3. Рассмотрим функцию $g(x) = (1 - \frac{n+1}{n}x) \cdot \mathbb{1}_{x \leqslant 1}$. Тогда матожидание равно:

$$\int\limits_0^\theta g(x)\frac{nx^{n-1}}{\theta^n} = \int\limits_0^1 (1 - \frac{n+1}{n}x)\frac{nx^{n-1}}{\theta^n} = \frac{n}{\theta^n}(\frac{1}{n} - \frac{n+1}{n}\frac{1}{n+1}) = 0.$$

4. Рассмотрим статистику $T = \max(1, x_{(n)})$. Интуитивно подобная статистика лучше тем, что она никогда не скажет заведомо неверные значения. Распределение данной статистики можно вычислить по формуле

$$\mathbb{P}(T \leqslant x) = \frac{1}{\theta^n} + \int\limits_1^x \frac{nx^{n-1}}{\theta^n}dx.$$

Подобная оценка все так же достаточна, ибо $x_{(n)} \leqslant \theta$ тогда и только тогда, когда $\max(1, x_{(n)}) \leqslant \theta$:

$$p(x_1, \ldots, x_n \mid \theta) = \frac{1}{\theta^n}\mathbb{1}_{x_{(n)} \leqslant \theta} = \frac{1}{\theta^n}\mathbb{1}_{\max(1, x_{(n)}) \leqslant \theta}$$

Для полноты заметим, что область значений статистики — луч $[1, +\infty)$. А значит нужно доказать, что если функция g такова, что

$$\mathbb{E}g(T) = 0,$$

то g тождественный 0 на таком же луче. ну, матожидание равно

$$\int\limits_1^\theta g(x)\mathbb{P}(dx).$$

Раз на любом отрезке интеграл 0, то и на любом борелевском, а значит и на множестве $\{x \mid g(x) > 0\}$. То есть

$$\mathbb{E}g(T)\mathbb{1}_{g>0} = 0,$$

следовательно величина $g(T)\mathbb{1}_{g>0}$ ноль почти всюду, то есть g почти всюду неположителен. Аналогично, g почти всюду неотрицателен, следовательно почти всюду равен 0.

5. Рассмотрим функцию

$$g(x) = \begin{cases} \frac{n+1}{n}x, & x > 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}g(T) &= \frac{g(1)}{\theta^n} + \int\limits_1^\theta g(x)\frac{nx^{n-1}}{\theta^n}dx = \\
&= \frac{1}{\theta^n} + \frac{n+1}{n}\left[\frac{n}{n+1}(\theta - \frac{1}{\theta^n})\right] = \theta.
\end{aligned}
$$

Таким образом, оценка $g(T)$ несмещенная.

$$
\mathbb{E}(g(T) \mid T) = g(T),
$$

следовательно $g(T)$ эффективная в классе несмещенных. Можно расписать $g(T)$, получая следующую формулу:

$$
g(\max(1, x_{(n)})) = \frac{n+1}{n}\max(1, x_{(n)}) - \frac{1}{n}\mathbb{1}_{x_{(n)} \leqslant 1}.
$$