Correction TD $N^o\,1$
Résolution de systèmes linéaires

Exercice 1

1) Résoudre les systèmes linéaires triangulaires suivants :

$$(S_1)\begin{cases}4x_1 & & & = & 1\\ 2x_1 & + & 3x_2 & & = & 2\\ 8x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & = & -3\end{cases} \quad ; \quad (S_2)\begin{cases}3x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 8\\ 2x_2 + x_3 - 5x_4 = -7\\ 2x_3 - 7x_4 = 0\\ 3x_4 = 6\end{cases}$$

2) Cas général

a) Écrire un algorithme de résolution d'un système triangulaire supérieur de n équations, par la méthode de remontée.
b) Évaluer la complexité de cet algorithme.
c) Implémenter l'algorithme, puis tester sur les systèmes précédents.

Correction 1

1) En utilisant la méthode de descente pour résoudre le système triangulaire inférieur (S_1), et la méthode de remontée pour résoudre le système triangulaire supérieur (S_2), on trouve :

$$(S_1)\begin{cases}x_1 = \frac{1}{4}\\ x_2 = \frac{1}{2}\\ x_3 = -8\end{cases} \quad ; \quad (S_2)\begin{cases}x_1 = 3\\ x_2 = -2\\ x_3 = 7\\ x_4 = 2\end{cases}$$

2) Algorithme de résolution d'un système triangulaire de n équations

a.1) Système triangulaire inférieur (méthode de descente) :

- Entrées : Matrice $A = a(i,j)_{1\le i,j\le n}$, vecteur second membre $B = b(i)_{1\le i\le n}$.
- Sortie : vecteur $X = x(i)_{1\le i\le n}$ solution du système $AX = B$.

$$x(1) = \frac{b(1)}{a(1,1)}$$

Pour $i = 2$ à n
  $s = 0$
  Pour $j = 1$ à $i-1$
   $s = s + a(i,j) * x(j)$
  Fin
  $x(i) = (b(i) - s)/a(i,i)$
Fin

a.2) Système triangulaire supérieur (méthode de remontée) :
- Entrées : Matrice $A = a(i,j)_{1\le i,j\le n}$, vecteur second membre $B = b(i)_{1\le i\le n}$.
- Sortie : vecteur $X = x(i)_{1\le i\le n}$ solution du système $AX = B$.

$$x(n) = \frac{b(n)}{a(n,n)}\,;$$

Pour $i = n-1$ à 1
 $s = 0$
 Pour $j = i+1$ à n
 $s = s + a(i,j) * x(j)$
 Fin
 $x(i) = (b(i) - s)/a(i,i)\,;$
Fin

b) D'après le cours, le coût de l'algorithme de résolution d'un système triangulaire de n équations, par la méthode de descente ou bien la méthode de remontée, est de l'ordre de n^2.

Exercice 2

1) Utiliser la méthode d'élimination de Gauss pour résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$(S_1)\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad (S_2)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$(S_3)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 12 \\ 1 \\ 15 \end{pmatrix}$$

2) Cas géneral

a) Écrire un algorithme de résolution d'un système linéaire de n équations, par la méthode d'élimination de Gauss.
b) Quelle est la complexité de cet algorithme ?
c) Implémenter l'algorithme, puis tester sur les systèmes précédents.

Correction 2

1) En utilisant la méthode d'élimination de Gauss, on trouve :

$$(S_1)\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 3 \end{cases} \quad ; \quad (S_2)\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} \\ x_2 = \dfrac{1}{2} \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad ; \quad (S_3)\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 4 \\ x_4 = -1 \end{cases}$$

2) Algorithme de résolution d'un système de n équations par élimination de Gauss

a) — Entrées : Matrice $A = a(i,j)_{1\le i,j\le n}$, vecteur second membre $B = b(i)_{1\le i\le n}$.
— Sortie : vecteur $X = x(i)_{1\le i\le n}$ solution du système $AX = B$.

Pour $k = 1$ à $n-1$ (nombres d'étapes)

Pour $i = k+1$ à n

$factor = \dfrac{a(i,k)}{a(k,k)}$

Pour $j = k+1$ à n faire

$a(i,j) = a(i,j) - factor * a(k,j)$

Fin

$b(i) = b(i) - factor * b(k)$

Fin

Fin

Résolution du système triangulaire :

$x(n) = \dfrac{b(n)}{a(n,n)}$;

Pour $i = n-1$ à 1

$s = 0$

Pour $j = i+1$ à n

$s = s + a(i,j) * x(j)$

Fin

$x(i) = (b(i) - s)/a(i,i)$;

Fin

b) D'après le cours, le coût de l'algorithme de résolution par l'élimination de Gauss est de l'ordre de $\dfrac{2n^3}{3}$.

Exercice 3

1) En effectuant la décomposition LU, résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$(S_1) \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$(S_2) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 28 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix}$$

2) Cas général

a) Écrire un algorithme de résolution d'un système linéaire de n équations par la décomposition LU.
b) Évaluer la complexité de cet algorithme.
c) Implémenter l'algorithme, puis tester sur les systèmes précédents.

Correction 3

1) On a

$$det(A_1) = 2 \neq 0 \;\; ; \;\; det(A_2) = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \;\; ; \;\; det(A_3) = det(A) \neq 0$$

Donc A admet une décomposition LU.
On applique le procédé de pivot de Gauss pour trouver U :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 1/2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 1/2L_1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = U$$

On applique la transformation inverse à I pour trouver L :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 1/2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 1/2L_1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = L$$

Donc $A = LU$ avec $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

$(S_1) \Leftrightarrow \quad L\underbrace{UX}_{Y} = b.$

$$LY = B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 2 \\ 1/2y_1 + y_2 = 1 \Rightarrow y_2 = 2 \\ 1/2y_1 + 3y_2 + y_3 = -6 \Rightarrow y_3 = -7 \end{cases}$$

On résout :

$$UX = Y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = -1 \\ x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 2 \Rightarrow x_1 = 5 \end{cases}$$

La solution du système linéaire (S_1) est alors :

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

En procédant de la même façon on obtient la solution du système linéaire (S_2) :

$$X = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2) Algorithme de résolution d'un système de n équations par la décomposition LU

a) — Entrées : Matrice $A = a(i,j)_{1 \le i,j \le n}$, vecteur second membre $B = b(i)_{1 \le i \le n}$.
— Sortie : vecteur $X = x(i)_{1 \le i \le n}$ solution du système $AX = B$.

Élimination de Gauss sur A pour construire L et U :

Pour $k = 1$ à $n-1$ (nombres d'étapes)
Pour $i = k+1$ à n
$l(i,k) = \dfrac{a(i,k)}{a(k,k)}$
Pour $j = k+1$ à n faire

$$a(i,j) = a(i,j) - l(i,k) * a(k,j)$$
Fin

Fin

Fin

Calcul de Y avec $LY = B$ (Méthode de descente) :

$y(1) = b(1)$

Pour $i = 2$ à n

$s = 0$

Pour $j = 1$ à $i-1$

$s = s + l(i,j) * y(j)$

Fin

$y(i) = b(i) - s$ (On a donc implicitement $l(i,i) = 1$)

Fin

Calcul de X avec $UX = Y$ (Méthode de remontée) :

$x(n) = \dfrac{y(n)}{a(n,n)}$;

Pour $i = n-1$ à 1

$s = 0$

Pour $j = i+1$ à n

$s = s + a(i,j) * x(j)$

Fin

$x(i) = (y(i) - s)/a(i,i)$;

Fin

b) Le coût de l'algorithme de résolution par la décomposition LU est de l'ordre de $\dfrac{2n^3}{3}$.

Exercice 4

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 8 & 2 \\ -6 & 10 & -15 & -3 \\ 8 & -15 & 26 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 62 \end{pmatrix} \quad ; \quad b = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -1 \\ -13 \end{pmatrix}$$

1) Vérifier que la matrice A est symétrique, définie positive.

2) Donner la décomposition de Cholesky de A.

3) Résoudre le système linéaire $AX = B$.

4) *Cas géneral*

- Écrire un algorithme de résolution d'un système linéaire de n équations, par la méthode de Cholesky.
- Quelle est la complexité de cet algorithme ?
- Implémenter l'algorithme, puis tester sur les systèmes précédents.

Correction 4

1) La matrice A est symétrique car $A^t = A$. Elle est donc définie positive si et seulement si $det(A_k) > 0 \ \forall \ k = 1, \cdots, 4$. On a :

$$det(A_1) = 4 > 0 \quad ; \quad det(A_2) = \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 10 \end{vmatrix} = 4 > 0 \quad ; \quad det(A_2) = \begin{vmatrix} 4 & -6 & 8 \\ -6 & 10 & -15 \\ 8 & -15 & 26 \end{vmatrix} = 4 > 0 \quad ;$$

$$det(A_4) = det(A) = 144 > 0$$

Donc A est symétrique définie positive.
Elle admet donc une décomposition de Cholesky

$$A \; = \; C \; C^t$$

qui peut être écrite sous forme :

$$\begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} & c_{41} \\ 0 & c_{22} & c_{32} & c_{42} \\ 0 & 0 & c_{33} & c_{43} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 8 & 2 \\ -6 & 10 & -15 & -3 \\ 8 & -15 & 26 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 62 \end{pmatrix}$$

On effectue les opérations suivantes :

$$\text{Lignes 1,2,3,4} \times \text{Colonne 1} \begin{cases} c_{11}^2 = 4 \Leftrightarrow \quad c_{11} = 2 \\ c_{21}c_{11} = -6 \Leftrightarrow \quad 2c_{21} = -6 \quad \Leftrightarrow \quad c_{21} = -3 \\ c_{31}c_{11} = 8 \Leftrightarrow \quad 2c_{31} = 8 \quad \Leftrightarrow \quad c_{31} = 4 \\ c_{41}c_{11} = 2 \Leftrightarrow \quad 2c_{41} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad c_{41} = 1 \end{cases}$$

$$\text{Lignes 2,3,4} \times \text{Colonne 2} \begin{cases} c_{21}^2 + c_{22}^2 = 10 \Leftrightarrow c_{22} = 10 - c_{21}^2 = 10 - (-3)^2 = 1 \Leftrightarrow c_{22} = 1 \\ c_{31}c_{21} + c_{32}c_{22} = -15 \Leftrightarrow 4 \times (-3) + 1c_{32} = -15 \Leftrightarrow c_{32} = -3 \\ c_{41}c_{21} + c_{42}c_{22} = -3 \Leftrightarrow 1 \times (-3) + 1c_{42} = 26 \Leftrightarrow c_{42} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Lignes 3,4} \times \text{Colonne 3} \begin{cases} c_{31}^2 + c_{32}^2 + c_{33}^2 = 26 \Leftrightarrow 4^2 + (-3)^2 + c_{33}^2 = 26 \Leftrightarrow c_{33}^2 = 1 \\ \Leftrightarrow c_{33} = 1 \\ c_{41}c_{31} + c_{42}c_{32} + c_{43}c_{33} = -1 \Leftrightarrow 1 \times 4 + 0(-3) + 1c_{43} = -1 \\ \Leftrightarrow c_{43} = -5 \end{cases}$$

$$\text{Lignes 4} \times \text{Colonne 4} \begin{cases} c_{41}^2 + c_{42}^2 + c_{43}^2 + c_{44}^2 = 62 \Leftrightarrow 1^2 + 0^2 + (-5)^2 + c_{44}^2 = 62 \\ \Leftrightarrow c_{44}^2 = 36 \Leftrightarrow c_{66} = 6 \end{cases}$$

Donc :

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -5 & 6 \end{pmatrix}$$

Pour résoudre le système : $AX = B$, on écrit :

$$C \underbrace{C^t X}_{Y} = B$$

On résout le système suivant par la méthode de descente :

$$CY = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -1 \\ -13 \end{pmatrix}$$

On obtient :

$$Y = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On résout le système suivant par la méthode de remontée :

$$C^t X = Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui donne finalement

$$X = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2) Algorithme de résolution d'un système de n équations par la méthode de Cholesky

a) — Entrées : Matrice $A = a(i,j)_{1 \leq i,j \leq n}$, vecteur second membre $B = b(i)_{1 \leq i \leq n}$.
— Sortie : vecteur $X = x(i)_{1 \leq i \leq n}$ solution du système $AX = B$.

$c(1,1) = \sqrt{a(1,1)}$

Pour $i = 2$ à n

$c(i,1) = \dfrac{a(i,1)}{c(1,1)}$

Fin

Pour $j = 2$ à n

Pour $i = 1$ à $j-1$

$c(i,j) = 0$

Fin

$c(j,j) = \sqrt{a(j,j) - \sum_{k=1}^{j-1} c(j,k)^2}$

Pour $i = j+1$ à n

$c(i,j) = \dfrac{1}{c(j,j)}\Big(a(i,j) - \sum_{k=1}^{j-1} c(i,k) * c(j,k)\Big)$

Fin

Fin

b) Le coût de l'algorithme de résolution par la méthode de Cholesky est de l'ordre de $\dfrac{n^3}{3}$.