

Proposition de stage M2 2025-26

Commande optimale pour des modèles épidémiologiques à transmission vectorielle

UMR MISTEA - Centre INRAE Occitanie-Montpellier

Contexte. Plusieurs travaux exploitant la théorie de la commande optimale pour les modèles classiques de l'épidémiologie, comme les modèles SIR, SIS, SIRS... ont été réalisés pour différents objectifs comme la minimisation du nombre d'infectés, du pic épidémique, de la taille finale... et pour des contrôles comme l'isolation ou la vaccination (voir par exemple [4, 2]). Ces travaux ont permis de démontrer par des arguments analytiques, grâce au Principe du Maximum de Pontryagin ou des techniques de comparaison de solutions, les structures des lois de commande (ex. bang-bang, bang-singulier-bang,...). Comparativement, il existe moins de travaux analytiques portant sur les modèles d'épidémiologie à transmission vectorielle, tels que le modèle susceptible-infecté-vecteur (SIV, voir schéma 1), décrivant par exemple la propagation de maladies transmises par des moustiques, comme la malaria ou la dengue.

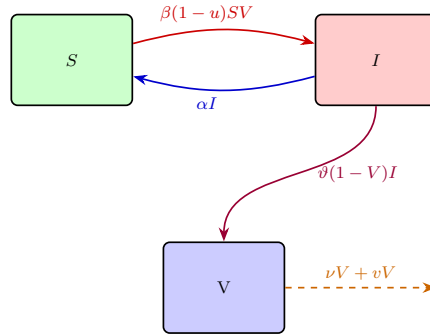


FIGURE 1 – Schéma du modèle SIV illustrant les interactions humains-vecteurs.

Les principaux paramètres du modèle sont : β (taux de transmission), α (taux de guérison), ϑ (taux d'infection des vecteurs), ν (taux de mortalité des vecteurs), u (variable de contrôle représentant la distanciation sociale) et v (variable de contrôle associée à l'utilisation d'insecticides ou indirectement à la libération d'insectes mâles stériles).

Dans ce stage nous proposons de considérer des modèles réduits à vecteurs (dans l'esprit de [5]) et de remplacer la pénalité quadratique sur le contrôle par une contrainte L^1 de budget (plus réaliste), comme cela a été déjà réalisé dans plusieurs travaux de l'équipe encadrante pour des modèles de l'épidémiologie mais sans vecteur de transmission.

Objectifs. Il s'agit de formaliser et étudier des problèmes de commande optimale pour l'épidémiologie à transmission vectorielle dont la dynamique est linéaire par rapport au contrôle, sous contrainte L^1 , tout d'abord pour des critères classiques de type Mayer ou Bolza. On cherchera essentiellement à l'aide de conditions nécessaires d'optimalité [6] à analyser la structure des stratégies optimales (commutations, arcs singuliers...). Des résolutions numériques, à l'aide notamment de la `control-toolbox`¹ sous Julia, pourront être utilisés pour avoir des idées sur les solutions optimales, et vérifier les calculs analytiques. Mais ce sera l'obtention de synthèses optimales en rétro-action ("feedback") qui sera attendue, alors que les méthodes numériques ne donnent en général que des solutions en boucle ouverte (i.e. comme fonctions du temps uniquement).

Dans un deuxième temps, on s'intéressera à des extensions pour des critères moyennés pour tenir compte de paramètres incertains [1, 7]. Selon les aspirations du ou de la candidat.e (et si le temps le

1. La `control-toolbox` représente un écosystème rassemblant des paquets Julia permettant de résoudre des problèmes de commande optimale (la documentation disponible sur [OptimalControl.jl](#)).

permet) on pourra également s'intéresser à des critères moins conventionnels comme la taille finale, le pic épidémique, le temps de crise ou la prise en compte de régions de perte de contrôle.

Ainsi les objectifs du stage sont :

1. **Méthodologiques.** Dérivation de conditions nécessaires d'optimalité et structure des politiques optimales, notamment pour des critères moyennés.
2. **Numériques.** Implémentation sous `Julia` (dans le même esprit que le projet [SIRcontrol.jl](#)).
3. **Applicatifs.** Modèles de l'épidémiologie à transmission vectorielle.

Les attentes de ce stage sont de comprendre l'impact de l'apparition de variants (modélisée par un changement de valeurs des paramètres du modèle) sur la structure des politiques optimales, et de les comparer avec différentes stratégies sous-optimales comme par exemple celle basée sur des valeurs moyennes des paramètres.

Déroulement du stage. L'étudiant.e commencera tout d'abord à se familiariser avec les modèles de la littérature en épidémiologie [3], avant de débiter l'étude de problèmes de commande optimale pour modèles à vecteurs, puis dans un deuxième temps pour des critères moyennés.

Il ou elle sera encadré(e) par deux chercheurs seniors, Alain Rapaport et Patrice Loisel, et un chercheur en post-doc, Anas Bouali, dans le cadre du projet NOCIME ([site web](#)) financé par l'ANR.

Contacts. Alain Rapaport : alain.rapaport@inrae.fr, Patrice Loisel : patrice.loisel@inrae.fr, Anas Bouali : anas.bouali@inrae.fr

Références

- [1] P. Bettiol, N. Khalil. Average Cost Minimization Problems Subject to State Constraints. SIAM Journal on Control and Optimization 2024 62(3), 1884-1907. [lien](#)
- [2] P.-A. Bliman, A. Bouali, P. Loisel, A. Rapaport, A. Virelizier. On the problem of minimizing the epidemic final size for SIR model by social distancing. 2025. Preprint hal. [lien](#)
- [3] M. Li. An Introduction to Mathematical Modeling of Infectious Diseases, Springer 2018. [lien](#)
- [4] E. Molina, A. Rapaport. An optimal feedback control that minimizes the epidemic peak in the SIR model under a budget constraint. Automatica, 2022, 146. [lien](#)
- [5] M. Souza. Multiscale analysis for a vector-borne epidemic model. Journal of Mathematical Biology, 2014, 68(5), 1269-93. [lien](#)
- [6] E. Trélat. Contrôle optimal : théorie et applications. Notes de cours, Sorbonne Université. 2013. [lien](#)
- [7] R. Vinter. Minimax Optimal Control. SIAM Journal on Control and Optimization 2005 44(3), 939-968. [lien](#)