



Tous les chemins mènent à *Rough*

Convergence d'un modèle de prix microscopique à base de processus de Hawkes
vers une dynamique Rough Heston

M2 Probabilités et Finance (Ex DEA El Karoui)

Réalisé par : El Moubaraki Anass

Résumé : Dans ce travail, nous étudions la convergence d'un modèle de prix à l'échelle microscopique, basé sur des processus de Hawkes, vers une dynamique de type Rough Heston. Nous commençons par rappeler brièvement la définition ainsi que certaines propriétés essentielles du modèle Rough Heston et des processus de Hawkes. Nous présentons ensuite en détail le modèle de prix fondé sur les processus de Hawkes, en mettant l'accent sur le choix des paramètres afin de reproduire les faits stylisés observés sur les marchés financiers. Enfin, nous analysons rigoureusement la convergence de ce modèle de microstructure vers une dynamique de type Rough Heston.

Mots clefs : Processus de Hawkes, Modèle Rough Heston, Microstructure, Trading haute fréquence, Processus de Volterra.

Table des matières

1	Introduction	2
2	Préliminaires et rappels	3
2.1	Du processus de Poisson homogène au processus de Hawkes	3
2.2	Modèle de Heston et version Rough	4
2.3	Processus de Hawkes, modèle Rough Heston et faits stylisés des marchés financiers	6
3	Processus de Hawkes et dynamique microscopique du prix	6
3.1	Modélisation unidimensionnel	7
3.2	Modélisation multidimensionnel	7
4	Le modèle Rough Heston autant que processus limite	8
4.1	Hypothèses	8
4.2	Théorème fondamental	10
4.3	Esquisse de preuve	10
5	Applications en finance	14
6	Discussion	16
7	Outils mathématiques	17

1 Introduction

L'émergence du trading haute fréquence, favorisée dès les années 1970 par la révolution technologique et l'apparition d'outils de calcul toujours plus performants, a profondément transformé la structure et le fonctionnement des marchés financiers. Depuis lors, de nombreux chercheurs issus des mathématiques, de la physique et de l'économie se sont intéressés aux spécificités de ce nouvel environnement de marché : le suivi des opérations, la régulation financière, la dynamique des prix ou encore la modélisation du carnet d'ordres. Ce dernier aspect, en particulier, a suscité un intérêt croissant au sein de la communauté mathématique. Parmi les contributions notables, on peut citer les travaux de Farmer [7] autour du modèle de 0-intelligence, ceux de Cont et de Larrard [5] qui proposent une modélisation de la dynamique du carnet d'ordres dans des marchés liquides à l'aide d'un modèle de niveau 1, ainsi que ceux de Rosenbaum et Hwang [10] qui généralisent cette approche à un modèle multiniveau.

Dans ce contexte, les processus de Hawkes se sont imposés comme un outil de modélisation particulièrement pertinent pour capturer la dynamique des prix à l'échelle microscopique. À très haute fréquence, le prix d'un actif financier s'apparente en effet à un processus de saut pur, les variations intervenant de manière discrète et irrégulière. Cette vision est renforcée par la présence d'un bruit de microstructure, tel que mis en évidence notamment par Rosenbaum et Bouchaud dans [1], qui empêche une modélisation continue de type diffusion à cette échelle. Les processus de Hawkes, de par leur nature auto-excitatrice, permettent de modéliser l'endogénéité des marchés et l'accumulation d'événements (ordres, transactions) dans de courts intervalles de temps. Toutefois, lorsqu'on agrège ces dynamiques à une échelle plus macroscopique, les travaux de Gatheral et Rosenbaum dans [8] ont mis en lumière qu'une description par un processus de type Rough en particulier le modèle Rough Heston s'avère plus adaptée. Ce dernier permet notamment de reproduire avec fidélité plusieurs faits stylisés observés sur les marchés financiers, tels que la régularité faible de la volatilité instantanée, son comportement persistant, ou encore les structures d'autocorrélation observées sur une large gamme de classes d'actifs.

Dans cette étude, nous nous intéressons au lien entre la modélisation des dynamiques de prix à ultra haute fréquence à l'aide de processus de Hawkes et la description du prix à l'échelle macroscopique par une dynamique de type Rough Heston. Plus précisément, notre objectif est d'examiner l'existence d'un théorème de convergence permettant de relier ces deux cadres de modélisation, en montrant comment un processus de Hawkes bien choisi peut, sous un régime de haute intensité et de quasi-instabilité, converger vers une dynamique de type Rough Heston à grande échelle. Le caractère diffus des processus de Hawkes dans certaines limites d'échelle a déjà été bien documenté. En particulier, Bacry et Muzy ont établi dans [3] une loi forte des grands nombres ainsi qu'un théorème central limite pour une large classe de processus de Hawkes stables, mettant en évidence leur comportement agrégé. Par ailleurs, Jaisson et Rosenbaum ont démontré dans [11] un théorème central limite en dimension 1 dans le régime des processus de Hawkes dits presque instables, illustrant une transition vers une dynamique Rough Heston. Dans ce projet, nous analysons en particulier les travaux récents de Tomas et Rosenbaum [12], qui prouvent la convergence d'un modèle de prix fondé sur un processus de Hawkes multidimensionnel vers une version multidimensionnelle du modèle Rough Heston.

2 Préliminaires et rappels

Dans cette section, nous proposons un bref rappel sur les processus de Hawkes, en soulignant leur lien avec les processus de Poisson homogène classiques ainsi que les principales propriétés qui en découlent. Nous introduisons ensuite le modèle Rough Heston en le replaçant dans son cadre théorique, à partir de la définition du mouvement brownien fractionnaire et de son lien avec le modèle de Heston classique.

2.1 Du processus de Poisson homogène au processus de Hawkes

Éléments de rappel sur le processus de Poisson homogène

Un processus de Poisson est un modèle mathématique modélisant des événements aléatoires qui se reproduisent au cours du temps. Une famille $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ de variables aléatoires à valeurs entières est appelée processus de Poisson d'intensité $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ si elle vérifie les propriétés suivantes :

- $N_0 = 0$;
- Pour tout $0 \leq s \leq t$, on a $N_s \leq N_t$;
- Le processus possède des accroissements indépendants : pour toute suite croissante $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k$, les variables aléatoires $N_{t_1} - N_{t_0}, \dots, N_{t_k} - N_{t_{k-1}}$ sont indépendantes;
- Pour tous $s, t \in \mathbb{R}_+$, la variable aléatoire $N_{s+t} - N_s$ suit une loi de Poisson de paramètre λt , c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(N_{s+t} - N_s = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

La caractérisation du processus de Poisson homogène révèle qu'il s'agit d'un processus markovien, c'est-à-dire que son évolution future ne dépend que de son état actuel, indépendamment de l'historique des événements passés. Si l'on choisit de modéliser les variations du prix à l'échelle microscopique à l'aide d'un tel processus, on néglige de facto toute dépendance temporelle ou mémoire dans la dynamique des prix. Autrement dit, cette modélisation suppose que les sauts de prix interviennent de manière indépendante les uns des autres, ce qui est en contradiction avec les observations empiriques sur les marchés à très haute fréquence, où les événements de marché tels que les ordres ou les transactions tendent à s'accumuler et à s'auto-renforcer dans de courts intervalles de temps. Par conséquent, un processus de Poisson homogène, bien qu'élégant et simple, ne permet pas de capturer fidèlement la complexité des phénomènes microstructurels, notamment l'autocorrélation des arrivées d'événements ou le clustering temporel des sauts de prix. Une alternative plus réaliste consiste à recourir à une classe plus générale de processus de comptage, capables d'incorporer l'influence des événements passés dans l'intensité actuelle du processus. .

Éléments de rappel sur le processus de Hawkes

Initialement introduits dans les années 1970 par Alan Hawkes [9] pour modéliser les séismes et leurs répliques, les processus de Hawkes ont depuis été largement utilisés dans des domaines variés : neurosciences, sociologie, criminologie, génomique, et plus récemment et intensivement en finance. Il s'agit en effet, de processus ponctuels auto-excitateurs. L'intensité du processus à l'instant t , notée λ_t , dépend de l'historique des événements passés et vérifie (1). Nous remarquons plus particulièrement qu'à t , λ_t dépend des sauts précédents $(N_s)_{s \leq t}$ par le biais d'un noyau ϕ . Si ce dernier vérifie (2), nous parlons de processus de Hawkes stable. Sous ces conditions et dans le cas unidimensionnel, nous avons un theoreme centrale limite (3) et une loi forte des grands nombres (4) (voir [3] par exemple).

$$\lambda_t = \mu + \sum_{0 < P_i < t} \phi(t - P_i) = \mu + \int_0^t \phi(t - s) dN_s \quad (1)$$

$$\rho(\|\phi\|_1) = \rho\left(\int_0^\infty |\phi|(t) dt\right) < 1 \quad (2)$$

$$\left(\sqrt{T} \left(\frac{N_{tT}}{T} - \mathbb{E} \left[\frac{N_{tT}}{T}\right]\right)\right)_{t \in [0,1]} \longrightarrow \sigma(W_t)_{t \in [0,1]} \quad (3)$$

$$\sup_{t \in [0,1]} \left| \frac{N_{tT}}{T} - \mathbb{E} \left[\frac{N_{tT}}{T}\right] \right| \longrightarrow 0 \quad (4)$$

La capacité des processus de Hawkes à capturer le clustering temporel des événements en fait un outil de modélisation particulièrement adapté aux marchés financiers à haute fréquence, où les flux d'ordres et de transactions présentent une forte auto-corrélation. Cette structure auto-excitatrice permet de représenter de manière réaliste l'endogénéité des marchés, souvent absente des modèles classiques. De plus, le théorème centrale limite ainsi que la loi forte des grands nombres montrent dans un premier temps que les processus de Hawkes stables diffusent vers une dynamique de type brownienne. Toutefois, une question naturelle se pose : Que se passe-t-il lorsque l'on s'éloigne de ce régime stable, notamment dans le cas de processus de Hawkes proches de l'instabilité ? Dans le cas unidimensionnel la réponse est donnée par Rosenbaum et Jaisson dans [11]. Les auteurs montrent qu'une suite de processus de Hawkes caractérisée par un noyau de mémoire qui sature la condition de stabilité à grande échelle converge non pas vers un processus de Wiener mais vers un modèle de Heston avec la volatilité qui vérifie une équation de Volterra. Nous parlons alors de modèle Rough Heston.

2.2 Modèle de Heston et version Rough

Éléments de rappel sur le modèle de Heston classique

Le modèle de Heston unidimensionnel est un modèle de volatilité stochastique largement utilisé pour la modélisation du prix des actifs financiers. Il se distingue par le fait que la volatilité est elle-même un processus aléatoire, ce qui permet de mieux reproduire les structures observées sur les surfaces de volatilité implicite. La dynamique conjointe du prix de l'actif S_t et de sa variance instantanée V_t est donnée par le système (5).

$$\begin{cases} dS_t = S_t \sqrt{V_t} dW_t, \\ dV_t = \lambda(\theta - V_t) dt + \lambda \nu \sqrt{V_t} dB_t, \end{cases} \quad (5)$$

où λ , θ , V_0 et ν sont des paramètres strictement positifs, W_t et B_t sont deux mouvements browniens standard corrélés tels que $\langle dW_t, dB_t \rangle = \rho dt$, avec $\rho \in [-1, 1]$ le coefficient de corrélation.

Ce modèle présente plusieurs avantages. Il permet notamment de contrôler la forme du smile de volatilité via le paramètre ν (volatilité de la volatilité), d'ajuster le niveau de volatilité initial avec V_0 , et de moduler l'asymétrie du smile grâce au paramètre ρ . Contrairement aux modèles à volatilité locale, le smile dans le modèle de Heston évolue dans le même sens que le sous-jacent et ne s'aplatit pas au fil du temps. De plus, la fonction caractéristique du logarithme du prix de l'actif est explicite (6) avec des exposants qui dépendent d'un système différentiel (7) obtenu par l'application du lemme d'Itô,

et la formule de Feynmann-Kac. L'existence d'une fonction caractéristique autorise des méthodes numériques efficaces pour la calibration du modèle et le pricing de produits dérivés à l'image de la transformée de Fourier inverse par exemple.

$$\mathbb{E} [e^{iaX_t}] = \exp (g(a, t) + V_0 h(a, t)) , \quad (6)$$

$$\begin{cases} \partial_t h = \frac{1}{2}(-a^2 - ia) + \lambda(ia\rho v - 1)h(a, s) + \frac{(\lambda v)^2}{2}h^2(a, s), \\ h(a, 0) = 0 \\ g(a, t) = \theta \lambda \int_0^t h(a, s) ds \end{cases} \quad (7)$$

Bien que la volatilité suive ici un mouvement brownien semi-martingal, plusieurs études empiriques ont montré que, pour un grand nombre d'actifs, les séries temporelles de volatilité sont bien plus irrégulières que ce que suggère un mouvement brownien. Plus précisément, les dynamiques de la log-volatilité semblent mieux modélisées par un mouvement brownien fractionnaire avec un indice de Hurst de l'ordre de 0.1, ce qui a motivé le développement de modèles Rough, dans lesquels un mouvement brownien fractionnaire à faible régularité permet de capturer de manière fidèle les propriétés observées de la surface de volatilité.

Éléments de rappel sur le modèle Rough Heston

Le modèle Rough Heston est une extension du modèle de Heston classique qui vise à capturer la nature irrégulière (ou rugueuse) des trajectoires de volatilité observées empiriquement. Cette rugosité est modélisée en introduisant un mouvement brownien fractionnaire W^H avec paramètre de Hurst $H \in (0, 1)$, construit via la représentation de Mandelbrot-van Ness donnée par (8). Le noyau $(t - s)^{H-1/2}$ joue un rôle central dans la dynamique rugueuse du mouvement brownien fractionnaire lorsque $H < 1/2$. En particulier, on peut montrer que le processus défini par (9) possède une régularité-Hölder $H - \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. Pour introduire un comportement rugueux de la volatilité dans un cadre de type Heston, on remplace naturellement ce noyau par $(t - s)^{\alpha-1}$, avec $\alpha \in (1/2, 1)$, ce qui conduit au modèle de Rough Heston avec drift nul (10) et (11).

$$W_t^H = \frac{1}{\Gamma(H + 1/2)} \int_{-\infty}^0 \left((t - s)^{H-1/2} - (-s)^{H-1/2} \right) dW_s + \frac{1}{\Gamma(H + 1/2)} \int_0^t (t - s)^{H-1/2} dW_s. \quad (8)$$

$$\int_0^t (t - s)^{H-1/2} dW_s \quad (9)$$

$$dS_t = S_t \sqrt{V_t} dW_t, \quad (10)$$

$$V_t = V_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} \lambda (\theta - V_s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} \lambda v \sqrt{V_s} dB_s. \quad (11)$$

Les paramètres λ, θ, V_0 et v sont strictement positifs et jouent le même rôle que dans le modèle de Heston classique. Les processus W et B sont deux mouvements browniens corrélés, avec un coefficient de corrélation $\rho \in [-1, 1]$. Le paramètre supplémentaire $\alpha \in (1/2, 1)$ gouverne la régularité des trajectoires de volatilité. Plus précisément, on peut montrer que les trajectoires de V_t sont presque sûrement de régularité-Hölder $\alpha - 1/2 - \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$.

Lorsque $\alpha = 1$, le modèle de Rough Heston coïncide avec le modèle de Heston classique, ce qui justifie de voir cette formulation comme une généralisation naturelle et continue de celui-ci. De plus, le modèle Rough Heston possède une équation caractéristique (12), résoluble via une équation différentielle fractionnaire comme démontré dans [6]. Cette dernière est donnée par (13). D^α et $I^{1-\alpha}$ désignent respectivement les opérateurs de dérivation et d'intégration fractionnaires. Leur expression est fournie dans la section 7-outil 8. La résolution numérique de l'équation différentielle fractionnaire est facile, et une discrétisation par la méthode des trapèzes donne des résultats précis, surtout pour le pricing de produits dérivés comme l'affirment les auteurs de [6].

$$\mathbb{E} [e^{iaX_t}] = \exp (g_1(a, t) + V_0 g_2(a, t)) , \quad (12)$$

$$\begin{cases} g_1(a, t) = \theta \lambda \int_0^t h(a, s) ds, \\ g_2(a, t) = I^{1-\alpha} h(a, t), \\ D^\alpha h = \frac{1}{2}(-a^2 - ia) + \lambda(ia\rho v - 1)h(a, s) + \frac{(\lambda v)^2}{2}h^2(a, s), \\ I^{1-\alpha} h(a, 0) = 0, \end{cases} \quad (13)$$

2.3 Processus de Hawkes, modèle Rough Heston et faits stylisés des marchés financiers

Les modèles de volatilité Rough multivariés et les processus de Hawkes partagent la capacité de reproduire plusieurs faits stylisés fondamentaux des marchés financiers comme le soulignent les auteurs dans [8]. Tout d'abord, les deux types de modèles respectent l'absence d'arbitrage statistique, ce qui reflète la difficulté à concevoir des stratégies systématiquement profitables à haute fréquence. Ensuite, ils intègrent la propriété de mémoire longue du flux d'ordres, une caractéristique bien documentée dans les données de marché, souvent liée à la fragmentation des ordres de grande taille (méta-ordres) en sous-ordres exécutés progressivement. Les modèles de Hawkes attribuent cette propriété à la nature auto-excitatrice du processus, tandis que les modèles de volatilité rugueuse l'associent à la persistance de la volatilité. Par ailleurs, les deux modèles capturent le haut degré d'endogénéité des marchés financiers : dans le cas des Hawkes, cela se traduit par une dynamique dans laquelle la majorité des événements (ordres, annulations, variations de prix) est déclenchée par des événements antérieurs ; dans les modèles rugueux, cette endogénéité est également présente à travers la formation du prix microscopique et sa traduction dans les corrélations de volatilité en dimension élevée.

3 Processus de Hawkes et dynamique microscopique du prix

Dans cette section, nous introduisons la modélisation du prix à l'échelle microscopique à l'aide de processus de Hawkes comme décrit dans [12]. Nous considérons à la fois les cas unidimensionnel et multidimensionnel, en portant une attention particulière au choix des fonctions d'excitation ainsi qu'à la structure des noyaux de mémoire. Ces éléments sont choisis de manière à reproduire fidèlement les principaux faits stylisés observés sur les marchés financiers, tels que la mémoire longue du flux d'ordres, l'endogénéité des dynamiques de prix, et l'absence d'opportunité d'arbitrage statistique à haute fréquence.

3.1 Modélisation unidimensionnel

Nous considérons un processus de prix microscopique que nous notons P_t . Ce dernier est un processus de saut caractérisé par des variations de prix positives, capturées par le processus de Hawkes N_t^{1+} et des variations de prix négatives, capturées par le processus de Hawkes N_t^{1-} . En partant d'un prix initial P_0 , le prix microscopique vérifie (14). Les intensités λ_t^{1+} et λ_t^{1-} vérifient (15). Le terme $\mu : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ est appelé baseline : il représente une source exogène des mouvements de prix, c'est-à-dire une intensité de sauts indépendante de l'historique du processus. Par exemple, μ_t^{1+} (resp. μ_t^{1-}) correspond à la composante exogène des mouvements haussiers (resp. baissiers) du prix. En revanche, $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}_+)$ est appelé noyau de mémoire : il modélise une source endogène de mouvement des prix. Par exemple, $\varphi_{1+,1-}$ augmente l'intensité des sauts haussiers consécutifs à un saut baissier, ce qui crée un effet de retour à la moyenne, tandis que $\varphi_{1+,1+}$ contribue à un effet de tendance.

$$P_t = P_0 + (N_t^{1+} - N_t^{1-}) \quad (14)$$

$$\begin{cases} \lambda_t^{1+} = \mu_t^{1+} + \int_0^t \varphi_{1+,1+}(t-s) dN_s^{1+} + \int_0^t \varphi_{1+,1-}(t-s) dN_s^{1-}, \\ \lambda_t^{1-} = \mu_t^{1-} + \int_0^t \varphi_{1-,1+}(t-s) dN_s^{1+} + \int_0^t \varphi_{1-,1-}(t-s) dN_s^{1-}. \end{cases}, \quad (15)$$

Pour modéliser la propriété de mémoire longue du flux d'ordres, nous considérons des noyaux à queue épaisse φ , pour lesquels le rayon spectral de la matrice $\int_t^\infty \varphi(s) ds$ vérifie la condition asymptotique (16), pour un certain $\alpha \in (1/2, 1)$ et $c > 0$, où $\rho(M)$ désigne le rayon spectral de la matrice M . Ce type de noyau permet de satisfaire la condition de stabilité des processus de Hawkes donnée par (17). Toutefois, les calibrations empiriques sur données financières suggèrent que cette condition est presque violée dans la pratique. Pour prendre en compte ce phénomène, les auteurs de [12] modélisent le marché jusqu'au temps T par un processus de Hawkes N^T , de baseline μ^T et de noyau φ^T . Le prix microscopique jusqu'au temps T est alors donné par (18). L'objectif est de construire une suite paramétrée par T vérifiant le comportement de saturation asymptotique (19).

$$\rho \left(\int_t^\infty \varphi(s) ds \right) \sim ct^{-\alpha}, \quad \text{lorsque } t \rightarrow \infty \quad (16)$$

$$\rho(\|\varphi\|_1) < 1 \quad (17)$$

$$P_t^T = N_t^{T,1+} - N_t^{T,1-} \quad (18)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \rho(\|\varphi^T\|_1) = 1 \quad (19)$$

3.2 Modélisation multidimensionnel

Nous généralisons à présent le cadre asymptotique du cas mono-actif au cas de m actifs. Le processus de comptage associé devient alors un processus de dimension $2m$, noté

$$N^T = (N^{T,1+}, N^{T,1-}, N^{T,2+}, \dots, N^{T,m-}),$$

et son intensité λ^T satisfait (20) où $\mu^T : \mathbb{R}^+ \rightarrow (\mathbb{R}^+)^{2m}$ représente le vecteur d'intensités exogènes (baseline) et $\varphi^T : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R}^+)$ le noyau de mémoire du processus. N^T encode les sauts haussiers

et baissiers de m actifs différents. Ce cadre permet de capturer les corrélations entre actifs. Par exemple, en se focalisant sur l'actif 1, nous avons (21).

$$\lambda_t^T = \mu^T + \int_0^t \varphi^T(t-s) dN_s^T \quad (20)$$

$$\begin{cases} \lambda_t^{T,1+} = \mu_t^{T,1+} + \sum_{j=1}^m \int_0^t \varphi_{1+,j+}^T(t-s) dN_s^{T,j+} + \sum_{j=1}^m \int_0^t \varphi_{1+,j-}^T(t-s) dN_s^{T,j-} \\ \lambda_t^{T,1-} = \mu_t^{T,1-} + \sum_{j=1}^m \int_0^t \varphi_{1-,j+}^T(t-s) dN_s^{T,j+} + \sum_{j=1}^m \int_0^t \varphi_{1-,j-}^T(t-s) dN_s^{T,j-} \end{cases} \quad (21)$$

Pour éviter que tous les actifs aient une volatilité identique dans la limite, une structure trigonalisable est introduite. Le noyau est alors représenté sous forme bloc par (22) où O est une matrice de changement de base, indépendante de T et les matrices blocs vérifient :

$$A^T : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{M}_{n_c}(\mathbb{R}), \quad B^T : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{M}_{2m-n_c, n_c}(\mathbb{R}), \quad C^T : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{M}_{2m-n_c}(\mathbb{R})$$

La condition de saturation de stabilité s'exprime alors par (23) où K est une matrice inversible et $\alpha \in (1/2, 1)$ est liée à la queue épaisse du noyau. Enfin, la propriété de mémoire longue du flux d'ordres est capturée via la condition de queue épaisse sur la limite $A := \lim_{T \rightarrow \infty} A^T$, donnée par (24) où M est également une matrice inversible. Ces deux conditions traduisent une saturation progressive de la stabilité à mesure que $T \rightarrow \infty$, tout en garantissant une mémoire longue dans la dynamique du noyau.

$$\varphi^T(t) = O \begin{pmatrix} A^T(t) & 0 \\ B^T(t) & C^T(t) \end{pmatrix} O^{-1}, \quad (22)$$

$$T^\alpha \left(I - \int_0^\infty |A^T|(s) ds \right) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} K \quad (23)$$

$$\alpha x^\alpha \int_x^\infty A(s) ds \xrightarrow{x \rightarrow \infty} M \quad (24)$$

4 Le modèle Rough Heston autant que processus limite

Dans cette section, nous présentons un théorème limite concernant la convergence du vecteur de prix, changé d'échelle, vers une dynamique de type Rough Heston. Nous fournissons également quelques éléments de preuve, tels que présentés dans [12].

4.1 Hypothèses

Nous supposons que (24), (22) et (23) sont vérifiées et que KM^{-1} est une matrice à valeurs propres strictement positives. On suppose que la suite φ^T converge vers φ dans $\mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R}_+)$, et que les limites A, B, C de A^T, B^T, C^T existent. On suppose également que $\rho \left(\int_0^\infty C(s) ds \right) < 1$ et qu'il existe une fonction $\mu : [0, 1] \rightarrow (\mathbb{R}^+)^{2m}$ telle que (25) soit vérifiée. Pour assurer l'absence d'opportunités d'arbitrage statistique entre paires, nous voulons que l'intensité moyenne des sauts haussiers soit égale à l'intensité moyenne des sauts baissiers. En exprimant λ^T en fonction du noyau convolué $\psi^T = \sum_{k \geq 1} (\phi^T)^{*k}$ et du processus de compensation M^T nous obtenons (27). La valeur moyenne des intensités vérifie (28), et (26) fournit une condition suffisante assurant l'absence d'opportunités d'arbitrage.

$$T^{1-\alpha} \mu_{tT}^T \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \mu_t \quad (25)$$

$$\begin{cases} \psi_{i+,j+}^T + \psi_{i+,j-}^T = \psi_{i-,j+}^T + \psi_{i-,j-}^T \\ \mu_t^{T,i+} = \mu_t^{T,i-} \end{cases} \quad (26)$$

$$\lambda_t^T = \mu^T + \int_0^t \psi^T(t-s) \mu_s^T ds + \int_0^t \psi^T(t-s) dM_s^T. \quad (27)$$

$$\begin{cases} \mathbb{E}[\lambda_t^{T,i+}] = \mu_t^{T,i+} + \sum_{1 \leq j \leq m} \int_0^t \psi_{i+,j-}^T(t-s) \mu_s^{T,j-} ds + \sum_{1 \leq j \leq m} \int_0^t \psi_{i+,j+}^T(t-s) \mu_s^{T,j+} ds \\ \mathbb{E}[\lambda_t^{T,i-}] = \mu_t^{T,i-} + \sum_{1 \leq j \leq m} \int_0^t \psi_{i-,j-}^T(t-s) \mu_s^{T,j-} ds + \sum_{1 \leq j \leq m} \int_0^t \psi_{i-,j+}^T(t-s) \mu_s^{T,j+} ds \end{cases} \quad (28)$$

Nous adoptons également les notations suivantes afin d'alléger l'énoncé du théorème en définissant, pour $t \in [0, 1]$, les processus changées de temps X^T , Y^T et Z^T et P^T par (29) et en écrivant par bloc O et O^{-1} afin de satisfaire (30). Nous définissons également dans (31) Θ^1 , Θ^2 , Λ et θ_0 . Enfin, nous définissons pour tout $1 \leq i, j \leq m$: $\Delta_{ij} := \lim_{T \rightarrow \infty} \left\| \psi_{j+,i+}^T \right\|_1 - \left\| \psi_{j-,i+}^T \right\|_1$.

$$\begin{cases} X_t^T := \frac{1}{T^{2\alpha}} N_{tT}^T \\ Y_t^T := \frac{1}{T^{2\alpha}} \int_0^{tT} \lambda_s ds \\ Z_t^T := T^\alpha (X_t^T - Y_t^T) = \frac{1}{T^\alpha} M_{tT}^T \\ P_t^T := \frac{1}{T^{2\alpha}} \left(N_{tT}^{T,1+} - N_{tT}^{T,1-}, \dots, N_{tT}^{T,m+} - N_{tT}^{T,m-} \right) \end{cases} \quad (29)$$

$$\begin{cases} O^{-1} = \begin{pmatrix} O_{11}^{(-1)} & O_{12}^{(-1)} \\ O_{21}^{(-1)} & O_{22}^{(-1)} \end{pmatrix} \\ O = \begin{pmatrix} O_{11} & O_{12} \\ O_{21} & O_{22} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (30)$$

$$\begin{cases} \Theta^1 := \left(O_{11} + O_{12} \left(I - \int_0^\infty C(s) ds \right)^{-1} \int_0^\infty B(s) ds \right) K^{-1} \\ \Theta^2 := \left(O_{21} + O_{22} \left(I - \int_0^\infty C(s) ds \right)^{-1} \int_0^\infty B(s) ds \right) K^{-1} \\ \theta_0 := \begin{pmatrix} O_{11}^{(-1)} & 0 \\ 0 & O_{12}^{(-1)} \end{pmatrix} \mu \\ \Lambda := \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} K M^{-1} \end{cases} \quad (31)$$

4.2 Théorème fondamental

La suite (X^T, Y^T, Z^T) est C -tendue pour la topologie de Skorokhod. De plus, pour toute limite (X, Y, Z) de la suite, il existe un processus positif V et un mouvement brownien bidimensionnel B tels que :

$$(i) \quad X_t = \int_0^t V_s ds, \quad Z_t = \int_0^t \text{diag}(\sqrt{V_s}) dB_s.$$

(ii) Il existe un processus \tilde{V} de régularité de Hölder $\alpha - 1/2 - \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, tel que

$$\Theta^1 \tilde{V} = (V^1, \dots, V^{n_c}), \quad \Theta^2 \tilde{V} = (V^{n_c+1}, \dots, V^{2m}),$$

et \tilde{V} est solution de l'équation de Volterra stochastique suivante :

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, 1], \quad \tilde{V}_t = & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Lambda \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (\theta_0 - \tilde{V}_s) ds \\ & + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Lambda \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} O_{11}^{(-1)} \text{diag}(\sqrt{\Theta^1 \tilde{V}_s}) dW_s^1 \\ & + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Lambda \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} O_{12}^{(-1)} \text{diag}(\sqrt{\Theta^2 \tilde{V}_s}) dW_s^2. \end{aligned}$$

où $W^1 := (B^1, \dots, B^{n_c})$, $W^2 := (B^{n_c+1}, \dots, B^{2m})$, et les quantités $\Theta^1, \Theta^2, O_{11}^{(-1)}, O_{12}^{(-1)}, \theta_0$ ne dépendent pas du choix de la base.

Enfin, tout point limite P des prix rescalés P^T satisfait :

$$P_t = (I + \Delta)^\top Q \left(\int_0^t \text{diag}(\sqrt{V_s}) dB_s + \int_0^t \mu_s ds \right).$$

Remarque 1. L'espace de Skorokhod $\mathcal{S}([0, 1] \times \Omega, \mathbb{R}^d)$ désigne l'ensemble des processus stochastiques définis sur $[0, 1]$, continus à droite et admettant des limites à gauche (càdlàg). Il généralise l'espace usuel $C([0, 1] \times \Omega, \mathbb{R}^d)$ muni de la norme de convergence uniforme. Une métrique σ , propre à l'espace de Skorokhod, permet d'y définir une topologie adaptée aux discontinuités. Dans ce cadre, on dit qu'une suite de processus est C -tendue (ou C -tight en anglais) si elle ne s'échappe pas à l'infini et que ses éventuelles limites en loi sont à trajectoires continues. Cette propriété est cruciale pour démontrer la convergence vers une dynamique limite régulière.

4.3 Esquisse de preuve

La preuve du théorème ci-dessus est donnée dans [12]. Elle repose essentiellement sur l'étude du comportement asymptotique (lorsque $T \rightarrow +\infty$) des composantes du processus de Hawkes, en suivant un ordre d'analyse approprié. Dans un premier temps, on examine le comportement asymptotique de ψ^T , puis on utilise les relations (27) et (25) pour en déduire celui de λ^T , lequel permet ensuite d'étudier le couple (X^T, Y^T) à partir de (29). Le processus Z^T est alors caractérisé en conséquence, puisqu'il est défini à partir de ce couple. Le vecteur prix s'exprime via une écriture matricielle faisant intervenir X^T . Nous procédons alors en cinq étapes :

Étape 1 : Comportement asymptotique de ψ^T

En partant de l'expression $\psi^T = \sum_{k \geq 1} (\phi^T)^{*k}$, et en exploitant le fait que la transformée de Laplace transforme un produit de convolution en un produit ordinaire, on observe que la condition $\|\phi^T\| < 1$ garantit la convergence de cette série géométrique, ce qui conduit naturellement à l'expression (32). Celle-ci peut ensuite être simplifiée en (33) grâce à la structure en blocs de la matrice ϕ^T . En appliquant le théorème taubérien de Hardy–Littlewood–Karamata (voir section 7 — Outil 2), nous obtenons un développement asymptotique de $T^{-\alpha-1}T(I - \widehat{A}^T(t/T))$ donné en (34), ce qui permet de caractériser le comportement asymptotique de la transformée de Laplace de ψ^T , comme le montre (35). La matrice obtenue coïncide alors avec la transformée de Laplace de la densité de Mittag-Leffler matricielle (voir section 7 — Outil 10). On en déduit que $T^{-\alpha}\psi^T(T \cdot)$ converge faiblement (voir section 7 — Outil 6) vers la densité f sur l'intervalle $[0, 1]$, comme exprimé dans (36), par une application du théorème de continuité de Lévy–Cramér (voir section 7 — Outil 4), après avoir défini une densité limite appropriée. Enfin, en mobilisant le second théorème de Dini (voir section 7 — Outil 1), on établit la convergence de la fonction $F^T(t) = \int_0^t T^{-\alpha}\psi(Tu) du$ vers $F(t) = \int_0^t f(u) du$.

$$\widehat{\psi}^T(t) = \sum_{k \geq 1} \widehat{\phi}^{T,*k} = O(I - \widehat{\Phi}^T)^{-1} \widehat{\Phi}^T O^{-1} \quad (32)$$

$$\widehat{\psi}^T(t) = O \begin{pmatrix} (I - \widehat{A}^T(t))^{-1} \widehat{A}^T(t) & 0 \\ (I - \widehat{C}^T(t))^{-1} \widehat{B}^T(t) (I - \widehat{A}^T(t))^{-1} \widehat{A}^T(t) - (I - \widehat{C}^T(t))^{-1} \widehat{B}^T(t) & (I - \widehat{C}^T(t))^{-1} \widehat{C}^T(t) \end{pmatrix} O^{-1} \quad (33)$$

$$T^{-\alpha-1}T(I - \widehat{A}^T(t/T)) \underset{T \rightarrow \infty}{=} \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha} t^\alpha M + K + o(1) \quad (34)$$

$$T^{-\alpha} \widehat{\psi}^T(T \cdot)(t) \underset{T \rightarrow \infty}{\longrightarrow} O \begin{pmatrix} \left[\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha} t^\alpha M + K \right]^{-1} & 0 \\ (I - \int_0^\infty C)^{-1} \int_0^\infty B \left[\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha} t^\alpha M + K \right]^{-1} & 0 \end{pmatrix} O^{-1} \quad (35)$$

$$T^{-\alpha} \psi^T(T \cdot) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} f(t) := O \begin{pmatrix} K^{-1} f^{\alpha, \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} KM^{-1}} & 0 \\ (I - \int_0^\infty C)^{-1} \int_0^\infty B K^{-1} f^{\alpha, \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} KM^{-1}} & 0 \end{pmatrix} O^{-1} \quad (36)$$

Étape 2 : C-tension du couple (X^T, Y^T)

Nous exploitons à présent le comportement asymptotique de $\psi^T(T \cdot)$ afin d'établir que le couple (X^T, Y^T) est C-tendu. En partant de l'expression de X^T donnée en (29) et de celle de λ^T dans (27), un changement de variable adapté nous permet de faire apparaître la convergence de $\mu^T(T \cdot)$ ainsi que l'asymptotique de $\psi^T(T \cdot)$, ce qui conduit aux équations (37) et (38). Cette dernière met en évidence que les processus X^T et Y^T , étant croissants par composante, sont tendus pour la topologie de Skorokhod, ce qui entraîne que le couple (X^T, Y^T) est C-tendu. Par ailleurs, à partir de (39), nous obtenons que $X = Y$ presque sûrement, et que $\sup_{t \in [0,1]} \|X_t^T - Y_t^T\|_2$ converge en probabilité vers zéro.

$$\mathbb{E}[N_T^T] = \mathbb{E} \left[\int_0^T \lambda_s^T ds \right] = \int_0^T \mu_t^T dt + \int_0^T \int_0^t \psi^T(t-s) \mu_s^T ds dt \leq c T^{2\alpha} \|\mu\|_\infty \quad (37)$$

$$\mathbb{E}[X_1^T] = \mathbb{E}[Y_1^T] \leq c, \quad (38)$$

$$\sum_{1 \leq i \leq n} \mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0,1]} (X_t^{T,i} - Y_t^{T,i})^2 \right] \leq 4 \sum_{1 \leq i \leq n} \mathbb{E} \left[(X_1^{T,i} - Y_1^{T,i})^2 \right] \leq 4 T^{-4\alpha} \sum_{1 \leq i \leq n} \mathbb{E}[(M_T^{T,i})^2] \leq c T^{-2\alpha} \quad (39)$$

Étape 3 : Comportement asymptotique du triplet (X^T, Y^T, Z^T)

Nous commençons par simplifier l'expression de Y^T en la décomposant en trois composantes : Y_1^T , Y_2^T et Y_3^T , comme indiqué en (40). L'objectif est alors d'étudier la convergence de chacune de ces composantes séparément. Tout d'abord, grâce à la condition de convergence de μ^T donnée en (25), on montre, par le théorème de convergence dominée, que Y_1^T converge vers zéro. Pour traiter le terme Y_2^T et aboutir à (41), nous procédons par changement de variable suivi d'une intégration par parties, puis exploitons la convergence uniforme de F^T ainsi que la condition (25). Concernant Y_3^T , nous utilisons le théorème de Fubini stochastique (voir section 7 — Outil 3) pour réécrire le deuxième terme dans (43), tandis que le troisième terme est traité à l'aide de (42). Une application du théorème de représentation de Skorokhod (voir section 7 — Outil 7) permet ensuite de construire des suites de variables aléatoires \tilde{Z}^T convergeant presque sûrement vers Z . Le théorème de convergence dominée permet alors de conclure que les processus limites X et Y , égaux presque sûrement, vérifient (44). Enfin, l'expression du triplet limite donnée par (45) s'obtient par une application du théorème de représentation des martingales de Lévy (voir section 7 — Outil 5).

$$T^{2\alpha}Y_t^T = T \int_0^t \mu_{sT}^T ds + T \int_0^t \psi^T(T(t-s)) \left(\int_0^{sT} \mu_u^T du \right) ds + T \int_0^t \psi^T(T(t-s)) M_{sT}^T ds =: T^{2\alpha}(Y_t^{T,1} + Y_t^{T,2} + Y_t^{T,3}) \quad (40)$$

$$Y_t^{T,2} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \int_0^t F(t-s) \mu_s ds \quad (41)$$

$$[Z^T, Z^T] = \text{diag}(X^T) \quad (42)$$

$$Y_t^{T,3} = \int_0^t F(t-s) dZ_s + \int_0^t F(t-s) (dZ_s^T - dZ_s) + \int_0^t (F^T(t-s) - F(t-s)) dZ_s^T \quad (43)$$

$$X_t = \int_0^t F(t-s) \mu_s ds + \int_0^t F(t-s) dZ_s \quad (44)$$

$$\begin{aligned} X_t &= \int_0^t V_s ds, \\ Z_t &= \int_0^t \text{diag}(\sqrt{V_s}) dB_s, \\ V_t &= \int_0^t f(t-s) \mu_s ds + \int_0^t f(t-s) \text{diag}(\sqrt{V_s}) dB_s \end{aligned} \quad (45)$$

Étape 4 : Équation de Volterra vérifiée par \tilde{V}

Dans cette partie, nous développons l'expression de la volatilité V , telle que donnée en (45), en nous appuyant sur la forme explicite de la densité de Mittag-Leffler introduite en (36). En adoptant des notations par blocs pour la matrice de passage O ainsi que pour son inverse O^{-1} , nous obtenons une reformulation de la densité limite f , présentée en (46). Cette dernière permet de décomposer la variable $V \in \mathbb{R}^{2m}$ en deux composantes : $V_1 \in \mathbb{R}^{n_c}$, voir (47), et $V_2 \in \mathbb{R}^{2m-n_c}$, ce qui rend possible une expression explicite de V en fonction de \tilde{V} . L'équation (48) fournit alors la forme de l'équation différentielle fractionnaire satisfaite par \tilde{V} . Celle-ci est obtenue en appliquant l'opérateur d'intégration

fractionnaire à la densité de Mittag-Leffler (voir section 7 — Outils 8 et 9), dans le but d'éliminer la dépendance directe à V .

$$f(t) = \begin{pmatrix} O_{11} + O_{12}(I - \int_0^\infty C)^{-1} \int_0^\infty BK^{-1}f^{\alpha,\Lambda}(t) & 0 \\ O_{21} + O_{22}(I - \int_0^\infty C)^{-1} \int_0^\infty BK^{-1}f^{\alpha,\Lambda}(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O_{11}^{(-1)} & O_{12}^{(-1)} \\ O_{21}^{(-1)} & O_{22}^{(-1)} \end{pmatrix}. \quad (46)$$

$$\begin{aligned} V_t^1 &= \Theta^1 \int_0^t f^{\alpha,\Lambda}(t-s) O_{11}^{(-1)} \mu_s^1 ds + \Theta^1 \int_0^t f^{\alpha,\Lambda}(t-s) O_{12}^{(-1)} \mu_s^2 ds \\ &+ \Theta^1 \int_0^t f^{\alpha,\Lambda}(t-s) O_{11}^{(-1)} \text{diag}(\sqrt{V_s^1}) dW_s^1 + \Theta^1 \int_0^t f^{\alpha,\Lambda}(t-s) O_{12}^{(-1)} \text{diag}(\sqrt{V_s^2}) dW_s^2. \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}_t &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Lambda \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left(O_{11}^{(-1)} \mu^1 + O_{12}^{(-1)} \mu^2 - \tilde{V}_s \right) ds \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Lambda \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} O_{11}^{(-1)} \text{diag}(\sqrt{\Theta^1 \tilde{V}_s}) dW_s^1 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Lambda \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} O_{12}^{(-1)} \text{diag}(\sqrt{\Theta^2 \tilde{V}_s}) dW_s^2. \end{aligned} \quad (48)$$

Étape 5 : Caractérisation du vecteur prix P^T

Pour analyser le comportement asymptotique du vecteur de prix P^T , nous commençons par isoler la variation de prix d'un actif i en projetant sur le vecteur $\mathbf{v}_i = e_{2i-1} - e_{2i}$, où e_j désigne le j -ième vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^{2m} . En appliquant la définition du processus de Hawkes, on obtient l'expression donnée en (49). Nous développons ensuite λ en utilisant la relation de compensation (27), ainsi que l'expression de M^T en fonction de Z^T via (29), ce qui permet d'aboutir à l'équation (50). L'application du théorème de convergence dominée montre que, pour un temps fixé $t > 0$, les troisième et quatrième termes de (50) convergent vers zéro. Les deux premiers termes convergent également par convergence dominée, en utilisant les faits que $\Delta^T \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} \Delta$ et $Z^T \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} Z$. En effet, la matrice Δ^T est définie comme une combinaison linéaire intégrant $\psi^T(T \cdot)$, et la convergence faible de $\psi^T(T \cdot)$ implique alors directement celle de Δ^T . Nous obtenons ainsi l'expression limite donnée en (51), et, par application du théorème de représentation des martingales, l'équation finale (52), ce qui achève la démonstration.

$$\mathbf{v}_i \cdot N_t^T = \mathbf{v}_i \cdot M_t^T + \mathbf{v}_i \cdot \int_0^t \lambda_s^T ds, \quad (49)$$

$$\begin{aligned} T^{-\alpha} \mathbf{v}_i \cdot N_{tT}^T &= \sum_{1 \leq k \leq m} \left(\mathbb{K}_{ik} + \Delta_{ik}^T \right) \mathbf{v}_k \cdot Z_t^T + \sum_{1 \leq k \leq m} \left(\mathbb{K}_{ik} + \Delta_{ik}^T \right) T^{1-\alpha} \int_0^t \mathbf{v}_k \cdot \mu_{sT}^T ds \\ &- \int_0^t \int_{tT-s}^\infty \psi^T(u) \mathbf{v}_i du \cdot dZ_s^T - T^{-\alpha} \int_0^t \int_{T(t-s)}^\infty \psi^T(u) \mathbf{v}_i \cdot \mu_{sT}^T du ds. \end{aligned} \quad (50)$$

$$P_t = (I + \Delta)^\dagger Q \left(Z_t + \int_0^t \mu_s ds \right) \quad (51)$$

$$P_t = (I + \Delta)^\dagger Q \left(\int_0^t \text{diag}(\sqrt{V_s}) dB_s + \int_0^t \mu_s ds \right) \quad (52)$$

5 Applications en finance

Nous investiguons dans cette section la validité des résultats théoriques obtenus, en examinant l'influence de quelques grandeurs microscopiques, comme l'impact cross-asset sur le nombre de continuations et d'alternances du prix, sur les paramètres de volatilité rugueuse et l'évolution du prix macroscopique.

Dans un premier temps, nous choisissons d'étudier un système composé de deux actifs, en nous plaçant dans le cadre des hypothèses du théorème limite. À des fins de simplification, nous prenons la matrice $M = \alpha I$. Ce choix, bien que technique, n'altère que marginalement les faits stylisés observés sur les marchés financiers. En effet, la matrice M ne fait qu'ajuster la vitesse de propagation de l'effet de mémoire; l'essentiel en pratique réside dans une calibration précise du paramètre α . Par ailleurs, nous considérons un noyau de mémoire ϕ de la forme donnée en (53), permettant de satisfaire les hypothèses du théorème. Ce noyau est spécifié à partir des probabilités $H_{12}^c, H_{12}^a, H_{21}^c$ et H_{21}^a , qui vérifient les conditions de (54). Ces quantités représentent respectivement l'influence d'un mouvement de prix microscopique de l'actif 2 sur la continuation (H^c) et l'alternation (H^a) du prix de l'actif 1, et réciproquement. Les paramètres γ_1 et γ_2 quantifient, pour chaque actif, le degré de momentum et de mean-reversion : un $\gamma \approx 0$ correspond à une dynamique fortement pro-momentum, tandis qu'un $\gamma \approx 1$ traduit une forte mean-reversion. Enfin, nous supposons que les deux actifs partagent la même baseline, autrement dit, une influence symétrique des composantes exogènes sur le nombre de sauts haussiers et baissiers. Cette hypothèse nous conduit naturellement à l'expression présentée en (55).

$$\begin{aligned}
 0 &\leq (H_{12}^c + H_{12}^a)(H_{21}^c + H_{21}^a) < 1 \\
 0 &\leq \left| 1 - (\gamma_1 + \gamma_2) - \sqrt{(H_{12}^c - H_{12}^a)(H_{21}^c - H_{21}^a) + (\gamma_1 - \gamma_2)^2} \right| < 1 \\
 0 &\leq \left| 1 - (\gamma_1 + \gamma_2) + \sqrt{(H_{12}^c - H_{12}^a)(H_{21}^c - H_{21}^a) + (\gamma_1 - \gamma_2)^2} \right| < 1
 \end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned}
 \phi_1^T(t) &= (1 - \gamma_1)\alpha(1 - T^{-\alpha})\mathbb{1}_{t \geq 1} t^{-(\alpha+1)} \\
 \phi_2^T(t) &= \gamma_1\alpha(1 - T^{-\alpha})\mathbb{1}_{t \geq 1} t^{-(\alpha+1)} \\
 \tilde{\phi}_1^T(t) &= (1 - \gamma_2)\alpha(1 - T^{-\alpha})\mathbb{1}_{t \geq 1} t^{-(\alpha+1)} \\
 \tilde{\phi}_2^T(t) &= \gamma_2\alpha(1 - T^{-\alpha})\mathbb{1}_{t \geq 1} t^{-(\alpha+1)} \\
 \phi_{21}^{T,c}(t) &= \alpha T^{-\alpha} H_{21}^c \mathbb{1}_{t \geq 1} t^{-(\alpha+1)} \\
 \phi_{21}^{T,a}(t) &= \alpha T^{-\alpha} H_{21}^a \mathbb{1}_{t \geq 1} t^{-(\alpha+1)} \\
 \phi_{12}^{T,c}(t) &= \alpha T^{-\alpha} H_{12}^c \mathbb{1}_{t \geq 1} t^{-(\alpha+1)} \\
 \phi_{12}^{T,a}(t) &= \alpha T^{-\alpha} H_{12}^a \mathbb{1}_{t \geq 1} t^{-(\alpha+1)}
 \end{aligned} \tag{54}$$

$$\mu^T = T^{\alpha-1} \begin{pmatrix} \mu^1 \\ \mu^1 \\ \mu^2 \\ \mu^2 \end{pmatrix} \quad \phi^T = \begin{pmatrix} \phi_1^T & \phi_2^T & \phi_{12}^{T,c} & \phi_{12}^{T,a} \\ \phi_2^T & \phi_1^T & \phi_{12}^{T,a} & \phi_{12}^{T,c} \\ \phi_{21}^{T,c} & \phi_{21}^{T,a} & \tilde{\phi}_1^T & \tilde{\phi}_2^T \\ \phi_{21}^{T,a} & \phi_{21}^{T,c} & \tilde{\phi}_2^T & \tilde{\phi}_1^T \end{pmatrix} \tag{55}$$

En partant de la configuration microscopique décrite précédemment et en appliquant le théorème limite, nous obtenons les expressions du prix macroscopique et de la volatilité, données respectivement par (56) et (57). L'analyse de cette dernière révèle que la volatilité d'un actif est insensible à la direction des sauts, dans la mesure où elle dépend uniquement de la somme $H^c + H^a$. En revanche, le prix est fortement influencé par le paramètre de cross-momentum $H^c - H^a$ ainsi que par les coefficients γ . En examinant plus précisément le comportement de l'actif 1, on observe que sa variation quadratique, donnée par (58), est une fonction décroissante des paramètres γ_1 et γ_2 . Cette propriété permet de mieux comprendre l'influence de l'actif 2 sur la volatilité de l'actif 1, à travers les interactions croisées du modèle. Intéressons-nous maintenant à l'effet du cross-momentum et à sa propagation à l'échelle macroscopique. En l'absence d'effet de cross-momentum entre les deux actifs, l'expression (56) montre que la corrélation entre leurs prix macroscopiques est nulle. À l'inverse, dans le cas où l'effet de cross-momentum est fort, c'est-à-dire lorsque la condition (59) est satisfaite, la corrélation entre les deux actifs tend vers 1.

$$P_t = \frac{\sqrt{2}}{4\gamma_1\gamma_2 - (H_{12}^c - H_{12}^a)(H_{21}^c - H_{21}^a)} \begin{pmatrix} 2\gamma_2 & H_{21}^c - H_{21}^a \\ H_{12}^c - H_{12}^a & 2\gamma_1 \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} \sqrt{V_s^1} dW_s^1 \\ \sqrt{V_s^2} dW_s^2 \end{pmatrix} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} V_t^1 \\ V_t^2 \end{pmatrix} &= \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left[\begin{pmatrix} \mu^1 \\ \mu^2 \end{pmatrix} - \frac{1}{1 - (H_{12}^c + H_{12}^a)(H_{21}^c + H_{21}^a)} \begin{pmatrix} 1 & H_{21}^c + H_{21}^a \\ H_{12}^c + H_{12}^a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_s^1 \\ V_s^2 \end{pmatrix} \right] ds \\ &+ \frac{\alpha\sqrt{2}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \begin{pmatrix} \sqrt{V_s^1} dZ_s^1 \\ \sqrt{V_s^2} dZ_s^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (57)$$

$$\mathbb{E}[(P_t^1)^2] = 2 \cdot \frac{4\gamma_2^2 \int_0^t \mathbb{E}[V_s^1] ds + (H_{12}^c - H_{12}^a)(H_{21}^c - H_{21}^a) \int_0^t \mathbb{E}[V_s^2] ds}{[4\gamma_1\gamma_2 - (H_{12}^c - H_{12}^a)(H_{21}^c - H_{21}^a)]^2} \quad (58)$$

$$\Delta + I = \frac{1}{2\gamma_1\gamma_2\epsilon} \begin{pmatrix} \gamma_2 & \gamma_2\sqrt{1-\epsilon} \\ \gamma_1\sqrt{1-\epsilon} & \gamma_1 \end{pmatrix} \quad (59)$$

6 Discussion

Dans ce travail, nous avons étudié un modèle de microstructure fondé sur des processus de Hawkes multivariés avec mémoire longue. Ce cadre permet de modéliser des dynamiques de prix haute fréquence réalistes tout en intégrant des interactions entre actifs. En régime de haute intensité et sous une renormalisation adaptée des noyaux, le système converge vers un modèle de type rough Heston multivarié, où la volatilité suit une dynamique stochastique non-markovienne de type Volterra. Ce théorème limite fournit un pont rigoureux entre microstructure et modèles continus de volatilité rugueuse, tout en permettant une interprétation structurelle des paramètres de volatilité et de corrélation.

Un apport important du modèle réside dans sa capacité à reproduire la structure empirique des corrélations entre actifs, notamment les grandes valeurs propres associées aux effets de marché et de secteur. En introduisant une structure sectorielle explicite dans les noyaux d'interaction où les actifs d'un même secteur s'influencent davantage, les auteurs de [12] parviennent à générer un comportement collectif cohérent avec les matrices de corrélation observées empiriquement. Dans le régime asymptotique, cette structuration sectorielle conduit à une matrice de covariance dans laquelle on identifie clairement une composante de marché (valeur propre dominante) et des sous-blocs sectoriels (valeurs propres intermédiaires), ce qui reflète la hiérarchie de dépendance présente dans les données réelles.

Ces résultats permettent de synthétiser plusieurs faits stylisés des marchés financiers dans un cadre unifié. D'une part, ils justifient la présence d'une dynamique de volatilité rough à partir d'hypothèses purement microstructurelles. D'autre part, ils montrent que les co-mouvements des actifs souvent modélisés de manière ad hoc dans les modèles multi-actifs peuvent ici émerger naturellement de la structure des noyaux de mémoire. Le modèle met donc en lumière le rôle des interactions haute fréquence dans la formation de la volatilité et des corrélations à l'échelle agrégée, offrant ainsi un outil d'interprétation et de calibration puissant pour des applications en gestion du risque, en pricing ou en allocation d'actifs.

Cette approche ouvre la voie à plusieurs travaux de recherche récents. Dans [13] Rosenbaum et Zhang ont étendu le modèle rough Heston quadratique au cadre multi-actifs, en étudiant ses implications pour le market making algorithmique dans des environnements de dépendance complexe entre actifs. De plus, ces auteurs ont mis en évidence dans [14] l'universalité du processus de formation de la volatilité en comparant des modèles paramétriques rugueux avec des architectures d'apprentissage automatique. Leur étude montre qu'un modèle rough parcimonieux peut rivaliser avec un réseau de neurones universel.

Cependant, des études récentes ont mis en évidence plusieurs limitations qui méritent une attention particulière. Par exemple, Abi Jaber et Li montrent dans [2] que ces modèles présentent des insuffisances structurelles, notamment une incapacité à reproduire fidèlement la courbure observée des smiles de volatilité, en particulier pour les options à court terme. De plus, Cont et Das suggèrent dans [4] que la "rugosité" apparente de la volatilité pourrait être davantage attribuée au bruit microstructurel et aux erreurs de mesure qu'à une caractéristique intrinsèque du processus de volatilité sous-jacent. Ces observations soulignent la nécessité d'une évaluation critique de l'adoption des modèles de volatilité rugueuse, en tenant compte de leurs limites empiriques et des défis liés à leur calibration et à leur mise en œuvre pratique.

7 Outils mathématiques

Outil 1 : Deuxième théorème de Dini

Théorème : La convergence simple d'une suite (f_n) de fonctions réelles d'une variable réelle, définies et croissantes (non nécessairement continues) sur un segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$, vers une fonction continue f sur $[a, b]$, implique la convergence uniforme.

Outil 2 : Théorème taubérien de Hardy-Littlewood-Karamata

Théorème : Soit g une fonction croissante vérifiant $g(0) = 0$ et telle que l'intégrale de Laplace

$$f(t) = \int_0^\infty e^{-tu} g(u) du$$

converge pour $t > 0$. S'il existe deux réels c, α avec $\alpha > 0$, tels que

$$f(t) = (c + o(1)) t^{-\alpha}, \quad (t \rightarrow 0^+),$$

alors on a :

$$\int_0^x g(u) du = \left(\frac{c}{\Gamma(\alpha + 1)} + o(1) \right) x^\alpha, \quad (x \rightarrow +\infty).$$

Outil 3 : Théorème de Fubini stochastique

Théorème : Soit X une semi-martingale, et soit (E, \mathcal{E}, μ) un espace mesurable de mesure finie. On considère une application

$$\xi : \mathbb{R}^+ \times \Omega \times E \rightarrow \mathbb{R}, \quad (t, \omega, x) \mapsto \xi_t^x(\omega)$$

réelle, bornée, et mesurable au sens de $\mathcal{P} \otimes \mathcal{E}$. On définit, pour chaque $x \in E$, le processus

$$U_t^x = \int_0^t \xi_s^x dX_s.$$

Alors, l'intégrale $\int |U_t^x| d\mu(x)$ est presque sûrement finie, et on a :

$$\int_E U_t^x d\mu(x) = \int_0^t \left(\int_E \xi_s^x d\mu(x) \right) dX_s, \quad \text{presque sûrement.}$$

Outil 4 : Théorème de convergence de Lévy-Cramer :

Théorème : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires, pas nécessairement définies sur le même espace de probabilité. On note φ_n et φ les fonctions caractéristiques respectives de X_n et d'une variable aléatoire X , définies par :

$$\varphi_n(t) = \mathbb{E} [e^{itX_n}], \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(t) = \mathbb{E} [e^{itX}], \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

alors

$$\{\forall t \in \mathbb{R}, \varphi_n(t) \rightarrow \varphi(t)\} \iff \{X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X\}.$$

Outil 5 : Théorème de représentation des martingales

Théorème : Soit B_t un mouvement brownien défini sur un espace de probabilité filtré standard $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$, et soit \mathcal{G}_t la filtration augmentée engendrée par B . Si X est une variable aléatoire de carré intégrable, mesurable par rapport à \mathcal{G}_∞ , alors il existe un processus C , adapté à la filtration (\mathcal{G}_t) , tel que :

$$X = \mathbb{E}[X] + \int_0^\infty C_s dB_s.$$

Outil 6 : Convergence faible des mesures ou des densités au sens des distributions

Définition : Soit S un espace métrique muni de sa tribu borélienne Σ . Une suite bornée de mesures de probabilité positives $(P_n)_{n \geq 1}$ sur (S, Σ) **converge faiblement vers une mesure positive finie** P (noté $P_n \Rightarrow P$) si l'une des conditions équivalentes suivantes est remplie (ici \mathbb{E}_n désigne l'espérance ou la norme L^1 par rapport à P_n , tandis que \mathbb{E} est prise par rapport à P) :

- $\mathbb{E}_n[f] \rightarrow \mathbb{E}[f]$ pour toutes les fonctions f bornées et continues ;
- $\mathbb{E}_n[f] \rightarrow \mathbb{E}[f]$ pour toutes les fonctions f bornées et lipschitziennes ;
- $\limsup \mathbb{E}_n[f] \leq \mathbb{E}[f]$ pour toute fonction f semi-continue supérieurement et majorée ;
- $\liminf \mathbb{E}_n[f] \geq \mathbb{E}[f]$ pour toute fonction f semi-continue inférieurement et minorée ;
- $\limsup P_n(C) \leq P(C)$ pour tout ensemble fermé $C \subset S$;
- $\liminf P_n(U) \geq P(U)$ pour tout ensemble ouvert $U \subset S$;
- $\lim P_n(A) = P(A)$ pour tout ensemble $A \subset S$ tel que $P(\partial A) = 0$, où ∂A désigne la frontière de A .

Outil 7 : Théorème de représentation de Skorokhod

Théorème : Soit $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de mesures de probabilité sur un espace métrique S , telle que μ_n converge faiblement vers une mesure de probabilité μ_∞ sur S lorsque $n \rightarrow \infty$. On suppose de plus que le support de μ_∞ est séparable.

Alors, il existe des variables aléatoires S -valuées X_n , définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, telles que :

- pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, la loi de X_n est μ_n ,
- et $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} X_\infty$ (convergence presque sûre).

Outil 8 : Opérateur de différentiation et intégration fractionnaire par rapport à une mesure de Lebesgue

Définition : Pour $\alpha \in (0, 1)$, l'opérateur de dérivation fractionnaire (resp. d'intégration fractionnaire), noté D^α (resp. I^α), est défini par :

$$D^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds, \quad (60)$$

où f est une fonction mesurable, Hölder continue d'ordre strictement supérieur à α . L'opérateur d'intégration fractionnaire est donné par :

$$I^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad (61)$$

où f est une fonction mesurable.

Outil 9 : Opérateur d'intégration fractionnaire par rapport à un brownien

Définition : Étant donné un mouvement brownien B et $\alpha \in (1/2, 1)$, l'intégrale fractionnaire par rapport à B , notée I_B^α , est définie par :

$$I_B^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) dB_s, \quad (62)$$

pour toute fonction f mesurable et processus stochastique intégrable au carré.

Outil 10 : Fonction, densité et fonction de répartition de Mittag-Leffler

Définitions : Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ telles que $\operatorname{Re}(\alpha), \operatorname{Re}(\beta) > 0$, et $\Lambda \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors, la fonction de Mittag-Leffler matricielle est définie par :

$$E_{\alpha, \beta}(\Lambda) := \sum_{n \geq 0} \frac{\Lambda^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}.$$

Lorsque $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$, la densité de Mittag-Leffler matricielle $f^{\alpha, \Lambda}(t)$ est donnée par :

$$f^{\alpha, \Lambda}(t) := \Lambda t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\Lambda t^\alpha),$$

et la fonction de répartition matricielle associée s'écrit :

$$F^{\alpha, \Lambda}(t) := \int_0^t f^{\alpha, \Lambda}(s) ds.$$

Bibliographie

- [1] Frédéric Abergel, Jean-Philippe Bouchaud, Thierry Foucault, Charles-Albert Lehalle, and Mathieu Rosenbaum. *Market microstructure : confronting many viewpoints*. John Wiley & Sons, 2012.
- [2] Eduardo Abi Jaber and Shaun Xiaoyuan Li. Volatility models in practice : Rough, path-dependent or markovian ? 2024.
- [3] Emmanuel Bacry, Sylvain Delattre, Marc Hoffmann, and Jean-François Muzy. Some limit theorems for hawkes processes and application to financial statistics. *Stochastic Processes and their Applications*, 123(7) :2475–2499, 2013.
- [4] Rama Cont and Purba Das. Rough volatility : fact or artefact ? *Sankhya B*, 86(1) :191–223, 2024.
- [5] Rama Cont and Adrien De Larrard. Price dynamics in a markovian limit order market. *SIAM Journal on Financial Mathematics*, 4(1) :1–25, 2013.
- [6] Omar El Euch and Mathieu Rosenbaum. The characteristic function of rough heston models. *Mathematical Finance*, 29(1) :3–38, 2019.
- [7] J Doyne Farmer, Paolo Patelli, and Ilija I Zovko. The predictive power of zero intelligence in financial markets. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 102(6) :2254–2259, 2005.
- [8] Jim Gatheral, Thibault Jaisson, and Mathieu Rosenbaum. Volatility is rough. *Quantitative finance*, 18(6) :933–949, 2018.
- [9] Alan G Hawkes and David Oakes. A cluster process representation of a self-exciting process. *Journal of applied probability*, 11(3) :493–503, 1974.
- [10] Weibing Huang, Charles-Albert Lehalle, and Mathieu Rosenbaum. Simulating and analyzing order book data : The queue-reactive model. *Journal of the American Statistical Association*, 110(509) :107–122, 2015.
- [11] Thibault Jaisson and Mathieu Rosenbaum. Limit theorems for nearly unstable hawkes processes. 2015.
- [12] Mathieu Rosenbaum and Mehdi Tomas. From microscopic price dynamics to multidimensional rough volatility models. *Advances in Applied Probability*, 53(2) :425–462, 2021.
- [13] Mathieu Rosenbaum and Jianfei Zhang. Multi-asset market making under the quadratic rough heston. *arXiv preprint arXiv :2212.10164*, 2022.
- [14] Mathieu Rosenbaum and Jianfei Zhang. On the universality of the volatility formation process : when machine learning and rough volatility agree. *arXiv preprint arXiv :2206.14114*, 2022.