



Institut National de Statistique  
et d'Economie Appliquée

## **RAPPORT DU PROJET D'ECONOMETRIE DE FINANCE**

# **Estimation de la Volatilité Stochastique À travers le Filtre de Kalman**

Préparé par :

**Mr HAMOUTNI Anas**

**Mr Mohamed Abdellah Kaina**

Sous la direction de :

**Mr Yassine EL QALLI**

# 1.Introduction :

## 1.1 Historique :

Le filtre porte le nom de l'émigré hongrois Rudolf E. Kálmán, bien que Thorvald Nicolai Thiele et Peter Swerling aient développé un algorithme similaire auparavant. Richard S. Bucy de l'Université de Californie du Sud a contribué à la théorie, ce qui l'a parfois appelée le filtre de Kálmán-Bucy. Stanley F. Schmidt est généralement crédité d'avoir développé la première implémentation d'un filtre de Kálmán. Il s'est rendu compte que le filtre pouvait être divisé en deux parties distinctes, une partie pour les périodes de temps entre les sorties des capteurs et une autre partie pour incorporer les mesures. C'est lors d'une visite de Kálmán au NASA Ames Research Center que Schmidt a vu l'applicabilité des idées de Kálmán au problème non linéaire d'estimation de trajectoire du programme Apollo, ce qui a conduit à son incorporation au système Apollo. Ce filtre de Kálmán a d'abord été décrit et partiellement développé dans des articles techniques par Swerling (1958), Kálmán (1960) et Kálmán et Bucy (1961).

L'ordinateur Apollo utilisait 2k de RAM à noyau magnétique et 36k de câble d'acier (...). Le CPU a été construit à partir de circuits intégrés (...). La vitesse de l'horloge était inférieure à 100 kHz (...). Le fait que les ingénieurs du MIT aient été capables d'intégrer un si bon logiciel (l'une des toutes premières applications du filtre Kálmán) dans un ordinateur aussi petit est vraiment remarquable.

Les filtres Kálmán ont joué un rôle essentiel dans la mise en œuvre des systèmes de navigation des sous-marins lanceurs de missiles balistiques nucléaires de la marine américaine et dans les systèmes de guidage et de navigation des missiles de croisière tels que le missile Tomahawk de la marine américaine et le missile de croisière lancé par l'aviation des États-Unis. Ils sont également utilisés dans les systèmes de guidage et de navigation des lanceurs réutilisables et dans les systèmes de contrôle d'attitude et de navigation des engins spatiaux qui accostent à la Station spatiale internationale.

Ce filtre numérique est parfois appelé le filtre Stratonovich-Kálmán -Bucy parce qu'il s'agit d'un cas particulier d'un filtre non linéaire plus général développé un peu plus tôt par le mathématicien soviétique Ruslan

Stratonovich En fait, certaines des équations spéciales du filtre linéaire ont été publiées dans ces articles par Stratonovich avant l'été 1960, lorsque Kalmán a rencontré Stratonovitch lors d'une conférence à Moscou.

## 1.2. Exemples d'application :

Comme exemple d'application, considérez le problème de la détermination de l'emplacement précis d'un camion. Le camion peut être équipé d'un appareil GPS qui fournit une estimation de la position à quelques mètres près. L'estimation du GPS est susceptible d'être bruyante ; les relevés " sautent " rapidement, tout en restant à quelques mètres de la position réelle. De plus, comme on s'attend à ce que le camion suive les lois de la physique, sa position peut aussi être estimée en intégrant sa vitesse au fil du temps, déterminée en suivant les révolutions des roues et l'angle du volant de direction. C'est une technique connue sous le nom d'estimation à l'estime. Généralement, le calcul à l'estime fournira une estimation très précise de la position du camion, mais il dérivera au fil du temps au fur et à mesure que de petites erreurs s'accumuleront.

---

Dans cet exemple, le filtre de Kalmán peut être considéré comme fonctionnant en deux phases distinctes : prédire et mettre à jour. Dans la phase de prédiction, l'ancienne position du camion sera modifiée selon les lois physiques du mouvement (le modèle dynamique ou "transition d'état"). Non seulement une nouvelle estimation de position sera calculée, mais une nouvelle covariance sera également calculée. La covariance est peut-être proportionnelle à la vitesse du camion parce que nous sommes plus incertains de la précision de l'estimation de la position à l'arrêt à des vitesses élevées, mais très certains de l'estimation de la position quand on se déplace lentement. Ensuite, dans la phase de mise à jour, une mesure de la position du camion est prise à partir de l'appareil GPS. Cette mesure s'accompagne d'un certain degré d'incertitude, et sa covariance par rapport à celle de la prédiction de la phase précédente détermine dans quelle mesure la nouvelle mesure affectera la prédiction actualisée. Idéalement, comme les estimations à l'estime ont tendance à s'éloigner de la position réelle, la mesure GPS devrait ramener l'estimation de la position vers la position réelle sans la perturber au point de devenir rapidement bruyante et sautante.

## 2. Fondement Mathématique :

### 2.1 Introduction

Les problèmes d'estimation de l'état d'un système dynamique peuvent être classés selon la quantité d'information disponible. En effet, considérons un système dynamique dont on possède un ensemble de mesures  $Y(I_0, I_f)$  entre l'instant initial  $I_0$  et l'instant final  $I_f$ . On peut chercher à estimer l'état du système dynamique  $X$  à un instant donné  $\tau$  que l'on notera  $X(\tau|Y(I_0, I_f))$ . Suivant la valeur de  $\tau$  nous distinguons trois cas [15] :

- si  $\tau < I_f$  il s'agit d'un problème de **lissage** (Smoothing) ;
- si  $\tau = I_f$  il s'agit d'un problème de **filtrage** (Filtering) ;
- si  $\tau > I_f$  il s'agit d'un problème de **prédiction** (Prédiction).

Ces problèmes consistent essentiellement à estimer l'état d'un système dynamique à partir d'observations généralement bruitées. En effet, pour ces problèmes, nous disposons à l'instant  $k$  d'une suite  $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_k$  d'observations recueillies au niveau des capteurs. Chaque observation  $Y_k$  est reliée à l'état inconnu  $X_k$  par une relation du type :

$$Y_k = H_k X_k + V_k$$

où  $H_k$  est la matrice de mesure et  $V_k$  est un bruit qui modélise l'erreur d'observation. Le but sera d'obtenir le plus d'information possible sur l'état du système  $X_l$  avec

$$\begin{cases} l < k & \text{pour le lissage} \\ l = k & \text{pour le filtrage} \\ l > k & \text{pour la prédiction.} \end{cases}$$

Dans ce chapitre on va résoudre le problème de filtrage à l'aide de l'approche du filtre de Kalman[15, 8, 14, 7, 3].

## 2.2 Modèle

Rappelons en premier lieu ce qu'on entend par système dynamique et bruits blancs.

**Définition 2.2.1.** *Un système dynamique est un modèle permettant de décrire l'évolution au cours du temps d'un ensemble d'objets en interaction dont l'état courant dépend juste de l'état précédent, des commandes appliquées et d'un processus aléatoire.*

Les équations décrivant le système sont appelées les équations d'état du système. Ces équations contiennent également ce que nous appelons du " bruit blanc "

**Définition 2.2.2.** *On appelle bruit blanc discret un processus aléatoire  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tels que  $\mathbb{E}(X_n)$  existe et*

$$\begin{cases} \text{Var}(X_n) < \infty \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \\ \text{Cov}(X_n, X_l) = 0 \text{ si } n \neq l. \end{cases}$$

Le filtre de Kalman repose sur deux équations :

- l'équation d'état  $X_k$  du système ;
- l'équation de l'observation  $Y_k$  ;

où on note l'instant discret par un indice  $k$ . Typiquement, nous avons le système :

$$(S^{n,m}) \begin{cases} X_{k+1} = A_k X_k + B_k U_k + W_k & (1) \\ Y_k = H_k X_k + V_k & (2) \end{cases}$$

où

- $X_k$  est le vecteur d'état du processus, de taille  $n \times 1$ , tel que l'état initial  $X_0$  du processus est d'espérance et de variance connues, et décorrélé avec  $W_l$  et  $V_l$  pour  $l = 0, 1, 2, \dots$  ;
- $U_k$  est un vecteur déterministe, de taille  $n \times 1$ , qui représente la commande appliquée sur la dynamique de l'état  $X_k$  ;
- $A_k$  est la matrice déterministe de transition de l'état, de taille  $n \times n$ , qui décrit la dynamique des  $X_k$  ;

- $B_k$  est une matrice déterministe qui décrit l'application de la commande sur l'état  $X_k$ ;
- $W_k$  est un bruit blanc qui modélise l'erreur du processus, de taille  $n \times 1$ , de moyenne connue et de matrice de covariance  $Q_k$  connue (semi-définie positive);
- $Y_k$  est le vecteur d'observation à l'instant  $k$ , de taille  $m \times 1$ ;
- $H_k$  est la matrice déterministe de mesure de taille  $m \times n$ ;
- $V_k$  est un bruit blanc qui modélise l'erreur d'observation, de taille  $m \times 1$ , de moyenne connue et de matrice de covariance  $R_k$  connue (définie positive) et non corrélée avec  $W_l$  pour  $l = 0, 1, 2, \dots$ .

Dans la suite en posant

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases}$$

Nous noterons :

- $\mathbb{E}(W_k W_i^T) = Q_k \delta_{ik}$  (de taille  $n \times n$  et semi-définie positive);
- $\mathbb{E}(V_k V_i^T) = R_k \delta_{ik}$  (de taille  $m \times m$  et définie positive);
- $\mathbb{E}(W_k V_i^T) = 0 \quad \forall k, i \in \mathbb{N}$ .

L'objectif sera de déterminer une estimation optimale et récursive des états  $X_k$  à partir des mesures  $Y_k$ .

## 2.3 Développement

Le filtre de Kalman est un filtre optimal pour l'estimation de l'état du système, il garantit que l'erreur sur l'estimation est en moyenne nulle et de variance minimale [15, 10, 5]. Pour calculer cet estimateur après initialisation, nous procédons en deux

étapes :

- l'étape de prédiction ;
- l'étape de correction.

Nous avons donc :

**Initialisation :** À l'instant  $k = 0$ , nous n'avons aucune mesure disponible. La première mesure arrive à l'instant  $k = 1$ .  $X_0$ , l'état du système à l'instant  $k = 0$ , est une variable aléatoire, il paraît logique en l'absence de mesure de l'estimer par son espérance. Nous avons alors :

$$\hat{X}_0 = \mathbb{E}(X_0)$$

et la matrice de covariance de l'erreur est :

$$P_0 = \mathbb{E}[(X_0 - \hat{X}_0)(X_0 - \hat{X}_0)^T].$$

Notez que si nous connaissons parfaitement l'état de départ du système nous prenons  $\hat{X}_0 = X_0$  et dans ce cas  $P_0$  est nulle.

**Étape de prédiction (Évolution du système dynamique) :** Nous nous plaçons à l'instant discret  $k$ . À cet instant, nous disposons d'une estimation initiale fondée sur la connaissance du processus et des observations jusqu'à l'instant précédent, c'est-à-dire  $k - 1$ . Nous chercherons un estimateur  $\hat{X}_{k|k-1}$  de  $X_k$  sans tenir compte de la mesure  $Y_k$ , mais en utilisant uniquement l'équation (1) dans le système  $(S^{n,m})$ . Nous obtenons :

$$\hat{X}_{k|k-1} = A_{k-1}\hat{X}_{k-1|k-1} + B_{k-1}U_{k-1}.$$

Nous définissons l'erreur de cette estimation par :

$$\tilde{X}_{k|k-1} = X_k - \hat{X}_{k|k-1},$$

ainsi que la matrice de covariance de l'erreur :

$$P_{k|k-1} = E[(X_k - \hat{X}_{k|k-1})(X_k - \hat{X}_{k|k-1})^T] = A_{k-1}P_{k-1|k-1}A_{k-1}^T + Q_{k-1}.$$

**Étape de correction (Prise en compte de la mesure) :** Nous allons maintenant utiliser l'observation  $Y_k$  pour améliorer l'estimation  $\hat{X}_{k|k-1}$  et obtenir un nouvel estimateur  $\hat{X}_{k|k}$  de  $X_k$ . Pour cela nous utilisons la Proposition 1.6.3, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\hat{X}_{k|k} &= \hat{X}_{k|k-1} + E^*(\tilde{X}_{k|k-1}|\tilde{Y}_{k|k-1}) \\ &= \hat{X}_{k|k-1} + P_{\tilde{X}_{k|k-1}, \tilde{Y}_{k|k-1}} P_{\tilde{Y}_{k|k-1}, \tilde{Y}_{k|k-1}}^{-1} (Y_k - \hat{Y}_{k|k-1}) \\ &= \hat{X}_{k|k-1} + K_k(Y_k - \hat{Y}_{k|k-1})\end{aligned}$$

où  $K_k = P_{k|k-1}H_k^T(H_kP_{k|k-1}H_k^T + R_k)^{-1}$  est appelé le gain du filtre de Kalman.

Mais, puisque les observations  $Y_0, \dots, Y_{k-1}$  dépendent linéairement que de  $X_0$  et  $\{V_j\}_{j=0}^{k-1}$ , nous avons alors :

$$\begin{aligned}\hat{Y}_{k|k-1} = \mathbb{E}^*(Y_k|Y_0, \dots, Y_{k-1}) &= \mathbb{E}^*(H_kX_k + V_k|Y_0, \dots, Y_{k-1}) \\ &= H_k\hat{X}_{k|k-1},\end{aligned}$$

ce qui implique que :

$$\hat{X}_{k|k} = \hat{X}_{k|k-1} + K_k(Y_k - H_k\hat{X}_{k|k-1}). \quad (2.1)$$

Nous pouvons alors définir l'erreur de cette estimation :

$$\tilde{X}_{k|k} = X_k - \hat{X}_{k|k},$$

ainsi que la matrice de covariance de l'erreur :

$$P_{k|k} = E[(X_k - \hat{X}_{k|k})(X_k - \hat{X}_{k|k})^T].$$

**Remarque 2.3.1.** Le gain du filtre de Kalman  $K_k$  a les propriétés suivantes :

1. il existe toujours car la matrice  $R_k$  est définie positive ;
2. il tient compte des caractéristiques statistiques du bruit des mesures mais ne dépend pas des observations, donc il peut être calculé avant l'étape de correction.



### 2.3.1 Algorithme

En résumé l'algorithme proposé est le suivant

$$(K) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \hat{X}_{0|0} &= \mathbb{E}(X_0) \\ P_{0|0} &= P_0 \\ \text{pour } k &= 1, 2, 3, \dots, \text{ faire} \\ \hat{X}_{k|k-1} &= A_{k-1}\hat{X}_{k-1|k-1} + B_{k-1}U_{k-1} \\ P_{k|k-1} &= A_{k-1}P_{k-1|k-1}A_{k-1}^T + Q_{k-1} \\ K_k &= P_{k|k-1}H_k^T(H_kP_{k|k-1}H_k^T + R_k)^{-1} \\ P_{k|k} &= [I - K_kH_k]P_{k|k-1} \\ \hat{X}_{k|k} &= \hat{X}_{k|k-1} + K_k(Y_k - H_k\hat{X}_{k|k-1}) \end{array} \right.$$

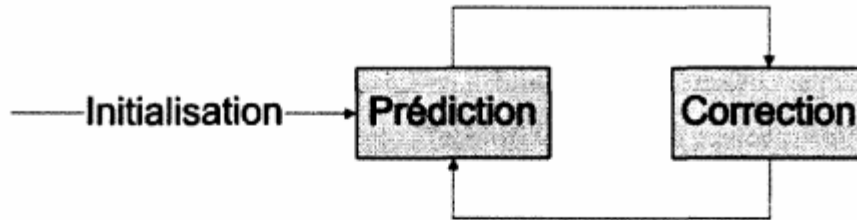


Figure 2.2 – Principe du filtre de Kalman

### 2.3.2 Innovation

Revenons maintenant sur le terme correctif utilisé dans l'équation de la mise à jour (2.1) :

$$Y_k - H_k\hat{X}_{k|k-1}.$$

Ce terme s'appelle l'innovation (de l'observation) car il représente les informations supplémentaires apportées par l'observation à l'instant  $k$  par rapport aux observations passées jusqu'à l'instant  $k - 1$ . Dans la suite l'innovation sera notée par :

$$\tilde{Y}_{k|k-1} = Y_k - H_k\hat{X}_{k|k-1}.$$

### 2.3.3 Analyse de la mise à jour

À partir de l'équation de mise à jour

$$\begin{aligned}\hat{X}_{k|k} &= \hat{X}_{k|k-1} + K_k(Y_k - \hat{Y}_{k|k-1}) \\ &= \hat{X}_{k|k-1} + K_k(Y_k - H_k \hat{X}_{k|k-1}),\end{aligned}$$

nous voyons que :

- le premier terme de droite s'écrit encore  $\hat{X}_{k|k-1}$ , c'est l'étape de prédiction de  $X_k$  en utilisant uniquement le modèle, mais pas l'observation ;
- le second terme est la correction de la prédiction en utilisant les observations.

Nous pouvons aussi remarquer que le gain de Kalman varie selon la confiance que l'on peut accorder aux mesures. En effet le gain de Kalman peut s'écrire :

$$K_k = P_{k|k-1} H_k^T (H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k)^{-1},$$

- Si l'observation est de mauvaise qualité, c'est-à-dire si le bruit de mesure a une forte variance ( $R_k$  est élevé), et que nous avons confiance dans les estimations précédentes ( $P_{k|k-1}$  est faible), le gain du filtre de Kalman

$$K_k \approx 0$$

et la mise à jour sera réduite à

$$\hat{X}_{k|k} \approx \hat{X}_{k|k-1}.$$

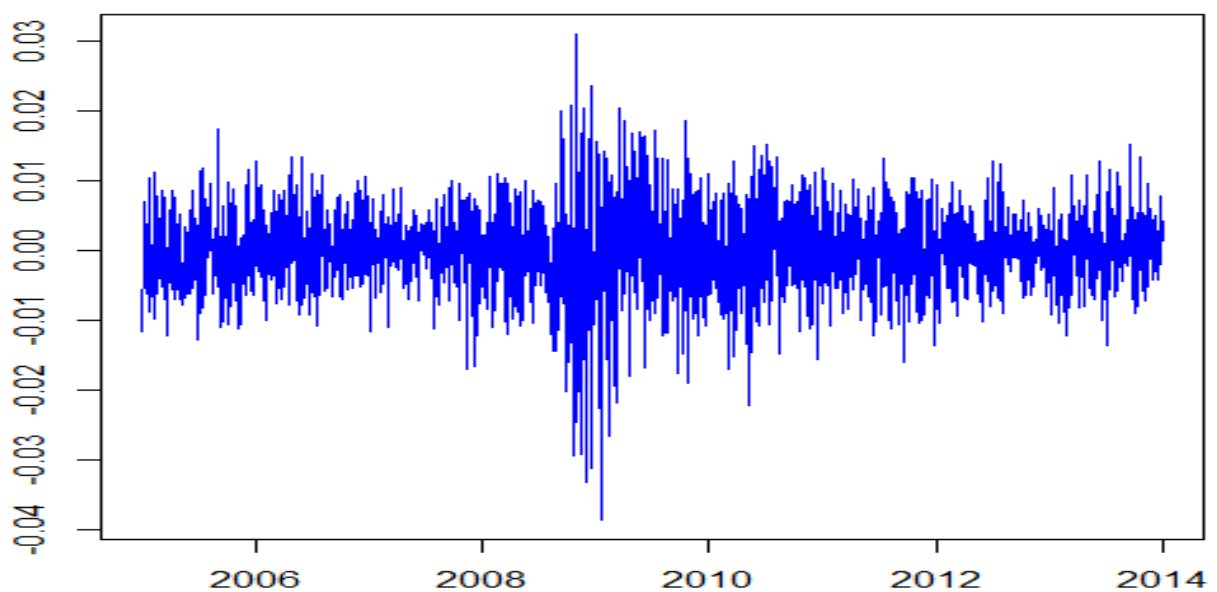
Au contraire, si l'observation est très fiable ( $R_k$  est faible) et que nous avons des doutes sur les estimations précédentes, le gain du filtre de Kalman devient grand, de sorte que la mise à jour repose de façon prépondérante sur l'observation et très peu sur le modèle.

### 3. Estimation de la volatilité stochastique à travers le filtre de Kalmán :

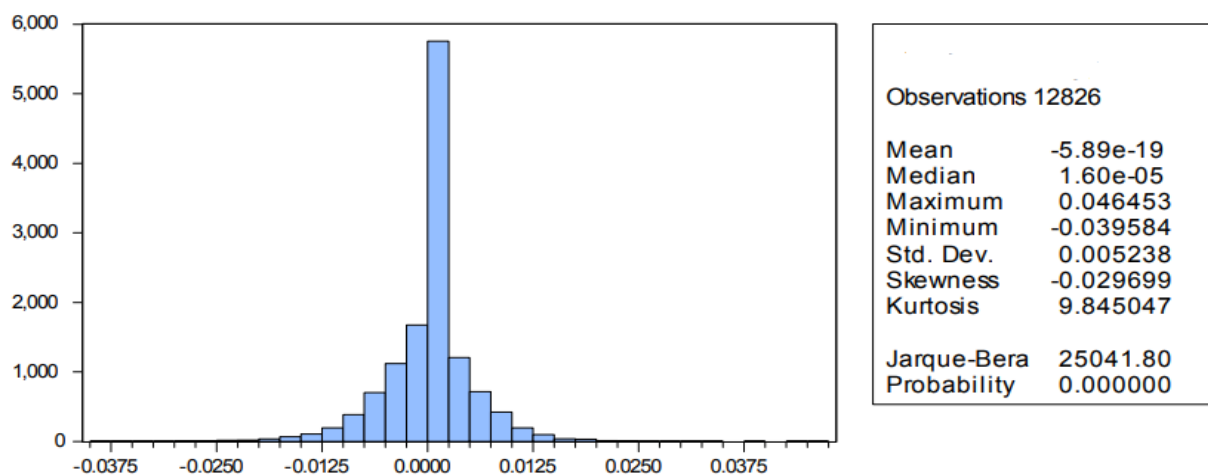
La volatilité est un ingrédient important dans la prise de décision financière puisqu'elle représente le risque compris dans un actif.

Considérons le cas où l'actif est le taux de change GBP/USD.

Le taux de change ( $r_t$ ) pendant la période du 03/01/2005 jusqu'au 31/12/2013 est ci-joint :



Dans notre cas  $E(r_t)$  est presque nulle comme le montre l'histogramme suivant :



On commence alors par spécifier le modèle de volatilité stochastique.

**On a les deux équations suivantes :**

$$\begin{cases} r_t = \sigma_t * W_t & (\text{équation de la moyenne}) \\ \log(\sigma_t^2) = \alpha + \beta \log(\sigma_{t-1}^2) + V_t & (\text{équation de la variance}) \end{cases}$$

$r_t$  est le taux de change,  $\sigma_t$  représente la volatilité du taux de change  $W_t$  et  $V_t$  deux bruits blanc avec  $W_t \sim N(0,1)$  et  $V_t \sim N(0, \sigma_v^2)$ .

Pour obtenir la structure d'un filtre de Kalmán on suit la démarche suivante :

1. Elever l'équation de la moyenne au carré :

$$r_t^2 = \sigma_t^2 * W_t^2$$

2. Prendre le logarithme de l'équation précédente :

$$\log(r_t^2) = \log(\sigma_t^2) + \log(W_t^2)$$

3. On redéfinit les variables :

$$y_t = \log(r_t^2)$$

$$s_t = \log(\sigma_t^2)$$

$$U_t = \log(W_t^2) + 1.27$$

Comme  $\log(W_t^2)$  suit une log de chi deux de 1 on peut montrer que  $E(\log(W_t^2)) = -1.27$ . alors  $E(U_t) = 0$ .

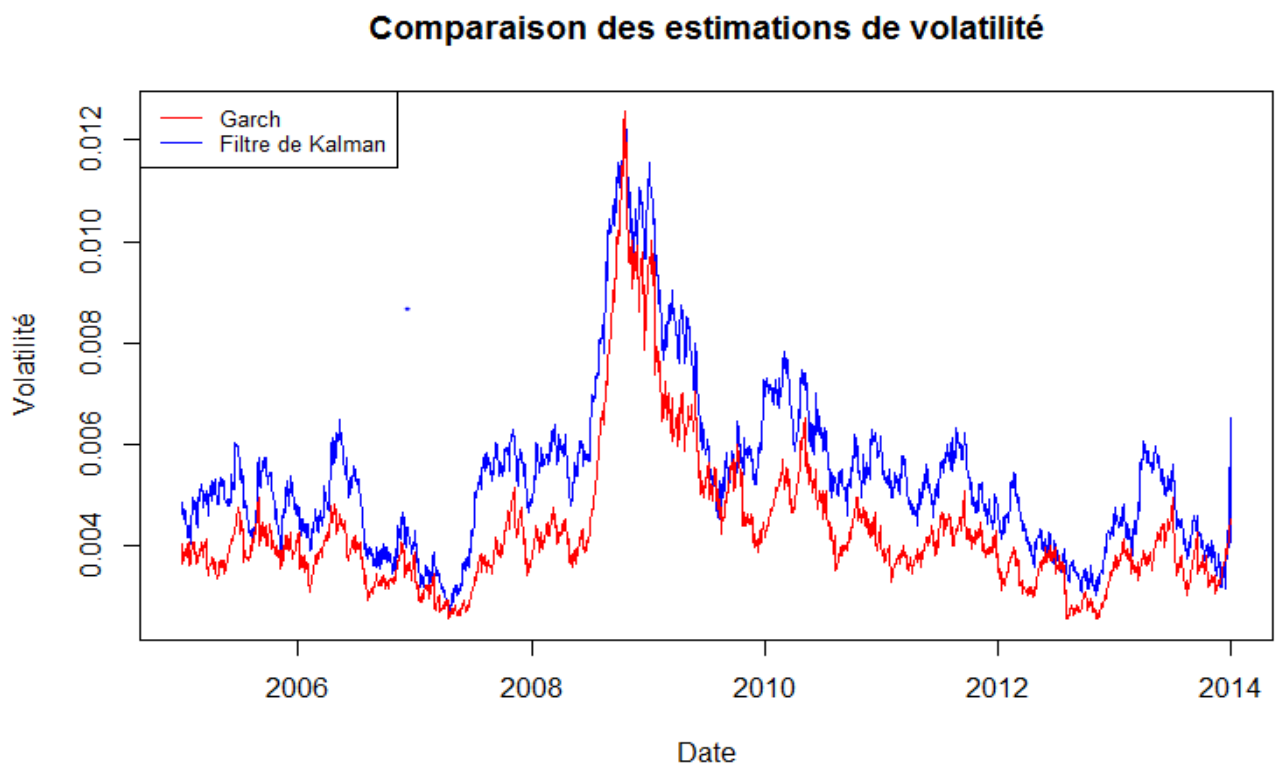
**On peut aussi montrer que  $E(U_t^2) = 4.93$ .**

On réécrit donc notre système d'équations de la façon suivante :

$$\begin{cases} y_t = -1.27 + s_t + U_t & (\text{équation de mesure}) \\ s_t = \alpha + \beta s_{t-1} + V_t & (\text{équation d'état}) \end{cases}$$

Après avoir estimé la volatilité par le filtre de Kalman on doit comparer nos estimations avec un autre type de modèles pour voir si les deux modèles sont cohérents .

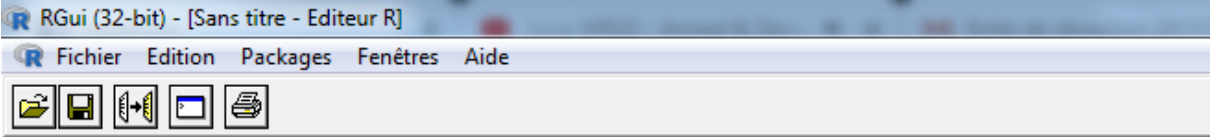
On a fait cela on ayant recours au modèle de volatilité Garch(1 ; 1) :



On remarque que les deux modèles présentent des graphes de volatilité avec presque une même allure ceci confirme que l'estimation par la méthode du filtre de Kalman est aussi bonne qu'une estimation de Garch(1 ; 1) .

On constate aussi que la volatilité du taux de change GBP/USD dans les deux modèles a sauté pendant la période de 2008 à 2009 est cela coïncide avec la période de la crise financière.

## 4. Le code sous R :



```
RGui (32-bit) - [Sans titre - Editeur R]
Fichier  Edition  Packages  Fenêtres  Aide

#installation des packages necessaires#
#####
install.packages("tseries",dependencies = TRUE)

install.packages("RUnit",dependencies = TRUE)

install.packages("FKF",dependencies = TRUE)

install.packages("fGarch",dependencies = TRUE)
#####

#importation de la base de donnée#
#####
data <- read.table("GBPUSD.csv",header = TRUE,fill = TRUE)
head(data[,6])
#####

r = data[,6]
r=r-mean(r)
y = log(r^2)
#####

#Initialisation des variables du filtre de kalman#
#####
a0=y[1]
P0=matrix(10000)
ct=matrix(-1.27)
Zt=matrix(1)
GGt=matrix(4.93)
#####

library("FKF")

#Estimation du filtre de kalman#
#####
fit.fkf <- optim(c(dt=matrix(1),Tt=matrix(1),HHt = var(y, na.rm = TRUE) * .5),
fn = function(par, ...)
-fkf(dt=matrix(par[1]),Tt=matrix(par[2]),HHt = matrix(par[3]), ...) $logLik,
yt = rbind(y), a0 = a0, P0 = P0, ct = ct,
Zt = Zt, GGt = GGt, check.input = TRUE)
#####

fkf.obj <- fkf(a0, P0, dt = matrix(fit.fkf$par[1]), ct, Tt = matrix(fit.fkf$par[2]),
Zt, HHt = matrix(fit.fkf$par[3]),
GGt, yt = rbind(y))
data2=data

#extraction de la volatilité#
#####
data2[,2] = exp(fkf.obj$att[1, ]/2)
#####
```

```

data2$Date = as.Date(strptime(data2$Date, "%d/%m/%Y"))

library("fGarch")

#Estimation de Garch#
#####
gfit.fg <- garchFit(formula = ~ garch(1, 1),data = r, cond.dist="std")
#####

#tracage de la serie des rendements#
#####
plot(data2$Date,r,type="l",ann=FALSE,col="blue")
#####

#tracage de la volatilité estimé par le filtre de kalman#
#####
plot(data2$Date,data2$Dernier,type="l",ann=FALSE,col="blue")
#####

par(new = TRUE)

#tracage de la volatilité estimé par le modele Garch#
#####
plot(data2$Date,sqrt(252) * gfit.fg@sigma.t,axes=FALSE,ann=FALSE, type="l",col="red")
#####

title(main="Comparaison des estimations de volatilité", xlab="Date", ylab="Volatilité")
plot_colors <- c("blue","red")
legend("topleft", legend=c("Garch", "Filtre de Kalman"),col=c("red", "blue"), lty=1:1, cex=0.8)

```