Chapitre I: Introduction aux Calculs des Probabilités

Outline

Analyse combinatoire

L'analyse combinatoire est une branche des mathématiques qui étudie comment compter les objets. Elle fournit des méthodes de dénombrements particulièrement utiles en théorie des probabilités.
Soit un ensemble de 3 éléments $E = \{a, b, c\}$. On peut effectuer sur E un certain nombre d'opérations (dans le sens de dénombrement), par exemple:

1. On peut choisir un seul élément, soit a, b ou c.
2. On peut en prendre deux, dans un **ordre déterminé**, on obtient les couples $(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b)$.
3. On peut encore en prendre deux, mais dans un **ordre indiffèrent**, ce qui donne $(a, b); (a, c); (b, c)$
4. On peut les prendre tous les trois, dans un **ordre déterminé**. On obtient $(a, b, c); (a, c, b); (b, a, c); (b, c, a); (c, a, b); (c, b, a)$. Ou bien dans un ordre indifférente, soit (a, b, c).

Principe multiplicatif

Permet de compter le nombre de résultats d'expériences qui peuvent se décomposer en une succession de sous-expériences.

Definition

Si une expérience comprend p étapes, la première pouvant se faire de n_1 façons, la deuxième de n_2 façons,..., la dernière de n_p façons, alors le nombre total de résultats possibles est

$$n = \prod_{i=1}^{p} n_i = n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p.$$

Exemple

1) On jette 3 dés identiques. Combien y-a-t-il de résultats possibles?

Principe multiplicatif

Permet de compter le nombre de résultats d'expériences qui peuvent se décomposer en une succession de sous-expériences.

Definition

Si une expérience comprend p étapes, la première pouvant se faire de n_1 façons, la deuxième de n_2 façons,..., la dernière de n_p façons, alors le nombre total de résultats possibles est

$$n = \prod_{i=1}^{p} n_i = n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p.$$

Exemple

1) On jette 3 dés identiques. Combien y-a-t-il de résultats possibles?
2) Vous achetez une valise à code 4 chiffres. Combien de possibilités avez-vous de choisir un code ?

Arrangements sans répétition

Definition

Soit E un ensemble à n objets et p tel que $1 \leq p \leq n$. On appelle arrangements sans répétition de p objets de E, toute suite ordonnée de p objets distincts de E. Le nombre de p-arrangements sans répétition d'un ensemble à n éléments est:

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemple

Combien y a-t-il de choix possibles de 2 éléments dans $\{$A,B,C,D$\}$?

Arrangements sans répétition

Definition

Soit E un ensemble à n objets et p tel que $1 \leq p \leq n$. On appelle arrangements sans répétition de p objets de E, toute suite ordonnée de p objets distincts de E. Le nombre de p-arrangements sans répétition d'un ensemble à n éléments est:

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemple

Combien y a-t-il de choix possibles de 2 éléments dans $\{$A,B,C,D$\}$?

Réponse:

$$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$$

Arrangements avec répétition

Dans le cas d'un arrangement avec répétition, les p objets de la liste ne sont pas nécessairement tous distincts. (On peut choisir le même élément plusieurs fois).
Cela correspond à un tirage avec remise et avec ordre. Dans ce cas, il est possible que $p > n$.
Le nombre d'arrangements avec répétition de p objets parmi n est :

$$n^p$$

Exemple

Combien de nombres de 6 chiffres peut-on former avec les chiffres 0, 1 et 2 ?

Arrangements avec répétition

Dans le cas d'un arrangement avec répétition, les p objets de la liste ne sont pas nécessairement tous distincts. (On peut choisir le même élément plusieurs fois).
Cela correspond à un tirage avec remise et avec ordre. Dans ce cas, il est possible que $p > n$.
Le nombre d'arrangements avec répétition de p objets parmi n est :

$$n^p$$

Exemple

Combien de nombres de 6 chiffres peut-on former avec les chiffres 0, 1 et 2 ?
Réponse: 3^6

Permutations sans répétition

Definition

Une permutation sans répétition de n éléments distincts est une suite ordonnée de ces n éléments.
Autrement dit, c'est un arrangement de $p = n$ objets pris parmi n objets.
Le nombre de permutations de n objets est noté:

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$$

Exemple

Combien de mots de 3 lettres peut-on former avec les lettres a, b et c ?

Permutations sans répétition

Definition

Une permutation sans répétition de n éléments distincts est une suite ordonnée de ces n éléments.
Autrement dit, c'est un arrangement de $p = n$ objets pris parmi n objets.
Le nombre de permutations de n objets est noté:

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$$

Exemple

Combien de mots de 3 lettres peut-on former avec les lettres a, b et c ?
réponse: $3! = 6$

Permutations avec répétition

Il arrive que, parmi les n objets dont on cherche le nombre de permutations, certaines d'entre eux, au nombre de p par exemple, soient tous semblables. Auquel cas, rien ne distingue les permutations de ces k objets entre eux. Pour calculer le nombre de permutations possibles, il faut donc diviser le nombre de permutations des n objets sans répétition, par le nombre de permutations des k objets entre eux, soit :

$$P_n(avec\ répétition) = \frac{n!}{k!}$$

Exemple

1) Une boite contient 3 boules noires, 4 rouges et 6 boules blanches. De combien de manières peut-on classer ces boules?

Exemple

1) Une boite contient 3 boules noires, 4 rouges et 6 boules blanches. De combien de manières peut-on classer ces boules?

Réponse:

$$\frac{13!}{3!4!6!}$$

Exemple

1) Une boite contient 3 boules noires, 4 rouges et 6 boules blanches. De combien de manières peut-on classer ces boules?
Réponse:

$$\frac{13!}{3!4!6!}$$

2) Combien de nombres de permutations possibles avec les lettres du mot ETRENNE.

Exemple

1) Une boite contient 3 boules noires, 4 rouges et 6 boules blanches. De combien de manières peut-on classer ces boules?
   Réponse:
   $$\frac{13!}{3!4!6!}$$

2) Combien de nombres de permutations possibles avec les lettres du mot ETRENNE.
   Réponse:
   $$\frac{7!}{3!2!}$$

Combinaisons sans répétition

Definition

Une combinaison de p objets pris dans E est un sous-ensemble de p de ces n objets. C'est une disposition non-ordonnée de p éléments, à choisir parmi n éléments.
Une combinaison sans répétition correspond à un tirage sans remise et sans ordre (tirage simultané). Le nombre de combinaisons sans répétition de p objets parmi n est donné par

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exemple

De combien de manières peut-on choisir une délégation de 3 hommes et 2 femmes pris parmi un groupe de 7 hommes et 5 femmes ?

Exemple

De combien de manières peut-on choisir une délégation de 3 hommes et 2 femmes pris parmi un groupe de 7 hommes et 5 femmes ?

Réponse: On choisit de C_7^3 manières les 3 hommes parmi 7 et de C_5^2 manières les 2 femmes parmi 5 . Le principe de multiplication donne: $C_7^3 \cdot C_5^2 = 350$

Combinaisons avec répétition

Une combinaison avec répétition de p objets pris dans E est une disposition non-ordonnée de p éléments, à choisir parmi n éléments, avec répétition. Ça correspond à un tirage sans ordre et avec remise.
Le nombre de combinaisons avec répétition de p objets parmi n est donné par

$$K_n^p = C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!},$$

p étant éventuellement supérieur à n.

Propriétés

1) $C_n^0 = C_n^n = 1$.
2) Complémentaire: $C_n^p = C_n^{n-p}$.
3) Triangle de Pascal: $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$.
4) Formule de Binome: $(x+y)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 y x^{n-1} + \cdots + C_n^{n-1} y^{n-1} x + C_n^n y^n$

Exercices 1

Un tournoi sportif compte 8 équipes engagées. Chaque équipe doit rencontrer toutes les autres une seule fois. Combien doit-on organiser de matchs ?

Exercices 1

A l'oral d'un examen, un étudiant doit répondre à 8 questions sur 10.
a) Combien de choix y-a-t-il?
b) Combien de choix a-t-il s'il doit répondre aux trois premières questions?
c) Combien de choix a-t-il s'il doit répondre au moins à 4 des 5 premières questions?

Exercices 2

Combien de permutations distinctes peut-on former avec toutes les lettres des mots:
a) leur b) anabase c) sociologique?

Outline

Definition

On appelle expérience aléatoire, toute expérience dont on ne peut pas prédire son résultat avec exactitude, mais on peut prédire l'ensemble de tous les résultats possibles. Cet ensemble est appelé ensemble fondamental, noté Ω .

Definition

On appelle expérience aléatoire, toute expérience dont on ne peut pas prédire son résultat avec exactitude, mais on peut prédire l'ensemble de tous les résultats possibles. Cet ensemble est appelé ensemble fondamental, noté Ω .

Exemples

1) Jet d'un dé,

Definition

On appelle expérience aléatoire, toute expérience dont on ne peut pas prédire son résultat avec exactitude, mais on peut prédire l'ensemble de tous les résultats possibles. Cet ensemble est appelé ensemble fondamental, noté Ω .

Exemples

1) Jet d'un dé,
   $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Definition

On appelle expérience aléatoire, toute expérience dont on ne peut pas prédire son résultat avec exactitude, mais on peut prédire l'ensemble de tous les résultats possibles. Cet ensemble est appelé ensemble fondamental, noté Ω .

Exemples

1) Jet d'un dé,
   $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
2) Le jet successif de n pièces de monnaie,

Definition

On appelle expérience aléatoire, toute expérience dont on ne peut pas prédire son résultat avec exactitude, mais on peut prédire l'ensemble de tous les résultats possibles. Cet ensemble est appelé ensemble fondamental, noté Ω .

Exemples

1) Jet d'un dé,
   $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
2) Le jet successif de n pièces de monnaie,
   $\Omega = \{P, F\}^n$ (pour $n = 2$, on a $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\} = \{P, F\}^2$).

Definition

On appelle expérience aléatoire, toute expérience dont on ne peut pas prédire son résultat avec exactitude, mais on peut prédire l'ensemble de tous les résultats possibles. Cet ensemble est appelé ensemble fondamental, noté Ω .

Exemples

1) Jet d'un dé,
   $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
2) Le jet successif de n pièces de monnaie,
   $\Omega = \{P, F\}^n$ (pour $n = 2$, on a $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\} = \{P, F\}^2$).
3) La durée de vie d'une ampoule.

Definition

On appelle expérience aléatoire, toute expérience dont on ne peut pas prédire son résultat avec exactitude, mais on peut prédire l'ensemble de tous les résultats possibles. Cet ensemble est appelé ensemble fondamental, noté Ω .

Exemples

1) Jet d'un dé,
   $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
2) Le jet successif de n pièces de monnaie,
   $\Omega = \{P, F\}^n$ (pour $n = 2$, on a $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\} = \{P, F\}^2$).
3) La durée de vie d'une ampoule.
   $\Omega = \boldsymbol{R}^+$.

Definition

Un évènement A est un ensemble de résultats ou un sous-ensemble de l'ensemble fondamental . ($A \in \Omega$) On dit que l'évènement A est réalisé ou non selon que le résultat de l'expérience aléatoire appartient ou non à A.

Definition

On appelle famille d'évènements possible de Ω , notée $\mathcal{P}(\Omega)$, l'ensemble de ses parties.

Exemples

1) Jet d'un dé,
   $A = \{2, 4, 6\}$: "obtenir un nombre pair".

Definition

Un évènement A est un ensemble de résultats ou un sous-ensemble de l'ensemble fondamental . ($A \in \Omega$) On dit que l'évènement A est réalisé ou non selon que le résultat de l'expérience aléatoire appartient ou non à A.

Definition

On appelle famille d'évènements possible de Ω , notée $\mathcal{P}(\Omega)$, l'ensemble de ses parties.

Exemples

1) Jet d'un dé,
   $A = \{2, 4, 6\}$: "obtenir un nombre pair".
2) La durée de vie d'une ampoule.
   $A = [100, +\infty[$: "l'ampoule fonctionne plus de cent heures".

On va utiliser toutes les opérations sur les ensembles:

Notation	Vocabulaire Ensembliste	Vocabulaire Probabiliste
Ω		événement certain
$\emptyset$	ensemble vide	événement impossible
$\{\omega\}$	singleton ω	événement élémentaire ω
$A \subset B$	A est inclus dans B	A implique B
A^c	Complémentaire de A	Le contraire de A est réalisé
$A \cup B$	A union B	A ou B est réalisé
$\cup_{i \in I} A_i$	union des $(A_i)_{i \in I}$	l'un des A_i est réalisé
$A \cap B$	A inter B	A et B sont réalisés
$\cap_{i \in I} A_i$	Intersection des $(A_i)_{i \in I}$	tous les A_i sont réalisés

Exemple

Considerons le jet d'un dé. L'ensemble fondamental est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Les evenements suivants peuvent etre associes à un sous-ensemble de Ω :

a) A_1 : l'évènement d'obtenir le nombre 2. Alors, $A_1 = \{2\}$ est un évènement élémentaire.

Exemple

Considerons le jet d'un dé. L'ensemble fondamental est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Les evenements suivants peuvent etre associes à un sous-ensemble de Ω :

a) A_1 : l'évènement d'obtenir le nombre 2. Alors, $A_1 = \{2\}$ est un évènement élémentaire.

b) A_2: l'évènement d'obtenir un nombre inférieur à 8; $A_2 = \Omega$.

Exemple

Considerons le jet d'un dé. L'ensemble fondamental est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Les evenements suivants peuvent etre associes à un sous-ensemble de Ω :

a) A_1 : l'évènement d'obtenir le nombre 2. Alors, $A_1 = \{2\}$ est un évènement élémentaire.

b) A_2: l'évènement d'obtenir un nombre inférieur à 8; $A_2 = \Omega$.

c) A_3: l'évènement d'avoir un nombre divisible par 11, $A_3 = \emptyset$

Exemple

Considerons le jet d'un dé. L'ensemble fondamental est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Les evenements suivants peuvent etre associes à un sous-ensemble de Ω :

a) A_1 : l'évènement d'obtenir le nombre 2. Alors, $A_1 = \{2\}$ est un évènement élémentaire.

b) A_2: l'évènement d'obtenir un nombre inférieur à 8; $A_2 = \Omega$.

c) A_3: l'évènement d'avoir un nombre divisible par 11, $A_3 = \emptyset$

d) A_4: l'évènement d'avoir un nombre premier; $A_4 = \{1, 3, 5\}$

Definition

$A \cap B = \emptyset$ signifie que A et B sont des événements incompatibles. A et B ne peuvent pas être réalisés en même temps.

Exemple

A et $\overline{A}$ sont incompatibles: $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

Distributivité:

Soient A, B et C trois ensembles. On a:

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Loi de Morgan:

Soient A et B deux ensembles. On a les égalités suivantes:

- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Propriétés utiles des ensembles

Proposition

Si A et B sont deux ensembles, on a:

$$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B).$$

Outline

Tribu d'événements

Definition

Soit Ω l'ensemble fondamental d'une expérience aléatoire. Une σ-algèbre ou une tribu sur est une famille $\mathcal{F}$ de sous-ensembles de Ω telle que

C_1 $\Omega \in \mathcal{F}$.

C_2 Pour tout $A \in \mathcal{F}$, alors $\overline{A} \in \mathcal{F}$.

C_3 Pour tout $A \in \mathcal{F}$ et tout $B \in \mathcal{F}$, alors $A \cup B \in \mathcal{F}$ et $A \cap B \in \mathcal{F}$.

C_4 Si $A_n \in \mathcal{F}$ pour tout $n \in \boldsymbol{N}$,

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}.$$

le couple $(\Omega, \mathcal{F})$ est appelé espace mesurable ou espace probabilisable.

Exercices

- Vérifier que $\mathcal{P}(\Omega)$ et $(\emptyset, \Omega)$ sont des tribus sur Ω.
- Soit A une partie de Ω. Montrer que $\{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ est une tribu sur Ω.

Probabilité

Definition

On appelle probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ une application $\mathbb{P} : (\Omega; \mathcal{F}) \longrightarrow [0, 1]$ telle que:

i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;

ii) Pour toute suite A_n d'événements incompatibles, avec $A_m \cap A_n = \emptyset$ pour $m \neq n$:

$$\mathbb{P}[\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

propriété de σ–additivité.
Une probabilité est donc une application qui à un événement va associer un nombre compris entre 0 et 1.
Le triple $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s'appelle un espace probabilisé.

Calcul de probabilités
Cas particulier de l'équiprobabilité

On considère une expérience aléatoire telle que:

- L'espace fondamental Ω défini soit de cardinal fini;
- Les éventualités qui le composent soient équiprobables.

On définit la probabilité d'un événement A par:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\textit{nombre de cas favorables}}{\textit{nombre total de cas}}.$$

On considère une expérience aléatoire telle que:

- L'espace fondamental Ω défini soit de cardinal fini;
- Les éventualités qui le composent soient équiprobables.

On définit la probabilité d'un événement A par:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\textit{nombre de cas favorables}}{\textit{nombre total de cas}}.$$

Remarque

Attention, cette formule est valable seulement en situation d'équiprobabilité.

Propriétés

P_1) La probabilité de l'événement complémentaire d'un événement quelconque A s'obtient par:

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A);$$

P_2) L'événement impossible est de probabilité nulle:

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0;$$

P_3) Si un événement implique un autre, sa probabilité est plus petite:

$$A \subset B \Longrightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B);$$

P_4) La probabilité de l'union de deux événements:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Exemples

1) Jet d'une pièce de monnaie $\Omega = \{P, F\}$, si la pièce est équilibrée on choisit:

$$\mathbb{P}(\{P\}) = \mathbb{P}(\{F\}) = \frac{1}{2}.$$

Exemples

1) Jet d'une pièce de monnaie $\Omega = \{P, F\}$, si la pièce est équilibrée on choisit:
$$\mathbb{P}(\{P\}) = \mathbb{P}(\{F\}) = \frac{1}{2}.$$

2) Jet d'un dé: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, les faces sont équiprobables. On prend $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et on définit $\mathbb{P}$ par:
$$\mathbb{P}(\{1\}) = \mathbb{P}(\{2\}) = \mathbb{P}(\{3\}) = \mathbb{P}(\{4\}) = \mathbb{P}(\{5\}) = \mathbb{P}(\{6\}) = \frac{1}{6}.$$

Exemples

1) Jet d'une pièce de monnaie $\Omega = \{P, F\}$, si la pièce est équilibrée on choisit:

$$\mathbb{P}(\{P\}) = \mathbb{P}(\{F\}) = \frac{1}{2}.$$

2) Jet d'un dé: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, les faces sont équiprobables. On prend $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et on définit $\mathbb{P}$ par:

$$\mathbb{P}(\{1\}) = \mathbb{P}(\{2\}) = \mathbb{P}(\{3\}) = \mathbb{P}(\{4\}) = \mathbb{P}(\{5\}) = \mathbb{P}(\{6\}) = \frac{1}{6}.$$

On a donc

$$\mathbb{P}(\{2, 3\}) = ???$$

Exemples

1) Jet d'une pièce de monnaie $\Omega = \{P, F\}$, si la pièce est équilibrée on choisit:
$$\mathbb{P}(\{P\}) = \mathbb{P}(\{F\}) = \frac{1}{2}.$$

2) Jet d'un dé: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, les faces sont équiprobables. On prend $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et on définit $\mathbb{P}$ par:
$$\mathbb{P}(\{1\}) = \mathbb{P}(\{2\}) = \mathbb{P}(\{3\}) = \mathbb{P}(\{4\}) = \mathbb{P}(\{5\}) = \mathbb{P}(\{6\}) = \frac{1}{6}.$$
On a donc
$$\mathbb{P}(\{2, 3\}) = ???$$
$$\mathbb{P}(\{2, 3\}) = \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{3\}) = \frac{1}{3}.$$

Exercices 1

Un sac contient 5 jetons verts (numérotés de 1 à 5) et 4 jetons rouges (numérotés de 1 à 4).

1) On tire successivement et au hasard 3 jetons du sac, sans remettre le jeton tiré. Calculer les probabilités :

a) De ne tirer que 3 jetons verts ;

b) De ne tirer aucun jeton vert

c) De tirer au plus 2 jetons verts ;

d) De tirer exactement 1 jeton vert.

2) On tire simultanément et au hasard 3 jetons du sac. Reprendre alors les questions a), b), c) et d).

Outline

Indépendance

Définition: Indépendance

On dit que deux évènements A et B sont indépendants lorsque :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

Remarque

Pour savoir si 2 évènements sont indépendants, il faut calculer séparément $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

Exemple

On joue 2 fois au P ou F de manière indépendante avec une pièce équilibrée (tout évènement relatif au premier lance est indépendant d'un évènement relatif au 2ème lancé). Alors on a :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(\text{ P au 1ère lancé ET P au 2ème lancé}) \\
= & \ \mathbb{P}(\text{P au 1ère lancé}) \times \mathbb{P}(\text{ P au 2ème lancé}) \\
= & \ \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\
= & \ \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Exemple

On lance un dé équilibré une fois et on note le chiffre de la face obtenue. Soient A = le chiffre de la face obtenue est un multiple de 6 et B = le chiffre de la face obtenue est pair. A et B sont ils indépendants ?

Exemple

On lance un dé équilibré une fois et on note le chiffre de la face obtenue. Soient A = le chiffre de la face obtenue est un multiple de 6 et B = le chiffre de la face obtenue est pair. A et B sont ils indépendants ?

Réponse: On a $A = \{6\}$ et $B = \{2, 4, 6\}$
donc $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{6\}) = \frac{1}{6}$
puisque $P(A) \times \mathbb{P}(B) \neq \mathbb{P}(A \cap B)$
Donc A et B ne sont pas indépendants.

Indépendance Mutuelle

Définition

Soit $(A_1, \ldots, A_n) \in \mathcal{P}(\Omega)$. Les événements $A_1, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants si :

$$\forall J \subset [1, n], P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P\left(A_j\right)$$

En particulier, en prenant $J = [1, n]$:

Proposition (Mutuelle indépendance pour une famille finie)

Soit $A_1, \ldots, A_n$ des événements mutuellement indépendants. Alors:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P\left(A_i\right)$$

Avertissement

L'égalité ne suffit pas à avoir l'indépendance mutuelle.

Exemple

On fait des tirages à pile ou face

- A est réalisé si et seulement si le premier tirage est Pile.
- B est réalisé si et seulement si lors des 3 premiers tirages, il y a au plus un Pile.
- $C = B$

On a

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{8} = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C),$$

mais les événements ne sont clairement pas mutuellement indépendants!

Probabilité conditionnelle

Définition

Soit A et B deux événements avec $\mathbb{P}(A) \neq 0$. On appelle probabilité conditionnelle de B sachant A, la probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé. Elle est notée $\mathbb{P}_A(B)$ et est définie par :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

On trouve également souvent la notation $\mathbb{P}(B|A)$.

Exemple

On lance une fois un dé cubique parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Soit A l'événement: "on obtient un nombre inférieur ou égal à 5" et B l'événement :"on obtient un nombre supérieur ou égal à 3".
Si on sait que A est réalisé quelle est la probabilité de B.?

Théorème

Soient $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tq $\mathbb{P}(B) > 0$. P étant une probabilité sur $\mathbb{F}$. L'application $P_{|B}$ définie par

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{|B} : \qquad & \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1] \\ & A \to \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B) \end{aligned}$$

est une probabilité sur $\mathcal{F}$

Remarque

La formule de définition de la probabilité conditionnelle peut aussi s'écrire si $\mathbb{P}(A) > 0$:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A).$$

Cette formule permet de calculer la probabilité de la réalisation simultanée de 2 événements.

Propriétés

Soit $C \in \mathcal{F}$ tel que $P(C) > 0$, alors on a: $\forall A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{F}$

- $P(\bar{A}/C) = 1 - P(A/C)$
- Si $A \subset B$ alors $P(A \mid C) \leq P(B \mid C)$
- $P\{(A \cap B)/C\} = P(B/C) - P\{(\bar{A} \cap B)/C\}$
- $P\{(A \cup B)/C\} = P(A/C) + P(B/C) - P\{(A \cap B)/C\}$

Proposition

Si A et B sont indépendants alors: $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$. C'est-à-dire $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B)$: la réalisation d'un évènement n'affecte pas la réalisation du second.

Propriété (Formule de Bayes)

Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$ alors on a :

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid B) \cdot \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Proposition (Formule des probabilités totales)

Soit $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ une partition de Ω d'événements non vides $(\Omega = \cup_{i=1}^{n} A_i$ et $\cap_{i=1}^{n} A_i = \emptyset)$. Soit $B \in \Omega$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P\left(B \mid A_i\right) P\left(A_i\right)$$

Remarque

Quand $n = 2$, on obtient en particulier:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c).$$

Exemple

Une boite contient 4 boules rouges et 10 boules blanches. Une deuxième boite contient 6 rouges. On tire au hasard une boules de la première boite et on la remet dans la seconde boite sans regarder sa couleur. On tire alors une boule de la deuxième boite. Quelle est la probabilité pour que cette boule soit rouge.
On considère les évènements suivants:
B =" avoir une boule rouge au 2ème tirage".
A1= "la 1ère boule tirée est rouge".
A2= "la 1ère boule tirée est blanche".
Calculer $P(B)$.

Formule de Bayes

Soit $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ une partition de Ω d'événements non vides. Soit $B \in \Omega$

$$P\left(A_i \mid B\right) = \frac{P\left(A_i\right) P\left(B \mid A_i\right)}{\sum_{j=1}^{n} P\left(A_j\right) P\left(B \mid A_j\right)}$$

Remarque

Quand $n = 2$, on obtient en particulier:

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|\overline{B})\mathbb{P}(\overline{B})}.$$

Exemple

Une usine de pièces dispose de 3 machines A, B et C qui fabriquent respct. $50\%, 30\%$ et 20% de la production. Les pourcentage de pièces défectueuses de ces machines sont de $3\%, 4\%$ et 5%.

1- Quelle est la probabilité pour qu'une pièce soit défectueuse?

2- Calculer la probabilité pour qu'une pièce défectueuse provienne de A?

Exercice 1

Dans un lycée, la proportion des filles est de 40% du total des élèves. On sait que dans ce lycée, une fille sur deux pratique un sport alors que pour les garçons, un sur trois pratique un sport. On choisit au hasard un élève de ce lycée.

1) Quelle est la probabilité que cet élève pratique un sport?

2) Quelle est la probabilité que l'élève choisi soit une fille sachant qu'il pratique un sport?