الخوارزميات و بنى المعطيات 1

دورة 2022/2021

فصل أوّل

حل الطالب: بهاء الدين النقطة

النموذج 2:

القسم الأول:

ليكن لدينا الخوارزميتين التاليتين اللتان تحلان نفس المشكلة:

الخوارزمية π_1 تابعها الزمني :

$$T(n) = \begin{cases} 2 & ; n = 1 \\ 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 + 2 & ; otherwise \end{cases}$$

الخوارزمية π_2 تابعها الزمني :

$$T(n) = 5n^2 + 30$$

و لدينا النظرية التالية :

Master Theorem:	$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + O(n^k)$		
=>	$T(n) \in O(n^k)$	$; a < b^k$	$case(1)$
=>	$T(n) \in O(n^k \log(n))$	$; a = b^k$	$case(2)$
=>	$T(n) \in O(n^{\log_b(a)})$	$; a > b^k$	$case(3)$

1- أي حالة يندرج تحتها زمن تنفيذ الخوارزمية الأولى :

case 1 (a   case 2 (b

case 3 (c   غير ذلك (d

الجواب :   case 2 (b

لأن a=4 , b=2 , k=2، نعوض فيصبح لدينا a=4 و $b^k=2^2=4$ متساويان.

2- قدر تعقيد الخوارزمية الأولى :

$O(n^2*\log(n))$ (a $O(n^2)$ (b

$O(n^{\log(n)})$ (c $O(n)$ (d

الجواب : $O(n^2*\log(n))$ (a

نعوض في الـcase 2.

3- ما تعقيد الخوارزمية الثانية :

$O(n^2*\log(n))$ (a $O(n^2)$ (b

$O(n^{\log(n)})$ (c $O(n)$ (d

الجواب : $O(n^2)$ (b

لأن n^2 هو أكبر حد (ذو التعقيد الأسوء) في التابع الزمني للخوارزمية الثانية.

4- ما الزمن اللازم لتنفيذ الخوارزمية الأولى من أجل n=2 :

8 (a   10 (b   14 (c   غير ذلك (d

الجواب :   14 (c

بالتعويض في T(n) نجد أن :

T(2)=4T(1)+4+2=4*2+6=8+6=14

قيمة T(1)=2 من المعطيات.

5- ما الزمن اللازم لتنفيذ الخوارزمية الأولى من أجل n=8 :

a) 74   b) 296   c) 362   d) غير ذلك

الجواب : c) 362

بالتعويض في T(n) نجد أن :

$$T(8)=4T(4)+64+2=4\mathbf{T(4)}+66$$

$$\mathbf{T(4)}=4T(2)+16+2=4*14+18=56+18=74$$

$$T(8)=4*\mathbf{74}+66=296+66=362$$

قيمة T(2)=14 حسبناها في الطلب السابق.

6- ما الزمن اللازم لتنفيذ الخوارزمية الثانية من أجل n=2 :

a) 30   b) 50   c) 70   d) غير ذلك

الجواب : b) 50

بالتعويض في T(n) نجد أن :

$$T(2)=5*4+30=20+30=50$$

7- ما الزمن اللازم لتنفيذ الخوارزمية الثانية من أجل n=8 :

a) 330   b) 350   c) 400   d) غير ذلك

الجواب : b) 350

بالتعويض في T(n) نجد أن :

$$T(8)=5*64+30=320+30=350$$

8- في حالة n صغيرة ($n<n_0$) أي الخوارزميتين أفضل و لماذا :

a) π_1 أفضل لأن زمن التنفيذ عندها أكبر من π_2

b) π_1 أفضل لأن زمن التنفيذ عندها أصغر من π_2

c) π_2 أفضل لأن زمن التنفيذ عندها أكبر من π_1

d) π_2 أفضل لأن زمن التنفيذ عندها أصغر من π_1

الجواب : b) π_1 أفضل لأن زمن التنفيذ عندها أصغر من π_2

لأنه في حالة n صغيرة (n=2 مثلا) يكون زمن تنفيذ الخوارزمية الأولى أقل، وبالتالي تكون أفضل.

9- في حالة n كبيرة ($n>n_0$) أي الخوارزميتين أفضل و لماذا :

a) π_1 أفضل لأن زمن التنفيذ عندها أكبر من π_2

b) π_1 أفضل لأن زمن التنفيذ عندها أصغر من π_2

c) π_2 أفضل لأن زمن التنفيذ عندها أكبر من π_1

d) π_2 أفضل لأن زمن التنفيذ عندها أصغر من π_1

الجواب : d) π_2 أفضل لأن زمن التنفيذ عندها أصغر من π_1

لأن في حالة n كبيرة (n=8 مثلا) يكون زمن تنفيذ الخوارزمية الثانية أقل، وبالتالي تكون أفضل.

10- ما هي القيمة الحرجة n_0 التي تسبب تبدل الأفضلية بين الخوارزميتين :

a) 2   b) 4   c) 8   d) غير ذلك

الجواب :   d) غير ذلك

لكي تكون n_0 نقطة حرجة (نقطة تعادل) يجب أن تتساوى قيم T_1وT_2 عندها، نجرب الخيارات:

π_1 : T(2)=14   ,T(4)=74   ,T(8)=362

π_2 : T(2)=50   ,T(4)=110   ,T(8)=350

لا يتساوى الزمنان في أي منهم.

القسم الثاني:

لتكن لدينا الخوارزمية L المعرفة بالشكل التالي :

```
   Number: L(Array of Number: A)
1    x←A[0]
2    y←A[0]
3    for i:1->size(A)
4      if(A[i]>x)
5        x←A[i]
6      if(A[i]<y)
7        y←A[i]
8    return x-y
```

نستخدم الجدول الآتي لحساب التعقيد، توجد فيه رموز من الشكل {??} و سترد أسئلة عليها :

	cost	Times
1	1	{2?}
2	1	{2?}
3	2	{3?}
4	{1?}	{3?}
5	{1?}	{4?}
6	{1?}	{3?}
7	{1?}	{5?}
8	1	1

11- كيف نبرهن أن L خوارزمية :

a) باستخدام الاستقراء الرياضي.

b) عن طريق تنفيذها على الحاسب.

c) عن طريق استخدام لغات برمجية متعددة.

d) بأن تقوم بالمهمة المحددة و التوقف عند الانتهاء.

الجواب : إما a أو d، لم يتم التأكد.

12- حدد القيمة المناسبة لـ{1?} :

a) 1   b) T(n)   c) $0 \le t \le n$ d) n

الجواب : a) 1

لأن كلفة تنفيذ عملية المقارنة أو الإسناد هو ثابت (1 cycle).

13- حدد القيمة المناسبة لـ{?2} :

1 (a   T(n) (b   0≤t≤n (c   n (d

الجواب : 1 (a

لأن عدد تكرارات العمليات المذكورة هو مرة واحدة فقط (ليست محاطة بحلقات و التابع ليس عودي).

14- حدد القيمة المناسبة لـ{?3} :

1 (a   T(n) (b   0≤t≤n (c   n (d

الجواب : n (d

لأن عدد تكرارات العمليات المذكورة هو n مرة لأنها محاطة بحلقة تتكرر n مرة.

15- حدد القيمة المناسبة لـ{?4} :

1 (a   T(n) (b   0≤t≤n (c   n (d

الجواب : 0≤t≤n (c

لأن العملية المذكورة ضمن شرط، يمكن أن ننفذه n مرة (يتحقق الشرط دوماً) أو لا ننفذه أبداً (لا يتحقق الشرط أبداً).

16- ما هو التابع الزمني للخوارزمية L في أفضل الأحوال :

T(n)=4n+3 (a   T(n)=6n+3 (b

$T(n)=4n^2+3$ (c $T(n)=6n^2+3$ (d

الجواب : T(n)=4n+3 (a

في أفضل الأحوال لن تتحقق أي if و بالتالي {?4}=0، نضرب كل times بالـcost الموافقة ثم نجمعهم وينتج لدينا T(n)=4n+3.

17- ما هو التابع الزمني للخوارزمية L في أسوء الأحوال :

T(n)=4n+3 (a   T(n)=6n+3 (b

$T(n)=4n^2+3$ (c $T(n)=6n^2+3$ (d

الجواب : T(n)=6n+3 (b

في أسوء الأحوال يمكن أن يتحقق الشرطان if و بالتالي {?4}=n، نضرب كل times بالـcost الموافقة ثم نجمعهم وينتج لدينا T(n)=6n+3.

18- أي من الحالات التالية تضمن إنتاج تابع زمني بأفضل الأحوال :

a) عناصر المصفوفة A مرتبة تنازلياً

b) عناصر المصفوفة A غير مرتبة

c) عناصر المصفوفة A مرتبة تصاعدياً

d) عناصر المصفوفة A متساوية

الجواب : d) عناصر المصفوفة A متساوية

في أفضل الأحوال يجب ألا تتحقق أي if و بالتالي يجب أن تكون كل العناصر مساوية لأول عنصر A[0]، أي جميعها متساوية.

19- إذا كان عدد عناصر المصفوفة n=500 و ضمنّا أسوء الأحوال فما هو الزمن المقدر للتنفيذ

a) 2003   b) 3003   c) 500   d) 503

الجواب : b) 3003

بما أننا نعلم أن أسوء الأحوال قد تحقق فنعوض n=500 في التابع الزمني لأسوء الأحوال، وهو T(n)=6n+3 فيصبح لدينا T(500)=6*500+3=3000+3=3003.

20- ما تعقيد الخوارزمية L ؟

a) $O(n)$ b) $O(n^2)$

c) $O(1)$ d) $O(\log(n))$

الجواب : a) $O(n)$

لكي نعرف ما هو تعقيد الخوارزمية نختار أسوء الأحوال، أي T(n)=6n+3 و نلاحظ أن الحد الأسوء هو من رتبة n.

21- ما الذي تقوم به الخوارزمية L ؟

a) إيجاد أكبر و أصغر عنصر

b) إيجاد العنصر الأكثر تكراراً

c) إيجاد المدى

d) غير ذلك

الجواب : c) إيجاد المدى

نلاحظ أنه في كل دخول للحلقة سيتم فحص العنصر، فإذا كان أكبر من x فإن x ستأخذ قيمته، و إذا كان أصغر من y فإن y ستأخذ قيمته، أي في نهاية الحلقة سيكون x هو أكبر عنصر و y هو أصغر عنصر و التابع سيعيد فرقهما وهو ما يسمى المدى

22- إذا أردنا كتابة الخوارزمية بلغة JAVA فماذا يجب أن نكتب في السطر رقم 3 ؟

a) `for (int i=0;i<A.length;i++)`

b) `for (int i=1;i<A.length;i++)`

c) `for (int i=0;i<A.length-1;i++)`

d) `for (int i=1;i<A.length-1;i++)`

الجواب : b) `for (int i=1;i<A.length;i++)`

يجب علينا أن نمر على جميع عناصر A، أي أن i ستأخذ القيم من 0 لـ n-1، بدأنا بأول عنصر خارج الحلقة أي استعملنا i=0 فتبقى القيم من 1 لـ n-1 نمرّ عليها بالحلقة.

الخياران a و c أيضاً صحيحان إذا تمّ تطبيقهما، لكن شكل الخوارزمية يدل أن الجواب هو b.

23- إذا حولنا الخوارزمية لشكل عودي، فما التغيير الذي سيطرأ على التعقيد ؟

a) يزداد b) ينقص c) لا يتأثر d) يمكن أن يزداد أو ينقص

الجواب : c) لا يتأثر

إذا حولنا الخوارزمية لشكل عودي فإن طريقة عملها ستبقى نفسها، المرور على جميع العناصر و القيام بعمليات المقارنة و سيبقى التعقيد نفسه.

القسم الثالث:

أثناء تحليل لعبة حاسوبية عن أوراق الشدة يجب تعريف بنية معطيات تعبر عن الأوراق المتاحة للعب. و قد تكون بشكل حزمة Deck أو اثنتين أو أكثر. و في أي حالة سيكون هناك عدالة بين اللاعبين في عدد الأوراق من نفس الرقم و النمط (أي ورقة يمكن أن تتكرر و تكون موجودة مرة أو اثنتين أو أكثر). لنعرف نمط معطيات مجردة Abstract Data Type لهذا الهدف.

24- نعرف مصفوفة تعبر عن الأوراق المتاحة للعب، عن أي جزء من النمط تعبر المصفوفة ؟

a) شرط قبلي Pre-Condition

b) بديهية Axiom

c) بنية معطيات داخلية

d) باني Constructor

الجواب :

25- أثناء بناء المصفوفة نوزع الحزم على اللاعبين فتعبر العدالة في عدد الأوراق

a) شرط قبلي Pre-Condition

b) بديهية Axiom

c) بنية معطيات داخلية

d) باني Constructor

الجواب :

26- عند استخدام ورقة أثناء اللعب لا يمكن استخدامها ثانيةً، تعبر هذه السماحية بالاستخدام عن النمط

a) شرط قبلي Pre-Condition

b) بديهية Axiom

c) بنية معطيات داخلية

d) باني Constructor

الجواب :

القسم الرابع:

كما نعلم، يوجد عدة طرق للتفكير أثناء الحل، نذكر منها :

B&F: Brute Force

C&C: Decrease And Conquer

D&C: Divide And Conquer

و في كل منها يوجد طرق متعددة كالعودية أو التراجعية أو التكرارية...

27- إذا أردت البحث في سلسلة غير مرتبة، فقمت بالتجوال على العناصر عنصراً عنصراً و مقارنة كل عنصر بالذي تبحث عنه، فإذا كان نفسه ترده و غير ذلك تتابع التجوال، تحت أي طريقة يندرج هذا التفكير ؟

B&F (a   C&C (b   D&C (c   غير ذلك (d

الجواب: B&F (a

لأن الطريقة المذكورة هي البحث الخطي، و تعتمد على تجريب كل الخيارات (كل عناصر المصفوفة في هذه الحالة) لإيجاد الخيار المطلوب.

28- تتمة للسؤال السابق، قدر تعقيد هذه الخوارزمية

$O(n)$ (a $O(n^2)$ (b $O(n!)$ (c $O(2^n)$ (d

الجواب: $O(n)$ (a

لأننا في أسوء حالة سنمر على جميع العناصر فالتعقيد سيكون خطي.

29- ما تعقيد عملية جداء مصفوفتين مربعتين طول كل واحدة هو n

$O(n^3)$ (a $O(n^2)$ (b

$O(n!)$ (c $O(n^n)$ (d

الجواب: $O(n^3)$ (a

لأننا في كل الأحوال سنمر على جميع الأعمدة من المصفوفة الأولى و في كل عمود سنمر على جميع الأسطر و في كل سطر سنجمع جداء كل عنصر من العمود بالعنصر الموافق من السطر، أي:

حلقة للأعمدة بتعقيد $O(n)$

بداخلها حلقة للأسطر بتعقيد $O(n)$

بداخلها حلقة للمرور على العناصر بتعقيد $O(n)$

فالتعقيد تكعيبي $O(n^3)$

30- في حال أردت سرد كل التباديل المحتملة لمجموعة من n عنصراً، مثلا التباديل للمجموعة ABC هيَ : ABC, ACB, BAC,BCA, CAB,CBA، و طريقة الحل ستكون بأن نمر على جميع العناصر عنصراً عنصراً و نضعه في المكان الأول من التبديل و سرد جميع التباديل المحتملة لباقي المجموعة من دونه، و إذا بقيَ معنا عنصر واحد نضعه فوراً و لا نتابع التنفيذ.

تحت أي نمط تندرج طريقة التفكير

a) B&F   b) C&C   c) D&C   d) غير ذلك

الجواب: a) B&F

لأن الطريقة المذكورة تعتمد على إيجاد كل الاحتمالات (كل التباديل).

31- تتمة للسؤال السابق، قدر تعقيد هذه الخوارزمية

a) $O(n)$ b) $O(n^2)$ c) $O(n!)$ d) $O(2^n)$

الجواب: c) $O(n!)$

لأننا في أول دخول سنمر على الـn عنصراً ثم نستثني الأول، و ثاني دخول سنمر على n-1 عنصراً

و نستثني الثاني،... وهكذا حتى نصل للعنصر الأخير و نضعه مباشرة بتعقيد 1.

فالتعقيد هو عاملي (يمكن رسم شجرة للتأكد).

32- في حال أردت أردت الخروج من متاهة مكونة من n عقدة و أكبر عدد للطرق الخارجة من أي عقدة هو 4، عند كل عقدة تقوم باختيار أحد الطرق و تستمر بالتجول حتى تصل لطريق مسدود، فتعود و تخير الاختيار حتى تصل للطريق الصحيح، تحت أي نمط يندرج هذا التفكير ؟

تحت أي نمط تندرج طريقة التفكير

a) B&F   b) C&C   c) D&C   d) غير ذلك

الجواب: a) B&F

لأن الطريقة المذكورة تعتمد على تجريب كل الاحتمالات (كل الطرق الممكنة).

33- تتمة للسؤال السابق، قدر تعقيد هذه الخوارزمية

a) $O(n)$ b) $O(n^2)$ c) $O(n!)$ d) $O(2^n)$

الجواب:

يمكن حلها بتعقيد أسي $O(2^n)$، لكن إذا تم استخدام الـdp **قد** تُحل بتعقيد تربيعي $O(n^2)$.

34- لتكن لدينا الخوارزمية التي تقوم بضرب عددين A و B:

يبدأ الناتج بقيمة 0،

في حال كان العدد الثاني لا يقبل القسمة على 3 و باقي القسمة هو 1، نضيف العدد الأول للناتج،

و في حال كان العدد الثاني لا يقبل القسمة على 3 و باقي القسمة هو 2، نضيف العدد الأول للناتج مرتين.

و في كل الحالات نضرب العدد الأول بـ3 و نقسم العدد الثاني على 3 ثم نعيد تطبيق العملية حتى يصبح العدد الثاني 0.

تحت أي نمط تفكير يندرج هذا الحل ؟

a) B&F   b) C&C   c) D&C   d) غير ذلك

الجواب: b) C&C

لأن الطريقة المذكورة تعتمد على تصغير المسألة لتصبح متعلقة بـ$\frac{B}{3}$ ثم $\frac{B}{9}$ ثم ....

أي Decrease By Constant Factor.

35- تتمة للسؤال السابق، قدر تعقيد هذه الخوارزمية

a) O(A)   b) O(B)

c) O(A*B)   d) O(Max(A,B))

الجواب: b) O(B)

لأن شرط التوقف يتعلق بـB.

36- أي من بنى المعطيات التالية غير خطي ؟

a) المكدس Stack   b) الرتل Queue

c) البيان Graph   d) المصفوفة Array

الجواب: c) البيان Graph

لأن البنى الباقية خطية.

37- أي مما يلي هو بنية معطيات ؟

a) سلاسل القفز Skip List

b) الفرز السريع Quick Sort

c) التابع التكعيبي Cubic Function

d) البحث الثنائي Binary Search

الجواب: a) سلاسل القفز Skip List

لأن الأشياء الباقية هيَ خوارزميات.

38- أي مما يلي هو بنية معطيات ؟

a) تحويل العدد إلى ثنائي   b) جداء المصفوفات

c) الشجرة الثنائية   d) التعقيد الأسي

الجواب: c) الشجرة الثنائية

لأن الأشياء الباقية ليست بنى معطيات.

39- أي مما يلي هو طريقة تفكير ؟

a) أشجار القرار

b) التابع الخطي

c) الفهرسة Indexing

d) القوة المفرطة Brute Force

الجواب: d) القوة المفرطة Brute Force

لأنها طريقة تفكير.

40- أي من الخوارزميات الشهيرة التالية صاحبة التعقيد التربيعي

a) توزيع الوزراء على رقعة شطرنج

b) الفرز بالعد Counting Sort

c) البحث الخطي Linear Search

d) الفرز الفقاعي Bubble Sort

الجواب: d) الفرز الفقاعي Bubble Sort

لأنه الوحيد ذو التعقيد التربيعي.

النموذج 1:

القسم الأول:

ليكن لدينا الخوارزميتين التاليتين اللتان تحلان نفس المشكلة:

الخوارزمية π_1 تابعها الزمني :

$$T(n) = \begin{cases} 1 & ; n = 1 \\ 3T\left(\frac{n}{3}\right) + n^2 + 5 & ; \, otherwise \end{cases}$$

الخوارزمية π_2 تابعها الزمني :

$$T(n) = 1.5n^2 + 10$$

و لدينا النظرية التالية :

Master Theorem:

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + O(n^k)$$

=> $T(n) \in O(n^k)$ $\quad ; a < b^k \quad case(1)$

=> $T(n) \in O(n^k \log(n))$ $\quad ; a = b^k \quad case(2)$

=> $T(n) \in O(n^{log_b(a)})$ $\quad ; a > b^k \quad case(3)$

1- تحت أي حالة يندرج زمن تنفيذ الخوارزمية الأولى :

a) case 1   b) case 2

c) case 3   d) غير ذلك

الجواب : a) case 1

لأن a=3 , b=3 , k=2، نعوض فيصبح لدينا a=3 و $b^k=3^2=9$ نلاحظ أن $a<b^k$.

2- قدر تعقيد الخوارزمية الأولى :

a) $O(n^2*\log(n))$ b) $O(n^2)$

c) $O(n^{\log(n)})$ d) $O(n)$

الجواب : b) $O(n^2)$

نعوض في الـcase 1.

3- ما تعقيد الخوارزمية الثانية :

a) $O(n^2*\log(n))$ b) $O(n^2)$

c) $O(n^{\log(n)})$ d) $O(n)$

الجواب : b) $O(n^2)$

لأن n^2 هو أكبر حد (ذو التعقيد الأسوء) في التابع الزمني للخوارزمية الثانية.

4- ما الزمن اللازم لتنفيذ الخوارزمية الأولى من أجل n=3 :

a) 8   b) 14   c) 17   d) غير ذلك

الجواب : c) 17

بالتعويض في T(n) نجد أن :

T(3)=3T(1)+9+5=3*1+14=3+14=17

قيمة T(1)=1 من المعطيات.

5- ما الزمن اللازم لتنفيذ الخوارزمية الأولى من أجل n=27 :

a) 374   b) 792   c) 1145   d) غير ذلك

الجواب : c) 1145

بالتعويض في T(n) نجد أن :

$$T(27)=3T(9)+729+5=3\mathbf{T(9)}+734$$

$$\mathbf{T(9)}=3T(3)+81+5=3*17+86=51+86=137$$

$$T(27)=3*\mathbf{137}+734=411+734=1145$$

قيمة T(3)=17 حسبناها في الطلب السابق.

6- ما الزمن اللازم لتنفيذ الخوارزمية الثانية من أجل n=3 :

a) 10   b) 23.5   c) 30   d) غير ذلك

الجواب : b) 23.5

بالتعويض في T(n) نجد أن :

$$T(3)=1.5*9+10=14.5+10=23.5$$

7- ما الزمن اللازم لتنفيذ الخوارزمية الثانية من أجل n=27 :

a) 132   b) 1103.5

c) 1104   d) غير ذلك

الجواب : b) 1103.5

بالتعويض في T(n) نجد أن :

$$T(27)=1.5*729+10=1093.5+10=1103.5$$

8- في حالة n صغيرة ($n<n_0$) أي الخوارزميتين أفضل و لماذا :

a) π_1 أفضل لأن زمن التنفيذ عندها أكبر من π_2

b) π_1 أفضل لأن زمن التنفيذ عندها أصغر من π_2

c) π_2 أفضل لأن زمن التنفيذ عندها أكبر من π_1

d) π_2 أفضل لأن زمن التنفيذ عندها أصغر من π_1

الجواب : b) π_1 أفضل لأن زمن التنفيذ عندها أصغر من π_2

لأن في حالة n صغيرة (n=3 مثلا) يكون زمن تنفيذ الخوارزمية الأولى أقل، وبالتالي تكون أفضل.

9- في حالة n كبيرة ($n>n_0$) أي الخوارزميتين أفضل و لماذا :

a) π_1 أفضل لأن زمن التنفيذ عندها أكبر من π_2

b) π_1 أفضل لأن زمن التنفيذ عندها أصغر من π_2

c) π_2 أفضل لأن زمن التنفيذ عندها أكبر من π_1

d) π_2 أفضل لأن زمن التنفيذ عندها أصغر من π_1

الجواب : d) π_2 أفضل لأن زمن التنفيذ عندها أصغر من π_1

لأن في حالة n كبيرة (n=27 مثلا) يكون زمن تنفيذ الخوارزمية الثانية أقل، وبالتالي تكون أفضل.

10- ما هي القيمة الحرجة n_0 التي تسبب تبدل الأفضلية بين الخوارزميتين :

a) 3   b) 9   c) 27   d) غير ذلك

الجواب :   d) غير ذلك

لكي تكون n_0 نقطة حرجة (نقطة تعادل) يجب أن تتساوى قيم T_1 وT_2 عندها، نجرب الخيارات:

π_1 : T(3)=17   ,T(9)=137   ,T(27)=1145

π_2 : T(3)=23.5   ,T(9)=134.5   ,T(27)=1103.5

لا يتساوى الزمنان في أي منهم.

القسم الثاني:

لتكن لدينا الخوارزمية L المعرفة بالشكل التالي :

	Number: L(Array of Number: A)
1	x←A[0]
2	y←A[0]
3	i←1
4	while i<size(A)
5	if(A[i]>x)
6	x←A[i]
7	if(A[i]<y)
8	y←A[i]
9	i←i+1
10	return x-y

نستخدم الجدول الآتي لحساب التعقيد، توجد فيه رموز من الشكل {??} و سترد أسئلة عليها :

	cost	Times
1	1	{2?}
2	1	{2?}
3	1	{2?}
4	1	{3?}
5	{1?}	{3?}
6	{1?}	{4?}
7	{1?}	{3?}
8	{1?}	{5?}
9	{1?}	{3?}
10	1	1

11- كيف نبرهن أن L خوارزمية :

a) باستخدام الاستقراء الرياضي.

b) عن طريق تنفيذها على الحاسب.

c) عن طريق استخدام لغات برمجية متعددة.

d) بأن تقوم بالمهمة المحددة و التوقف عند الانتهاء.

الجواب :

إما a أو d، لم يتم التأكد.

12- حدد القيمة المناسبة لـ{1?} :

a) 1   b) T(n)   c) 0≤t≤n   d) n

الجواب : a) 1

لأن كلفة تنفيذ عملية المقارنة أو الإسناد هو ثابت (1 cycle).

13- حدد القيمة المناسبة لـ{?2} :

1 (a   T(n) (b $0 \le t \le n$ (c   n (d

الجواب :   1 (a

لأن عدد تكرارات العمليات المذكورة هو مرة واحدة فقط (ليست محاطة بحلقات و التابع ليس عودي).

14- حدد القيمة المناسبة لـ{?3} :

1 (a   T(n) (b $0 \le t \le n$ (c   n (d

الجواب :   n (d

لأن عدد تكرارات العمليات المذكورة هو n مرة لأنها محاطة بحلقة تتكرر n مرة.

15- حدد القيمة المناسبة لـ{?4} :

1 (a   T(n) (b $0 \le t \le n$ (c   n (d

الجواب : $0 \le t \le n$ (c

لأن العملية المذكورة ضمن شرط، يمكن أن ننفذه n مرة (يتحقق الشرط دوماً) أو لا ننفذه أبداً (لا يتحقق الشرط أبداً).

16- ما هو التابع الزمني للخوارزمية L في أفضل الأحوال :

$T(n)=4n+4$ (a $T(n)=6n+4$ (b

$T(n)=4n^2+4$ (c $T(n)=6n^2+4$ (d

الجواب : $T(n)=4n+4$ (a

في أفضل الأحوال لن تتحقق أي if و بالتالي {?4}=0، نضرب كل times بالـcost الموافقة ثم نجمعهم وينتج لدينا $T(n)=4n+4$.

17- ما هو التابع الزمني للخوارزمية L في أسوء الأحوال :

$T(n)=4n+4$ (a $T(n)=6n+4$ (b

$T(n)=4n^2+4$ (c $T(n)=6n^2+4$ (d

الجواب : $T(n)=6n+4$ (b

في أسوء الأحوال يمكن أن يتحقق الشرطان if و بالتالي {?4}=n، نضرب كل times بالـcost الموافقة ثم نجمعهم وينتج لدينا $T(n)=6n+4$.

18- أي من الحالات التالية تضمن إنتاج تابع زمني بأفضل الأحوال :

a) عناصر المصفوفة A مرتبة تنازلياً

b) عناصر المصفوفة A غير مرتبة

c) عناصر المصفوفة A مرتبة تصاعدياً

d) عناصر المصفوفة A متساوية

الجواب :   d) عناصر المصفوفة A متساوية

في أفضل الأحوال يجب ألا تتحقق أي if و بالتالي يجب أن تكون كل العناصر مساوية لأول عنصر [0]A، أي جميعها متساوية.

19- إذا كان عدد عناصر المصفوفة n=500 و ضمنّا أسوء الأحوال فما هو الزمن المقدر للتنفيذ

2004 (a   3004 (b   5004 (c   504 (d

الجواب :   3004 (b

بما أننا نعلم أن أسوء الأحوال قد تحقق فنعوض n=500 في التابع الزمني لأسوء الأحوال، وهو T(n)=6n+4 فيصبح لدينا .T(500)=6*500+4=3000+4=3004

20- ما تعقيد الخوارزمية L ؟

O(n) (a $O(n^2)$ (b

O(1) (c   O(log(n)) (d

الجواب :   O(n) (a

لكي نعرف ما هو تعقيد الخوارزمية نختار أسوء الأحوال، أي T(n)=6n+4 و نلاحظ أن الحد الأسوء هو من رتبة n.

21- ما الذي تقوم به الخوارزمية L ؟

a) إيجاد أكبر و أصغر عنصر

b) إيجاد العنصر الأكثر تكراراً

c) إيجاد المدى

d) غير ذلك

الجواب :   c) إيجاد المدى

نلاحظ أنه في كل دخول للحلقة سيتم فحص العنصر، فإذا كان أكبر من x فإن x ستأخذ قيمته، و إذا كان أصغر من y فإن y ستأخذ قيمته، أي في نهاية الحلقة سيكون x هو أكبر عنصر و y هو أصغر عنصر و التابع سيعيد فرقهما و هو ما يسمى المدى

22- إذا أردنا كتابة الخوارزمية بلغة JAVA فماذا يجب أن نكتب في السطر رقم 4 ؟

while (i<A.length) (a

while (i-1<A.length) (b

while (i<A.length-1) (c

while (i-1<A.length-1) (d

الجواب :   while (i<A.length) (a

يجب علينا أن نمر على جميع عناصر A، أي أن i ستأخذ القيم من 0 لـ n-1، بدأنا بأول عنصر خارج الحلقة أي استعملنا i=0 فتبقى القيم من 1 لـ n-1 نمرّ عليها بالحلقة.

الخيار d صحيح أيضاً إذا تمّ تطبيقه، لكن شكل الخوارزمية يدل أن الجواب هو a.

23- إذا حولنا الخوارزمية لشكل عودي، فما التغيير الذي سيطرأ على التعقيد ؟

a) يزداد   b) ينقص

c) لا يتأثر   d) يمكن أن يزداد أو ينقص

الجواب :   c) لا يتأثر

إذا حولنا الخوارزمية لشكل عودي فإن طريقة عملها ستبقى نفسها، المرور على جميع العناصر و القيام بعمليات المقارنة و سيبقى التعقيد نفسه.