

Simulation des modèles financiers Monte Carlo & différences finies pour les EDP

Yassine EL QALLI

Institut National de Statistique et d'Economie Appliquée

Décembre 2018

Filière Actuariat-Finance - Semestre 5

1 Méthodes Monte-Carlo pour les options

- Introduction
- Réduction de la variance
- Simulation des processus stochastiques

2 Méthodes des différences finies

- Généralités sur les EDP
- Différences finies pour l'EDP de Black et Scholes

Méthodes Monte-Carlo pour les options

Introduction

- En Finance le payoff des produits dérivés est donné par une fonction de l'actif sous-jacent à une (ou des) date(s) future(s).
- Le prix du produit dérivé, dans un modèle complet, est alors l'espérance sous l'unique probabilité risque neutre du payoff actualisé.
- L'objectif numérique est donc de calculer cette espérance de la manière la plus efficace et la plus rapide possible.

Les méthodes numériques:

- Ces espérances peuvent à l'aide de la formule de Feynman-Kac s'écrire comme la solutions d'équations aux dérivées partielles. Ainsi, on peut utiliser les méthode existantes de type éléments finis ou différences finies.
- Il existe également les méthodes dites d'arbre, qui consistent à approcher la solution de l'équation différentielle stochastique par une chaîne de Markov discrète.
- Enfin, les méthodes de Monte-Carlo. Ces méthodes nécessitent de savoir simuler l'EDS du sous-jacent. Souvent, il faut recourir à des schémas numériques. De plus, même cette discrétisation effectuée, il peut s'avérer que la méthode ne soit pas efficace, par exemple lorsque la variance est trop élevée. Les méthodes de réduction de variance permettent d'éviter ce genre de difficulté.

Théorème (Loi forte des grands nombres)

Soit $(X_i, i \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (iid) telles que $\mathbb{E}(|X_1|) < +\infty$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right) = \mathbb{E}(X_1).$$

Ce théorème permet d'utiliser des algorithmes probabilistes pour calculer n'importe quelle espérance. Considérons le cas où les variables aléatoires suivent une loi uniforme sur $[0, 1]$. Alors un générateur aléatoire permet de simuler cette loi. Pour approcher son espérance, il suffit donc de simuler n fois cette loi et de faire la moyenne des simulations. C'est aussi pour cela que le terme de gauche est souvent appelé moyenne arithmétique et on le notera \bar{X}_n .

Il faut remarquer également que cette méthode permet de calculer un certain nombre d'intégrales. Soit $I = \int_0^1 f(u)du$ où f est une fonction intégrable. On voit immédiatement que I se réécrit comme $I = \mathbb{E}[f(U)]$ où U est une variable aléatoire de loi $\mathcal{U}_{[0,1]}$. En appliquant l'algorithme précédant à $X_i = f(U_i)$ on calcule I .

Le problème se pose maintenant d'évaluer théoriquement l'efficacité de cette méthode. Il existe des théorèmes qui permettent de calculer la vitesse de convergence d'une méthode de Monte-Carlo.

Théorème (Théorème central Limite)

Soit $(X_i, i \geq 1)$ une suite de variables aléatoires, indépendantes et identiquement distribuées telles que $\mathbb{E}(X_i^2) < +\infty$. On pose $\sigma^2 = \text{Var}(X_i)$, alors

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma^2} \left(\mathbb{E}(X_1) - \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} G \quad \text{où} \quad G \rightarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

Remarque

Si on considère l'erreur de l'estimation

$$\epsilon_n = \mathbb{E}(X_1) - \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$$

alors d'après le théorème central limite pour tout $c_1 < c_2$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} c_1 \leq \epsilon_n \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} c_2 \right) = \int_{c_1}^{c_2} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

Ainsi, si on veut construire des intervalles de confiance, leurs largeurs dépend du nombre de simulations et de la variance.

En pratique on applique l'approximation précédente pour n assez large et $\epsilon_n \sim \mathcal{N}(0, \frac{\sigma^2}{n})$.

A noter qu'il est impossible de borner l'erreur puisque le support d'une variable gaussienne est \mathbb{R} . Néanmoins, on peut définir un intervalle de confiance. Par exemple, remarquer que

$$\mathbb{P}(|G| \leq 1.96) \approx 0.95.$$

Donc, avec une probabilité de 0.95, pour n assez large on a

$$|\epsilon_n| \leq 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Il faut également noter :

L'évaluation de la variance est cruciale pour mesurer l'efficacité de la méthode.

On note par \bar{X}_N l'estimateur Monte-Carlo de $\mathbb{E}(X)$

$$\bar{X}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i.$$

L'estimateur standard de la variance est donné par

$$\bar{\sigma}_N^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X}_N)^2.$$

Donc avec une probabilité de 0.95, $\mathbb{E}(X)$ appartient à l'intervalle (aléatoire) donné par

$$\left[\bar{X}_N - \frac{1.96 \bar{\sigma}_N}{\sqrt{N}}, \bar{X}_N + \frac{1.96 \bar{\sigma}_N}{\sqrt{N}} \right].$$

Donc avec un peu de calcul additionnel, (calcul de $\bar{\sigma}_N$) on peut donner une estimation raisonnable de l'erreur d'approximation de $\mathbb{E}(X)$ par \bar{X}_N .

La possibilité d'avoir une erreur d'estimation avec un coût numérique faible est une propriété très utile des méthodes Monte-Carlo.

- Les méthodes de Monte-Carlo reposent sur la capacité de simuler des variables aléatoires. Pour ce faire, on a recours à des générateurs de nombres aléatoires.
- Un ordinateur n'est en pratique capable que de générer des suites déterministes. Il existe néanmoins des procédés permettant de construire des suites de nombres qui se comportent statistiquement comme des suites aléatoires.
- Ces suites sont construites par récurrence

$$u_{n+1} = h(u_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

La valeur de u_0 (le germe) doit alors être choisie par l'utilisateur sous peine de toujours obtenir la même suite de nombres. Souvent, on utilise l'horloge de l'ordinateur pour initialiser le germe.

- L'exemple le plus simple est celui du générateur congruentiel linéaire

$$h(x) = (ax + b) \pmod{m}$$

- En C (library `stdlib.h`), la fonction `srand()` permet d'initialiser le germe du générateur `rand()`. On peut par exemple écrire `srand(time(NULL));`.
- La fonction `rand()` retourne la valeur d'un entier (de type `long int`) uniformément distribué dans $[0, \text{RAND_MAX}]$.
- Attention, `rand()` peut renvoyer la valeur 0.

Maintenant, pour obtenir une variable gaussienne on peut se servir de la méthode la plus utilisée; la méthode de Box-Muller.

Proposition (Box-Muller)

Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$. On définit X et Y par

$$X = \sqrt{-2 \log U} \sin(2\pi V) \quad ; \quad Y = \sqrt{-2 \log U} \cos(2\pi V).$$

Alors X et Y sont deux variables aléatoires de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

Donc pour simuler une variable normale sous C on procède comme suit :

- Faire le changement d'échelle

$$u \rightarrow \tilde{u} := \frac{u}{\text{RAND_MAX}}.$$

tel que $\tilde{u} \in [0, 1]$.

- Générer maintenant deux variables uniformément distribuées dans $[0, 1]$, $u_1 = \frac{\text{rand}()}{\text{RAND_MAX}}$; $u_2 = \frac{\text{rand}()}{\text{RAND_MAX}}$ et donc

$$G = \sqrt{-2 \log u_1} \sin(2\pi u_2) \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Proposition (Algorithme polaire)

Soit (U, V) de loi uniforme sur $\{(u, v); 0 < u^2 + v^2 < 1\}$. On pose $R = \sqrt{U^2 + V^2}$ et

$$X = U \sqrt{-2 \ln(R^2)/R^2} \quad ; \quad Y = V \sqrt{-2 \ln(R^2)/R^2}.$$

Alors $(X, Y) \sim \mathcal{N}(0, \mathcal{I}_2)$

En pratique, on a souvent besoin de pouvoir simuler des vecteurs gaussiens faisant intervenir des corrélations entre les différentes dimensions.

Proposition

Soit $\mu \in \mathbb{R}^d$ et $\Gamma \in \mathcal{M}_d$ une matrice symétrique définie positive. Alors

- il existe $A \in \mathcal{M}_d$, telle que $\Gamma = AA^T$ (par exemple l'algorithme de Cholesky).
- si $G \sim \mathcal{N}(0, \mathcal{I}_d)$, alors $\mu + AG \sim \mathcal{N}(\mu, \Gamma)$.

Sous **GSL library** on peut utiliser la fonction

`gsl_linalg_cholesky_decomp(gsl_matrix *A)` pour faire la décomposition de Cholesky.

Réduction de la variance

- Nous avons vu que l'erreur due à l'approximation de l'espérance par une méthode Monte-Carlo à N simulations est majoré par le ratio σ/\sqrt{N} .
- On a donc intérêt à réécrire cette espérance comme fonction d'une espérance d'une autre variable aléatoire qui a une variance plus faible. C'est l'idée de base des techniques de la réduction de la variance.
- Supposons qu'on souhaite évaluer $\mathbb{E}(X)$. On cherche donc une représentation alternative pour cette espérance telle que

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) + C$$

en utilisant une variable aléatoire Y qui a une variance inférieure à celle de X et C une constante connue. Plusieurs techniques ont été développées pour implémenter cette idée. variables de contrôles, variables antithétiques, fonction d'importance,...

Variables de contrôles

L'idée de base de la méthode des variables de contrôles est d'écrire $\mathbb{E}(f(X))$ comme

$$\mathbb{E}(f(X)) = \mathbb{E}(f(X) - h(X)) + \mathbb{E}(h(X)),$$

où $\mathbb{E}(h(X))$ est d'espérance nulle ou calculable explicitement et

$$\text{Var}(f(X) - h(X)) \ll \text{Var}(f(X)).$$

Dans ce cas le calcul de $\mathbb{E}(f(X))$ sera effectué en utilisant une méthode Monte-Carlo pour estimer $\mathbb{E}(f(X) - h(X))$.

Comme la variance est plus faible, l'estimateur sera de meilleure qualité.

Réduction de la variance via la parité Call-put

Soit S_t le prix à l'instant t d'un actif risqué. On note par C le prix d'une option d'achat européenne et par P le prix d'une option de vente européenne

$$C = \mathbb{E} \left(e^{-rT} (S_T - K)^+ \right) \quad , \quad P = \mathbb{E} \left(e^{-rT} (K - S_T)^+ \right) .$$

On rappelle la parité Call-put qui est une relation qui ne dépend pas du choix du modèle

$$C - P = S_0 - Ke^{-rT} .$$

Cette formule peut être utilisée pour réduire la variance d'un call puisque

$$C = \mathbb{E} \left(e^{-rT} (K - S_T)^+ \right) + S_0 - Ke^{-rT} .$$

Le calcul Monte-Carlo du call est réduit au calcul du put.

Remarque

En général, la variance d'une option put est plus faible que celle d'une option call, puisque le payoff du put est borné contrairement au payoff du call.

Exemple 1 : Option Asiatique

La parité call-put peut être obtenue pour l'option asiatique. Posons $\bar{S}_T = \frac{1}{T} \int_0^T S_u du$. On a

$$\mathbb{E}((\bar{S}_T - K)^+) - \mathbb{E}((K - \bar{S}_T)^+) = \mathbb{E}(\bar{S}_T) - K,$$

et dans le cas de Black-Scholes on a

$$\mathbb{E}(\bar{S}_T) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbb{E}(S_u) du = \frac{1}{T} \int_0^T S_0 e^{ru} du = S_0 \frac{e^{rT} - 1}{rT}.$$

Méthode de Kemna-Vorst pour les options Asiatiques



KEMNA AND VORST. A pricing method for options based on average asset values. *Journal of Banking and Finance.*, 113-129.

Le prix d'un put Asiatique est

$$P = \mathbb{E} \left(e^{-rT} \left(K - \frac{1}{T} \int_0^T S_u du \right)^+ \right).$$

De plus on a dans le cadre de Black-Scholes

$$S_t = x \exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right)$$

où $(W_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien sous la probabilité risque-neutre.

Si σ et r sont assez petits, on peut espérer que

$$\frac{1}{T} \int_0^T S_u du \text{ "n'est pas trop loin de" } \exp \left(\frac{1}{T} \int_0^T \log(S_u) du \right)$$

Cet argument heuristique suggère d'utiliser la variable de contrôle suivante

$$Y = e^{-rT}(K - \exp(Z))^+$$

avec $Z = \frac{1}{T} \int_0^T \log(S_u) du$. Comme Z est gaussienne on peut calculer explicitement

$$\mathbb{E} \left(e^{-rT}(K - \exp(Z))^+ \right).$$

Elle est donnée par la formule

$$\mathbb{E} \left(e^{-rT}(K - \exp(Z))^+ \right) = K\mathcal{N}(-d) - e^{\mathbb{E}(Z) + \frac{1}{2}\text{Var}(Z)}\mathcal{N} \left(-d - \sqrt{\text{Var}(Z)} \right).$$

$$\text{où } d = \frac{\mathbb{E}(Z) - \log(K)}{\sqrt{\text{Var}(Z)}}.$$

Cette méthode est efficace quand $\sigma \approx 0.3$ par an et $r \approx 0.1$ par an et $T \approx 1$ année. Bien sûr, si les valeurs de σ et r sont plus grand, le gain obtenu avec cette variable de contrôle est moins significatif mais la méthode reste utile.

Variables antithétiques

La technique des variables antithétiques est largement utilisée dans la simulation Monte-Carlo. Cette technique est souvent efficace mais ses gains sont moins significatifs que les autres techniques. Considérons cet exemple pour illustrer.

Exemple

Considérons l'intégrale suivante

$$I = \int_0^1 g(x) dx.$$

Si U suit une loi uniforme sur $[0, 1]$, alors $1 - U$ a la même loi que U , et donc

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 (g(x) + g(1 - x)) dx = \mathbb{E} \left(\frac{1}{2} (g(U) + g(1 - U)) \right).$$

On peut donc générer n variables indépendantes U_1, \dots, U_n de loi uniforme sur $[0, 1]$, et approcher I par

$$I_{2n} = \frac{1}{n} \left[\frac{1}{2} (g(U_1) + g(1 - U_1)) + \dots + \frac{1}{2} (g(U_n) + g(1 - U_n)) \right]$$

$$I_{2n} = \frac{1}{2n} [g(U_1) + g(1 - U_1) + \dots + g(U_n) + g(1 - U_n)] .$$

Pour tester l'efficacité de cette méthode on la compare à la méthode standard avec $2n$ simulations

$$I_{2n}^0 = \frac{1}{2n} [g(U_1) + g(U_2) + \dots + g(U_{2n-1}) + g(U_{2n})] .$$

On a

$$\text{Var}(I_{2n}^0) = \frac{1}{2n} \text{Var}(g(U_1)),$$

et

$$\begin{aligned} \text{Var}(I_{2n}) &= \frac{1}{n} \text{Var} \left(\frac{1}{2} (g(U_1) + g(1 - U_1)) \right) \\ &= \frac{1}{4n} (\text{Var}(g(U_1)) + \text{Var}(g(1 - U_1)) + 2\text{Cov}(g(U_1), g(1 - U_1))) \\ &= \frac{1}{2n} [\text{Var}(g(U_1)) + \text{Cov}(g(U_1), g(1 - U_1))] . \end{aligned}$$

On a $Var(I_{2n}) \leq Var(I_{2n}^0)$ si et seulement si $Cov(g(U_1), g(1 - U_1)) \leq 0$.

Théorème

Soit X une v.a., T une transformation décroissante de \mathbb{R} telle que $T(X) \stackrel{\text{loi}}{=} X$, et f une fonction monotone alors

$$Cov(f(X), f(T(X))) \leq 0,$$

avec inégalité si f est strictement monotone sur un domaine de mesure non nulle.

Le principe de cette méthode est d'utiliser des propriétés de symétrie de la loi simulée pour réduire la variance.

Exemple en finance

Considérons une gaussienne standard G et une option d'achat $\mathbb{E}((\lambda e^{\sigma G} - K)^+)$.

Évidemment $G \stackrel{\text{loi}}{\sim} -G$, et la fonction T à considérer dans ce cas est $T(x) = -x$.

Comme le payoff est croissant comme fonction de G , l'estimateur antithétique suivant certainement va réduire la variance

$$I_{2n} = \frac{1}{2n} (g(G_1) + g(-G_1) + \cdots + g(G_n) + g(-G_n)) ,$$

où $g(x) = (\lambda e^{\sigma x} - K)^+$.

TP

Écrire un programme C comparant les prix d'une option d'achat $\mathbb{E}((\lambda e^{\sigma G} - K)^+)$ en utilisant

- La formule close de Black-Scholes;
- En utilisant un estimateur antithétique de Monte-Carlo ; Préciser l'intervalle de confiance.
- En utilisant une variable de contrôle ; Préciser l'intervalle de confiance.

Proposer aussi une amélioration dans le cas où $\lambda \ll K$.

Fonctions d'importance

On souhaite calculer $\mathbb{E}(g(X))$ où X est une v.a. de densité f . L'idée de cette méthode est d'introduire une nouvelle densité de probabilité $\tilde{f} > 0$. On peut alors écrire

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int \frac{g(x)f(x)\tilde{f}(x)}{\tilde{f}(x)}dx = \mathbb{E}\left(\frac{g(Y)f(Y)}{\tilde{f}(Y)}\right)$$

où Y est une v.a. de densité \tilde{f} . On peut donc approcher $\mathbb{E}(g(X))$ par

$$\frac{1}{n} \left(\frac{g(Y_1)f(Y_1)}{\tilde{f}(Y_1)} + \dots + \frac{g(Y_n)f(Y_n)}{\tilde{f}(Y_n)} \right),$$

où Y_1, \dots, Y_n sont des copies indépendantes de Y . Posons $Z = g(Y)f(Y)/\tilde{f}(Y)$. La variance de la simulation sera réduite si

$$\text{Var}(Z) < \text{Var}(g(X)).$$

La variance de Z est donnée par

$$\begin{aligned}\text{Var}(Z) &= \mathbb{E} \left(\frac{g(Y)^2 f(Y)^2}{\tilde{f}(Y)^2} \right) - [\mathbb{E}(g(X))]^2 \\ &= \int \frac{g(x)^2 f(x)^2}{\tilde{f}(x)} dx - [\mathbb{E}(g(X))]^2.\end{aligned}$$

Si on prend

$$\tilde{f}(x) = \frac{g(x)f(x)}{\mathbb{E}(g(X))}$$

La variance de Z sera nulle !!! Ce résultat ne peut pas être utilisé en pratique puisque il faudrait connaître ce que l'on cherche à calculer i.e. $\mathbb{E}(g(X))$.

Exemple

Supposons qu'on souhaite calculer $\mathbb{E}(\phi(G))$ où $G \sim \mathcal{N}(0, 1)$. On choisira la variable aléatoire $\tilde{G} = G + m$ à simuler où m doit être bien choisit. On a

$$\mathbb{E}(\phi(G)) = \mathbb{E} \left(\frac{\phi(\tilde{G})f(\tilde{G})}{\tilde{f}(\tilde{G})} \right) = \mathbb{E} \left(\phi(\tilde{G})e^{-m\tilde{G} + \frac{m^2}{2}} \right).$$

Cette égalité peut être réécrite

$$\mathbb{E}(\phi(G)) = \mathbb{E} \left(\phi(G + m)e^{-mG - \frac{m^2}{2}} \right).$$

Supposons qu'on souhaite calculer une option call dans le modèle de Black-Scholes, on a donc

$$\phi(G) = (\lambda e^{\sigma G} - K)^+,$$

et on suppose que $\lambda \ll K$. Dans ce cas, $\mathbb{P}(\lambda e^{\sigma G} > K)$ est très petite et l'exercice de l'option est peu probable.

Cette situation peut mener à une grande erreur dans la méthode Monte-Carlo standard. Pour augmenter la possibilité d'exercice, on peut utiliser l'égalité précédente

$$\mathbb{E} \left((\lambda e^{\sigma G} - K)^+ \right) = \mathbb{E} \left((\lambda e^{\sigma(G+m)} - K)^+ e^{-mG - \frac{m^2}{2}} \right)$$

Le choix de $m = m_0$ tel que $\lambda e^{\sigma m_0} = K$ donne

$$\mathbb{P} \left(\lambda e^{\sigma(G+m_0)} > K \right) = \frac{1}{2}.$$

A noter que ce choix de m_0 n'est pas optimal, mais il améliore considérablement l'efficacité de la méthode Monte-Carlo quand $\lambda \ll K$.

Proposition

Soit λ et K deux réels positifs tels que $\lambda < K$ et X_m la v.a

$$X_m = \left(\lambda e^{\sigma(G+m)} - K \right)^+ e^{-mG - \frac{m^2}{2}}.$$

On note σ_m^2 sa variance. Alors σ_m^2 est une fonction décroissante de m quand $m \leq m_0 = \frac{\log(K/\lambda)}{\sigma}$.

Valeur moyenne et conditionnement

Cette méthode utilise le fait que le conditionnement réduit la variance. Soit Z une variable aléatoire de carré intégrable, on a

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Z|Y)),$$

où Y est n'importe quelle variable aléatoire construite sur le même espace de probabilité. Il est connu que $\mathbb{E}(Z|Y)$ peut s'écrire comme

$$\mathbb{E}(Z|Y) = \phi(Y).$$

De plus, on a $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(\phi(Y))$ et par l'inégalité de Jensen pour les espérances conditionnelle on a

$$\mathbb{E}(\phi(Y)^2) \leq \mathbb{E}(Z^2),$$

donc $\text{Var}(\phi(Y)) \leq \text{Var}(Z)$.

Bien sûr, l'efficacité de la méthode repose sur la connaissance de la fonction ϕ . Cela est clair lorsque $Z = f(X, Y)$, où X et Y sont des variables indépendantes. Dans ce cas,

$$\mathbb{E}(f(X, Y)|Y) = \phi(Y),$$

où $\phi(y) = \mathbb{E}(f(X, y))$.

Exemple en finance : Volatilité stochastique

Soit $(W_t, t \geq 0)$ un mouvement Brownien. On suppose que $(S_t, t \geq 0)$ suit le modèle à volatilité stochastique suivant

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma_t dW_t), \quad S_0 = x,$$

où $(\sigma_t, t \geq 0)$ est un processus stochastique indépendant de $(W_t, t \geq 0)$.

On souhaite calculer, en utilisant des techniques de Monte-Carlo

$$\mathbb{E}(e^{rT} f(S_T)),$$

où f est une fonction de payoff. Clairement S_T s'exprime comme

$$S_T = x \exp \left(rT - \int_0^T \frac{\sigma_t^2}{2} dt + \int_0^T \sigma_t dW_t \right).$$

Mais, comme les processus $(\sigma_t, t \geq 0)$ et $(W_t, t \geq 0)$ sont indépendants on peut montrer que

$$\int_0^T \sigma_t dW_t \stackrel{\text{loi}}{\sim} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \sigma_t^2 dt} \times W_T.$$

En conditionnant par rapport au processus σ on obtient

$$\mathbb{E} \left(e^{-rT} f(S_T) \right) = \mathbb{E}(\psi(\sigma_t, 0 \leq t \leq T)),$$

où pour une trajectoire de volatilité fixée $(v_t, 0 \leq t \leq T)$

$$\begin{aligned} \psi(v_t, 0 \leq t \leq T) &= \mathbb{E} \left(e^{-rT} f \left(x e^{rT - \int_0^T \frac{v_t^2}{2} dt + \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v_t^2 dt} \times W_T \right) \right) \\ &= \phi \left(\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v_t^2 dt} \right). \end{aligned}$$

Or $\phi(\sigma)$ est donné par

$$\phi(\sigma) = \mathbb{E} \left(e^{-rT} f \left(x \exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma W_T \right) \right) \right).$$

Ainsi quand f est le payoff du call ou du put, il peut s'exprimer directement en utilisant les résultats de Black-Scholes.

Simulation des processus stochastiques

- Nous avons vu des méthodes de simulation permettant de calculer des espérances de variables aléatoires par la méthode de Monte Carlo.
- Ceci n'est possible que lorsque l'on est capable de simuler selon la loi des dites variables aléatoires.
- En finance, il s'agit souvent de calculer des espérances de la forme

$$\mathbb{E}(\psi(X_s, s \leq T)),$$

où ψ est une fonctionnelle du processus $(X_t, t \geq 0)$.

Le but de cette partie est de décrire quelques méthodes utilisées pour la **simulation trajectorielle** d'un processus donné. Cette simulation est nécessaire lorsque l'on veut calculer une **option dépendant de la trajectoire** (options asiatiques, barrières, etc...).

Simulation récursive d'une trajectoire Brownienne

On considère $(W_t, 0 \leq t \leq T)$ un mouvement Brownien défini sur $[0, 1]$. Soit $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ une subdivision de $[0, T]$. On cherche à simuler une trajectoire du mouvement Brownien en les points de la subdivision, c'est à dire que l'on cherche la loi du processus discret $(W_{t_i}, i = 0, \dots, n)$.

Proposition

Soit $(G_i)_{i=1, \dots, n}$ une suite i.i.d selon $\mathcal{N}(0, 1)$. On définit

$$X_0 = 0 \quad ; \quad X_i = \sum_{j=1}^i \sqrt{t_j - t_{j-1}} G_j, \quad i > 0.$$

Les vecteurs $(W_{t_0}, \dots, W_{t_n})$ et (X_0, \dots, X_n) sont égaux en loi.

Notons bien que cette méthode de simulation n'engendre pas d'erreur de discrétisation sur le processus discret.

Pour simuler la valeur de W_t on a exploité les propriétés des incréments en décomposant W_t comme suit : Pour un pas $h = \Delta t$ on écrit

$$W_t = W_{\Delta t} + (W_{2\Delta t} - W_{\Delta t}) + (W_{3\Delta t} - W_{2\Delta t}) + \dots + (W_t - W_{t-\Delta t})$$

Pour obtenir une réalisation de $(W_{ph}, 1 \leq p \leq N)$ il suffit de calculer

$$W_{ph}^h = \sqrt{h} \sum_{1 \leq k \leq p} G_k.$$

(Algorithme pour simuler les trajectoires du MB)

choisir Δt

$t_0 = 0$; $n = \text{ent} \left(\frac{T}{\Delta t} \right)$

pour $j = 0$ à n

$t_j = t_{j-1} + \Delta t$

générer $Z_j \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$W_{t_j} = W_{t_{j-1}} + Z_j \times \sqrt{\Delta t}$

$J++$

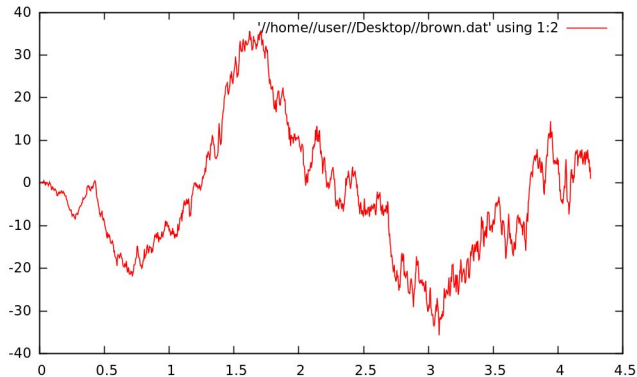


Figure: Une trajectoire du mouvement Brownien tracée sous Gnuplot.

Simulation du modèle de Black-Scholes

Soit

$$S_t = x \exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right).$$

En utilisant le paragraphe précédent, on construit une simulation exacte en loi du vecteur $(S_{ph}, 1 \leq p \leq N)$ en posant

$$S_{ph}^h = x \exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) ph + \sigma W_{ph}^h \right).$$

Il faut remarquer que l'on peut obtenir une simulation exacte quand la volatilité σ est une fonction du temps puisque

$$\int_{ph}^{(p+1)h} \sigma_s dW_s,$$

reste une suite de variable aléatoire gaussienne de moyenne 0 et de variance

$$\int_{ph}^{(p+1)h} \sigma_s^2 ds.$$

Discrétisation d'EDS

- La méthode de Monte-Carlo utilisée pour approcher $\mathbb{E}[f(X_T)]$ suppose que l'on sait simuler la loi de la variable aléatoire X_T .
- En général, on ne peut pas résoudre explicitement l'équation différentielle stochastique associée au processus X (C'est le cas de la plupart des modèles de taux d'intérêt).
- De plus, même si on trouve une solution, celle-ci peut être trop complexe pour être simulée directement.
- Il est naturel de chercher à simuler une solution à partir de l'équation elle-même en utilisant des schémas d'approximation.
- La méthode de Monte-Carlo va consister en l'approximation de $\mathbb{E}[f(X_T)]$ par $\sum_i f(\bar{X}_t^n)$ où \bar{X}_t^n est le schéma.
- L'erreur de ces méthodes à deux causes : **une erreur statistique** et une **erreur liée à la discrétisation**.

Le schéma d'Euler

Notre but est de trouver un schéma approchant la solution d'une équation différentielle stochastique. Soit $(X_t, t \geq 0)$ le processus d -dimensionnel solution de

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dW_s \quad (**)$$

où $(W_t, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien r -dimensionnel.

Soit n le nombre d'intervalles de discrétisation et $h = \frac{T}{n}$. La solution exacte vérifie

$$X_h = X_0 + \int_0^h b(X_s)ds + \int_0^h \sigma(X_s)dW_s$$

Une approximation naturelle de X_h , basée sur la définition de l'intégrale d'Itô, peut être donnée par

$$X_h \simeq X_0 + b(X_0)h + \sigma(X_0)(W_h - W_0).$$

En procédant par récurrence, on obtient le schéma d'Euler pour l'EDS (**)

$$\begin{aligned}X_0^n &= X_0, \\X_{(k+1)h}^n &= X_{kh}^n + b(X_{kh}^n)h + \sigma(X_{kh}^n)(W_{(k+1)h} - W_{kh}) \quad (*)\end{aligned}$$

Ce schéma est une généralisation naturelle aux EDS des schémas d'Euler utilisés pour les équations différentielles ordinaires. La simulation d'un schéma d'Euler est extrêmement simple puisqu'il suffit de simuler les variables gaussiennes $W_{(k+1)h} - W_{kh}$.

Théorème (Convergence forte)

Soient b et σ deux fonctions lipschitziennes. Soit $(W_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien r -dimensionnel. On note $(X_t, t \geq 0)$ l'unique solution de

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad X_0 = x,$$

et par $(X_{kh}^n, k \geq 0)$ la suite de variables définies par l'équation $(*)$. Alors, pour tous $q \geq 1$

$$\mathbb{E} \left(\sup_{k, kh \leq T} |X_{kh}^n - X_{kh}|^{2q} \right) \leq Ch^q.$$

De plus, pour tous $\alpha < \frac{1}{2}$, presque sûrement

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sup_{k, kh \leq T} |X_{kh}^n - X_{kh}| = 0$$

Ce théorème prouve que la vitesse de convergence dans L^2 est de l'ordre de $h^{1/2}$.

Le schéma de Milshtein

- Pour les équations différentielles ordinaires, le schéma d'Euler peut être amélioré par les méthodes de Runge Kutta.
- Plusieurs schémas d'ordre supérieur ont été proposés pour les EDS. Cependant leur mise en œuvre reste délicate.
- Le plus simple schéma d'ordre 2 est le schéma de Milshtein. Il permet de faire converger à une vitesse supérieure dans les espaces L^p mais est difficile à simuler quand la dimension est strictement plus grande que 1 et converge en loi à la même vitesse que le schéma d'Euler.

Le schéma de Milshtein quand $d = r = 1$ est défini par $\tilde{X}_0^n = x$ et pour $k \geq 1$

$$\begin{aligned}\tilde{X}_{(k+1)h}^n &= \tilde{X}_{kh}^n + b\left(\tilde{X}_{kh}^n\right)h + \sigma\left(\tilde{X}_{kh}^n\right)\left(W_{(k+1)h} - W_{kh}\right) \\ &+ \sigma'\left(\tilde{X}_{kh}^n\right)\sigma\left(\tilde{X}_{kh}^n\right)\int_{kh}^{(k+1)h}\left(W_s - W_{kh}\right)dW_s\end{aligned}$$

Explication: Pour comprendre comment le nouveau terme apparaît, considérons l'équation sans drift suivante

$$dX_t = \sigma(X_t)dW_t.$$

On peut étendre le schéma d'Euler à tous t dans $[t_k, t_{k+1}]$, ($t_k = kh$), par interpolation linéaire.

$$\hat{X}_t^n = \hat{X}_{t_k}^n + \sigma\left(\hat{X}_{t_k}^n\right)\left(W_t - W_{t_k}\right).$$

\hat{X}_t^n donne une approximation de X_t sur $[t_k, t_{k+1}]$ qui est meilleure que $X_{t_k}^n$ (approximé d'Euler en t_k).

On peut espérer aussi que $\sigma\left(\hat{X}_t^n\right)$ est une meilleure approximation de $\sigma(X_t)$ que $\sigma(X_{t_k}^n)$. Une bonne proposition pour un schéma d'ordre supérieur est

$$\hat{X}_t^n = \hat{X}_{t_k}^n + \int_{t_k}^t \sigma\left(\hat{X}_s^n\right) dW_s$$

avec une approximation en utilisant la formule de Taylor

$$\begin{aligned}\sigma\left(\hat{X}_t^n\right) &= \sigma\left(\hat{X}_{t_k}^n + \sigma\left(\hat{X}_{t_k}^n\right)\left(W_t - W_{t_k}\right)\right) \\ &\approx \sigma\left(\hat{X}_{t_k}^n\right) + \sigma'\left(\hat{X}_{t_k}^n\right) \sigma\left(\hat{X}_{t_k}^n\right)\left(W_t - W_{t_k}\right)\end{aligned}$$

Cela conduit au schéma suivant

$$\hat{X}_t^n = \hat{X}_{t_k}^n + \sigma\left(\hat{X}_{t_k}^n\right)\left(W_t - W_{t_k}\right) + \sigma\left(\hat{X}_{t_k}^n\right) \sigma'\left(\hat{X}_{t_k}^n\right) \int_{t_k}^t \left(W_s - W_{t_k}\right) dW_s.$$

C'est le schéma de Milstein avec $b = 0$. Le calcul s'étend au cas où $b \neq 0$.

On note qu'en pratique l'intégrale qui figure dans la formule de Milstein est calculable par la formule d'Itô

$$\int_{kh}^{(k+1)h} (W_s - W_{kh}) dW_s = \frac{1}{2} \left((W_{(k+1)h} - W_{kh})^2 - h \right).$$

Le schéma de Milstein se réécrit comme

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{(k+1)h}^n &= \tilde{X}_{kh}^n + \left(b\left(\tilde{X}_{kh}^n\right) - \frac{1}{2}\sigma'\left(\tilde{X}_{kh}^n\right)\sigma\left(\tilde{X}_{kh}^n\right) \right) h + \sigma\left(\tilde{X}_{kh}^n\right) (W_{(k+1)h} - W_{kh}) \\ &\quad + \frac{1}{2}\sigma'\left(\tilde{X}_{kh}^n\right)\sigma\left(\tilde{X}_{kh}^n\right) (W_{(k+1)h} - W_{kh})^2 \quad (*) \end{aligned}$$

Exemple

Considérons le cas du modèle de Black-Scholes avec

$$\Delta W_k = W_{(k+1)h} - W_{kh}$$

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma dW_t) \quad , \quad S_0 = x.$$

Le schéma d'Euler s'écrit

$$\tilde{X}_{(k+1)h}^n = \tilde{X}_{kh}^n (1 + rh + \sigma \Delta W_k).$$

Le schéma de Milstein

$$\tilde{X}_{(k+1)h}^n = \tilde{X}_{kh}^n \left(1 + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) h + \sigma \Delta W_k + \frac{1}{2}\sigma^2 (\Delta W_k)^2 \right).$$

Théorème

On suppose que b et σ sont deux fois continuellement différentiables avec des dérivées bornées. On note $(X_t, t \geq 0)$ l'unique solution de

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad X_0 = x,$$

et par $(\tilde{X}_{kh}^n, k \geq 0)$ la suite de variables aléatoires définis par (*). Alors

$$\mathbb{E} \left(\sup_{k, kh \leq T} \left| \tilde{X}_{kh}^n - X_{kh} \right|^q \right) \leq Ch^q \quad \forall q \geq 1.$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sup_{k, kh \leq T} \left| \tilde{X}_{kh}^n - X_{kh} \right| = 0 \text{ p.s.}, \quad \forall \alpha < 1$$

Le schéma de Milshtein améliore les vitesses de convergence trajectorielles : il est d'ordre h alors que le schéma d'Euler est d'ordre \sqrt{h} .

TP

Considérer le modèle de Black-Scholes et comparer les schémas d'Euler et Milstein avec la solution explicite.

Méthodes des différences finies

Généralités sur les EDP

Une EDP (équations aux dérivées partielles) est une équation(s) où l'inconnue est une fonction(s) de plusieurs variables où interviennent des dérivées partielles de cette fonction. Selon les cas cette équation doit être complétée de conditions aux limites, d'une condition initiale, etc...

D'une façon générale on se place dans \mathcal{O} un ouvert de \mathbb{R}^N et on distingue au moins trois catégories

- **Problème elliptique** : le cas modèle est le **problème de Dirichlet**

$$-\Delta u = f, \quad u = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{O}$$

où $\partial\mathcal{O}$ désigne le bord (la frontière de l'ouvert) et Δu le laplacien de u : $\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.

- **Problème Parabolique** : le cas modèle est l'**équation de la chaleur**

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & t \in (0, T), x \in \mathcal{O} \\ u(t=0) = u_0 & \text{dans } \mathcal{O} \text{ (donnée initiale)} \\ u = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\mathcal{O} \text{ (donnée sur le bord)} \end{cases}$$

Par rapport au cas précédent on ajoute la variable t (le temps), une condition initiale (c'est un problème d'évolution), et l'opérateur $\frac{\partial u}{\partial t}$.

- **Problème hyperbolique :**

- ordre 1 (problème de transport)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} = f & (0, T) \times \mathbb{R} \\ u(t = 0) = u_0 \end{cases}$$

- ordre 2 (équation des ondes)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f \\ \text{(donnée initiale)} \end{cases}$$

Chaque catégorie provient de situation physique/mécanique différente et possède des propriétés spécifiques. Généralement donner une expression simple de la solution d'une EDP est illusoire. Dans certains cas on peut espérer une expression sous forme intégrale, analytique, de séries de Fourier, etc.

La théorie mathématique pour comprendre ces équations est très large et utilise entre autres les espaces de Hilbert, les espaces de Sobolev, l'analyse fonctionnelle, la géométrie différentielle, etc.

Black-Scholes comme équation de la chaleur

Rappelons que l'équation de Black-Scholes est donnée par

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

Proposition

Si on pose $S = K \exp(x)$, $t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2}$, $q = \frac{2r}{\sigma^2}$ et $v(\tau, x) = V(K \exp(x), T - \frac{2\tau}{\sigma^2})$. Alors

$$v(\tau, x) = K \exp\left(-\frac{1}{2}(q-1)x - \frac{1}{4}(q+1)^2\tau\right) y(\tau, x)$$

où la fonction y ainsi définie est solution de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

Une deuxième simplification de Black-Scholes

Premièrement on simplifie l'EDP de B-S en posant $x = \ln(S)$ tel que

$$\frac{\partial V}{\partial t} + r \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = rV.$$

Si on pose $u(t, x) = e^{r(T-t)} V(e^x, t)$, alors u qui correspond au prix forward de l'option V satisfait

$$\frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\partial u}{\partial t}$$

Différences finies pour l'EDP de Black et Scholes

Les différences finies consistent à résoudre une version discrète de l'EDP sur une grille en remplaçant les dérivées partielles par des approximations discrètes du type différence progressive, centrée, rétrograde, etc.

On suppose que $u(t, x)$ $t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$ est suffisamment régulière. Comment approcher $\frac{\partial u}{\partial t}(t, x)$? L'idée vient de la définition de $\frac{\partial u}{\partial t}(t, x)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(t + h, x) - u(t, x)}{h}.$$

À l'aide des développements de Taylor on obtient

- différence progressive pour $\frac{\partial u}{\partial t}(t, x)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{u(t + k, x) - u(t, x)}{k} - \frac{k}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\bar{t}, x), \quad t < \bar{t} < t + k.$$

- différence rétrograde pour $\frac{\partial u}{\partial t}(t, x)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{u(t, x) - u(t - k, x)}{k} + \frac{k}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\bar{t}, x), \quad t - k < \bar{t} < t.$$

- différence centrée pour $\frac{\partial u}{\partial x}(t, x)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = \frac{u(t, x+h) - u(t, x-h)}{2h} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t, \bar{x}), \quad x-h < \bar{x} < x+h.$$

- différence centrée pour $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = \frac{u(t, x+h) - 2u(t, x) + u(t, x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t, \bar{x}), \quad x-h < \bar{x} < x+h.$$

Les différences finies ne permettent pas d'approcher la solution sur un intervalle infini (c'est généralement le cas des méthodes numériques). On se place donc sur $(t, x) \in [0, T] \times [a, b]$ avec $a < b$. Pour $M \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$k = \Delta t = \frac{T}{M+1} \quad h = \Delta x = \frac{b-a}{N+1}$$

$$t_j = jk \quad 0 \leq j \leq M+1$$

$$x_n = a + nh \quad 0 \leq n \leq N+1.$$

On définit $U_{j,n} = u(t_j, x_n)$, $k = \Delta t$ est le pas de discrétisation en temps tandis que $h = \Delta x$ est celui en espace.

L'équation discrète sera obtenue en écrivant l'EDP en (t_j, x_n) et en remplaçant les dérivées partielles par les différences définis auparavant (sans l'erreur de troncature).

On va étudier l'équation de la chaleur étant donné que c'est notre équation "source". Pour l'équation de Black et Scholes on a le choix entre "équation de la chaleur + changement de variables" et "différences finies en les variables originelles" (directement sur l'équation).

Pour avoir un problème bien posé au sens mathématique (existence et unicité) des conditions dites "conditions sur le bord" doivent être ajoutées. Ainsi dans la suite on va étudier l'approximation par les différences finies du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \text{ sur } [0, T] \times [a, b] \\ u(t=0, x) = u_0(x) \text{ dans } [a, b], \\ u(t, x=a) = \alpha, u(t, x=b) = \beta \quad \forall t \in [0, T]. \end{array} \right.$$

Schéma explicite

On utilise la différence progressive et la différence centrée pour écrire l'équation en un point (t_j, x_n) de la grille. Remarquons tout de suite que pour $x_{N+1} = b$ et $x_0 = a$ il n'est pas possible d'écrire la différence centrée car on "sort" de l'intervalle $[a, b]$. Pour x_0 par exemple on obtient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x_0) \approx \frac{u(t, a+h) - 2u(t, a) + u(t, a-h)}{h^2}$$

C'est la condition aux limite qui aidera! Donc pour $0 \leq j \leq M$ et $1 \leq n \leq N$ on a

$$\frac{U_{j+1,n} - U_{j,n}}{k} - \frac{U_{j,n+1} - 2U_{j,n} + U_{j,n-1}}{h^2} = f(t_j, x_n).$$

Comme nous avons une donnée initiale, la quantité $u(t_0, x_n) = u(0, x_n) = u_0(x_n)$ est déterminée pour tout $0 \leq n \leq N+1$. On se pose donc

$$\forall 1 \leq n \leq N, U_{0,n} = u_0(x_n).$$

Comme on a une condition aux limites $u(t_j, x_0) = \alpha$ et $u(t_j, x_{N+1}) = \beta$ on pose

$$\forall j \in \{1, \dots, M+1\} \quad U_{j,0} = \alpha, U_{j,N+1} = \beta.$$

Pour alléger les notations nous poserons aussi

$$F_{j,n} = f(t_j, x_n).$$

On peut donc réécrire notre schéma numérique : pour $0 \leq j \leq M$

$$U_{j+1,1} = U_{j,1} + \frac{k}{h^2} (U_{j,2} - 2U_{j,1}) + k \left(\frac{\alpha}{h^2} + F_{j,1} \right)$$

$$U_{j+1,n} = U_{j,n} + \frac{k}{h^2} (U_{j,n+1} - 2U_{j,n} + U_{j,n-1}) + k F_{j,n} \quad 2 \leq n \leq N-1$$

$$U_{j+1,N} = U_{j,N} + \frac{k}{h^2} (-2U_{j,N} + U_{j,N-1}) + k \left(\frac{\beta}{h^2} + F_{j,N} \right)$$

On constate assez facilement que la connaissance de $U_{j,n}$ pour tout $1 \leq n \leq N$ entraîne celle de $U_{j+1,n}$ pour tout $1 \leq n \leq N$. On retrouve ici le côté “évolution” en temps de l'équation de la chaleur.

Écriture Matricielle

$$U^{(j)} = \begin{pmatrix} U_{j,1} \\ U_{j,2} \\ \vdots \\ U_{j,N-1} \\ U_{j,N} \end{pmatrix} \quad F^{(j)} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{h^2} + F_{j,1} \\ F_{j,2} \\ \vdots \\ F_{j,N-1} \\ \frac{\beta}{h^2} + F_{j,N} \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On a alors

$$U^{(j+1)} = \left(I - \frac{k}{h^2} A \right) U^{(j)} + k F^{(j)}$$

Définition

- On définit l'erreur de troncature (ou de consistance) locale pour $1 \leq j \leq M, 1 \leq n \leq N$ du schéma explicite

$$\varepsilon_{j,n}(M, N) = \frac{u(t_{j+1}, x_n) - u(t_j, x_n)}{k} - \frac{u(t_j, x_{n+1}) - 2u(t_j, x_n) + u(t_j, x_{n-1}))}{h^2} - f(t_j, x_n).$$

et l'erreur de troncature globale

$$\varepsilon(M, N) = \max_{1 \leq j \leq M, 1 \leq n \leq N} |\varepsilon_{j,n}(M, N)|$$

- un schéma est dit consistant si

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \varepsilon(M, N)$$

- schéma est dit d'ordre p en temps et q en espace s'il existe $C > 0$ vérifiant pour tout M, N

$$\varepsilon(M, N) \leq C ((\Delta t)^p + (\Delta x)^q)$$

Proposition

Si la solution u est suffisamment régulière, le schéma explicite est consistant, d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace.

On pose

$$E^{(j)} = \tilde{U}^{(j)} - U^{(j)}$$

où $\tilde{U}^{(j)}$ est le vecteur solution exacte en t_j et x_n .

Proposition

Le schéma explicite est convergent pour $(\Delta t, \Delta x)$ tends vers $(0, 0)$ sous la condition, dite de stabilité, $\Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{2}$. On peut montrer que

$$\| E^{(j)} \|_{\infty} \leq C((\Delta t) + (\Delta x)^2)$$

Schéma implicite

Le schéma implicite consiste à prendre pour la dérivée en temps la différence rétrograde par rapport au schéma explicite. On obtient alors

$$\frac{U_{j,n} - U_{j-1,n}}{k} - \frac{U_{j,n+1} - 2U_{j,n} + U_{j,n-1}}{h^2} = f(t_j, x_n).$$

ou encore

$$\frac{U_{j+1,n} - U_{j,n}}{k} - \frac{U_{j+1,n+1} - 2U_{j+1,n} + U_{j+1,n-1}}{h^2} = f(t_{j+1}, x_n).$$

Avec les mêmes notations que précédemment, ce schéma se traduit sous forme matricielle par

$$\left(I + \frac{k}{h^2} A \right) U^{(j+1)} = U^{(j)} + kF^{(j+1)}.$$

Ce schéma est dit implicite car $U^{(j+1)}$ vérifie une équation en $U^{(j)}$. Heureusement c'est un problème linéaire :

$$U^{(j+1)} = \left(I + \frac{k}{h^2} A \right)^{-1} \left(U^{(j)} + kF^{(j+1)} \right).$$

Proposition

Le schéma implicite est consistant d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace. Il est inconditionnellement convergent i.e. pour tout couple $(\Delta t, \Delta x)$.

L'avantage par rapport au schéma explicite est le côté "inconditionnellement convergent, ce qui évite une condition sur Δx par rapport à Δt . Par contre il y a un système linéaire à résoudre. Comme la matrice est trigonale cette résolution n'est pas très coûteuse.

Schéma de Crank-Nicolson

Le schéma de Crank-Nicolson consiste en une moyenne des deux formules explicite et implicite

$$\frac{U_{j+1,n} - U_{j,n}}{k} - \frac{1}{2} \left(\frac{U_{j,n+1} - 2U_{j,n} + U_{j,n-1}}{h^2} + \frac{U_{j+1,n+1} - 2U_{j+1,n} + U_{j+1,n-1}}{h^2} \right) = \frac{1}{2} (f(t_{j+1}, x_n) + f(t_j, x_n)).$$

soit sous forme matricielle

$$\frac{U^{(j+1)} - U^{(j)}}{k} - \frac{1}{2h^2} A \left(U^{(j)} + U^{(j+1)} \right) = \frac{1}{2} \left(F^{(j)} + F^{(j+1)} \right).$$

Proposition

Le schéma de Crank-Nicolson est consistant d'ordre deux en temps et en espace, inconditionnellement convergent.

L'erreur commise avec le schéma de Crank-Nicolson sera meilleure que pour les deux schémas précédents.

Algorithme différences finies

Pour les trois schémas l'organisation de l'algorithme est identique. A noter que $f, \alpha, \beta, u_0, a, b$ et T sont données.

- ① Calcul de $\Delta t, \Delta x$ et vérification de la stabilité si schéma explicite
- ② On "entre" la matrice d'itération (selon le schéma) et éventuellement on établit sa décomposition
- ③ initialisation de $U^{(0)} \rightarrow V$ par la donnée initiale
- ④ for $j=0$ to M do
- ⑤ Calcul de $F^{(j)}$ (éventuellement $F^{(j+1)}$ selon le schéma)
- ⑥ Résolution du système linéaire (sauf pour le schéma explicite où c'est juste un calcul matriciel) : la variable V est mise à jour
- ⑦ end for
- ⑧ La variable V contient une approximation de \tilde{U}^{M+1}

Le schéma explicite est à éviter, son intérêt est purement académique. On préfère évidemment le schéma de Crank-Nicolson au schéma implicite.

Schémas numériques pour Black et Scholes

Initialement le modèle de Black et Scholes est une EDP où S (le sous-jacent) appartient à $]0, +\infty[$. Après le changement de variable $\exp(x) = S/K$, la nouvelle variable x appartient à $] -\infty, +\infty[$ et nous avons une équation de la chaleur sur \mathbb{R} tout entier. Pour faire nos schémas numériques il est indispensable de restreindre \mathbb{R} à $[a, b]$ avec $a < 0 < b$ et donc pour compléter l'EDP il faut spécifier des conditions sur le bord en accord avec Black et Scholes. Sinon la simulation numérique ne sera pas valide. Rappelons que

$$V_C(S, t) = 0 \text{ pour } S = 0, \text{ et } V_P(S, t) = 0 \text{ pour } S \rightarrow \infty \quad (*)$$

Pour compléter l'information en $+\infty$ pour le call et 0 pour le put, on utilise la parité call-put : $S + V_P - V_C = K \exp(-r(T - t))$. On en déduit

$$V_C(S, t) = S - K \exp(-r(T - t)) \quad S \rightarrow +\infty \quad (**)$$

$$V_C(S, t) = K \exp(-r(T - t)) \quad S \rightarrow 0^+ (**)$$

Rappelons le changement de variables

$$S = K \exp(x), t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2}, q = \frac{2r}{\sigma^2}$$

$$v(\tau, x) = V \left(K \exp(x), T - \frac{2\tau}{\sigma^2} \right).$$

$$v(\tau, x) = K \exp \left(-\frac{1}{2} (q-1)x - \frac{1}{4} (q+1)^2 \tau \right) y(\tau, x)$$

où la fonction y est solution de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad (\tau, x) \in [0, \frac{T\sigma^2}{2}] \times \mathbb{R}$$

Déterminons maintenant α et β pour que les condition aux limites du problème

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \text{ sur } [0, \frac{T\sigma^2}{2}] \times [a, b] \\ u(\tau = 0, x) = u_0(x) \text{ dans } [a, b], \\ u(\tau, x = a) = \alpha(\tau), u(\tau, x = b) = \beta(\tau) \quad \forall t \in [0, T]. \end{cases}$$

soient une approximation de $(*) - (**)$.

Pour un call

Comme $V_C(0, t) = 0$ en a on imposera $u(\tau, a) = \alpha(\tau) = 0$.

En $+\infty$

$$\begin{aligned} y(\tau, x) &= \frac{1}{K} (K e^x - K \exp(-r [T - (T - 2\tau/\sigma^2)])) \exp\left(-\frac{1}{2} (q-1)x - \frac{1}{4} (q+1)^2 \tau\right) \\ &\approx e^x \exp\left(-\frac{1}{2} (q-1)x - \frac{1}{4} (q+1)^2 \tau\right) \\ &\approx \exp\left(-\frac{1}{2} (q+1)x - \frac{1}{4} (q+1)^2 \tau\right) \end{aligned}$$

En effet devant $\exp(x)$ on estime que le terme $\exp(-r [T - (T - 2\tau/\sigma^2)])$ est négligeable. On posera donc pour le call

$$\begin{cases} \alpha(\tau) = 0 \\ \beta(\tau) = \exp\left(-\frac{1}{2} (q+1)b - \frac{1}{4} (q+1)^2 \tau\right) \end{cases}$$

Pour un put. De façon similaire

$$\begin{cases} \alpha(\tau) = \exp\left(-\frac{1}{2} (q-1)a - \frac{1}{4} (q-1)^2 \tau\right) \\ \beta(\tau) = 0 \end{cases}$$

Finalement on ajoute la condition initiale $u(0, x) = K(e^x - 1)^+$.

TP

L'EDP suivante

$$(P) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ sur } [0, T] \times [0, L] \\ u(t = 0, x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{ dans } [0, L], \\ u(t, x = 0) = 0, u(t, x = L) = 0 \quad \forall t \in [0, T]. \end{cases}$$

admet une solution explicite donnée par

$$u(t, x) = e^{-\kappa(\frac{n\pi}{L})^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) (\star)$$

- ❶ *Implementer les schémas implicite et Cranck-Nicolson pour le problème (P), en comparant l'approximation avec la solution explicite (★).*
- ❷ *Considérer un call et comparer les schémas implicite et Cranck-Nicolson avec la formule close de B-S, tout en vérifiant que le schéma de Cranck-Nicolson converge avant le schéma implicite.*