Sur le pricing des swaps de variance par le biais des log contrats

Ameur Nadir, Anass El Moubaraki

[1]École Polytechnique

[2]Sorbonne Université

Table de matières

Swaps de variance : Définition et cas d'usages

Définition : produit dérivé qui permet d'échanger la variance réalisée d'un actif sous-jacent contre une variance fixe.

Cas d'usages :

- Couverture contre la volatilité : Neutraliser les variations de volatilité via un VS
- Spéculation sur la volatilité : Anticiper une augmentation ou une baisse de volatilité pour acheter ou vendre un VS.
- Arbitrage de volatilité : Tirer profit des erreurs d'évaluation du marché sur la volatilité future.

Swaps de variance : Formalisation mathématique

$$\text{Payoff}_{\text{VS}} = \frac{252}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln^2(\frac{S_{i+1}}{S_i}) \; - \hat{\sigma}^2_{VS}(t)$$

avec

- $S_t \equiv$ prix de clôture de l'actif sous-jacent au VS.
- N $\equiv$ nombre de jours de trading jusqu'à maturité.
- $\hat{\sigma}_{VS}(t) \equiv$ volatilité fixée à l'instant initial de telle sorte que le prix initial du VS soit nul (risque symétrique).
- 252 est une constante d'annualisation.

Swaps de variance : Formalisation mathématique

$$\mathrm{Payoff}_{\mathrm{VS}} = \frac{252}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln^2\left(\frac{S_{i+1}}{S_i}\right) - \hat{\sigma}^2_{VS}(t)$$

En pratique nous utilisons la formule :

$$\mathrm{Payoff}_{\mathrm{VS}} = \frac{1}{T-t} \sum_{i=0}^{N-1} \ln^2\left(\frac{S_{i+1}}{S_i}\right) - \hat{\sigma}^2_{VS,T}(t)$$

Swaps de variance : Notion de variance forward

Définition : mesure de la prévision du marché sur l'évolution de la variance réalisée au cours du temps.

Pour un instant initial t et deux maturités T_1 et T_2, la variance forward vérifie :

$$\hat{\sigma}^2_{VS,T_1,T_2}(t) = \frac{(T_2 - t)\hat{\sigma}^2_{VS,T_2}(t) - (T_1 - t)\hat{\sigma}^2_{VS,T_1}(t)}{T_2 - T_1}$$

En effet, en combinant deux swaps de variance avec la configuration suivante : long sur $(T_2 - t)$ VS de maturité T_2 et short sur $(T_1 - t)e^{-r(T_2 - T_1)}$ VS de maturité T_1 le payoff ramené à T_2 est exactement égale à :

$$\sum_{T_1}^{T_2} \ln^2(\frac{S_{i+1}}{S_i}) - (T_2 - T_1)\hat{\sigma}^2_{VS,T_1,T_2}(t)$$

Log contrats : Lien avec les swaps de variance

P&L delta-hedgé pour un payoff $P_{\hat{\sigma}}$:

$$P\&L_{P_{\hat{\sigma}}} = -\sum_i e^{-rt_i} \frac{S_i^2}{2} \frac{d^2 P_{\hat{\sigma}}}{dS^2}(t_i, S_i) \left[\left(\frac{\delta S_i}{S_i} \right)^2 - \hat{\sigma}^2 \delta t_i \right]$$

Prix a l'instant t_i du log contrat qui paie à maturité $-2\ln(S_T)$:

$$Q_{\hat{\sigma}}^T(t_i, S_i) = -2e^{-r(T-t_i)} \left(\ln(S) + r(T - t_i) - \frac{\hat{\sigma}^2}{2}(T - t_i) \right)$$

Identification :

$\frac{S^2}{2} \frac{d^2 Q_{\hat{\sigma}}^T}{dS^2}(t_i, S_i) = e^{-r(T-t_i)}$ et $P\&L_{Q_{\hat{\sigma}}^T} = -e^{-rT} \sum_i \left[\left(\frac{\delta S_i}{S_i} \right)^2 - \hat{\sigma}^2 \delta t_i \right]$

Log contrats : Lien avec les swaps de variance

A volatilité implicite nulle et avec un développement de Taylor à l'ordre 2 nous retrouvons l'expression du swap de variance :

$$e^{rT} P\&L_{Q^T_{\hat{\sigma}=0}} = -\sum_i \left(\frac{\delta S_i}{S_i}\right)^2 \approx -\sum_i \ln^2(1+\frac{\delta S_i}{S_i}) = -\sum_i \ln^2(\frac{S_{i+1}}{S_i})$$

$$e^{rT} P\&L_{Q^T_{\hat{\sigma}=0}} = -T \times \mathrm{Payoff}_{VS,\hat{\sigma}_{VS,T}=0}$$

Interprétation :

Si à t=0 le prix marché du log contrat est $Q^T_{\hat{\sigma}=0}$ alors on prend $\hat{\sigma}_{VS,T} = 0$ et nous facturons rien au client.

Log contrats : Lien avec les swaps de variance

De façon générale le P&L marked to market généré par l'achat d'un contrat log est $(Q^T_{\hat{\sigma}=0} - Q^T_{market})$ qui est chargé au client comme prime sur le swap de variance. Elle est égale à $T\hat{\sigma}^2_{VS,T}$ et payée à maturité.

$$\hat{\sigma}^2_{VS,T} = \frac{e^{rT}}{T}(Q^T_{market} - Q^T_{\hat{\sigma}=0})$$

En effet, en utilisant:

$$Q^T_{\hat{\sigma}=0}(0,S) = -2e^{-rT}\left(\ln(S) + rT\right)$$

$$Q^T_{market} = -2e^{-rT}\left(\ln(S) + rT - \frac{\hat{\sigma}^2_T}{2}T\right)$$

On retrouve :

$$\hat{\sigma}_{VS,T} = \sqrt{\frac{e^{rT}}{T}(Q^T_{market} - Q^T_{\hat{\sigma}=0})} = \hat{\sigma}_T$$

.

Formule de Carr :

$$\ln(S) = \ln(S_0) + \frac{S - S_0}{S_0} - \int_0^{S_0} \frac{1}{K^2}(K - S)^+ dK - \int_{S_0}^{+\infty} \frac{1}{K^2}(S - K)^+ dK$$

Application au calcul de la volatilité implicite VS :

$$\hat{\sigma}^2_{VS,T} = \frac{e^{rT}}{T} \int_0^{\infty} \frac{2}{K^2}(P^{KT}_{market} - P^{KT}_{\hat{\sigma}=0})dK$$

Cette relation fait intervenir des vanilles avec $S_0 >> K$ et et $S_0 << K$. Ces options sont très peu liquides et leur pricing est peu précis. De plus, pour $K \to 0$ l'erreur d'estimation sur le prix de nos vanilles est amplifiée par la dérivée seconde du logarithme $(= \frac{1}{K^2})$

Log contrats : calibration de volatilité à partir de payoff puissance

Pour réduire l'erreur d'estimation sur la volatilité implicite associée au log contrat nous dérivons à partir du payoff puissance une formule de la volatilité implicite faisant intervenir une densité gaussienne (bornée de maximum égale à 1) et les volatilités implicites des options vanilles à différents prix d'exercice.

Payoff puissance :

$$Q_t^{PT} = e^{-r(T-t)} F_T^p e^{\frac{p(p-1)}{2}(T-t)\hat{\sigma}_T^2}$$

Log contrats : calibration de volatilité à partir de payoff puissance

Transformée de Laplace du log prix :

$$\mathrm{L}(p) = e^{r(T-t)} \frac{Q_t^{PT}}{F_T^p} = \mathbb{E}_t \left[\left(\frac{S_T}{F_T} \right)^p \right] = \int_0^{+\infty} e^{r(T-t)} \frac{d^2 C_{KT}}{dK^2}_{|K=S_T} e^{p \ln(\frac{K}{F_T})} dK$$

Changement de variable via moneyness :

$$y(K) = \frac{\ln(\frac{F_T}{K})}{\hat{\sigma}_{KT}\sqrt{T}} + (p - \frac{1}{2})\hat{\sigma}_{KT}\sqrt{T} \Rightarrow \mathrm{L}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{-y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{p(p-1)}{2}\hat{\sigma}^2_{K(y,p,T)}} dy$$

Log contrats : calibration de volatilité à partir de payoff puissance

Quand $p \to 0$:

$$S^p \approx 1 + p\log(S)$$

$$e^{\frac{p(p-1)}{2}\hat{\sigma}^2_{K(y,p,T)} \approx 1 - \frac{p}{2}\hat{\sigma}^2_{K(y,T)}}$$

$$\mathrm{L}(p) \approx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{-y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}(1 - \frac{p}{2}\hat{\sigma}^2_{K(y,T)})dy \approx 1 - \frac{p}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{-y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\sigma^2_{K(y,T)}dy$$

En identifiant on trouve que le carré de la volatilité implicite associée à Q^T est :

$$\hat{\sigma}^2_{Q^T} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{-y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\sigma^2_{K(y,T)}dy$$

Impact de l'asymétrie sur les rendements journaliers: Approche model-free

On suppose que l'on vend un VS et qu'on achète un contrat log delta-hedgé. Nous supposons que le taux d'intérêt est nul, qu'il n'y pas de dividendes et que le pas de temps est constant.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P\&L} &= Q^T(t_{i+1}, S_{i+1}) - Q^T(t_i, S_i) - \frac{dQ^T}{dS}(t_i, S_i)\delta S_i - (r_i^2 - \hat{\sigma}^2_{VS,T}\delta t) \\
&= (2(e^{r_i} - 1) - 2r_i - r_i^2) - (\hat{\sigma}^2_T - \hat{\sigma}^2_{VS,T})\delta t \\
&\approx \frac{r_i^3}{3} - (\hat{\sigma}^2_T - \hat{\sigma}^2_{VS,T})\delta t
\end{aligned}$$

avec :

- $r_i = \ln(\frac{\mathrm{S_{i+1}}}{\mathrm{S_i}})$
- $Q^T(t, S_t) = -2\left(\ln(S) - \frac{\hat{\sigma}^2_T}{2}(T - t)\right)$

Impact de l'asymétrie sur les rendements journaliers: Approche model-free

$$\mathrm{P\&L} \approx \frac{r_i^3}{3} - (\hat{\sigma}_T^2 - \hat{\sigma}_{VS,T}^2)\delta t$$

En supposant qu'en moyenne le P&L est nul on obtient :

$$(\hat{\sigma}_T^2 - \hat{\sigma}_{VS,T}^2) \approx \frac{\langle r^3 \rangle}{3\delta t} \approx \frac{s}{3}\hat{\sigma}_T^3\sqrt{\delta t}$$

$$\frac{\hat{\sigma}_{VS,T}}{\hat{\sigma}_T} - 1 \approx -\frac{s}{6}\hat{\sigma}_T\sqrt{\delta t}$$

Impact de l'asymétrie sur les rendements journaliers : Modèle de diffusion

$$\frac{\hat{\sigma}_{VS,T}}{\hat{\sigma}_T} - 1 \approx -\frac{s}{6}\hat{\sigma}_T\sqrt{\delta t}$$

$\hat{\sigma}_{VS,T} = \hat{\sigma}_T$ si et seulement si le coefficient d'asymétrie $s = \frac{\langle r^3 \rangle}{\langle r^2 \rangle^{\frac{3}{2}}}$ est nul ou $\langle r^3 \rangle$ est négligeable par rapport à $\langle r^2 \rangle^{\frac{3}{2}}$ (valide quand $\delta t \to 0$ pour un modèle de diffusion). La condition $\hat{\sigma}_T\sqrt{\delta t} << 1$ est toujours vérifiée en ordre de grandeur.

Impact de l'asymétrie sur les rendements journaliers : Modèle de sauts

Dynamique avec sauts :

On suppose que le taux sans risque est nul pour alléger les calculs.

$$dS_t = S_{t-}(JdN_t - \lambda \bar{J} dt + \bar{\sigma}_t dW_t)$$

avec :

- $\bar{\sigma}_t \equiv$ processus de volatilité stochastique supposé H_2.
- $N_t \equiv$ processus de comptage indépendant du brownien (poisson d'intensité λ).
- $J \equiv$ amplitude du saut supposée indépendante de N.
- $\bar{J} = \mathbb{E}(J)$

Impact de l'asymétrie sur les rendements journaliers : Modèle de sauts

En appliquant la formule de Doléans-Dade on obtient :

$$S_t = S_0 e^{-(\lambda \bar{J} t + \frac{1}{2}\int_0^t \bar{\sigma}_s^2 ds) + \int_0^t \bar{\sigma}_s dW_s} \prod_{i=1}^{N_t} (1 + J_i)$$

En appliquant la formule de Palm à un point pour la composante saut, le prix du log contrat devient :

$$\begin{aligned} Q^T(0, S_0) &= \mathbb{E}(-2\ln(S_T)) \\ &= -2\ln(S_0) + 2\left(\lambda \bar{J} T + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\int_0^T \bar{\sigma}_t^2 dt\right)\right) - 2\lambda T \mathbb{E}(\ln(1 + J)) \end{aligned}$$

Impact de l'asymétrie sur les rendements journaliers : Modèle de sauts

Les volatilités implicites du log contrat et du swap de variance vérifient alors :

$$\hat{\sigma}_T^2 = \mathbb{E}\left(\frac{1}{T}\int_0^T \bar{\sigma}_t^2 dt\right) - 2\lambda\mathbb{E}(\ln(1+J) - J)$$

$$\hat{\sigma}_{VS,T}^2 = \frac{1}{T}\mathbb{E}\left(\lim_{\delta_t \to 0}\sum_{i=1}^{N-1} \ln^2(\frac{S_{i+1}}{S_i})\right) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{T}\int_0^T \bar{\sigma}_t^2 dt\right) + \lambda\mathbb{E}(\ln^2(1+J))$$

Pour un pas de discrétisation très petit l'intensité des sauts induit une asymétrie qui est à l'origine de la différence entre les deux volatilités implicites et l'on a au troisième ordre :

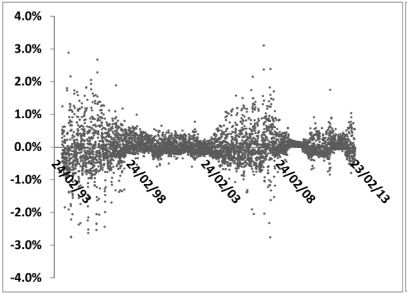
$$\hat{\sigma}_{VS,T}^2 \approx \hat{\sigma}_T^2 - \frac{1}{3}\lambda\mathbb{E}(\mathbb{J}^3) \approx \hat{\sigma}_T^2 - 2\hat{\sigma}_T^3\mathcal{S}_T T$$

Étude de cas sur le S&P 500 : Protocole expérimental

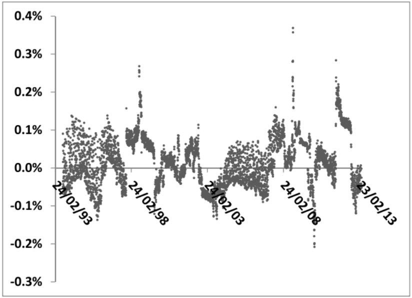
Prenons un portefeuille de réplication delta-hedgé à volatilité constante pour le contrat log et comparons le au payoff d'un VS de maturité 1 an via un facteur de mismatch entre volatilités implicites. Ce dernier est calculé grâce à un suivi du P&L associé à la vente du VS et l'achat du log contrat.

- **Grille de strikes :** $\Delta \ln K \in \{1\%, 5\%\}$
- **Strike minimal et maximal :** $K_{max} = 500\% S_0$ et $K_{min} = 10\% S_0$
- **Ordre de grandeur vol impli log contrat :** $\hat{\sigma}_T = 20\%$
- **Incrément de temps :** $\delta t = \frac{1}{252}$
- **Periode d'observation :** Du 24/02/1993 au 23/02/2013

Étude de cas sur le S&P 500 : Résultats



(a) Evolution du mismatch pour un pas de discrétisation $\Delta \ln K = 5\%$



(b) Evolution du mismatch pour un pas de discrétisation $\Delta \ln K = 1\%$

Figure: Mismatch entre volatilités implicites pour des contrats VS décalés sur une période de 20 ans

Conclusions et points clés

- La réplication par des options vanilles nécessite un choix judicieux du pas de discrétisation.
- La différence entre volatilités implicites du VS et du log contrat évalue le degré d'asymétrie du sous-jacent.
- Dans le cas d'une diffusion avec sauts la différence entre les volatilités implicites dépend aussi de l'intensité des sauts même quand le pas de temps est négligeable.
- Pour le S&P, la volatilité implicite du log contrat donne une approximation de la volatilité implicite du VS avec grande précision (erreur $\approx 0.2\%$ pour $\hat{\sigma} \approx 20\%$)