Контрольные вопросы

1. В чем заключаются термодинамический и статистический подходы к изучению процессов в макроскопических системах?
2. Дайте определение вероятности.
3. Что называется функцией распределения?
4. Что называется математическим ожиданием и дисперсией?
5. Запишите нормальный закон распределения.
6. Как зависит вид кривой Гаусса от величины параметра распределения?
7. Опишите устройство доски Гальтона, порядок выполнения работы и обработку результатов эксперимента.

1.

При термодинамическом подходе о макросвойствах системы судят на основе обобщений экспериментальных исследований взаимного превращения теплоты и работы. Путем аналитического обобщения опытов сформулированы три закона термодинамики, которые составляют ее фундамент. На основе этих законов проводятся многочисленные исследования макросвойств и процессов произвольных систем с числом частиц $N >> 1$. Такой метод исследования известен как феноменологический. Феноменологический метод, будучи весьма простым, позволяет получать всегда правильные результаты. В то же время ввиду того, что при феноменологическом подходе полностью игнорируется молекулярное строение вещества, выводы, полученные в этих рамках, не позволяют глубоко вскрыть природу изучаемых явлений. Оставаясь в рамках термодинамики, невозможно обосновать законы термодинамики (дифференциальную связь между макросвойствами). Это свидетельствует об ограниченных возможностях феноменологического подхода.

Статистический метод с самого начала исходит из связи между свойствами частиц макросистемы, опираясь на их модели. В самом деле, свойства макросистем (физические, химические) не могут зависеть ни от чего иного, кроме как от свойств самих частиц, из которых она состоит, и внешних условий, в которых находится эта система.

2.

Пусть имеется некоторая макроскопическая система, находящаяся в заданном состоянии. Предположим, что какая-то характерная для системы величина x может иметь дискретные значения $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots., x_s$.

Осуществим над системой очень большое число N измерений величины x, приводя систему перед каждым измерением в одно и то же исходное состояние. Вместо того чтобы производить повторные измерения над одной и той же системой, можно взять N одинаковых систем, находящихся в одном и том же состоянии, и осуществить однократное измерение величины x у всех этих систем. Такой набор одинаковых систем, находящихся в одинаковом состоянии, называется статистическим ансамблем.

Допустим, что N_1 измерений дали результат x_1, N_2 измерений – результат x_2, …, N_{i} измерений – результат x_i и т. д. ($\Sigma N_i = N$ – число систем в ансамбле). Величина $\nu_{\mathrm{i}} = N_i / N$ именуется относительной частотой появления результата x_i, а предел этой величины, получающийся при стремлении N к бесконечности,

$$P_i = \lim_{N\to\infty} \frac{N_i}{N} = \lim_{N\to\infty} \nu_i \tag{1}$$

называется вероятностью появления результата x_i.

3.

Если рассматривать большое количество молекул в сосуде ($N >> 1$), то выражение (2) можно трактовать как вероятность того, что макросистема в произвольный момент времени находится в одном из микросостояний, в котором частицы имеют координаты $x_i + dx_i$, $y_i + dy_i$, $z_i + dz_i$ и импульсы $p_{xi} + dp_{xi}$, $p_{yi} + dp_{yi}$, $p_{zi} + dp_{zi}$, при этом давление, температура и объем системы не меняются.

Очевидно, что чем большим выбран элементарный объем dV, тем больше будет вероятность обнаружить в нем молекулу: $dP \sim dV$.

Введем коэффициент пропорциональности ρ – функцию координат x_i, y_i, z_i и импульсов p_{xi}, p_{yi}, p_{zi} частиц. Тогда

$$\mathrm{dP} = \rho(\mathrm{x_i}, \mathrm{y_i}, \mathrm{z_i}, \mathrm{p_{xi}}, \mathrm{p_{yi}} . \mathrm{p_{zi}})\mathrm{dV} . \tag{3}$$

Функция $\rho(x, p)$ имеет смысл плотности вероятности и называется функцией статистического распределения или просто функцией распределения.

Знание явного вида функции распределения ρ необходимо, когда случайные величины могут принимать непрерывный ряд значений. С помощью функции распределения можно рассчитать любые средние свойства макросистем, например, среднее значение скорости частиц, число молекул, величина скорости и энергия которых попадают в определенные интервалы.

Явный вид функции ρ зависит от моделей, на основе которых описывается поведение частиц системы.

4.

Важными понятиями в теории вероятностей и ее приложениях являются понятия среднего значения и математического ожидания. Разъясним эти понятия на конкретном примере. Пусть произведено N однотипных измерений одной и той же величины a при неизменных условиях. Пусть в n_1 случаях измеренное значение величины a оказалось равным a_1, в n_2 случаях – a_2, в n_m случаях – a_m ($n_1+n_2+\ldots+n_m = N$). Среднее значение измеряемой величины определяется выражением

$$\bar{a} = \frac{n_1 a_1 + n_2 a_2 + \ldots + n_m a_m}{N} = \nu_1 a_1 + \ldots + \nu_m a_m \,. \tag{4}$$

Допустим для простоты, что никаких других результатов, кроме a_1, a_2, …, a_m при измерениях появиться не может, так что эти результаты являются единственно возможными и несовместимыми. Тогда если неограниченно увеличивать число измерений N, то частоты ν_1, ν_2, …, ν_m перейдут в свои предельные значения P_1, P_2, …, P_m – вероятности появления при измерениях значений a_1, a_2, …, a_m. Выражение (4) при этом будет иметь вид

$$M(a) = P_1 a_1 + P_2 a_2 + \ldots + P_m a_m \,, \tag{5}$$

где $M(a)$ называется *математическим ожиданием величины a*.

Величина разброса возможных значений x относительно их среднего значения, равная, в свою очередь, $x - \bar{x} = x$ (т. е. самой себе), может быть охарактеризована с помощью параметров, называемых дисперсией и стандартным отклонением. Для уяснения необходимости введения этих пара-

метров отметим, что среднее значение x самой величины x не может являться таким параметром, так как в среднем оно одинаково часто принимает как положительные, так и отрицательные значения. Поэтому, согласно свойству 3 нормального закона распределения, среднее значение разброса (математическое ожидание) величины x равно 0, т. е. числу, не характеризующему величину разброса. Однако квадрат величины разброса возможных значений x относительно среднего значения x не может быть отрицательным. Его среднее значение, найденное по аналогии с (7), равно

$$D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 \rho(x, \sigma) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \qquad (9)$$

и называется дисперсией величины x.

5.

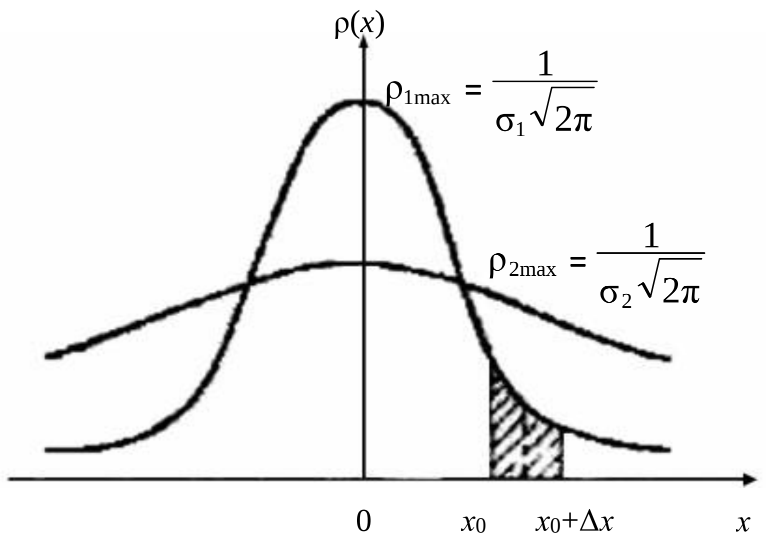
Нормальный закон распределения характеризуется плотностью вероятности вида

$$\rho(x, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \qquad (6)$$

где σ – параметр распределения, называемый стандартным отклонением величины x.

6.

Кривая, иллюстрирующая зависимость плотности вероятности от аргумента в случае нормального распределения, называется кривой Гаусса. Она имеет симметричный холмообразный вид. Кривые нормального распределения при различных значениях стандартного отклонения ($\sigma_2 > \sigma_1$) представлены на рис. 1. Заштрихованная область иллюстрирует вероятность случайной величины x принять значение в интервале между x_0 и $x_0+\Delta x$.



7. Смотри работу