

20

Чтобы найти порядок аппроксимации, будем искать норму вектора невязки. Возьмем бесконечную норму и разложим невязку в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned}
 & U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1} - \frac{h^2}{12}(f_{i+1} + 10f_i + f_{i-1}) = \\
 &= u^{(2)}(x_i)h^2 + \frac{h^4}{12}u^{(4)}(x_i) + \frac{2h^6}{6!}u^{(6)}(x_i) + o(h^6) - \frac{h^2}{12}\left(12f(x_i) + f^{(2)}(x_i)h^2 + \frac{h^4}{12}f^{(4)}(x_i) + o(h^4)\right) = \\
 &= h^2\left(u^{(2)}(x_i) - f(x_i)\right) + \frac{h^4}{12}\left(u^{(4)}(x_i) - f^{(2)}(x_i)\right) + \frac{h^6}{6!}\left(\frac{2u^{(6)}(x_i)}{5} - f^{(4)}(x_i)\right) + o(h^6) = \\
 &= \left|u'' = f, u^{(4)} = f^{(2)}\right| = O(h^6).
 \end{aligned}$$

Что означает, что аппроксимация имеет порядок 6.