TP Algorithmes de Newton et et de Gauß–Newton

O. Cots, S. Gurol, C. Royer, D. Ruiz et E. Simon

Nous allons ici voir un exemple d'application de l'algorithme de Gauß-Newton. Le carbone radioactif ^{14}C est produit dans l'atmosphère par l'effet des rayons cosmiques sur l'azote atmosphérique. Il est oxydé en $^{14}CO_2$ et absorbé sous cette forme par les organismes vivants qui, par suite, contiennent un certain pourcentage de carbone radioactif relativement aux carbones ^{12}C et ^{13}C qui sont stables. On suppose que la production de carbone ^{14}C atmosphérique est demeurée constante durant les derniers millénaires. On suppose d'autre part que, lorsqu'un organisme meurt, ses échanges avec l'atmosphère cessent et que la radioactivité due au carbone ^{14}C décroît suivant la loi exponentielle suivante :

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$$

où λ est une constante positive, t représente le temps en années, et $A(t)$ est la radioactivité exprimée en nombre de désintégrations par minute et par gramme de carbone. On désire estimer les paramètres A_0 et λ par la méthode des moindres carrés. Pour cela on analyse les troncs (le bois est un tissu mort) de très vieux arbres *Sequoia gigantea* et *Pinus aristaca*. Par un prélèvement effectué sur le tronc, on peut obtenir :

- son âge t en années, en comptant le nombre des anneaux de croissance;
- sa radioactivité A en mesurant le nombre de désintégrations.

t	500	1000	2000	3000	4000	5000	6300
A	14.5	13.5	12.0	10.8	9.9	8.9	8.0

L'estimation des paramètres par les moindres carrés donne un problème de la forme suivante :

$$\begin{cases} Min \quad f(\beta) = \frac{1}{2} \parallel r(\beta) \parallel^2 \\ \beta \in \mathbf{R}^n \end{cases}$$

Pour implanter les algorithmes de Newton et Gauß-Newton, on aura donc besoin de pouvoir calculer (en plus de $f(\beta)$) :

1. $J_r(\beta) = r'(\beta)$;
2. $\nabla f(\beta)$;
3. $H_f(\beta) = \nabla^2 f(\beta)$.

Travail à réaliser :

Une fois l'archive du TP récupérée :

1. Implanter $f(\beta)$ dans un fichier MATLAB nommé `f_C14.m` ;
2. Lancer MATLAB (s'il n'est pas déjà ouvert) ;
3. Exécuter le script `C14.m` **sans le modifier** (ceci doit permettre de valider votre implantation de $f(\beta)$) ;
4. Écrire les fichiers MATLAB `res_C14.m`, `J_res_C14.m`, `grad_f_C14.m` et `H_f_C14.m`, qui codent respectivement les fonctions $r(\beta)$, $J_r(\beta)$, $\nabla f(\beta)$ et $H_f(\beta)$;
5. Compléter le script `C14.m` afin d'afficher pour chacun des algorithmes :
   — les courbes $A(t)$ obtenues avec les valeurs des itérés (figs 1 et 2) ;
   — les itérés sur les courbes de niveaux (figs 4 et 5) ;
6. Vérifier que les figures (1,4) et (2,5) générées par MATLAB correspondent bien aux figures 1 et 2 .

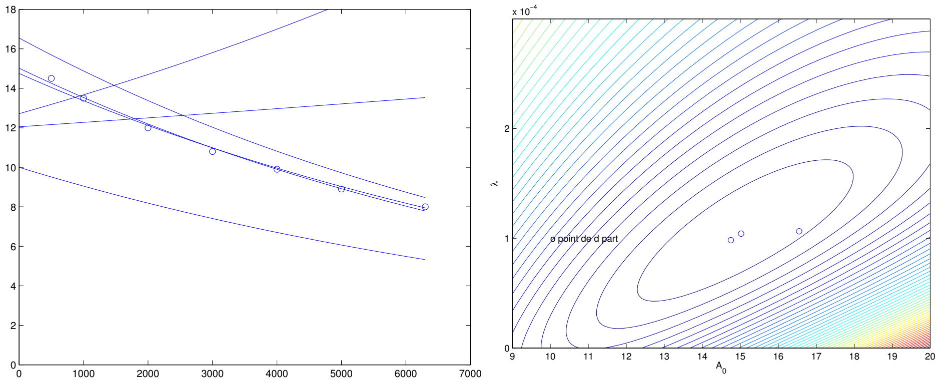

FIGURE 1 – *Algorithme de Newton point de départ* $x^{(0)} = (10, 0.0001)$.

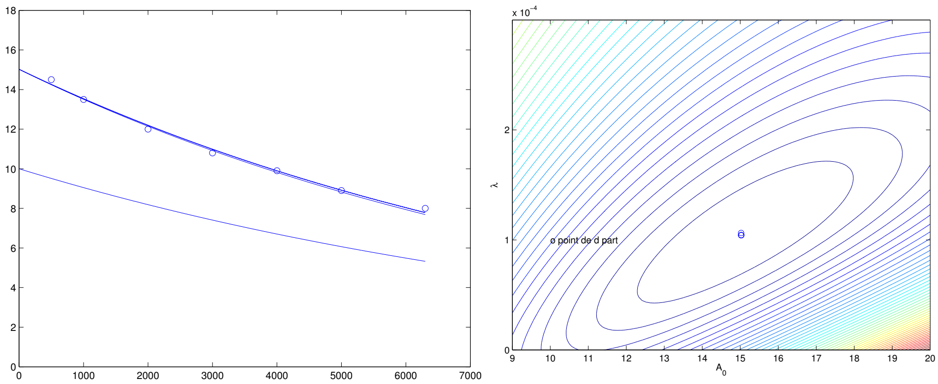

FIGURE 2 – *Algorithme de Gauß-Newton point de départ* $x^{(0)} = (10, 0.0001)$.