Discrete Math

ch(1): Logic and Proofs.

* **Propositions**: is a declarative sentence that either true or false, but not both.

• هي جملة واضحة ونقدر نرد عليها بإجابة بتكون يا True يا False.

* **Examples**:-

Propositions	Truth value
$2+3=5$	True
$5-3=1$	False
Today is Sunday	False
$X+3=7$, for $X=4$	True
Cairo is the capital of Egypt	True

Sentences	Is a Propositions
what color is the ball?	Not Propositions
Read this carefully	Not Propositions
$X+3=7$	Not Propositions

* **Types**:

Propositions
- Primitive: • بيكون عندك جملة Prop. واحدة فقط
- Compound: • بيكون عندك أكتر من جملة Prop. ونربطهم ببعض بوصلات "Logical operators"

* We use letters to denote propositional variables
p, q, r, s .....

Karmella...

* **The Truth value of a Proposition**:
• True → T
• False → F

➡ A(1), Q(1):-

* "**Logical operators**" : "**Logical connectives**" :- علامات الربط

[1] Negation:-

• عكس الجملة "يعني ننفي الجملة ولو الجملة منفية نرجعها لأصلها: نشيل النفي".

• الرموز بتاعتها : ¬ , ~ , ' , ‾ , !

* **EX**: Find the negation of the proposition:

P: "Cairo is the Capital of Egypt"

Ans:

¬P: "Cairo is not the capital of Egypt".

* **Truth Table**:-

P	¬P
T	F
F	T

* **EX**: Find the negation of the proposition

P: "Today is not Friday".

Ans:

¬P: "Today is ~~not~~ Friday".

Conjunction (and) :- "و"

- كذا "و" كذا .
- جملة "و" جملة .
- الرمز بتاعها: "$\wedge$"

*** Truth Table :-**

p	q	p∧q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

- امتى تبقى T : لما كل المدخلات تكون T. يعني لازم الـ p والـ q يبقوا بـ T .
- امتى تبقى F : لو ع الأقل أحد المدخلات يبقى بـ F .

*** EX :** Let p and q the propositions

p :- " Today is Friday "

q :- " IT is raining today ".

Express the propositions as $p \wedge q$?

ans:

$p \wedge q$:- " Today is Friday **and** it is raining today ".

3 disjunction (or) : "أو"

- كذا "أو" كذا .
- جملة "أو" جملة .
- الرمز بتاعها "$\vee$"

(سهل عكس الـ and)

*** Truth Table :-**

p	q	p∨q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

- امتى تبقى T : لو ع الأقل أحد المدخلات بـ T .
- امتى تبقى F : لو كل المدخلات بـ F .

*** EX :** p :- " Today is Friday "

q :- " It is raining today ".

Express the propositions as $p \vee q$?

ans:

$p \vee q$:- " Today is Friday **or** it is raining today ".

4 The exclusive or (Xor) :- not both

- ده أو ده بس الاتنين مع بعض مينفعش .
- الرمز بتاعها : "$\oplus$"

*** Truth Table :-**

p	q	p⊕q
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

- امتى يبقى بـ T : لو الـ 2 مختلفين .
- امتى يبقى بـ F : لو الاتنين متشابهين .

*** EX :**

p :- " They are Parent "

q :- " They are Children "

$p \oplus q$:- " They are Parent **or** Children **but not both**.

* عدد الاحتمالات = $2^{\text{عدد الـ Propositions}}$

EX: (1) $p \wedge q \Rightarrow = 2^2 = 4$

(2) $p \wedge q \vee r \Rightarrow = 2^3 = 8$

The conditional statement :-

- if P, then q.
- p implies q.
- p only if q.
- p is sufficient for q.
- q when p.

(طريقة النطق)

- الرمز بتاعها : p → q
  - p : البداية ← hypothesis الفرضية
  - q : النهاية ← conclusion الخاتمة

* Truth Table :-

p	q	p→q
T	T	T
T	F	(F)
F	T	T
F	F	T

- امتى يبقى T : لو البداية بـ T والنهاية بـ F أو الاتنين بـ T أو الاتنين بـ F.
- امتى يبقى بـ F : لو البداية بـ T والنهاية بـ F.
- خلاصة الكلام : بيدي T في كل الحالات ماعدا الحالة الوحيدة اللي بتبقى بـ F لو البداية (اللي قبل السهم) بـ T والنهاية (اللي بعد السهم) بـ F.

*Ex: p: "You get 100% on the final".

q: "You will get A".

ans:

p→q : "If you get 100% on the final, then you will get A".

6 The biconditional statement :-

- p iff q.
- p exactly when q.

(طريقة النطق)

- الرمز بتاعها : "↔".

*Truth Table :-

p	q	p↔q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

- امتى تبقى T : لو الاتنين متشابهين.
- امتى تبقى F : لو الاتنين مختلفين.

(عكس الـ Xor)

*Ex: p: "You can take the flight".

q: "You buy a ticket".

ans:

p↔q : "You can take the flight if and only if (iff) you buy a ticket".

- ملاحظة :-

(1) الـ "∨" عكس الـ "∧".

(2) الـ "↔" عكس الـ "⊕".

→ A(1) : Q(2), Q(3).

Truth Table of Compound Propositions:-

EX (1): Construct the truth table of compound proposition

$$(p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$$

ans.

عدد المتغيرات ← ②

* أولاً: أنا عندي كام متغير؟ اثنين اللي هما p و q يبقى إذاً عندي $2^2 = 4$ احتمالات.

p	q	¬q	p ∨ ¬q	p ∧ q	(p∨¬q) → (p∧q)
T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	F	F
F	T	F	F	F	T
F	F	T	T	F	F

EX (2): Construct the truth table of compound proposition

$$(p \wedge \neg q) \rightarrow r$$

ans.

* أولاً: عندي كام متغير؟ ٣ متغيرات اللي هما p و q و r يبقى عندي 8 احتمالات

$2^3 = 8$

p	q	r	¬q	p ∧ ¬q	(p ∧ ¬q) → r
T	T	T	F	F	T
T	T	F	F	F	T
T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	F	T
F	T	F	F	F	T
F	F	T	T	F	T
F	F	F	T	F	T

* Precedence of Logical operators:-

ترتيب تنفيذ العمليات.

operator	precedence
¬	1
∧	2
∨	3
→	4
↔	5

* يعني لو فيش أقواس أنفذ مين الأول وبعده ومين بعده ....

EX: $p \vee q \wedge r \rightarrow s$

* A(1), B(4)

and Bit operations:-

Truth Value	Bit
T	1
F	0

* Computer Bit operations:-

- OR : ∨
- AND : ∧
- XOR : ⊕

x	y	x ∨ y	x ∧ y	x ⊕ y
0	0	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	0

* Bit strings:-

• هي عبارة عن مجموعة من الأصفار والواحايد.
اللي bits هو عدد ال bit string الـ Length.
بيتمثل ال String.

* Ex: Find the bitwise OR, bitwise AND, and bitwise XOR of the bit strings 01 1011 0110 and 11 0001 1101

ans.

```
01 1011 0110
11 0001 1101
------------
11 1011 1111   bitwise OR
01 0001 0100   bitwise AND
10 1010 1011   bitwise XOR
```


A(1), Q(5).

* Applications of Propositional Logic:-

(1) Translating English sentences.
(2) System specifications.
(3) Boolean searches.
(4) Logic puzzles.
(5) Logic circuits.

[1] Translating English sentences:-

EX(1):
"You can access the Internet from campus only if you are a computer science major or you are not a student".

Ans.

Let p, q, r be the propositions:

p: You can access the Internet from campus.

q: You are a computer science.

r: You are a student.

$p \rightarrow (q \vee \neg r)$

• only if : →
• or : ∨

مفتاح التحويل.

Answer the following questions:

1) Which of these sentences are propositions? What are the truth values of those that are propositions?

a) Boston is the capital of Massachusetts.
b) Miami is the capital of Florida.
c) $2+3=5$.
d) $5+7=10$.
e) $x+2=11$.
f) Answer this question.

2) Let p and q be the propositions

p : It is below freezing.
q : It is snowing.

Write these propositions using p and q and logical connectives (including negations).

a) It is below freezing and snowing. $(p \wedge q)$
b) It is below freezing but not snowing.
c) It is not below freezing and it is not snowing.
d) It is either snowing or below freezing (or both).

3) How many rows appear in a truth table for each of these compound propositions?

a) $p \rightarrow \neg p$ $2^1 = 2$
b) $(p \vee \neg r) \wedge (q \vee \neg s)$ $2^4 = 16$

4) Construct a truth table for each of these compound propositions.

a) $(p \vee q) \rightarrow (p \oplus q)$ b) $(p \vee \neg q) \rightarrow q$
c) $(p \rightarrow q) \vee (\neg p \rightarrow r)$

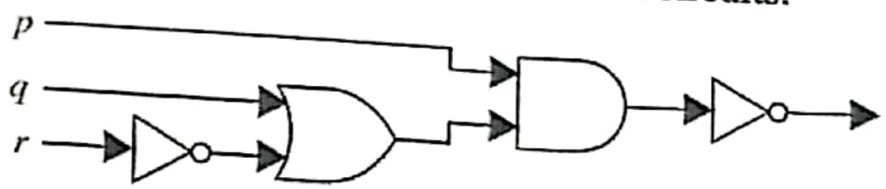
5) Find the bitwise *OR*, bitwise *AND*, and bitwise *XOR* of each of these pairs of bit strings.

a) 101 1110, 010 0001
b) 1111 0000, 1010 1010

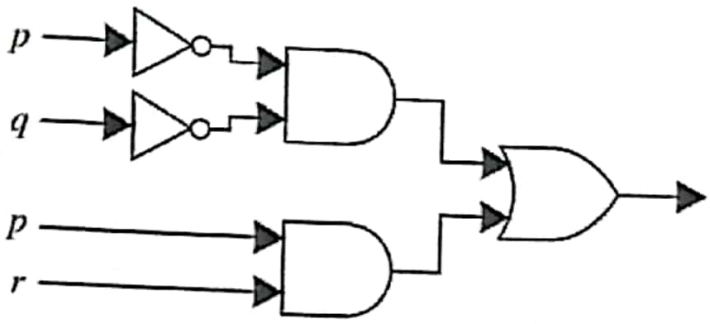
Scanned with CamScanner

Find the output of each of these combinatorial circuits.

a)



b)



7) Construct a combinatorial circuit using inverters, OR gates, and AND gates that produces the output $((\neg p \vee \neg r) \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge (q \vee r))$ from input bits p, q, and r.

Scanned with CamScanner