

# Problema da Mochila com Conjuntos de Penalidade (KPFS)

## 1. Definição do Problema

Seja o conjunto de itens  $X = \{1, \dots, n\}$ . Cada item  $j$  possui:

$$w_j \geq 0 \quad (\text{peso}), \quad p_j > 0 \quad (\text{lucro}).$$

A mochila tem capacidade  $b \geq 0$ . Além disso, exista uma coleção de  $l$  conjuntos de penalidade

$$\mathcal{C} = \{C_i \subseteq X : |C_i| \geq 2, \ i = 1, \dots, l\},$$

em que cada conjunto  $C_i$  tem:

- *allowance*  $h_i$  (número de itens de  $C_i$  que podem ser escolhidos sem penalidade);
- penalidade unitária  $d_i > 0$  cobrada para cada violação de  $h_i$ .

Há também um limite global  $k \geq 0$  para o total de violações permitidas.

## 2. Variáveis de Decisão

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, n, \quad x_j = \begin{cases} 1, & \text{se o item } j \text{ for incluído;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$v_i \in \{0, 1, \dots, |C_i| - h_i\}, \quad i = 1, \dots, l, \quad v_i = \text{número de violações em } C_i.$$

## 3. Função Objetivo

Maximizar o lucro total menos o custo de penalidades:

$$\max \sum_{j=1}^n p_j x_j - \sum_{i=1}^l d_i v_i.$$

## 4. Restrições

### 1. Capacidade da mochila:

$$\sum_{j=1}^n w_j x_j \leq b.$$

### 2. Limite global de violações:

$$\sum_{i=1}^l v_i \leq k.$$

3. Violação por conjunto de penalidade:

$$\sum_{j \in C_i} x_j - v_i \leq h_i, \quad i = 1, \dots, l.$$

4. Domínio das variáveis:

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, n;$$

$$0 \leq v_i \leq |C_i| - h_i, \quad v_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, \dots, l.$$