальные числа в ней не больше 1. Можно найти треугольную такую матрицу U', а для треугольных с единичками на диагонали мы знаем формулу обращения: $(U')^{-1} = (I + T)^{-1} = I - T$. Тогда все числа в $(U')^{-1}$ по модулю ≤ 1, и

$$\max_{i,j} |u_{ij}| = \max_i |d_{ii}| = \max_i |\sum_j a_{ij}((U')^{-1})_{ji}| \leq \max_i \sum_j |a_{ij}| < 2 \max_i |a_{ii}| = 2 \max_{i,j} |a_{ij}|.$$

Отсюда выражается коэффициент роста элементов:

$$\rho = \frac{\max_{i,j} |u_{i,j}|}{\max_{i,j} |a_{i,j}|} < 2.$$

Остальные шаги по индукции: утверждение выше можно считать за базу, а до перехода оно доделывается заменой единичек в индексах на номер текущего шага.

6

В методе Якоби матрица A раскладывается на три, которые легко обращаются. Конкретнее, $A = L + D + U$, где

- L — строго нижнетреугольная
- D — диагональная
- U — строго верхнетреугольная

Шаг метода якоби следующий: $x^{k+1} = -D^{-1}(L+U)x^k + D^{-1}b$.

Матрица A трехдиагональная, причем на главной диагонали стоят 4-ки, а на остальных — числа не больше 1. Такая матрица, очевидно, обладает строчным диагональным преобладанием. Чтобы понять, с какой скоростью сходится метод, достаточно узнать норму $\|D^{-1}(L+U)\|_\infty$. Обратная к матрице D — матрица с $\frac{1}{4}$ на диагонали, т.е. $\frac{1}{4}I$. Бесконечная норма — наибольшая сумма чисел в строке. $(L+U)$ будет матрицей с двумя соседними-с-главной диагоналями и остальными нулями. Числа в этих диагоналях не превосходят 1, следовательно, $\|(L+U)\|_\infty \leq 2$. Отсюда

$$\|D^{-1}(L+U)\|_\infty = \|\frac{1}{4}I(L+U)\|_\infty = \frac{1}{4}\|(L+U)\|_\infty \leq \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$$

Начинаем мы с точки x_0, т.ч. $\|x - x_0\|_\infty$. Каждый раз уменьшаем эту норму в два раза. То есть за n шагов мы можем гарантировать ошибку в $\frac{10}{2^n}$. Чтобы гарантированно получить точность 10^{-6}, понадобится $\lceil \log_2(10/10^{-6}) \rceil = \lceil 7\log_2(10) \rceil \approx \lceil 23.25 \rceil = 24$ шагов.

7

Пусть дана система линейных уравнений с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Существуют критерии сходимости методов Якоби и Гаусса-Зейделя(см. "Практические занятия по вычислительной математике", Аристова, Завьялова, Лобанов, раздел II, теоремы 6 и 7). Критерий сходимости метода Якоби: для сходимости метода Якоби необходимо и достаточно, чтобы корни уравнения

$$\begin{vmatrix} \lambda a & b \\ c & \lambda d \end{vmatrix}$$

по модулю не превосходили единицы. Для матрицы размером 2 это уравнения можно решить в явном виде:

$$ad\lambda^2 - bc = 0 \iff \lambda = \pm\sqrt{\frac{bc}{ad}}$$

И корни этого уравнения не превосходят по модулю единицы $\iff |\sqrt{\frac{bc}{ad}}| \leq 1$.

Схожий критерий есть и для метода Зейделя: для сходимости метода Зейделя необходимо и достаточно, чтобы корни уравнения

$$\begin{vmatrix} \lambda a & b \\ \lambda c & \lambda d \end{vmatrix}$$

по модулю не превосходили единицы. Снова явно решаем уравнение:

$$ad\lambda^2 - bc\lambda = 0 \iff \lambda(ad\lambda - bc) = 0 \iff \lambda = 0 \quad \text{or} \quad \lambda = \frac{bc}{ad}$$

Корень $\lambda = 0$ всегда не превосходит единицы, второй не превосходит единицы $\iff |\frac{bc}{ad}| \leq 1$.

Остается заметить, что получилось одно и то же:

$$|\sqrt{\frac{bc}{ad}}| \leq 1 \iff |\frac{bc}{ad}| \leq 1.$$

8

Воспользуемся снова критериями сходимости(см. "Практические занятия по вычислительной математике", Аристова, Завьялова, Лобанов, раздел II, теоремы 6 и 7). Теперь для матрицы размера 3:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$$

Для сходимости метода Якоби необходимо и достаточно, чтобы по модулю не превосходили единицы корни уравнения

$$J(A) = \begin{vmatrix} a\lambda & b & c \\ d & e\lambda & f \\ g & h & k\lambda \end{vmatrix} = aek\lambda^3 - (ahf + bkd + ceg)\lambda + cdh + bfg$$

Для сходимости метода Зейделя необходимо и достаточно, чтобы по модулю не превосходили единицы корни уравнения

$$Z(A) = \begin{vmatrix} a\lambda & b & c \\ d\lambda & e\lambda & f \\ g\lambda & h\lambda & k\lambda \end{vmatrix} = aek\lambda^3 - (ahf + bkd + ceg)\lambda^2 + cdh\lambda^2 + bfg\lambda$$

Как пример системы, для которой метод Якоби сходится, а Зейделя расходится, возьмем

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Для это системы

$$J(A) = 2\lambda + 1 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$$

$$Z(A) = \lambda^2 + 2\lambda \Rightarrow \lambda = 0 \quad \text{or} \quad \lambda = -2$$

И в первом случае единственный корень меньше единицы по модулю, и значит, метод Якоби сходится, а во втором случае есть корень $\lambda = -2$, который по модулю больше единицы, и значит, метод Зейделя расходится.

9

Если приближаемая $f(x)$ имеет производные до $(s+1)$-го порядка, а $P_s(x)$ — интерполяционный многочлен степени s, построенный по точкам $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, то в точке x погрешность интерполяции $R_s(x)$ можно выразить как

$$R_s(x) = f(x) - P_s(x) = \frac{f^{(s+1)}(\xi)}{(s+1)!}(x-x_0)\ldots(x-x_n), \quad \text{для некоторого} \quad \xi \in [x_0, x_n]$$

и оценить как

$$\|R_s(x)\| \leq \frac{1}{(s+1)!} \max_{\xi \in [x_0, x_n]} \|f^{(s+1)}(\xi)\| \cdot \|(x-x_0)\ldots(x-x_n)\|.$$

Теперь о Чебышевских сетках. На отрезке $[-1;1]$ узлы Чебышева можно вычислить явно формулой

$$t_{nj} = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n}j\right), \quad j = 0, \ldots n-1.$$

К произвольному отрезку $[a;b]$ можно перейти афинным преобразованием

$$t_{nj} = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(b-a)\cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n}j\right), \quad j = 0, \ldots n-1.$$

Мы приближаем функцию на $[0,1]$ многочленом степени $n = 3$, тогда наши узлы(которых на 1 больше) вычисляются по формуле:

$$t_{nj} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}j\right), \quad j = 0, \ldots n-1.$$

Численно, наши узлы $x_0 \approx 0.962, x_1 \approx 0.691, x_2 \approx 0.31, x_3 \approx 0.038$. Непрерывной нормой называют норму пространства непрерывных функций $C[a;b]$

$$\|x(t)\|_{C[a;b]} = \max_{t \in [a;b]} |x(t)|.$$

Тогда для функции e^x ошибка интерполяции на отрезке $[0;1]$ оценивается как

$$\|R(x)\| \leq \frac{1}{4!} \max_{\xi \in [0;1]} \|(e^{\xi})^{(3)}\| \cdot \|\omega(x)\| < 0.12\|\omega(x)\|,$$

где $\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$. В непрерывной норме на $[0;1]$ оценка будет

$$\|R(x)\|_{C[0;1]} < \frac{e}{4!}\|\omega(x)\|_{C[0;1]} = 0.12 \max_{x \in [a;b]} |\omega(x)| = 0.12 \max_{x \in [a;b]} |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)| \approx$$

$$\approx 0.12 \max_{x \in [a;b]} |(x-0.962)(x-0.691)(x-0.31)(x-0.038)| < 0.12 \cdot 0.008 = 0.0096 < 10^{-3}.$$

10

Если приближаемая $f(x)$ имеет производные до $(s+1)$-го порядка, а $P_s(x)$ — интерполяционный многочлен степени s, построенный по точкам $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, то в точке x погрешность интерполяции $R_s(x)$ можно выразить как

$$R_s(x) = f(x) - P_s(x) = \frac{f^{(s+1)}(\xi)}{(s+1)!}(x-x_0)\ldots(x-x_n), \quad \text{для некоторого} \quad \xi \in [x_0, x_n]$$

и оценить как

$$\|R_s(x)\| \leq \frac{1}{(s+1)!} \max_{\xi \in [x_0, x_n]} \|f^{(s+1)}(\xi)\| \cdot \|(x-x_0)\ldots(x-x_n)\|.$$

В нашем случае приближается функция e^x интерполяционным многочленом $L_2(x)$ степени 2, узлы — $x_0 = 0, x_1 = 0.1, x_2 = 0.2$, и точки приближения $x = 0.05$ и $x = 0.15$. Вычислим общую форму оценки погрешности:

$$\|R(x)\| \leq \frac{1}{3!} \max_{\xi \in [0, 0.2]} \|(e^\xi)^{(3)}\| \cdot \|(x-0)(x-0.1)(x-0.2)\| = \frac{e^{0.2}}{6}\|x(x-0.1)(x-0.2)\| < 0.204|x(x-0.1)(x-0.2)|$$

И теперь в точках, в которых проводится интерполяция:

$$|R(0.05)| < 0.204 \cdot 0.05|(0.05-0.1)(0.05-0.2)| = 0.204 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 15 \cdot 10^{-2} = 0.204 \cdot 375 \cdot 10^{-6} = 76.5 \cdot 10^{-6}$$

$$|R(0.15)| < 0.204 \cdot 0.15|(0.15-0.1)(0.15-0.2)| = 0.204 \cdot 15 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{-2} = 76.5 \cdot 10^{-6}$$

11

Если приближаемая $f(x)$ имеет производные до $(s+1)$-го порядка, а $P_s(x)$ — интерполяционный многочлен степени s, построенный по точкам $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, то в точке x погрешность интерполяции $R_s(x)$ можно выразить как

$$R_s(x) = f(x) - P_s(x) = \frac{f^{(s+1)}(\xi)}{(s+1)!}(x-x_0)\ldots(x-x_n), \quad \text{для некоторого} \quad \xi \in [x_0, x_n]$$

и оценить как

$$\|R_s(x)\| \le \frac{1}{(s+1)!} \max_{\xi \in [x_0,x_n]} \|f^{(s+1)}(\xi)\| \cdot \|(x-x_0)\ldots(x-x_n)\|.$$

Для 4 узлов возьмем многочлен будет степени 3, и погрешность метода оценивается как

$$r_1 = |R_3(\frac{\pi}{5})| \le \frac{1}{4!} \max_{\xi \in [0,\pi/3]} |(\sin(\xi))^{(4)}| \cdot |(\frac{\pi}{5} - 0)(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{6})(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{4})(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{3})| = \frac{1}{4!} \max_{\xi \in [0,\pi/3]} |(\sin(\xi))| \cdot |\frac{\pi}{5} \cdot \frac{\pi}{30} \cdot \frac{\pi}{20} \cdot \frac{2\pi}{15}| =$$

$$= \frac{1}{4!} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi^4}{150^2} = \frac{\sqrt{3}\pi^4}{108 \cdot 10^4} \approx 7.81 \cdot 10^{-5}$$

Нам также известна абсолютная погрешность задания значения функции в узлах $\delta = 10^{-2}$. Возьмем интерполяционный многочлен в форме Лагранжа и посчитаем погрешность измерений:

$$P_3(x) = \sum_{k=0}^{3} f_k l_k(x) \qquad l_k = \prod_{i \ne k} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

$$l_0(\frac{\pi}{5}) = -\frac{2}{125} \quad l_1(\frac{\pi}{5}) = \frac{72}{125} \quad l_2(\frac{\pi}{5}) = \frac{64}{125} \quad l_3(\frac{\pi}{5}) = -\frac{9}{125}$$

Точки $f_k = f(x_k)$ оценены с погрешностью не больше $\delta = 10^{-2}$, тогда суммарная погрешность многочлена Лагранжа в связи с ошибкой измерений оценивается как (P_3^* и f_k^* — точные значения)

$$r_2 = |P_3(\frac{\pi}{5}) - P_3^*(\frac{\pi}{5})| = |\sum_{k=0}^{3} f_k l_k(x) - \sum_{k=0}^{3} f_k^* l_k(x)| = |\sum_{k=0}^{3} (f_k - f_k^*) l_k(x)| \le \sum_{k=0}^{3} |f_k - f_k^*| \cdot |l_k(x)|| \le \sum_{k=0}^{3} \delta |l_k(x)| =$$

$$= \delta \sum_{k=0}^{3} |l_k(x)| = 10^{-2} \cdot \frac{147}{125} = 1.176 \cdot 10^{-2}$$

Итоговая погрешность:

$$r = r_1 + r_2 \approx 7.81 \cdot 10^{-5} + 1.176 \cdot 10^{-2} < 1.2 \cdot 10^{-2}.$$

12

Докажите, что константа Лебега не зависит от длины отрезка интерполяции, а зависит только от взаимного расположения точек на отрезке.

Докажем, что константа Лебега не изменится при сдвиге и/или растяжении отрезка. Возьмем отрезок $[a, b]$, узлы интерполяции $x_i \in [a, b]$, интерполяционный многочлен в форме Лагранжа и произвольное преобразование $f(x) = ax + b \quad (a \neq 0)$, которое будет менять длину отрезка, сохраняя взаимное расположение узлов на нем. Пусть базисные функции многочлена для $[a, b]$ — $l_j(x)$, а для преобразованных фукнцией $f(x)$ узлов — $l_j^*(x)$. Тогда преобразованные базисные функции многочлена выражаются через изначальные как

$$l_j^*(f(x)) = \prod_{k=0, k\neq j}^{n} \frac{f(x) - f(x_k)}{f(x_j) - f(x_k)} = \prod_{k=0, k\neq j}^{n} \frac{ax + b - ax_k - b}{ax_j + b - ax_k - b} = \prod_{k=0, k\neq j}^{n} \frac{a(x - x_k)}{a(x_j - x_k)} = \prod_{k=0, k\neq j}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k} = l_j(x).$$

Константой Лебега называют Λ, которую можно вычислить по формуле

$$\Lambda = \max_{x\in[a,b]} \sum_j |l_j(x)|.$$

Тогда для преобразованного отрезка константа Лебега выражается как

$$\Lambda^* = \max_{x\in[f(a),f(b)]} \sum_j |l_j^*(x)| = \max_{x\in[a,b]} \sum_j |l_j^*(f(x))| = \max_{x\in[a,b]} \sum_j |l_j(x)| = \Lambda.$$

Что и требовалось, константа Лебега не меняется при линейном преобразовании отрезка с узлами, что и означает изменение длины отрезка с сохранением взаимного расположения узлов.

13

Полиномы степени не более двух можно разложить по базису $1, x, x^2$. Матрица Грама такого базиса —

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$$

Скалярное произведение приближаемой $\sin(x)$ и базисных функций:

$$(\sin(x), 1) = \int_0^1 \sin(x) dx = 1 - \cos(1)$$

$$(\sin(x), x) = \int_0^1 x \sin(x) dx = |\text{по частям}| = -x\cos(x)\Big|_0^1 + \int_0^1 \cos(x)dx = \sin(1) - \cos(1)$$

$$(\sin(x), x^2) = \int_0^1 x^2 \sin(x) dx = |\text{по частям}| = -x^2\cos(x)\Big|_0^1 + 2\int_0^1 x\cos(x)dx =$$

$$= |\text{по частям}| = -\cos(1) + 2(x\sin(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \sin(x)dx) = -\cos(1) + 2\sin(1) + 2\cos(1) - 2 = 2\sin(1) + \cos(1) - 2$$

Наилучшим приближением в L_2 будет ортогональная проекция. Чтобы найти ее, решим систему

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \cos(1) \\ \sin(1) - \cos(1) \\ 2\sin(1) + \cos(1) - 2 \end{pmatrix}$$

Решением такой системы будет вектор

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -51 + 24\sin(1) + 57\cos(1) \\ -12(-27 + 14\sin(1) + 28\cos(1)) \\ 30(-11 + 6\sin(1) + 11\cos(1)) \end{pmatrix}$$

Следовательно, наилучшим приближением среди многочленов степени 2 будет

$$p(x) = 30(-11 + 6\sin(1) + 11\cos(1))x^2 - 12(-27 + 14\sin(1) + 28\cos(1))x - 51 + 24\sin(1) + 57\cos(1).$$

14

По теореме об альтернансе многочлен $p(x)$ является наилучшим приближением функции $f(x)$ в классе $\mathcal{P}_n$, если $d(x) = f(x) - p(x)$ имеет не менее $n+2$ точки альтернанса отрезке приближения. В нашем случае многочлен степени 1, значит, для наилучшего многочлена точек альтернанса будет хотя бы 3. Так как знак $d(x)$ в точках альтернанса чередуется, это значит, что $d(x)$ меняет знак хотя бы дважды. То есть, имеет хотя бы 2 корня. С другой стороны, $f(x) = x^{1/3}$ — выпуклая на $[0,1]$ функция, а $p(x) = ax + b$ — многочлен первой степени. Точек пересечений графиков у выпуклой функции и прямой не больше двух. а именно точки перечения графиков $f(x)$ и $p(x)$ будут нулями $d(x)$. Значит, нулей у $d(x)$ ровно два.

Между этими точками максимума $d(x)$ достигает в точке x_1 с нулевой производной:

$$d'(x_1) = f'(x_1) - p'(x_1) = \frac{1}{3}x_1^{-2/3} - a = 0 \Rightarrow x_1 = (3a)^{-3/2}.$$

Производная не меняет своего знака, кроме как в точке x_1, следовательно, слева и справа от x_1 функция $d(x)$ монотонна. Значит, остальные максимумы модуля $d(x)$ находится на границах области определения. Чтобы обе эти точки были точками альтернанса, значения $d(x)$ в них должны совпадать.

$$d(0) = d(1) \Rightarrow -b = 1 - a - b \Rightarrow a = 1$$

Нужно также, чтобы значения в этих двух точках совпадали со значением в точке x_1 по модулю, но были противоположны по знаку.

$$d(x_1) = -d(0) \Rightarrow (3^{-3/2})^{1/3} - 3^{-3/2} - b = b \Rightarrow b = (3^{-1/2} - 3^{-3/2})/2$$

Отсюда, наилучшим приближением среди многочленов степени 1 будет $p^*(x) = x + (3^{-1/2} - 3^{-3/2})/2$.

Многочленом степени 0 с двумя точками альтернанса был бы $p_0 \equiv 0.5$, с ошибкой на краях в $-d_0(0) = d_0(1) = 0.5$. Остается заметить, что $|d^*(0)| = (3^{-1/2} - 3^{-3/2})/2 \approx 0.384 < 0.5 = |d_0(0)|$. Значит, среди многочленов степени не больше 1, наилучшим приближением будет $p^*(x)$.