Détection de matériaux par DDI - Data Driven Identification

Anass El Moubaraki & Romain Dassonneville
Laurent Stainier

Ecole Centrale de Nantes - GeM

26 Mars 2024

Table de matières

Introduction générale

Nouvelles techniques d'imagerie :IRM, ultrasons ⇒ DDCM & DDI

- "Large scale parameter estimation problems in frequency-domain elastodynamics using an error in constitutive equation functional" Biswanath Banerjee , Timothy F. Walsh , Wilkins Aquino , Marc Bonnet [1]
- "A modified error in constitutive equation approach for frequency-domain viscoelasticity imaging using interior data." Manuel I. Diaza , Wilkins Aquinoa,, Marc Bonnetb [2]
- "Identification of material properties and phase distribution of heterogeneous materials through data-driven computational methods : Towards an enhanced constitutive space"; Gabriel Valdés-Alonzo [3]

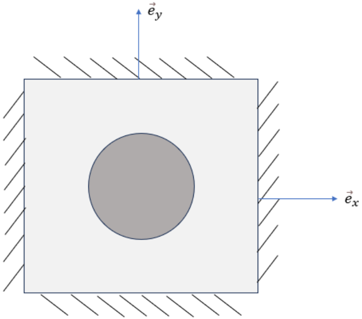


Figure: Problème considéré.

$$\vec{f} = f_z \vec{e}_z$$
$$\vec{u} = u_z(x,y)\vec{e}_z$$

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial u_z}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial u_z}{\partial z} & \frac{1}{2}\frac{\partial u_z}{\partial y} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2 * G * \underline{\underline{\epsilon}}$$

$$\rho\ddot{\vec{u}} = \vec{div}(\underline{\underline{\sigma}}) + \vec{f}$$

selon $\vec{e}_z$:

$$\rho\ddot{u} = \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z$$

$$\boxed{\int_{\Omega} \rho\omega^2 u_z v_z dxdy - \int_{\Omega} G \; \vec{grad}(u_z) \; \vec{grad}(v_z) dxdy + \int_{\Omega_f} f_z v_z dxdy = 0}$$

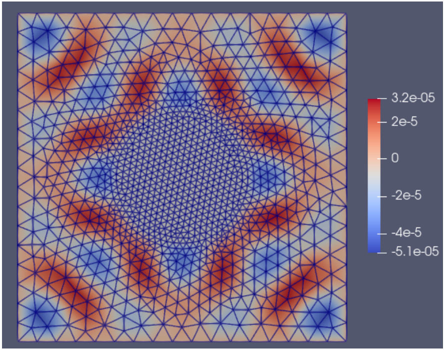


Figure: Champ de déplacement solution [m].

Critère de Shanon : $\omega \leq \dfrac{\pi c}{l_e}$

$c = \sqrt{\dfrac{G}{\rho}}$; l_e longueur de l'échantillon

Cadre mathématique Kmeans (1/2)

Calcul différentiel , Optimisation , Théorie des distributions :

$$\mathbf{min}_{\underline{\sigma},\underline{\sigma}^i,\underline{\epsilon}^i}\mathbf{max}_{\eta}\left[\int_{\Omega} N_s(\underline{\sigma},\underline{\sigma}^i) + N_e(\underline{\epsilon},\underline{\epsilon}^i) + \eta(\mathrm{div}\underline{\sigma} + f - \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2})dV\right]$$

$$N_s(\underline{\sigma},\underline{\sigma}^i) = \frac{1}{2}(\underline{\sigma} - \underline{\sigma}^i)\cdot\frac{1}{G_{\mathrm{met}}}\cdot(\underline{\sigma} - \underline{\sigma}^i)$$

$$N_e(\underline{\epsilon},\underline{\epsilon}^i) = \frac{1}{2}(\underline{\epsilon} - \underline{\epsilon}^i)\cdot G_{\mathrm{met}}\cdot(\underline{\epsilon} - \underline{\epsilon}^i)$$

- $\underline{\epsilon}$: champ de déformations mécaniques calculé en tout point du maillage ($\underline{\epsilon} = \nabla u$)
- $(\underline{\epsilon}^i, \underline{\sigma}^i)$: centres de clusters.
- G_{met} : métrique du clusturing Kmeans.
- η : Multiplicateur de Lagrange

Point selle du Lagrangien et équations de Fermat :

$$D\mathcal{L}[\delta\underline{\sigma}] = \int_\Omega \eta \left[\frac{1}{G_{\text{met}}} \cdot (\underline{\sigma} - \underline{\sigma}^i) + \underline{\text{grad}}\eta \right] \delta\underline{\sigma} dV = 0; \forall \delta\underline{\sigma}$$

$$\frac{1}{G_{\text{met}}} \cdot (\underline{\sigma}^e - \underline{\sigma}^{i,e}) + \underline{\text{grad}}\eta = \underline{0}$$

$$D\mathcal{L}[\delta\eta] = \int_\Omega \left[(\text{div}\underline{\sigma} + f - \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2})\delta\eta \right] dV = 0 \ ; \ \forall \delta\eta$$

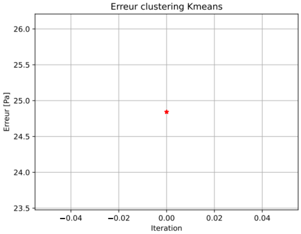
$$\int_\Omega \left[\underline{\text{grad}}\delta\eta \cdot G_{\text{met}} \cdot \underline{\text{grad}}\eta - \underline{\text{grad}}\delta\eta \cdot \underline{\sigma}^{i,e} + \hat{f}\delta\eta \right] dV = 0 \ ; \ \forall \delta\eta$$

Algorithm 1 Schéma algorithmique pour le calcul du champ de contrainte mécanique

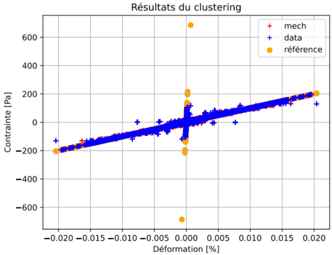
Require: $\underline{\epsilon}$, N_c
$\underline{\sigma}_0^i$ et Initialisation des contraintes mécaniques à zéro.
for $k = 1, ..N_c$ **do**
Clustering sur nos données normalisées ($\underline{\epsilon}$, $\underline{\sigma}_k$)
Dénormalisation des données après clustering
Calcul du multiplicateur de Lagrange $\underline{\eta}_k$ à partir de la forme faible
$\underline{\sigma}_{k+1} = \underline{\sigma}_k^i + G_{\text{met}} \cdot \underline{\text{grad}}\eta_k$ {Mise à jour du champ de contraintes mécaniques}
end for
Ensure: $\underline{\epsilon}, \underline{\sigma}_k, \underline{\sigma}_k^i, \underline{\epsilon}_k^i$

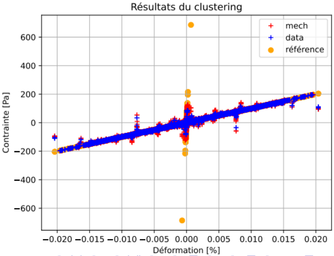
Résultats numériques : Vérification de la convergence

(a) $G_{\text{met}} = 10^5$ MPa



(b) $G_{\text{met}} = 10^9$ MPa

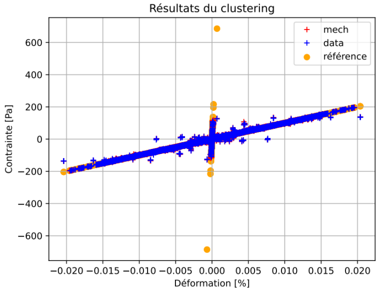




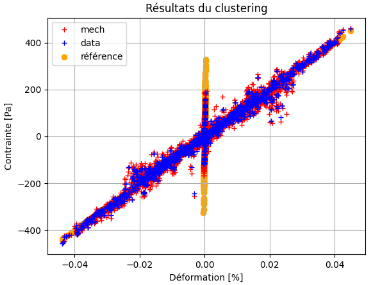
Résultats numériques : Allures des estimées

ri [m]	G1 [GPa]	G2 [GPa]	G_{met} [GPa]	f [N]	ω [rad/s]	ρ [kg/m^3]	N_c
0, 2	10^8	10^6	10^7	10^3	10^3	10^3	10

Effet du maillage



(a) Maillage uniforme.



(b) Maillage gmsh.

Conclusion partielle

- Pas de comportement présupposé
- Maillage : représentativité des inclusions
- Métrique du clusturing
- Localisation des inclusions pas automatique
- C des inclusions pas automatique

Méthode Kplane : Principe

- Un jeu de données qui se structure dans une union d'hyperplans (droites dans $\mathbb{R}^2$).
- Nous cherchons les coefficients qui décrivent ces hyperplans en utilisant une approche itérative
- La loi de Hooke assure que les pentes des droites sont exactement les modules de cisaillement des différents matériaux

Algorithm 2 Schéma algorithmique pour le calcul du champ de contrainte mécanique

Require: $\underline{\epsilon}$, $\underline{\sigma}_0$, $(C_1)_0$, $(C_2)_0$

for $k = 1, ..N$ **do**

$\underline{\epsilon}_k^{i,e} = \frac{(C)_k \underline{\epsilon}^e + \underline{\sigma}_k^e}{2 \times (C)_k}$

$\underline{\sigma}_k^{i,e} = \frac{(C)_k \underline{\epsilon}^e + \underline{\sigma}_k^e}{2}$

Nous calculons le multiplicateur de Lagrange $\underline{\eta}_k$

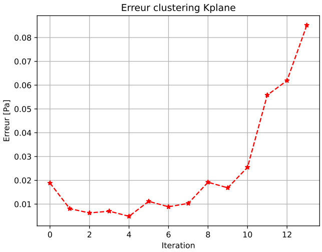
$\underline{\sigma}_{k+1} = \underline{\sigma}_k^i + C \cdot \underline{\text{grad}} \eta_k$

$$(C_1)_{k+1} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{e\ tq\ \underline{\sigma}^{i,e} = (C_1)_k \times \underline{\epsilon}^{i,e}} \underline{\sigma}_{e,k+1}^2}{\sum\limits_{e\ tq\ \underline{\sigma}^{i,e} = (C_1)_k \times \underline{\epsilon}^{i,e}} \underline{\epsilon}_e^2}} \text{ , } (C_2)_{k+1} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{e\ tq\ \underline{\sigma}^{i,e} = (C_2)_k \times \underline{\epsilon}^{i,e}} \underline{\sigma}_{e,k+1}^2}{\sum\limits_{e\ tq\ \underline{\sigma}^{i,e} = (C_2)_k \times \underline{\epsilon}^{i,e}} \underline{\epsilon}_e^2}}$$

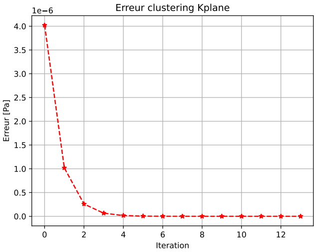
end for

Ensure: $\underline{\epsilon}, \underline{\sigma}_k, \underline{\sigma}_k^i, \underline{\epsilon}_k^i, \underline{\underline{\mathbf{C}}}_k$

Résultats numériques : Vérification de la convergence



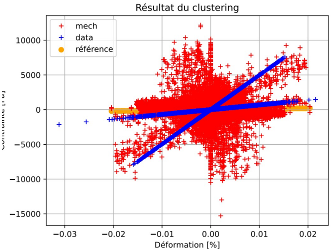
(a) Évolution de l'erreur en fonction du nombre d'iterations avec une initialisation de C_1 et C_2 à 0.1MPA et 10 MPA



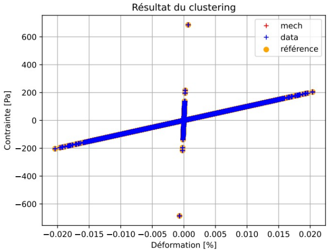
(b) Évolution de l'erreur en fonction du nombre d'itérations avec une initialisation de C_1 et C_2 à 1 MPA et 100 MPA

Résultats numériques : Allures des estimées

Effet de l'initialisation:



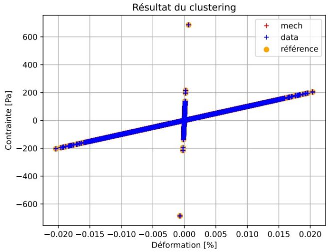
(a) Résultats de l'estimation avec une initialisation de C_1 et C_2 à 0.1MPA et 10 MPA



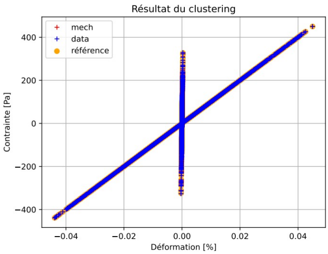
(b) Résultats de l'estimation avec une initialisation de C_1 et C_2 à 1MPA et 100 MPA

Résultats numériques : Allures des estimées

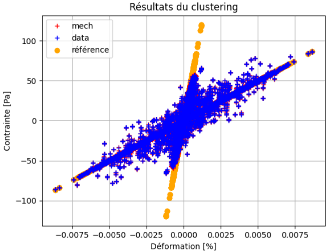
Effet du maillage:



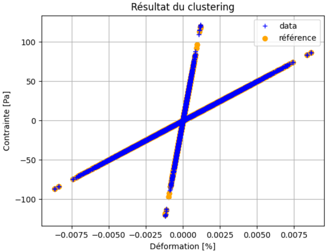
(a) Résultats de l'estimation avec une initialisation de C_1 et C_2 à 1MPA et 100 MPA et en utilisant un maillage régulier



(b) Résultats de l'estimation avec une initialisation de C_1 et C_2 à 1MPA et 100 MPA et en utilisant un maillage GMSH adapté



(a) Résultats de l'estimation avec la méthode Kmeans en utilisant trois inclusions



(b) Résultats de l'estimation avec la méthode Kplane en utilisant trois inclusions

Conclusion finale

- Génération de la carte de déplacement.
- Détection des variations de gradient du champ de déplacement et application d'un maillage GMSH adapté.
- Application de la méthode Kmeans pour clustering
- Initialisation du Kplane à partir des résultats obtenus dans le Kmeans et débruitage.

Perspectives

- Se baser sur des ordres de grandeur du tissu humain pour initialiser le Kplane.
- Écrire un algorithme général qui pourra prendre en compte une liste de matériaux.
- Introduire de la visco-élasticité pour modéliser fidèlement la structure des tissus humains