Resumé :

I. Suite arithmétique :

si $U_2 - U_1 \neq U_1 - U_0$

$\Rightarrow$ donc (U_m) n'est pas arithmétique

! $U_m = U_0 + m \times r$

$U_p = U_0 + p \times r$

$U_m = U_p + (m-p)r$

! $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, $\dfrac{a}{b^n} = a \times \left(\dfrac{1}{b}\right)^n$, $(a^n)^m = a^{n \cdot m} = (a^m)^n$

II. Suite géométrique :

$\rightarrow$ si $\dfrac{U_1}{U_0} \neq \dfrac{U_2}{U_1}$

$\Rightarrow$ donc (U_m) n'est pas géomètrique

$U_m = U_1 \times q^{n-1}$

$U_m = U_2 \times q^{n-2}$

PR :Bouzayene.M **Résumé de cours : suites réelles** **$4^{ème}$ INF(2021)**

I/Suite arithmétique :

1/**Terme générale** : $u_n = u_0 + n \times r$ avec $\begin{cases} u_0 : le\ premier\ terme\ de\ la\ suite \\ r \epsilon IR \\ n \epsilon IN \end{cases}$

2/**Somme** :S $= u_p + \cdots \dots \dots \dots + u_m = \sum_{k=p}^{m} u_k$

S= (m-p+1) $\times (\frac{u_p + u_m}{2})$

Rque :Pour pour montrer qu'une suite est arithmétique il faut montrer que : $u_{n+1} - u_n = r \epsilon IR$

3/**Monotonie** : (Sens de variation)

-Si $r > 0$ on a (u_n) est croissante .

-Si $r < 0$ on a (u_n) est décroissante .

-Si $r = 0$ on a (u_n) est constante .

4/**Limite** :

-Si $r > 0$ on a $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

-Si $r < 0$ on a $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

II /Suite géométrique :

1/**Terme générale** : $u_n = u_0 \times q^n$ avec $\begin{cases} u_0\ le\ premier\ terme\ de\ la\ suite \\ r \epsilon IR \\ n \epsilon IN \end{cases}$

2/**Somme** : S $= u_p + \cdots \dots \dots \dots + u_m = \sum_{k=p}^{m} u_k$

S $= u_p \times \frac{1 - q^{(m-p+1)}}{1-q}$

Rque :Pour montrer qu'une suite est géométrique il faut montrer que : $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ = qϵIR

3/**Monotonie** : (Sens de variation)

-Si $q > 1$ alors (u_n) est croissante .

-Si $q < 1$ alors (u_n) est décroissante .

-Si $q = 1$ alors (u_n) est constante .

4/**Limite :**

$$\begin{cases} si\quad q > 1 \quad ona \lim_{n \to +\infty} u_n = \begin{cases} +\infty & si \quad u_0 > 0 \\ -\infty\ si & u_0 < 0 \end{cases} \\ \quad -1 < q < 1 \quad on\ a \lim_{n \to +\infty} u_n = 0 \\ Si\ q \le -1 \quad on\ a \quad (u_n) n'a\ pas\ de\ limites \end{cases}$$

III /Limite et ordre :

Soient (u_n) ;$(v_n) et$ (w_n) trois suites réelles

Si a/ $u_n \leq v_n \leq w_n$ et si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = \alpha \epsilon IR$ alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = \alpha$

b/ $u_n \leq v_n$ et si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

c/ $u_n \leq v_n$ et si $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

VI/Suites récurrentes :

Suite de type : $u_n = f(n)$.

a)Soit (u_n) une suite de terme général $u_n = f(n)$ tel que f une fonction

si $\lim_{n\to+\infty} f(x) = l$ (l fini ou infini), alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$

b) Soit f une fonction définie sur un intervalle I et (u_n) une suite de nombres réelles de I .

Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$ et $\lim_{n\to a} f(x) = l$ alors $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = l$ (a et l sont finis ou infinis)

VI/Convergence :

1 /-Si $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = l\epsilon IR$ alors (u_n) est convergente.

2/ -Si (u_n) est croissante et majorée alors elle est convergente.

3/ - Si (u_n) est décroissante et minorée alors elle est convergente.

4/ - Si (u_n) est monotone et bornée alors elle est convergente.

<u>Par contre</u> :- $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ si et seulement si (u_n) elle est divergente.

-Si (u_n) n' a pas de limites alors elle est divergente.

Suite de type : $u_n = f(n)$.

Soit I un intervalle non vide et non réduit à un point de IR. f est une fonction définie sur I et (u_n) une suite de nombres réels de I telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ ($l\epsilon IR$)

-Si f est continue en l ,alors la suite $(f(u_n))$ converge vers f(l)

-Dans le cas ou f(I) I et la suite (u_n) est définie par $u_0 \epsilon I$ et pour tout $n\epsilon \mathbb{N}$; $u_{n+1} = f(n)$ on a :

Si f est continue en l , alors la suite $(f(u_n))$ converge vers f(l) et f(l) = l

Exercice N°1 :

Soit la suite (U) définie par $\begin{cases} U_0 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = 5 - \frac{4}{u_n} \end{cases}$

1) a)Calculer U_1 et U_2 .En déduire que la suite (U) n'est ni arithmétique ni géométrique

b) Montrer que pour tout n ∈ IN on a $1 < U_n < 4$

2) Etudier les variations de (U_n)

3)Déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

3) On définie la suite (V) définie par $V_n = \frac{u_n - 4}{u_n - 1}$

a) Montrer que (V) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme

b) Calculer V_n en fonction de n puis calculer $\lim_{x \to +\infty} Vn$

C) Exprimer U_n en fonction de n .En déduire que $\lim_{x \to +\infty} Un$

Exercice N°2 :

On considère la suite (u_n) définie sur IN par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 4(\frac{u_n - 1}{u_n}) \end{cases}$

1°) a) Vérifier que pour tout $n \epsilon IN$,$u_{n+1} = 4(1 - \frac{1}{u_n})$

b)Montrer que pour tout $n \epsilon IN$,$u_n > 2$

c) Vérifier que $u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 2)^2}{u_n}$ .En déduire les variations de U

d°) En déduire que (u_n) est convergente est calculer sa limite

2°) on pose $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$ pour $n \epsilon IN$

a)Montrer que(v_n)est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme

b)Calculer la limite de (v_n)

Exercice N°3 :

I/On considère la suite (U_n) définie par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{2 + 3u_n}{2 + u_n} \end{cases}$

1/Montrer que pour tout entier naturel n tel que $0 \leq u_n \leq 2$

2/Montrer que (u_n) est une suite croissante sur IN

3/En déduire quelle est convergente et calculer sa limite

II/Soit (V_n) la suite définie par : $V_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$

a-Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison

b-Exprimer v_n puis u_n en fonction de n

c-Déterminer la limite de la suite u_n

Exercice N°4 :

On considère la suite U définie sur IN par $U_0 = 3$ et pour tout n de IN , $U_{n+1} = U_n - 2 + \frac{4}{U_n}$

1/a)Montrer que pour tout $n \epsilon IN$, $U_n > 2$

b)Montrer que la suite U est décroissante

c)Déduire que la suite U est convergente

2/a)Montrer que pour tout n de IN , $U_{n+1} - 2 \leq \frac{1}{3}(U_n - 2)$

b)En déduire que ,pour tout n de IN ,$U_n - 2 \leq (\frac{1}{3})^n$

c)Déduire alors la limite de la suite U

3/ On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{U_k}$ pour n ϵIN^*

a)Montrer que $S_n = \frac{1}{4} U_n - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} n$ pour n ϵIN^*

b)En déduire la limite de S_n et de $\frac{S_n}{n}$

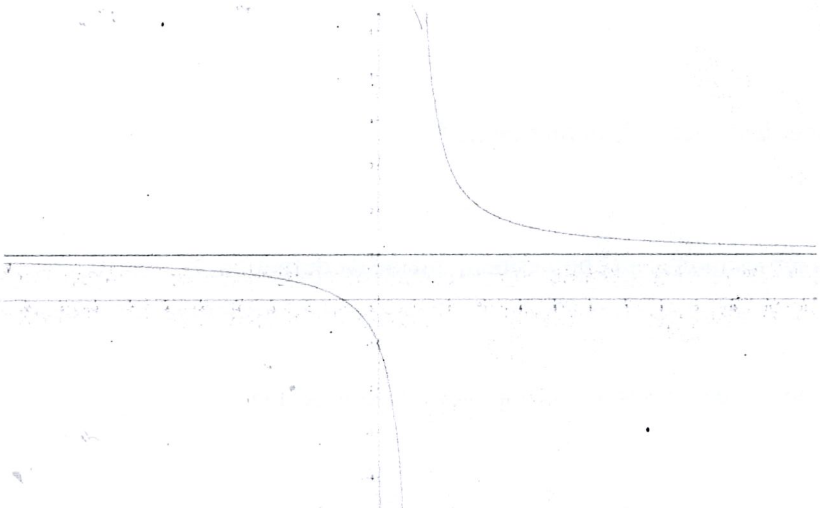
PR :Bouzayene.M **Comportement asymptotiques** $4^{ème}$ [illegible] (2022)

et branches infinies

I/ Asymptote horizontale :

Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$ alors la droite d'équation y = a est une asymptote horizontale à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ (Respectivement en $-\infty$)

Application 1 : Soit (C_f) la courbe représentative d'une fonction f



Déterminer graphiquement les limites en $+\infty$ *et en* $-\infty$ et donner une interprétation graphique aux résultats obtenus .

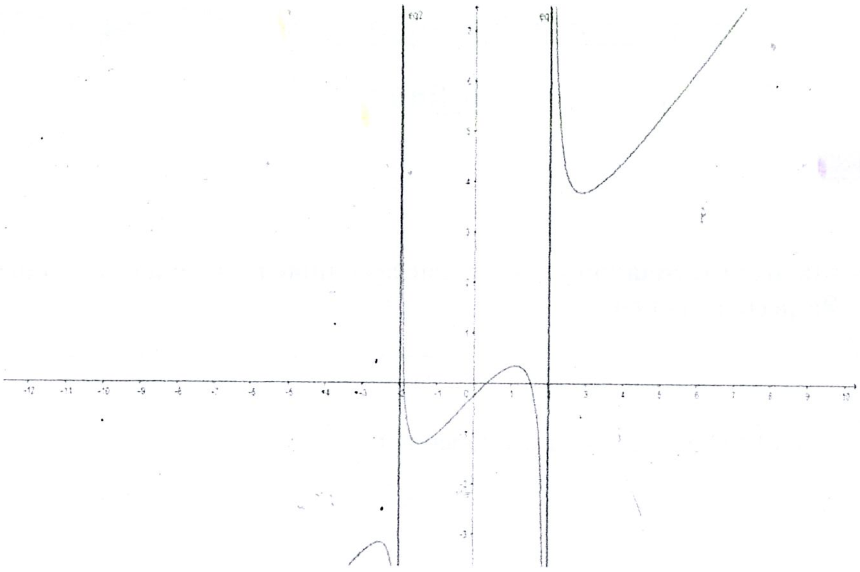
……

……

II/ Asymptotes verticales :

Soit f une fonction définies sur $\mathbb{R}/\{a\}$. Alors la droite d'équation : x = a est une asymptote verticale à la courbe de f.

Application2 : Soit (C_f) la courbe représentative d'une fonction f



1/Déterminer le domaine de définition de f.

……

2/ Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition.

……

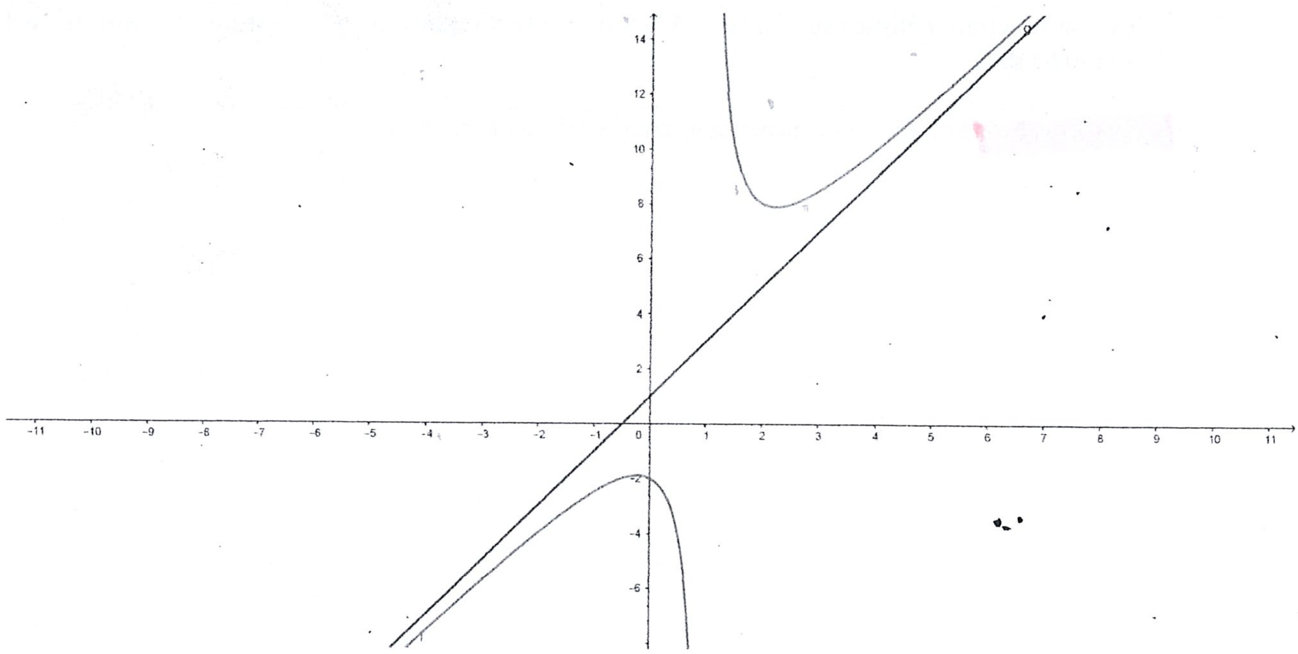
3/ Déterminer les équations des asymptotes à la courbe de f.

……

III/Asymptotes obliques :

Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$
La droite d'équation : y = $a\,x + b$ est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$
Si et seulement si $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - (a\,x + b)] = 0$ (respectivement en $-\infty$)

Application 3 :



Sachant que D est la droite d'équation : y $= 2x + 1$

1/Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2/a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - (2\,x + 1)]$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - (2\,x + 1)]$

b) Interpréter graphiquement le résultat .

……

……

IV/Branches paraboliques :

Soit R $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé et (C_f) la représentation graphique de f dans R

Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, la courbe de f admet une branche parabolique. Pour déterminer sa direction on calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ alors la branche parabolique est suivant (OI)

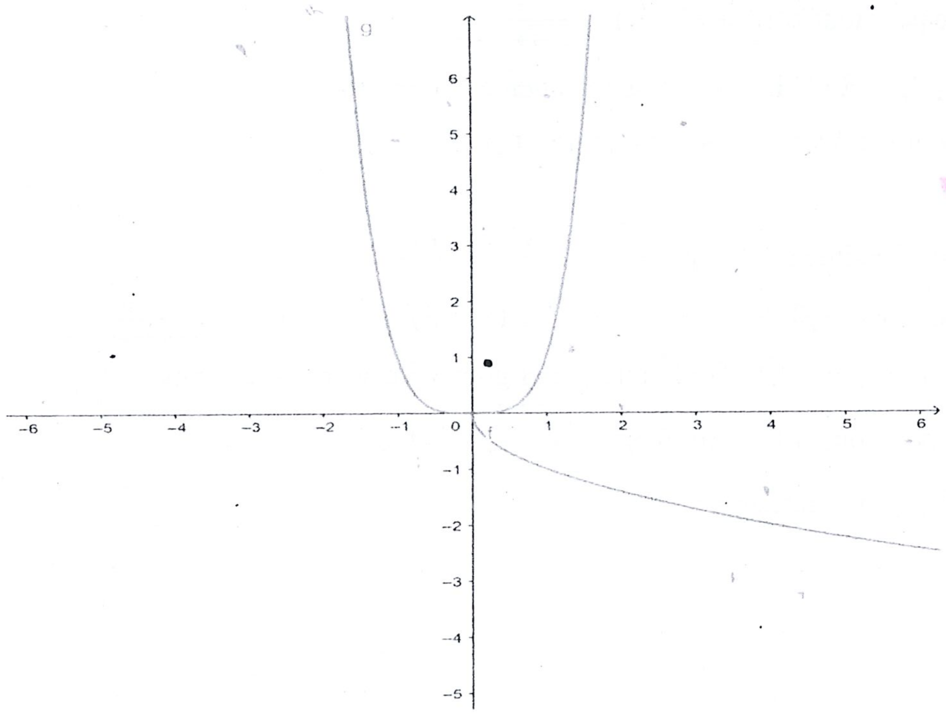
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ alors la branche parabolique est suivant (OJ)

(même raisonnement en $-\infty$)

si $\lim\limits_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0 \to \lim\limits_{+\infty} [f(x) - ax]$ / $\infty = y = ax$; $b = ax + b.$

Application 4 :

Soit R $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé et (C_f) la représentation graphique de f dans R



1/Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat

……

……

2/a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat

……

……

b) Déterminer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat

……

……

Applications

Exercice N°1 :

Soit la fonction f définie sur R par f(x) = $\sqrt{x^2+6x+8}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan

a)donner le domaine de définition de f

b) calculer les limites de f en +∞ et en -∞

c)Déterminer alors $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+3)]$ et $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+3)]$

D)En déduire que la courbe (C) admet deux asymptotes obliques au voisinage de + ∞ et de - ∞

Exercice N°2 :

Soit f la fonction définie par f(x) = -x + $\sqrt{x^2-4}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{I},\vec{J})$

1/Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2) a)Montrer que pour tout $x\epsilon[2,+\infty[$ f(x) $=\frac{-4}{\sqrt{-4+x^2}+x}$

b) En déduire $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ .Interpréter graphiquement le résultat

3/Montrer que la droite Δ:y = -2x est asymptote à (C)

Exercice N°3:

Soit la fonction f définie sur IR^* par f(x) = $\frac{\sqrt{9+x^2}-(x-3)}{x}$

1/Montre que pour tout $x\epsilon]0,+\infty[$ on a $\sqrt{9+x^2}+(x-3)>0$ et $f(x)=\frac{6}{\sqrt{9+x^2}+(x-3)}$

2/Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ .Interpréter graphiquement ces résultats

3/a)Montrer que pour tout $x\epsilon]-\infty,0[$ f(x)= $-\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}+\frac{3}{x}-1$

b)En déduire $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ .Interpréter