Université Ibn Zohr
Faculté des Sciences
Département de physique

Agadir 13/12/2020

Mécanique-1
Corrigé de la série N°1

Exercice 1

$$\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{\imath}} + 2\vec{\mathbf{\jmath}} + 3\vec{\mathbf{k}} \qquad \vec{\mathbf{B}} = 4\vec{\mathbf{\imath}} + 5\vec{\mathbf{\jmath}} + 6\vec{\mathbf{k}} \qquad \vec{\mathbf{C}} = 7\vec{\mathbf{\imath}} + 8\vec{\mathbf{\jmath}} + 9\vec{\mathbf{k}}$$

1. $$\vec{A}\wedge\vec{B} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}_{\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k}} = -3\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} - 3\vec{k}$$

$$\vec{B}\wedge\vec{A} = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 4 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-6\\3\end{pmatrix}_{\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k}} = 3\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} + 3\vec{k} = -\vec{A}\wedge\vec{B}$$

Rappel : Le produit scalaire de deux vecteurs est un scalaire appartenant à R, donné par la relation :

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \|\vec{A}\|\,\|\vec{B}\|\,\cos(\vec{A},\vec{B})$$

L'expression analytique du produit scalaire en coordonnées cartésienne dans une base orthonormée $(\vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{k})$ est :

Pour $\vec{A}\begin{pmatrix}A_X\\A_Y\\A_Z\end{pmatrix}$ *et* $\vec{B}\begin{pmatrix}B_x\\B_y\\B_z\end{pmatrix}$ $\qquad \vec{A}\cdot\vec{B} = A_x\cdot B_x + A_y\cdot B_y + A_z\cdot B_z$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = 4 + 10 + 18 = 32$$

$$\vec{C}\cdot(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix} = -21 + 48 - 27 = 0$$

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{A}) = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-6\\3\end{pmatrix} = 3 - 12 + 9 = 0$$

$$\vec{A}\cdot(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-6\\3\end{pmatrix} = -3 - 12 + 9 = 0$$

$\overrightarrow{C} \cdot (\overrightarrow{B} \wedge \vec{A}) = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = 21 - 48 + 27 = 0$

Rappel : Le module d'un vecteur $\vec{A}\begin{pmatrix} A_X \\ A_Y \\ A_Z \end{pmatrix}$

A_X ; A_Y ;A_Z $\quad$ *sont les composantes de* $\overrightarrow{A}$ *dans un repère cartesien de base*

$(\vec{\imath} \;;\; \vec{\jmath} \;;\; \vec{k})$ le module de $\vec{A}$ *est* $\|\vec{A}\| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

- $\|\vec{A}\| = \|1\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}\| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$
- $\|\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}\| = \|5\vec{\imath} + 7\vec{\jmath} + 9\vec{k}\| = \sqrt{25+49+81} = \sqrt{155}$
- $\overrightarrow{A} \wedge (\overrightarrow{B} \wedge \vec{C}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{A} \wedge (\overrightarrow{B} \wedge \vec{C}) = -24\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} + 12\vec{k}$$

- $(\overrightarrow{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{C} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -3 & 6 & -3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 78 \\ 6 \\ -66 \end{pmatrix}_{\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k}} = 78\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} - 66\vec{k}$

D ou : $\overrightarrow{A} \wedge (\overrightarrow{B} \wedge \vec{C}) \neq (\overrightarrow{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{C}$

2. $\cos(\vec{A}, \vec{B}) = \frac{\overrightarrow{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\|} = \frac{32}{\sqrt{14}\,\sqrt{77}} = 0.9746 \qquad \alpha = \pm 12^{\circ}933$

3. $1^{ère}$ *méthode* : $\|\vec{A} \wedge \vec{B}\| = \sqrt{9+36+9} = \sqrt{54} = 7.348$

   $2^{ème}$ *méthode*: $\|\vec{A} \wedge \vec{B}\| = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \, |\sin(\vec{A}, \vec{B})|$

   $= \sqrt{14}\,\sqrt{77}\, |\sin 12^{\circ}933| = 7.3484$

4. $\vec{n}_B = \frac{\vec{B}}{\|\vec{B}\|} = \frac{4\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} + 6\vec{k}}{\sqrt{77}}$

5. Cosinus directeur du vecteur $\vec{C}$:

$\cos\alpha_c = \vec{n}_c \cdot \vec{\imath} = \frac{\vec{C}}{\|\vec{C}\|} \cdot \vec{\imath} = \frac{1}{\sqrt{14}}(7\vec{\imath} + 8\vec{\jmath} + 9\vec{k}) \cdot \vec{\imath} = \frac{7}{\sqrt{194}}$

$\text{Cos}\,\beta_c = \frac{\vec{C}}{\|\vec{C}\|} \cdot \vec{\jmath} = \frac{8}{\sqrt{194}}$

$\cos \gamma_c = \frac{\vec{C}}{\|\vec{C}\|} \cdot \vec{\jmath} = \frac{9}{\sqrt{194}}$

On vérifie sans difficulté que : $\cos^2 \alpha_c + \cos^2 \beta_c + \cos^2 \gamma_c = 1$

Exercice 2

1. $\vec{e}_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{j} + \vec{k})$; $\vec{e}_2 = -\frac{1}{\sqrt{6}}(2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$; $\vec{e}_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}(-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$

$$\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = \|\vec{e}_3\| = 1 \qquad \textit{vecteurs unitaires}$$

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0 \;;\; \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = 0;\; \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 0$$

Orthogonalité est alors vérifiée entre les trois vecteurs.

$$\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \vec{e}_3$$

$$\textit{de même}: \; \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \; \textit{et} \; \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_2$$

$$\textit{d'où ces 3vecteurs } \vec{e}_1 \;;\, \vec{e}_2 \;;\; \vec{e}_3 \textit{ forment une base orthonormée directe.}$$

2− $\vec{V} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - k$; $\vec{V} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$

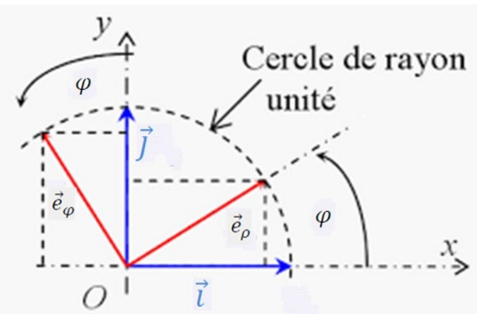
$$a = \vec{V} \cdot \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(2+1) = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

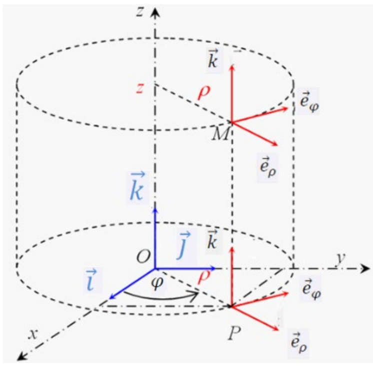
$$b = \vec{V} \cdot \vec{e}_2 = \frac{-7}{\sqrt{6}} \;;\; c = \vec{V} \cdot \vec{e}_3 = \frac{-2}{\sqrt{3}}$$

$$d'ou: \; \vec{V} = \frac{3}{\sqrt{2}}\vec{e}_1 + \frac{-7}{\sqrt{6}}\vec{e}_2 + \frac{-2}{\sqrt{3}}\vec{e}_3$$

Exercice 3

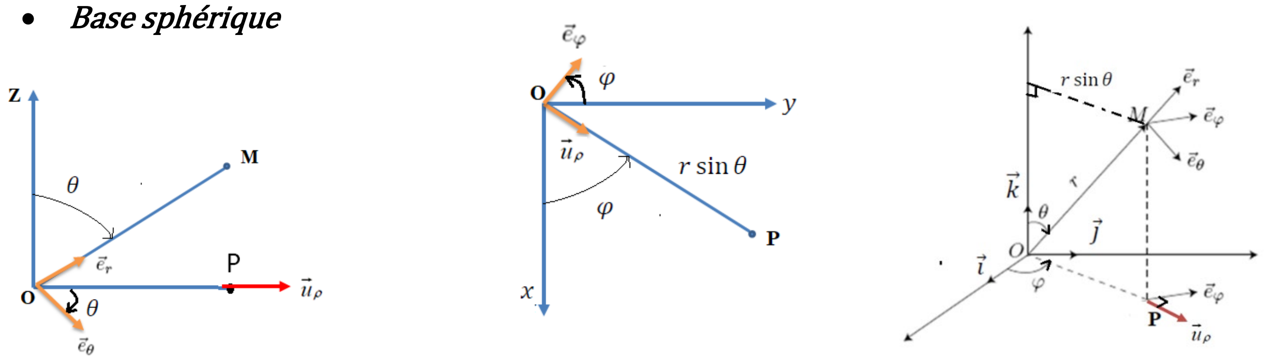
1- **Base cylindrique**





$\vec{e}_\rho = \cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\varphi\,\vec{\jmath}\,,\quad \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath}\;,\quad \vec{k} = \vec{k}.$

- ***Base sphérique***



$\vec{e}_r = \sin\theta\,\vec{u}_\rho + \cos\theta\,\vec{k}$

$\vec{e}_r = \sin\theta\,(\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\varphi\,\vec{\jmath}) + \cos\theta\,\vec{k}$ car $\vec{u}_\rho = \cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\varphi\,\vec{\jmath}$

$\vec{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} + \cos\theta\,\vec{k}$

$\vec{e}_\theta = \cos\theta\,\vec{u}_\rho - \sin\theta\;\vec{k}$

$\vec{e}_\theta = \cos\theta\,(\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\varphi\,\vec{\jmath}) - \sin\theta\;\vec{k}$ Car $\vec{u}_\rho = \cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\varphi\,\vec{\jmath}$

$\vec{e}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} - \sin\theta\;\vec{k}$

$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath}$

$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} = r\sin\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + r\sin\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} + r\cos\theta\,\vec{k}$

$x = r\sin\theta\cos\varphi$ et $y = r\sin\theta\sin\varphi$ et $z = r\cos\theta$

2-a/ $\left.\dfrac{\delta\vec{e}_\rho}{\delta\varphi}\right)_R = -\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath} = \vec{e}_\varphi$

$$\left.\frac{\delta\vec{e}_\varphi}{\delta\varphi}\right)_R = -\cos\varphi\,\vec{\imath} - \sin\varphi\,\vec{\jmath} = -\vec{e}_\rho$$

b / $\left.\dfrac{\delta\vec{e}_r}{\delta\theta}\right)_{\varphi=cte} = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} - \sin\theta\,\vec{k} = \vec{e}_\theta$

$$\left.\frac{\delta\vec{e}_r}{\delta\varphi}\right)_{\theta=cte} = -\sin\theta\sin\varphi\,\vec{\imath} + \sin\theta\cos\varphi\,\vec{\jmath} = \sin\theta\,\vec{e}_\varphi$$

$$\left.\frac{\delta\vec{e}_\theta}{\delta\theta}\right)_{\varphi=cte} = -\sin\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} - \sin\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} - \cos\theta\,\vec{k} = -\vec{e}_r$$

$$\left.\frac{\delta\vec{e}_\theta}{\delta\varphi}\right)_{\theta=cte} = -\cos\theta\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\theta\cos\varphi\,\vec{\jmath} = \cos\theta\vec{e}_\varphi$$

$$\left.\frac{\delta\vec{e}_\varphi}{\delta\theta}\right)_{\varphi=cte} = \vec{0}$$

$$\left.\frac{\delta\vec{e}_\varphi}{\delta\varphi}\right)_{\theta=cte} = -\cos\varphi\,\vec{\imath} - \sin\varphi\,\vec{\jmath} = -\sin\theta\,\vec{e}_r - \cos\theta\,\vec{e}_\theta$$

$car\ \ \sin\theta\,\vec{e}_r + \cos\theta\,\vec{e}_\theta \ = \ \cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\varphi\,\vec{\jmath}$

vecteur deplacement élémentaireen coordonnées cartésienne

$$d\overrightarrow{OM} = \quad dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}$$

vecteur deplacement élémentaire en coordonnées cylindriques

$$d\overrightarrow{OM} = \quad d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\varphi\vec{e}_\varphi + dz\vec{k}$$

vecteur deplacement élémentaire en coordonnées sphériques

$$d\overrightarrow{OM} = \quad dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + r\sin\theta\,d\varphi\vec{e}_\varphi$$

élément de surface en coordonnées cylindriques

$$dS = \ d\rho \cdot \ \rho d\varphi = \rho d\rho d\varphi$$

élément de volume en coordonnées cylindriques

$$dV = \rho d\rho d\varphi dz$$

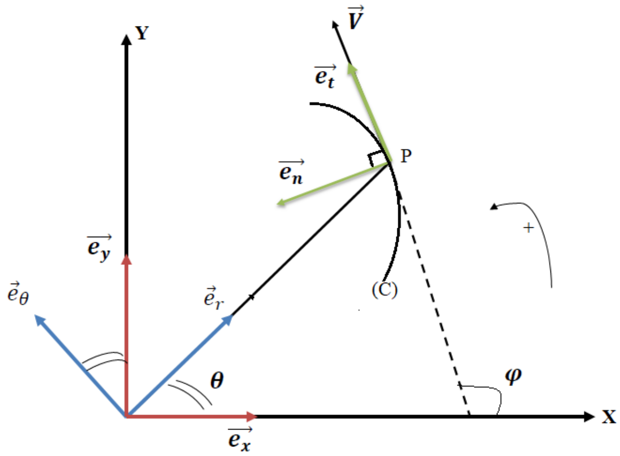
élément de surface en coordonnées sphériques

$$dS = \ rdrd\theta$$

élément de volume en coordonnées sphériques

$$dV = \ r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$$

Exercice 4



1- $\overrightarrow{OP}$ = OP $\overrightarrow{e_r}$ = OP$_x$ $\overrightarrow{e_x}$+ OP$_y$ $\overrightarrow{e_y}$ = OP $\cos\theta\,\overrightarrow{e_x}$+ OP $\sin\theta\,\overrightarrow{e_y}$

Soit : $\overrightarrow{e_r} = \cos\theta\,\overrightarrow{e_x} + \sin\theta\,\overrightarrow{e_y}$ (vecteur unitaire radial)

Et : $\overrightarrow{e_\theta} = -\sin\theta\,\overrightarrow{e_x} + \cos\theta\,\overrightarrow{e_y}$ (vecteur unitaire ortho radial)

2- Dans la base ($\overrightarrow{e_t}$,$\overrightarrow{e_n}$) un vecteur $\vec{V}$ tangent en P à la courbe (C) peut s'écrire :

$\vec{V}$ = V $\overrightarrow{e_t}$ = V$_x\overrightarrow{e_x}$ + V$_y\overrightarrow{e_y}$ = V$\cos\varphi\,\overrightarrow{e_x}$ + V $\sin\varphi\,\overrightarrow{e_y}$

Donc : $\overrightarrow{e_t} = \cos\varphi\,\overrightarrow{e_x} + \sin\varphi\,\overrightarrow{e_y}$

De même : : $\overrightarrow{e_n} = -\sin\varphi\,\overrightarrow{e_x} + \cos\varphi\,\overrightarrow{e_y}$

3- $\frac{d\vec{e}_x}{dt}/_R = \vec{0}$ car $\overrightarrow{e_x}$ est constante dans R

$\frac{d\vec{e}_y}{dt}/_R = \vec{0}$ car $\overrightarrow{e_y}$ est constant dans R

$\frac{d\vec{e}_r}{dt}/_R = -\dot{\theta}\sin\theta\,\overrightarrow{e_x} + \dot{\theta}\cos\theta\,\overrightarrow{e_y} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$

$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}/_R = -\dot{\theta}\cos\theta\,\overrightarrow{e_x} - \dot{\theta}\sin\theta\,\overrightarrow{e_y} = -\dot{\theta}\overrightarrow{e_r}$

$\frac{d\vec{e}_t}{dt}/_R = -\dot{\varphi}\sin\varphi\,\overrightarrow{e_x} + \dot{\varphi}\cos\varphi\,\overrightarrow{e_y} = \dot{\varphi}\overrightarrow{e_n}$

$\frac{d\vec{e}_n}{dt}/_R = -\dot{\varphi}\cos\varphi\,\overrightarrow{e_x} - \dot{\varphi}\sin\varphi\,\overrightarrow{e_y} = -\dot{\varphi}\overrightarrow{e_t}$

4- On constate en effet que par exemple :

Le module de la dérivée : $\left\|\frac{d\vec{e}_r}{dt}/R\right\| = \|\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}\| = \dot{\theta}$

La dérivée du module $\frac{\mathrm{d}\|\overrightarrow{e_r}\|}{\mathrm{dt}} = 0$ alors : $\left\|\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{dt}}/\mathrm{R}\right\| \neq \frac{\mathrm{d}\|\overrightarrow{e_r}\|}{\mathrm{dt}}$

Exercice 5

Soient $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$ *la base polaire* $r(\theta) = r_0\ e^{\theta(t)}$; $w = \frac{d\theta}{dt} = cste$

1. $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r = r_0\ e^{\theta(t)}\vec{e}_r$

Calcul de la vitesse :

$$\vec{V}\left({}^{M}/_{R}\right) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{dt}}/\mathrm{R} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = r_0\ e^{\theta(t)}\dot{\theta}\vec{e}_r + r_0\ e^{\theta(t)}\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

d'où: $\vec{V}\left({}^{M}/_{R}\right) = r_0\ w\ e^{\theta(t)}(\vec{e}_r + \vec{e}_\theta)$

avec: $r_0\ w\ e^{\theta(t)}\vec{e}_r$ *composante radiale* , $r_0\ w\ e^{\theta(t)}\vec{e}_\theta$ *composante orthoradiale*

Calcul de l'accélération :

$$\vec{\gamma}\left({}^{M}/_{R}\right) = \frac{d}{dt}\vec{V}\left({}^{M}/_{R}\right) = \frac{\partial\vec{V}}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

Or $\left.\frac{\partial\vec{V}}{\partial r}\right)_{\theta=cte} = \vec{0}$

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial\theta}/_{r=cte} = r_0\ w\ e^{\theta(t)}(\vec{e}_r + \vec{e}_\theta) + r_0\ w\ e^{\theta(t)}\left(\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\theta} + \frac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial\theta}\right)$$

$$\left.\frac{\partial\vec{V}}{\partial\theta}\right)_{r=cte} = r_0\ w\ e^{\theta(t)}(\vec{e}_r + \vec{e}_\theta) + r_0\ w\ e^{\theta(t)}\ (\vec{e}_r - \vec{e}_\theta)$$

$$\left.\frac{\partial\vec{V}}{\partial\theta}\right)_{r=cte} = 2r_0\ w\ e^{\theta(t)}\vec{e}_\theta$$

$$D'\text{où: } \vec{\gamma}\left({}^{M}/_{R}\right) = 2r_0\ w^2\ e^{\theta(t)}\vec{e}_\theta$$

2. La distance parcourue par la particule entre l'instant $\mathrm{t} = 0$ et $\mathrm{t} = \frac{4\pi}{\omega}$

On sait que : $\|\vec{V}\| = \frac{dS}{dt}$ *or* $\vec{V}\left({}^{M}/_{R}\right) = r_0\ w\ e^{\theta(t)}(\vec{e}_r + \vec{e}_\theta)$

$$\Rightarrow \|\vec{V}\| = \sqrt{2}\ r_0\ w\ e^{\theta(t)} = \frac{ds}{dt}$$

$$\Rightarrow ds = \sqrt{2}\ r_0\ w\ e^{\theta(t)}dt$$

$$Or:\ w = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow d\theta = wdt$$

Alors : $ds = \sqrt{2}\ r_0\ w\ e^{\theta(t)}dt = \sqrt{2}\ r_0\ e^{\theta(t)}d\theta$

Où encore : $S = \int_0^{\theta} \sqrt{2}\ r_0\ e^{\theta(t)}d\theta$

Comme : $d\theta = wdt \implies \theta = wt\ \ donc\ \ t = \frac{\theta}{w}\ car\ w = cte$

Si t = 0 $\implies \theta = 0$

t = $\frac{4\pi}{w} \implies \theta = 4\pi$

et $S = \int_0^{\theta=4\pi} \sqrt{2}\ r_0\ e^{\theta}d\theta = \sqrt{2}\ r_0\ \int_0^{4\pi} e^{\theta}d\theta\ = \sqrt{2}\ r_0\ \left[e^{\theta}\right]_0^{4\pi}$

d'où finalement $S = \sqrt{2}\ r_0\ (e^{4\pi} - 1)$

AN : $S = 405526{,}18 r_0$

3. Déterminons le rayon de courbure de la trajectoire en utilisant la relation :

$$\|\vec{V}\ \wedge \vec{\gamma}\| = \frac{V^3}{R_c}\ = \frac{\left(\sqrt{2}\ r_0\ w\ e^{\theta(t)}\right)^3}{R_c}$$

$$\vec{V}\ \wedge \vec{\gamma}\ = \begin{pmatrix} r_0\ w\ e^{\theta} \\ r_0\ w\ e^{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 2r_0\ w^2\ e^{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2r_0^2 w^3 e^{2\theta} \end{pmatrix}$$

$$\vec{V}\ \wedge \vec{\gamma}\ = 2r_0^2 w^3 e^{2\theta}\ \vec{k} \implies \|\vec{V}\ \wedge \vec{\gamma}\| = 2r_0^2 w^3 e^{2\theta}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{V^3}{R_c}\ &= \frac{\left(\sqrt{2}\, w\, r_0\ e^{\theta(t)}\right)^3}{R_c} \\ \|\vec{V}\ \wedge \vec{\gamma}\| &= 2r_0^2 w^3 e^{2\theta} \end{aligned}\right\} \implies 2r_0^2 w^3 e^{2\theta} = \frac{\left(\sqrt{2}\ r_0\ w\ e^{\theta(t)}\right)^3}{R_c} \implies R_c = \sqrt{2}\ r_0\ e^{\theta}$$

4. Utilisons les composantes de Frenet

Soit :

$$\vec{V} = v\vec{\tau}\ \ ; \vec{\gamma}\ = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

$$\implies \vec{\gamma}\ = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{d\theta}\frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + V^2\frac{d\theta}{ds}\vec{n}$$

$Avec\ \frac{ds}{dt} = v\ ; \frac{d\vec{\tau}}{d\theta} = \vec{n}\ ;\ \vec{n}\ est\ le\ vecteur\ normal\ ,\ \vec{\tau}\ est\ le\ vecteur\ tangentiel$

$et \quad \frac{dS}{d\theta} = R_C\ rayon\ de\ courbure$ d'où $R_C = \sqrt{2}\ r_0\ e^{\theta}$