2. Ясно, что при θ^* меньшим какого либо элемента выборки правдоподобие равно 0. В остальных случаях:

$$p(X_n \mid \theta^*) = \frac{1}{\theta^{*n}}.$$

Правдоподобие тем больше, чем меньше θ^*. Таким образом максимальное правдоподобие достигается в точке $\theta^* = \max X_n$. Посчитаем матожидание:

$$\mathbb{P}(\max X_n \leqslant t) = \mathbb{P}(X \leqslant t)^n = \left(\frac{t}{\theta}\right)^n,$$

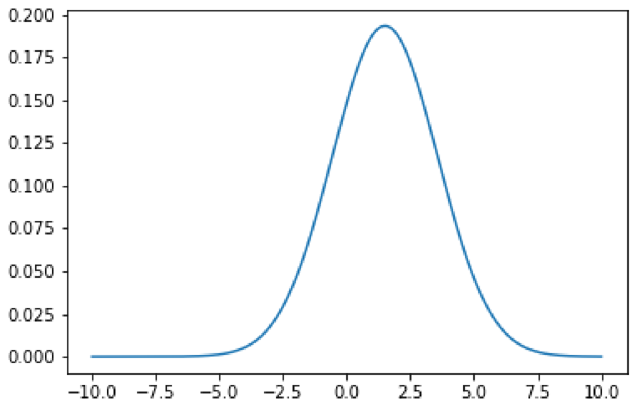
$$\mathbb{E}\max X_n = \int_0^\theta \mathbb{P}(\max X_n \geqslant t)dt = \int_0^\theta (1 - \left(\frac{t}{\theta}\right)^n)dt =$$
$$= \theta - \frac{\theta}{(n+1)} = \frac{n}{n+1}\theta.$$

Таким образом, оценка смещенная, но асимптотически несмещенная. Проверим состоятельность:

$$\mathbb{P}(\theta^* > \theta - \varepsilon) = 1 - \mathbb{P}(\max X_n \leqslant \theta - \varepsilon) = 1 - \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n \to_{n\to\infty} 1,$$

так что оценка состоятельна.

3. a)
$$p(x) = \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{8}} + \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{8}}$$



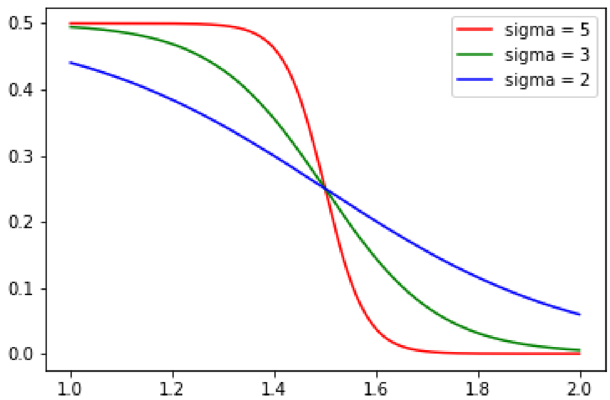
б)

$$\mathbb{P}(\theta=1\mid X=1)=\frac{p(X=1\mid\theta=1)\cdot\mathbb{P}(\theta=1)}{p(x)}=\frac{1}{2}\frac{e^{-\frac{(x-1)^2}{8}}}{e^{-\frac{(x-1)^2}{8}}+e^{-\frac{(x-2)^2}{8}}}=$$
$$=\frac{1}{2}\frac{1}{1+e^{-\frac{(x-2)^2}{8}+\frac{(x-1)^2}{8}}}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+e^{\frac{2x-3}{8}}}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+e^{-\frac{1}{8}}}$$

в) Для произвольного x,σ:

$$\mathbb{P}(\theta=1\mid X,\sigma)=\frac{1}{2}\frac{1}{1+e^{\frac{2x-3}{2\sigma^2}}}.$$

Как видно, σ^2 просто напросто линейный коэффициент перед $2x-3$, так что с ростом σ график будет сильнее стягиваться к прямой $x=1.5$, что легко заметить на данном графике



4. Аналогично лекциям:

$$\sqrt{n}(\mu_3^*-\mu_3)\to^d\mathcal{N}(0,\mu_6-\mu_3^2)=\eta_1.$$

Также на лекции было

$$\sqrt{n}(\tilde{S}^2-\mathbb{D}X)\to\mathcal{N}(0,\ldots)=\eta_2.$$

Далее,

$$\sqrt{n}((\mu_3^*,\tilde{S}^2)-(\mu_3,\mathbb{D}X))\to(\eta_1,\eta_2).$$

Рассмотрим теперь $g(x,y)=\frac{x}{y^{1.5}}$, градиент которого равен $(\frac{1}{y^{1.5}},-1.5\frac{x}{y^{2.5}})$. Подставляем:

$$\sqrt{n}(g(\mu_3^*,\tilde{S}^2)-g(\mu_3,\mathbb{D}X))\to\frac{\eta_1}{\mathbb{D}X^{1.5}}-1.5\frac{\mu_3\cdot\eta_2}{\mathbb{D}X^{2.5}}$$

Ну а теперь заметим, что $g(\mu_3^*, \tilde{S}^2) = \frac{\mu_3^*}{\tilde{S}^3}$, когда как $g(\mu_3, \mathbb{D}X) = \frac{\mu_3}{\mathbb{D}X^{1.5}}$, что и требовалось.

5. Положим, будто такая оценка есть. Заметим, что матожидание подобной оценки является неким многочленом от p степени размера выборки:

$$\mathbb{E}\theta^* = \sum_{a \in \{0,1\}^n} p^{sum(a)}(1-p)^{len(a)-sum(a)} \cdot \theta^*(a).$$

Здесь θ^* константы, не зависящие от p. Так что если $\mathbb{E}\theta^* = \frac{1}{p}$, то $p \cdot \mathbb{E}\theta^* - 1$ является ненулевым многочленом, тождественно равном нулю на $(0,1)$. Противоречие.