19

а) $f(x) = \ln(x+2) - x^2$. Заметим, что область определения у нас $(-2, +\infty)$, так как логарифм должен быть определен. Найдем экстремум:

$$f'(x) = \frac{1}{x+2} - 2x = 0 \iff 1 - 2x^2 - 4x = 0 \iff x = -1 \pm \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Тот, что с минусом, меньше -2, так как корень больше 1, так что он нас не интересует.

Далее, $f(-1) = -1 < 0$, $f(1) = \ln(3) - 1 > 0$, $f(2) = \ln(4) - 4 < 0$, значит, экстремум производной — максимум, и он где-то между -1 и 2. Мы хотим взять начальное приближение правее этого экстремума, чтобы метод сошелся именно к правому корню. Возьмем его после 1, там функция уже явно убывает и близка к корню, но до 2, где она уже проскочила корень. (это почти графическое решение, нужно только нарисовать выпуклую вверх функцию!)

Формула Ньютона будет

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{\ln(x_k+2) - x_k^2}{\frac{1}{x_k+2} - 2x_k}.$$

Оценим первую производную. Она после 1 отриацтельна и убывает, поэтому

$$|f'(x)| > |f'(1)| = |\frac{1}{3} - 2| = \frac{5}{3}.$$

Вторая производная равна

$$f''(x) = -\frac{1}{(x+2)^2} - 2,$$

и она тоже отрицательна и убывает после 1. Следовательно,

$$|f''(x)| < |f''(1)| = |-\frac{1}{9} - 2| = \frac{19}{9}.$$

$$\gamma = \frac{\|f''(x_1)\|}{2\|f'(x_2)\|} < \frac{19}{9} \cdot \frac{3}{10} = \frac{57}{90} < 1.$$

И, так как $1/\gamma > 1 > |(1,2)| > |x_0 - x^*|$, можно воспользоваться формулой

$$e_k \leq \gamma^{-1}(\gamma e_0)^{2^k} \leq \gamma^{2^k - 1}.$$

Тогда для достижения точности $\varepsilon = 10^{-5}$, понадобится не более

$$N = \log_2(1 + log_{\frac{57}{90}}(10^{-5}))$$

шагов.

b) $f(x) = e^x - 2x - 2$. Повторим свои действия из предыдещго пункта. $f'(x) = e^x - 2$, экстремум будет в $x = \ln(2) < 1$. $f(1) = e - 4 < 0$, $f(2) = e^2 - 6 \approx 1.4 > 0$. Возьмем приближение в $(1, 2)$. Формула будет

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{e^{x_k} - 2x_k - 2}{e_k^x - 2}.$$

На отрезке производная и вторая производная больше 0 и возрастают, следовательно,

$$|f'(x)| > f'(1) = e - 2 \quad |f''(x)| < |f''(2)| = e^2 \Rightarrow \gamma \leq \frac{1}{4}.$$

Итераций нам понадобится

$$N = \log_2(1 + \log_{\frac{1}{4}}(10^{-5})).$$