Использование библиотек numpy и scipy. Теория вероятностей.

In [88]:
```
import numpy as np
import scipy.stats as sps
import ipywidgets as widgets
import matplotlib.pyplot as plt

%matplotlib inline
```

1)Исследование свойств плотности.

Рассмотрим распределения:

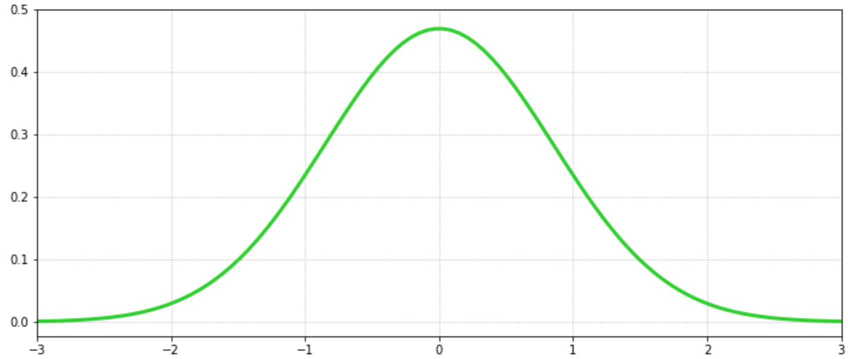
- Нормальное
- Равномерное
- Экспоненциальное
- Гамма-распределение
- Бета-распределение

Построим график плотности. Сгенерируем наборы случайных величин из каждого распределения и построим по ним гистограмму.

In [89]:
```
# Построение графика плотности непрерывного распределения
def show_pdf(pdf, xmin, xmax, ymax, grid_size=100, **kwargs):
    """
    pdf -- плотность
    xmin, xmax -- границы графика по оси x
    ymax -- граница графика по оси y
    grid_size -- размер сетки, по которой рисуется график
    kwargs -- параметры плотности
    """

    grid = np.linspace(xmin, xmax, grid_size)

    plt.figure(figsize=(12, 5))
    plt.plot(grid, pdf(grid, **kwargs), lw=3, color = 'limegreen')
    plt.grid(ls=':')
    plt.xlim((xmin, xmax))
    plt.ylim((None, ymax))
    plt.show()
```

Нормальное распределение.

In [90]:
```
show_pdf(sps.norm.pdf, -3, 3, 0.5, scale=0.85)
```

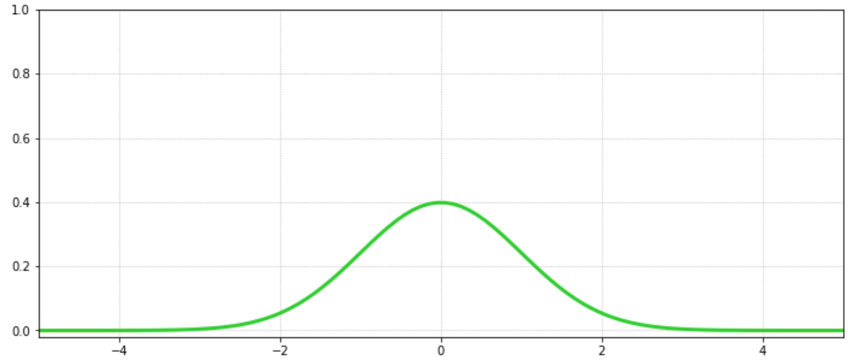


In [91]:
```
# Создание виджета.
ip = widgets.interactive(show_pdf,
                         pdf=widgets.fixed(sps.norm.pdf),
                         grid_size=widgets.IntSlider(min=25, max=300, step=25, value=100),
                         xmin=widgets.FloatSlider(min=-10, max=0, step=0.1, value=-5),
                         xmax=widgets.FloatSlider(min=0, max=10, step=0.1, value=5),
                         ymax=widgets.FloatSlider(min=0, max=2, step=0.1, value=1),
                         loc=widgets.FloatSlider(min=-10, max=10, step=0.1, value=0),
                         scale=widgets.FloatSlider(min=0.01, max=2, step=0.01, value=1));

# отображаем слайдеры группами
display(widgets.HBox(ip.children[:2]))
display(widgets.HBox(ip.children[2:4]))
display(widgets.HBox(ip.children[4:6]))
# отображаем вывод функции
display(ip.children[-1])

ip.update()  # чтобы функция запустилась до первого изменения слайдеров
```

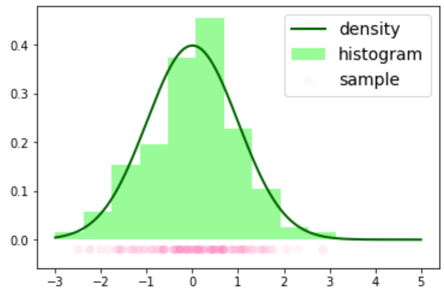
xmin -5.00 xmax 5.00

ymax 1.00 grid_size 100

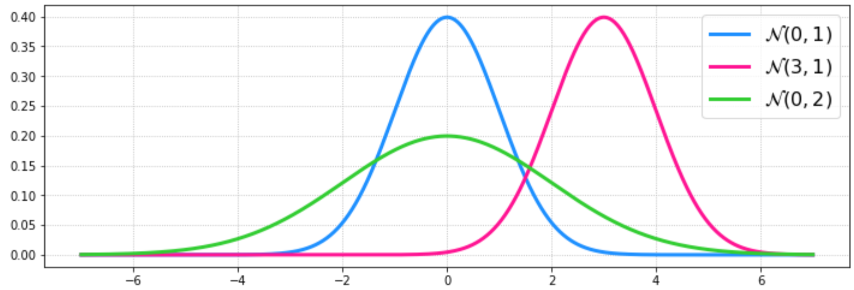
loc 0.00 scale 1.00



In [92]:
```
grid = np.linspace(-3, 5, 1000)
sample = sps.norm.rvs(size=200)
plt.figure()
plt.scatter(sample, np.zeros(200) - 0.02, alpha=0.05, color = 'hotpink', label='sample')
plt.hist(sample, range=(-3, 5), bins=13, normed=True,  color = 'palegreen', label='histogram')
plt.plot(grid, sps.norm.pdf(grid), color='darkgreen', lw=2, label='density')
plt.legend(fontsize=14, loc=1)
plt.show()
```



In [93]:
```
grid = np.linspace(-7, 7, 1000)  # сетка для построения графика
a_list = [0, 3, 0]  # набор значений параметра a
sigma_list = [1, 1, 2]  # набор значений параметра sigma

plt.figure(figsize=(12, 4))
for i, (a, sigma, color) in enumerate(zip(a_list, sigma_list, ['dodgerblue', 'deeppink', 'limegreen'])):
    plt.plot(grid, sps.norm(a, sigma).pdf(grid), color=color, lw=3,
             label='$\mathcal{N}' + '({}, {})$'.format(a, sigma))
plt.legend(fontsize=16)
plt.grid(ls=':')
plt.show()
```

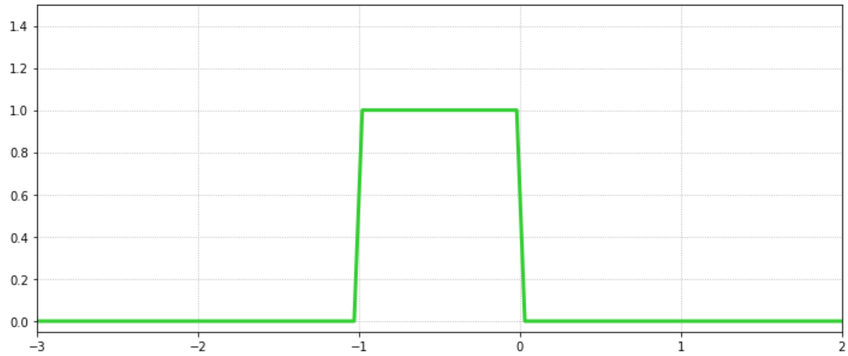


Вывод: Для нормального распределения:

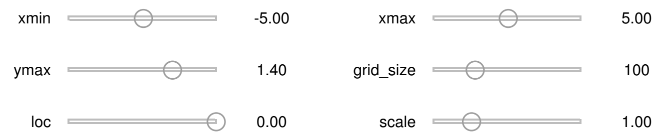
- параметр a отвечает за <сдвиг> (вдоль оси X);
- параметр σ отвечает за <масштаб> (сжатие/растяжение по оси Y).

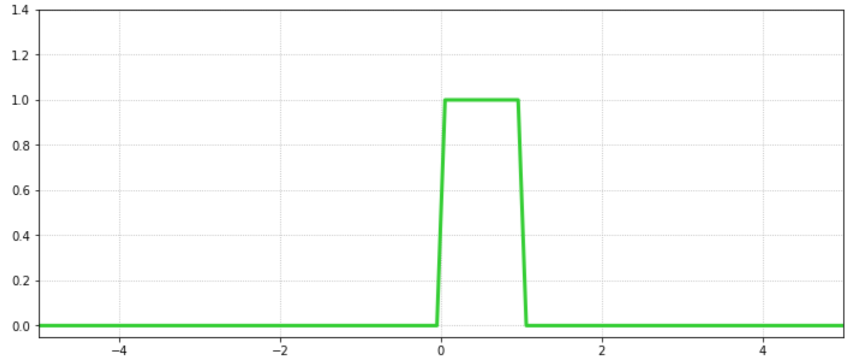
Равномерное распределение.

In [94]:
```
show_pdf(sps.uniform(-1, 1).pdf, -3, 2, 1.5)
```

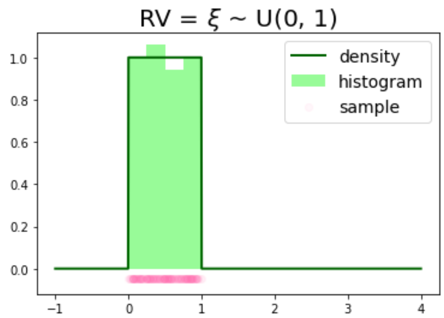


In [95]:
```
# создание виджета
ip = widgets.interactive(show_pdf,
                         pdf=widgets.fixed(sps.uniform.pdf),
                         grid_size=widgets.IntSlider(min=25, max=300, step=25, value=100),
                         xmin=widgets.FloatSlider(min=-10, max=0, step=0.1, value=-5),
                         xmax=widgets.FloatSlider(min=0, max=10, step=0.1, value=5),
                         ymax=widgets.FloatSlider(min=0, max=2, step=0.1, value=1.4),
                         loc=widgets.FloatSlider(min=-4, max=0, step=0.1, value=0),
                         scale=widgets.FloatSlider(min=0.01, max=4, step=0.01, value=1));

# отображаем слайдеры группами
display(widgets.HBox(ip.children[:2]))
display(widgets.HBox(ip.children[2:4]))
display(widgets.HBox(ip.children[4:6]))
# отображаем вывод функции
display(ip.children[-1])

ip.update()  # чтобы функция запустилась до первого изменения слайдеров
```

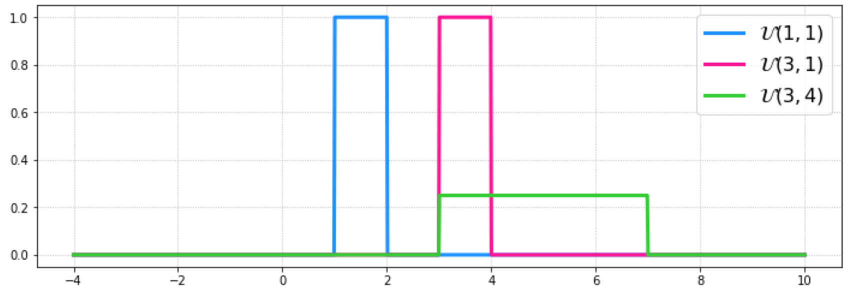




In [96]:
```
grid = np.linspace(-1, 4, 1000)  # сетка для построения графика
sample = sps.uniform.rvs(size=200)
plt.figure()
plt.scatter(sample, np.zeros(200) - 0.05, alpha=0.05, color = 'hotpink', label='sample')
plt.hist(sample, range=(-1, 4), bins=20, normed=True, label='histogram', color='palegreen')
plt.plot(grid, sps.uniform.pdf(grid), color='darkgreen', lw=2, label='density')
plt.title(r'RV = $\xi$ ~ U(0, 1)', fontsize=20)
plt.legend(fontsize=14, loc=1)
plt.show()
```



In [97]:
```
grid = np.linspace(-4, 10, 1000)  # сетка для построения графика
a_list = [1, 3, 3]  # набор значений параметра a
b_list = [1, 1, 4]  # набор значений параметра b

plt.figure(figsize=(12, 4))
for i, (a, b, color) in enumerate(zip(a_list, b_list, ['dodgerblue', 'deeppink', 'limegreen'])):
    plt.plot(grid, sps.uniform(a, b).pdf(grid), color=color, lw=3,
             label='$\mathcal{U}' + '({}, {})$'.format(a, b))
plt.legend(fontsize=16)
plt.grid(ls=':')
plt.show()
```

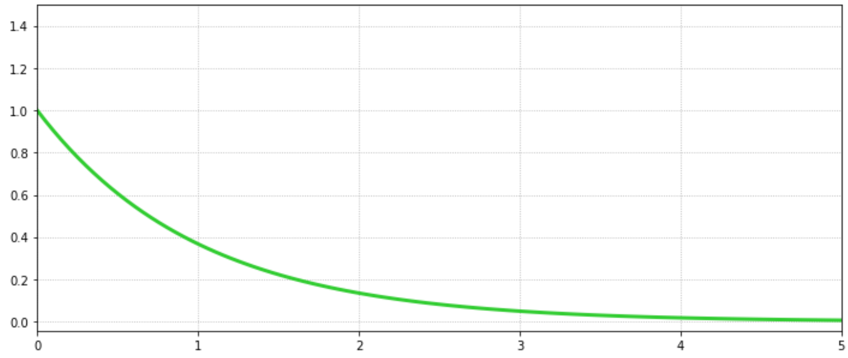


Вывод: Для равномерного распределения:

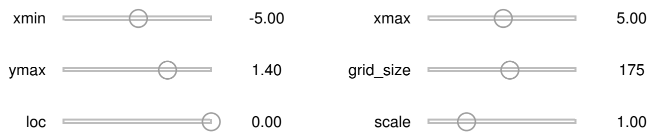
- параметр a отвечает за <сдвиг> (вдоль оси X);
- параметр b отвечает за <масштаб> (сжатие/растяжение по оси Y).

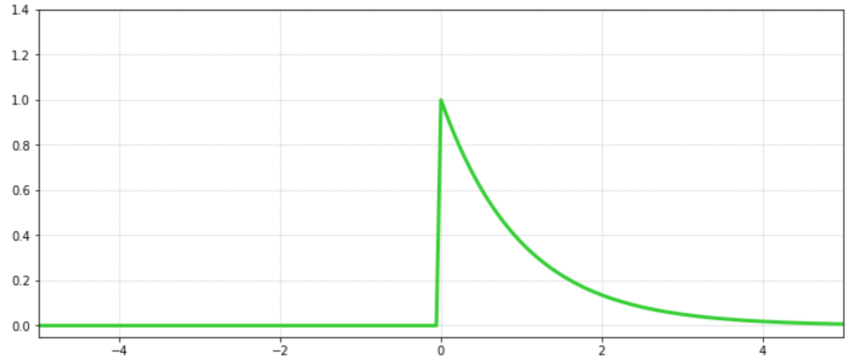
Экспоненциальное распределение

In [98]:
```
show_pdf(sps.expon(scale=1).pdf, 0, 5, 1.5)
```

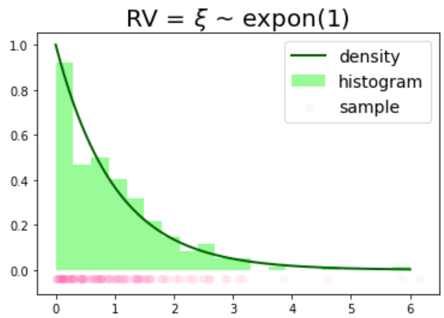


In [99]:
```
# создать виджет, но не отображать его
ip = widgets.interactive(show_pdf,
                         pdf=widgets.fixed(sps.expon.pdf),
                         grid_size=widgets.IntSlider(min=25, max=300, step=25, value=175),
                         xmin=widgets.FloatSlider(min=-10, max=0, step=0.1, value=-5),
                         xmax=widgets.FloatSlider(min=0, max=10, step=0.1, value=5),
                         ymax=widgets.FloatSlider(min=0, max=2, step=0.1, value=1.4),
                         loc=widgets.FloatSlider(min=-4, max=0, step=0.1, value=0),
                         scale=widgets.FloatSlider(min=0.01, max=4, step=0.01, value=1));

# отображаем слайдеры группами
display(widgets.HBox(ip.children[:2]))
display(widgets.HBox(ip.children[2:4]))
display(widgets.HBox(ip.children[4:6]))
# отображаем вывод функции
display(ip.children[-1])

ip.update()  # чтобы функция запустилась до первого изменения слайдеров
```

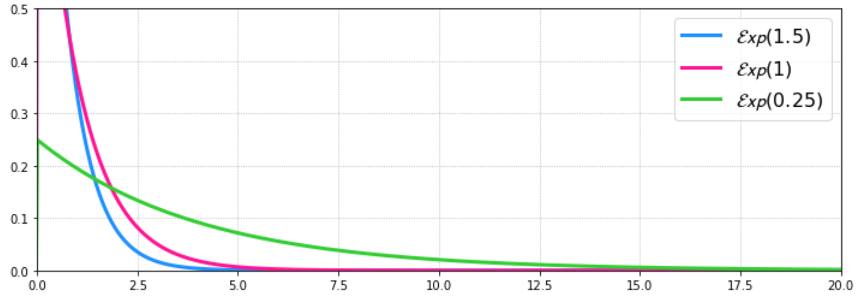




In [100]:
```
grid = np.linspace(0, 6, 1000)
sample = sps.expon.rvs(size=200)
plt.figure()
plt.scatter(sample, np.zeros(200) - 0.04, alpha=0.05, color = 'hotpink', label='sample')
plt.hist(sample, range=(0, 6), bins=20, normed=True, label='histogram', color='palegreen')
plt.plot(grid, sps.expon.pdf(grid), color='darkgreen', lw=2, label='density')
plt.title(r'RV = $\xi$ ~ expon(1)', fontsize=20)
plt.legend(fontsize=14, loc=1)
plt.show()
```



In [101]:
```
grid = np.linspace(-2, 20, 1000)  # сетка для построения графика
lambda_list = [1.5, 1, 0.25]  # набор значений параметра lambda

plt.figure(figsize=(12, 4))
for i, (l, color) in enumerate(zip(lambda_list, ['dodgerblue', 'deeppink', 'limegreen'])):
    plt.plot(grid, sps.expon(scale=1/l).pdf(grid), color=color, lw=3,
             label='$\mathcal{Exp}' + '({})$'.format(l))
plt.legend(fontsize=16)
plt.ylim((0, 0.5))
plt.xlim((0, 20))
plt.grid(ls=':')
plt.show()
```

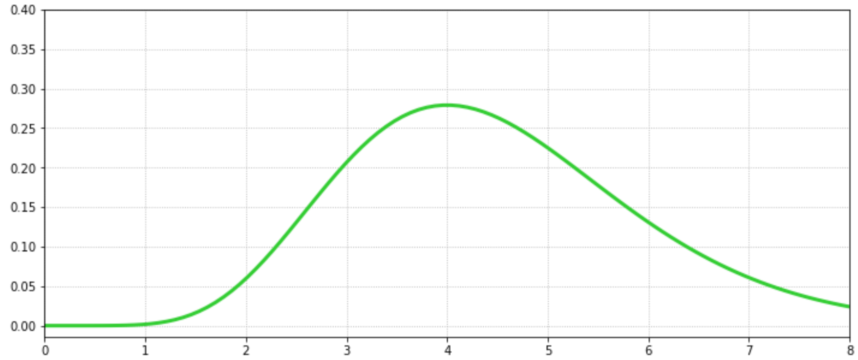


Вывод: Для экспоненциального распределения:

- параметр λ отвечает за <масштаб> (чем меньше параметр, тем больше масштаб, то есть больше растяжение по оси Y).

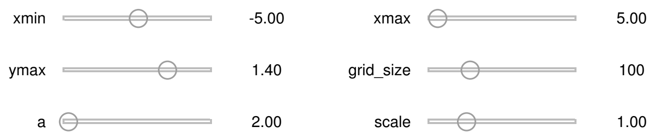
Гамма распределение

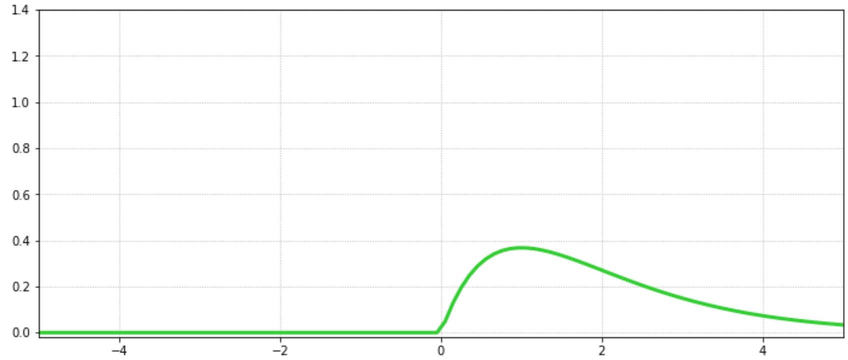
In [102]:
```
show_pdf(sps.gamma(a=9, scale=0.5).pdf, 0, 8, 0.4)
```



In [103]:

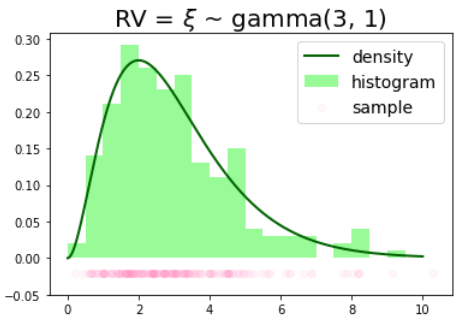
```
# создание виджета
ip = widgets.interactive(show_pdf,
                         pdf=widgets.fixed(sps.gamma.pdf),
                         grid_size=widgets.IntSlider(min=25, max=300, step=25, value=100),
                         xmin=widgets.FloatSlider(min=-10, max=0, step=0.1, value=-5),
                         xmax=widgets.FloatSlider(min=0, max=100, step=0.1, value=5),
                         ymax=widgets.FloatSlider(min=0, max=2, step=0.1, value=1.4),
                         a = widgets.FloatSlider(min=0, max=100, step=0.1, value=2),
                         scale=widgets.FloatSlider(min=0.01, max=4, step=0.01, value=1));

# отображаем слайдеры группами
display(widgets.HBox(ip.children[:2]))
display(widgets.HBox(ip.children[2:4]))
display(widgets.HBox(ip.children[4:6]))
# отображаем вывод функции
display(ip.children[-1])

ip.update()  # чтобы функция запустилась до первого изменения слайдеров
```



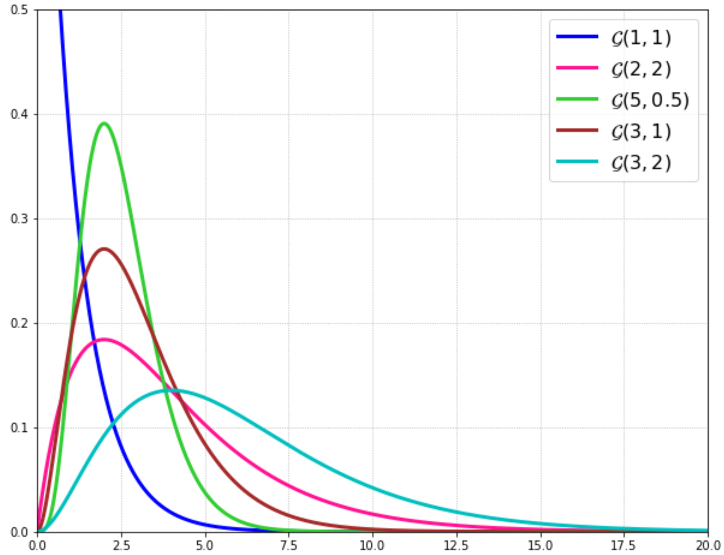


In [104]:

```
grid = np.linspace(0, 10, 1000)
sample = sps.gamma.rvs(a=3, size=200)
plt.figure()
plt.scatter(sample, np.zeros(200) - 0.02, alpha=0.05, color = 'hotpink', label='sample')
plt.hist(sample, range=(0, 10), bins=20, normed=True, label='histogram', color='palegreen')
plt.plot(grid, sps.gamma.pdf(grid, a=3), color='darkgreen', lw=2, label='density')
plt.title(r'RV = $\xi$ ~ gamma(3, 1)', fontsize=20)
plt.legend(fontsize=14, loc=1)
plt.show()
```



In [105]:
```
grid = np.linspace(0, 20, 1000)  # сетка для построения графика
alpha_list = [1, 2, 5, 3, 3]  # набор значений параметра a
beta_list = [1, 2, 0.5, 1, 2]  # набор значений параметра b

plt.figure(figsize=(10, 8))
for i, (alpha, beta, color) in enumerate(zip(alpha_list, beta_list,
                                             ['b', 'deeppink', 'limegreen', 'brown', 'c'])):
    plt.plot(grid, sps.gamma(a=alpha, scale=beta).pdf(grid), color=color, lw=3,
             label='$\mathcal{G}' + '({}, {})$'.format(alpha, beta))
plt.legend(fontsize=16)
plt.grid(ls=':')
plt.ylim((0, 0.5))
plt.xlim((0, 20))
plt.show()
```

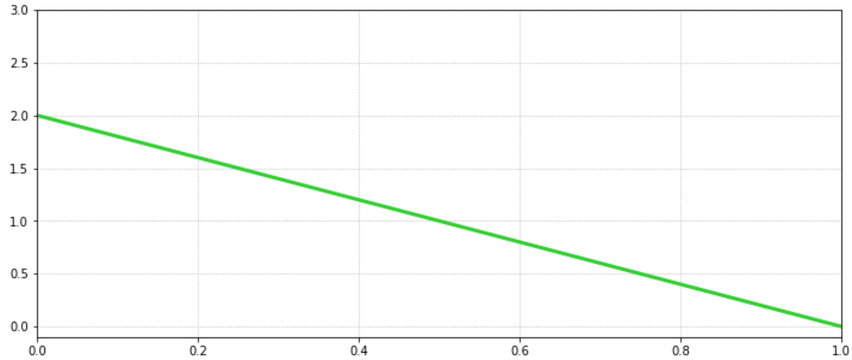


Вывод: Для гамма-распределения:

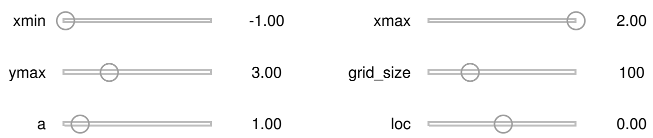
- параметр α отвечает за <смещение> (то есть за то на сколько график перекосится);
- параметр β отвечает за <масштаб> (сжатие/растяжение вдоль оси Y).

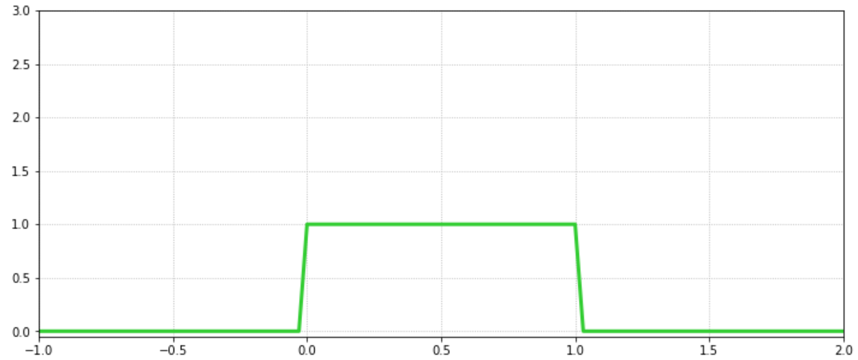
Бета распределение

In [106]:
```
show_pdf(sps.beta(1, 2).pdf, 0, 1, 3)
```

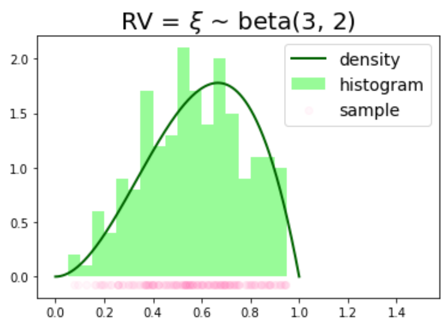


In [107]:
```
# создание виджета
ip = widgets.interactive(show_pdf,
                         pdf=widgets.fixed(sps.beta.pdf),
                         grid_size=widgets.IntSlider(min=25, max=300, step=25, value=100),
                         xmin=widgets.FloatSlider(min=-1, max=0, step=0.1, value=-5),
                         xmax=widgets.FloatSlider(min=0, max=2, step=0.1, value=5),
                         ymax=widgets.FloatSlider(min=0, max=10, step=0.1, value=3),
                         a = widgets.FloatSlider(min=0, max=10, step=0.1, value=1),
                         b = widgets.FloatSlider(min=0, max=10, step=0.1, value=1),
                         loc=widgets.FloatSlider(min=-4, max=4, step=0.1, value=0),
                         scale=widgets.FloatSlider(min=0.01, max=4, step=0.01, value=1));

# отображаем слайдеры группами
display(widgets.HBox(ip.children[:2]))
display(widgets.HBox(ip.children[2:4]))
display(widgets.HBox(ip.children[4:6]))
# отображаем вывод функции
display(ip.children[-1])

ip.update()  # чтобы функция запустилась до первого изменения слайдеров
```

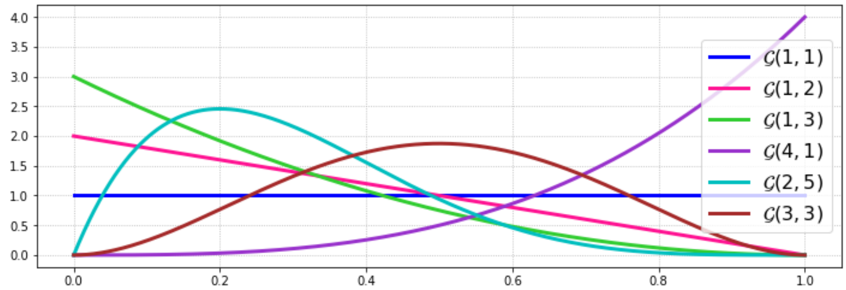




In [108]:
```
grid = np.linspace(0, 1, 1000)
sample = sps.beta.rvs(a=3, b=2, size=200)
plt.figure()
plt.scatter(sample, np.zeros(200) - 0.07, alpha=0.05, color = 'hotpink', label='sample')
plt.hist(sample, range=(0, 1.5), bins=30, normed=True, label='histogram', color = 'palegreen')
plt.plot(grid, sps.beta.pdf(grid, a=3, b=2), color='darkgreen', lw=2, label='density')
plt.title(r'RV = $\xi$ ~ beta(3, 2)', fontsize=20)
plt.legend(fontsize=14, loc=1)

plt.show()
```



In [109]:
```
grid = np.linspace(0, 1, 1000)  # сетка для построения графика
alpha_list = [1, 1, 1, 4, 2, 3]  # набор значений параметра a
beta_list = [1, 2, 3, 1, 5, 3]  # набор значений параметра b

plt.figure(figsize=(12, 4))
for i, (alpha, beta, color) in enumerate(zip(alpha_list, beta_list,
                                             ['b', 'deeppink', 'limegreen', 'darkorchid', 'c', 'brown'])):
    plt.plot(grid, sps.beta(a=alpha, b=beta).pdf(grid), color=color, lw=3,
             label='$\mathcal{G}' + '({}, {})$'.format(alpha, beta))
plt.legend(fontsize=16)
plt.grid(ls=':')
plt.show()
```



Вывод: Для бетта-распределения:

- если параметр α < 1 и параметр β < 1, то график вогнутый
- если один из параметров α и β равен 1, а другой лежит в промежутке от 1 до 2, то график выпуклый
- если один из параметров равен 1, а другой больше 2, то график вогнутый
- если один из параметров равен 1, а другой 2, то график - прямая

Вывод по гистограммам:

для каждого из построенных распределений гистограмма выборки из 200 случайных величин примерно совпадает с областью под графиком плотности соответствующего распределения. Это подтверждает интуитивный смысл определения плотности распределения - чем чаще случайная величина попадает в окрестность некоторой точки, тем выше соответствующий столбец гистограммы и, очевидно, плотность распределения в окрестности данной точки также выше.

2) Положим имеется симметричная монета. Напишем функции генерации независимых случайных величин из некоторых распределений.

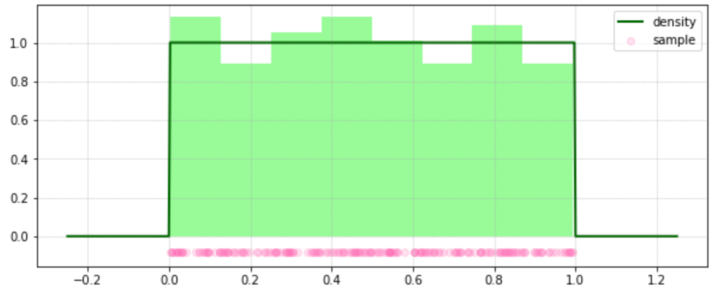
Напишем функцию генерации случайных величин из равномерного распределения на отрезке $[0, 1]$.

Для этого запишем случайную величину $\xi \sim U[0, 1]$ в двоичной системе системе счисления $\xi = 0, \xi_1\xi_2\xi_3\ldots$. Тогда $\xi_i \sim Bern(1/2)$ и независимы в совокупности. Приближение: вместо генерации бесконечного количества ξ_i мы полагаем $\xi = 0, \xi_1\xi_2\xi_3\ldots\xi_n$.

In [110]:
```
coin = sps.bernoulli(0.5).rvs  # симметричная монета
# coin(size=10) --- реализация 10 бросков монеты

def uniform(size=1, precision=30):
    return (coin(np.hstack((size, precision)))/(2.**(np.arange(precision)+1))).sum(axis=np.array(size).size)
```

Для $U[0, 1]$ сгенерируем 200 независимых случайных величин, построим график плотности на отрезке $[-0.25, 1.25]$, а также гистограмму по сгенерированным случайным величинам.

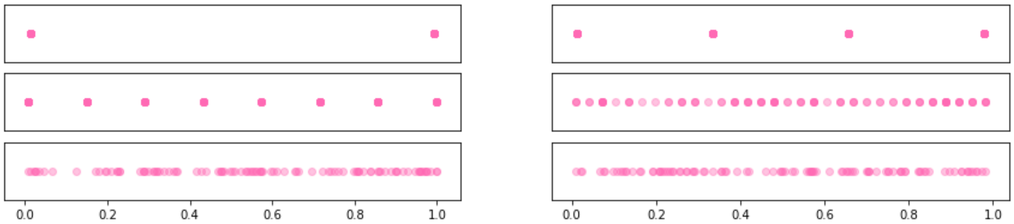
In [111]:
```
size = 200
grid = np.linspace(-0.25, 1.25, 500)
sample = uniform(size, precision=50)

plt.figure(figsize=(10, 4))
# отображаем значения случайных величин полупрозрачными точками
plt.scatter(sample, np.zeros(size) - 0.08, alpha=0.2, color = 'hotpink', label='sample')
# по точкам строим нормированную полупрозрачную гистограмму
plt.hist(sample, bins=8, normed=True, color='palegreen')
# рисуем график плотности
plt.plot(grid, sps.uniform.pdf(grid), color='darkgreen', lw=2, label='density')
plt.legend()
plt.grid(ls=':')
plt.show()
```



Реализованная функция uniform работает правильно, так как построенная гистограмма похожа на область под графиком плотности равномерного распределения.

Исследуем, как меняются значения случайных величин в зависимости от precision.

In [112]:
```
size = 100

plt.figure(figsize=(15, 3))
for i, precision in enumerate([1, 2, 3, 5, 10, 30]):
    plt.subplot(3, 2, i + 1)
    plt.scatter(uniform(size, precision),
                np.zeros(size), alpha=0.4, color = 'hotpink')
    plt.yticks([])
    if i < 4: plt.xticks([])
plt.show()
```



Вывод:

с увеличением точности генерации равномерно распределенной случайной величины увеличивается диапазон принимаемых ею значений.

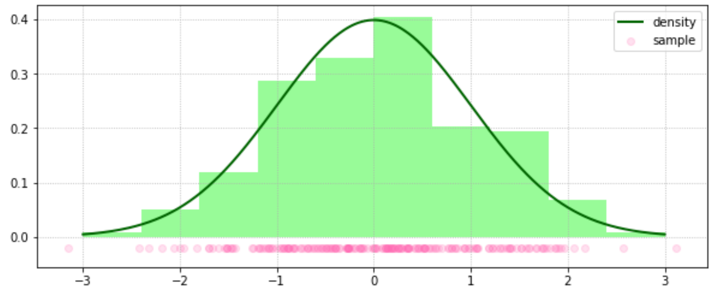
- precision = 1: для генерации $\xi \sim \mathcal{U}(0, 1)$ задействовано одно подбрасывание монеты, поэтому ξ может принимать всего два значения - на графике это проиллюстрировано $\leq min(2, size)$ точками.
- precision = 2: для генерации $\xi \sim \mathcal{U}(0, 1)$ задействовано два подбрасывания монеты, поэтому ξ может принимать четыре значения - на графике это проиллюстрировано $\leq min(4, size)$ точками.
- precision = 3: для генерации $\xi \sim \mathcal{U}(0, 1)$ задействовано три подбрасывания монеты, поэтому ξ может принимать восемь значений - на графике это проиллюстрировано $\leq min(8, size)$ точками.
- precision = 5: для генерации $\xi \sim \mathcal{U}(0, 1)$ задействовано пять подбрасываний монеты, поэтому ξ может принимать 32 значения - на графике это проиллюстрировано $\leq min(32, size)$ точками.
- precision = 10: для генерации $\xi \sim \mathcal{U}(0, 1)$ задействовано десять подбрасывания монеты, поэтому ξ может принимать 1024 значения - на графике это проиллюстрировано $\leq min(1024, size)$ точками.
- precision = 30: для генерации $\xi \sim \mathcal{U}(0, 1)$ задействовано тридцать подбрасываний монеты, поэтому ξ может принимать 2^{30} значений - на графике это проиллюстрировано $\leq min(2^{30}, size)$ точками.

Напишем функцию генерации случайных величин в количестве `size` штук из распределения $\mathcal{N}(loc, scale^2)$ с помощью преобразования Бокса-Мюллера.

In [113]:
```
def normal(size=1, loc=0, scale=1, precision=30):

    #если размерность size равна 1, то для удобства приводим size к tuple
    if type(size) != tuple:
        s = (size, )
    else:
        s = size

    #генерируем равномерно распределенные случайные величины
    xi = uniform(int((np.prod(s)-np.prod(s)%2)/2), precision)
    teta = uniform(int((np.prod(s)-np.prod(s)%2)/2), precision)

    #защищищаемся от случая, когда teta = 0, потому что в этом случае далее берется ln(0)
    teta = teta + 0.5**(precision+5)

    #вычисляем тригонометрические множители из преобразования Бокса-Мюллера
    factor_cos = np.cos(2*np.pi*xi)
    factor_sin = np.sin(2*np.pi*xi)

    #вычисляем общий множитель из преобразования Бокса-Мюллера
    factor_sqrt = np.sqrt(-2*np.log(teta))

    #вычисляем значения нормально распределенных случайных величин
    part1 = factor_cos*factor_sqrt
    part2 = factor_sin*factor_sqrt

    #рассматриваем случай, когда от функции требуют нечетную выборку
    if np.prod(s)%2 == 1:
        #отдельно вычисляем еще одно значение случайной величины
        xi = uniform(1, precision)
        teta = uniform(1, precision)
        add = np.cos(2*np.pi*xi)*np.sqrt(-2*np.log(teta))
        #объединение полученных выборок
        result = np.hstack((part1, part2, add))
        return result.reshape(s)
    else:
        #объединение полученных выборок
        result = np.hstack((part1, part2))
        return result.reshape(s)
```

Для $\mathcal{N}(0, 1)$ сгенерируем 200 независимых случайных величин, построим график плотности на отрезке $[-3, 3]$, а также гистограмму по сгенерированным случайным величинам.

In [114]:
```
size = 200
sample = normal(size)
grid = np.linspace(-3, 3, 500)

plt.figure(figsize=(10, 4))
# отображаем значения случайных величин полупрозрачными точками
plt.scatter(sample, np.zeros(size) - 0.02, alpha=0.2, color = 'hotpink', label='sample')
# по точкам строим нормированную полупрозрачную гистограмму
plt.hist(sample, bins=10, range = (-3, 3), normed=True, color='palegreen')
# рисуем график плотности
plt.plot(grid, sps.norm.pdf(grid), color='darkgreen', lw=2, label='density')
plt.legend()
plt.grid(ls=':')
plt.show()
```



Вывод:

Имея возможность сгенерировать равномерно распределенную случайную величину, можно сгенерировать нормально распределенную случайную величину при помощи преобразований Бокса-Мюллера. Реализованная функция normal работает правильно, так как построенная гистограмма похожа на область под графиком плотности нормального распределения.

Напишем функцию генерации выборки многомерного нормального распределения с заданным вектором средних `mean` и матрицей ковариаций `cov_matrix`. Используем теорему об эквивалентных определениях гауссовского вектора.

Исследуем, как меняются значения случайных величин в зависимости от precision.

In [115]:
```
from scipy.linalg import eigh
```

In [116]:
```
def gauss(mean, cov_matrix, size=1, precision=30):
    # Преобразование типов
    mean = np.array(mean)
    cov_matrix = np.array(cov_matrix)

    # Проверка на корректность входа
    assert mean.ndim == 1 and cov_matrix.ndim == 2
    assert mean.shape[0] == cov_matrix.shape[0]
    assert cov_matrix.shape[0] == cov_matrix.shape[1]

    specter = eigh(cov_matrix)[0]
    D = specter*np.array([[1, 0], [0, 1]])
    D = np.sqrt(D)
    B = np.matmul(eigh(cov_matrix)[1], D)
    normal_rv = normal(size*mean.size, precision).reshape(mean.size, size)
    F = np.matmul(B, (normal_rv))
    return mean + F.transpose()
```

Сгенерируем 200 случайных векторов из двумерного нормального распределения с нулевым вектором средних и матрицей коварициий $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Нанесём сгенерированные точки на график и отметим цветом значение плотности.

In [117]:
```
size = 1000
mean = [0, 0]
cov_matrix=[[2,1], [1,2]]
sample = gauss(mean, cov_matrix, size=1000)  # Генерация векторов
grid = np.mgrid[-4:4:0.05, -4:4:0.05]
c = np.hstack((grid[0].reshape(grid[0].size, 1),
               grid[1].reshape(grid[1].size, 1))).reshape(len(grid[0]), len(grid[0]), 2)
density = sps.multivariate_normal.pdf(c, mean=mean, cov=cov_matrix)
plt.figure(figsize=(10, 10))
plt.pcolormesh(grid[0], grid[1], density, cmap='Greens')
plt.scatter(sample[:, 0], sample[:, 1], alpha=0.5, color='Hotpink', label='random vectors')
plt.legend()
plt.grid(ls=':')
plt.xlim((-4, 4))
plt.ylim((-4, 4))
plt.show()
```

Вывод:

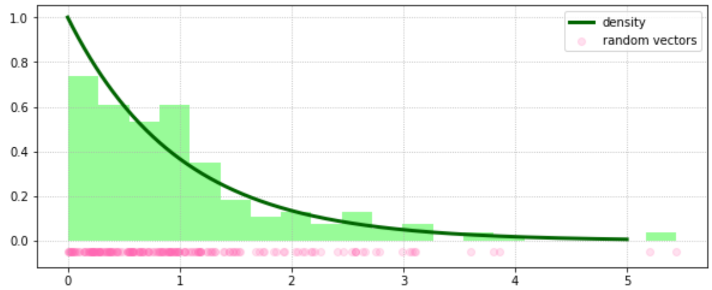
По графику видно, что случайная величина, имеющая многомерное нормальное распределение, чаще принимает значения в местах большей плотности данного распределения. Значит, мы верно реализовали функцию генерации случайных величин, имеющих многомерное распределение.

Напишем функцию генерации случайных величин из экспоненциального распределения.

In [118]:
```
def expon(size=1, lambd=1, precision=30):
    return -(np.log(1-uniform(size, precision))/lambd)
```

Для $Exp(1)$ сгенерируем 200 независимых случайных величин, построим график плотности на отрезке $[-0.5, 5]$, а также гистограмму по сгенерированным случайным величинам.

In [119]:
```
size = 200
sample = expon(size)
grid = np.linspace(0, 5, 500)

plt.figure(figsize=(10, 4))
# отображаем значения случайных величин полупрозрачными точками
plt.scatter(sample, np.zeros(size) - 0.05, alpha=0.2, color = 'hotpink', label='random vectors')
# по точкам строим нормированную полупрозрачную гистограмму
plt.hist(sample, bins=20, normed=True, color='palegreen')
# рисуем график плотности
plt.plot(grid, sps.expon.pdf(grid),
         color='darkgreen', lw=3, label='density')
plt.legend()
plt.grid(ls=':')
plt.show()
```



Вывод:

При помощи генерации равномерно распределенной случайной величины можно сгенерировать экспоненциально распределенную случайную величину.

Пусть ξ ~ U(0, 1), η = $\frac{-ln(1-\xi)}{\lambda}$. Тогда:

F_η(x) = P($\eta \le$ x)= P($\frac{-ln(1-\xi)}{\lambda}$ $\le$ x) = P($-ln(1 - \xi) \le \lambda$x) = P($ln(1 - \xi) \ge$ -λx) = P($1 - \xi \ge \exp^{-\lambda x}$) = P($\xi \le$ 1 - $\exp^{-\lambda x}$) = 1 - $\exp^{-\lambda x}$ = F_η(x).

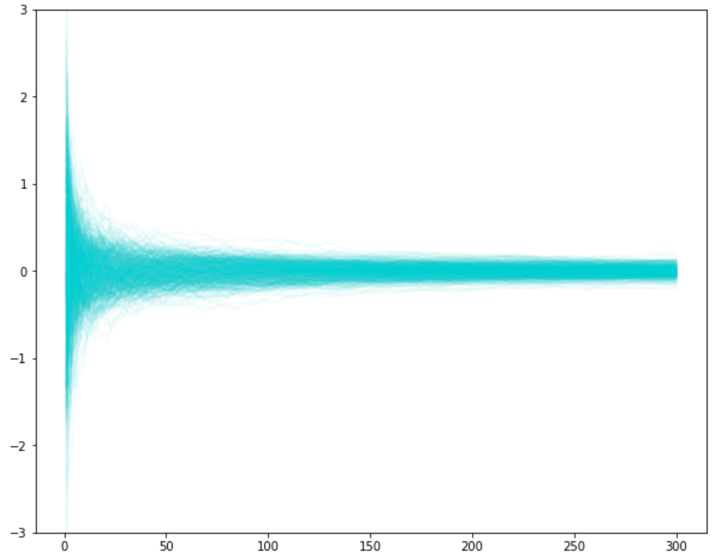
Получаем, что η ~ expon(λ). Мы использовали тот факт, что для ξ ~ U(0, 1) функция распределения F_ξ(x) = x

3) Визуализируем *закон больших чисел*.

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ --- независимые случайные величины из распределения $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$. Согласно закону больших чисел выполнена сходимость $\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n} \overset{\text{п.н.}}{\to} a$. Покажем это, сгенерировав множество наборов случайных величин и посчитав по каждому из наборов среднее в зависимости от размера набора. Нанесём на один график зависимость среднего значения от кол-ва элементов.

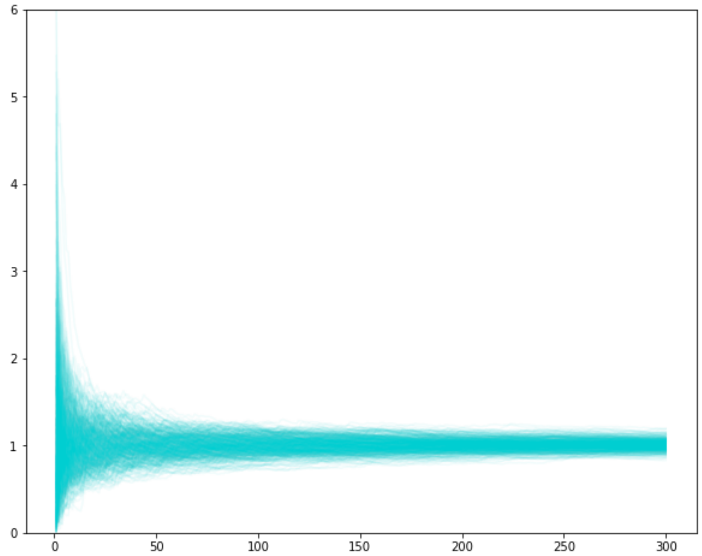
Выполним эти же действия для распределений $Exp(1)$ и $Pois(1)$.

In [120]:
```
grid = np.arange(1, 301, 1)
sample = sps.norm.rvs(size=(500, 300)) # генерируем 500 наборов
number = np.fromfunction(lambda i: i + 1, (300,))
means = sample.cumsum(axis=1)/number # среднее значение

plt.figure(figsize=(10, 8))
for i in range (500):
    plt.plot(grid, means[i,...], alpha=0.05, color='darkturquoise')
plt.ylim((-3, 3))
plt.show()
```



Имеем 500 кривых, каждая из которых соответствует выборке из 300 нормально распределенных случайных величин. На данном графике изображена зависимость среднего арифметического частичных сумм соответствующих случайных величин от количества слагаемых в этой сумме. По графику видно, что с увеличением числа слагаемых каждая из 500 кривых все ближе "прижимается" к прямой y = 0. Математическое ожидание $\mathcal{N}(0, 1)$ равно нулю, соответственно построенный график подтверждает закон больших чисел с точностью до 300 испытаний.

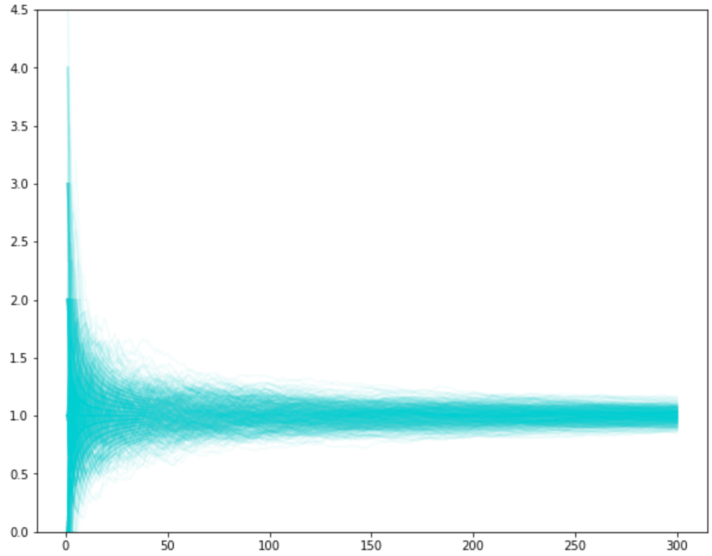
In [121]:
```
sample = sps.expon.rvs(size=(500, 300)) # генерируем 500 наборов
means = sample.cumsum(axis=1)/number # среднее значение

plt.figure(figsize=(10, 8))
for i in range (500):
    plt.plot(grid, means[i,...], alpha=0.05, color='darkturquoise')
plt.ylim((0, 6))
plt.show()
```



Имеем 500 кривых, каждая из которых соответствует выборке из 300 экспоненциально распределенных случайных величин. На данном графике изображена зависимость среднего арифметического частичных сумм соответствующих случайных величин от количества слагаемых в этой сумме. По графику видно, что с увеличением числа слагаемых каждая из 500 кривых все ближе "прижимается" к прямой y = 1. Математическое ожидание $expon(1)$ равно 1, соответственно построенный график подтверждает закон больших чисел с точностью до 300 испытаний.

In [122]:

```
sample = sps.poisson.rvs(mu=1, size=(500, 300)) # генерируем 500 наборов
means = sample.cumsum(axis=1)/number # среднее значение

plt.figure(figsize=(10, 8))
for i in range (500):
    plt.plot(grid, means[i,...], alpha=0.05, color='darkturquoise')
plt.ylim((0, 4.5))
plt.show()
```



Имеем 500 кривых, каждая из которых соответствует выборке из 300 пуассоновски распределенных случайных величин. На данном графике изображена зависимость среднего арифметического частичных сумм соответствующих случайных величин от количества слагаемых в этой сумме. По графику видно, что с увеличением числа слагаемых каждая из 500 кривых все ближе "прижимается" к прямой y = 1. Математическое ожидание $\mathcal{P}ois(1)$ равно 1, соответственно построенный график подтверждает закон больших чисел с точностью до 300 испытаний.

Вывод:

Для $\mathcal{N}$ (0, 1) имеем μ = 0.
Для $\mathcal{P}ois$ (1) имеем μ = 1.
Для $expon$ (1) имеем μ = 1.

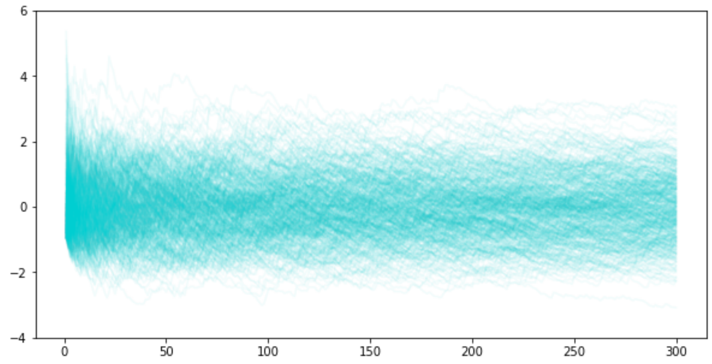
Из построенных графиков мы видим, что при увеличении числа испытаний среднее значение случайной величины все больше приближается к прямой $y = \mu$, где μ - значение математического ожидания данного распределения. Это именно то, что утверждает закон больших чисел - среднее значение конечной выборки из фиксированного распределения близко к математическому ожиданию этого распределения. Таким образом, мы экспериментально подтвердили закон больших чисел.

4)Визуализируем *центральную предельную теорему*.

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ --- независимые случайные величины из распределения $Exp(\lambda)$. Согласно центральной предельной теореме выполнена сходимость $Z_n = \frac{X_n - \mathsf{E}X_n}{\sqrt{\mathsf{D}X_n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$, где $X_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$. Покажем это, сгенерировав множество наборов случайных величин и посчитав по каждому из наборов величину Z_n в зависимости от размера набора. Для каждого j нанесём на один график зависимость Z_{jn} от n. Для $n = 300$ по набору случайных величин $Z_{1,300}, \ldots, Z_{500,300}$ построим гистограмму.

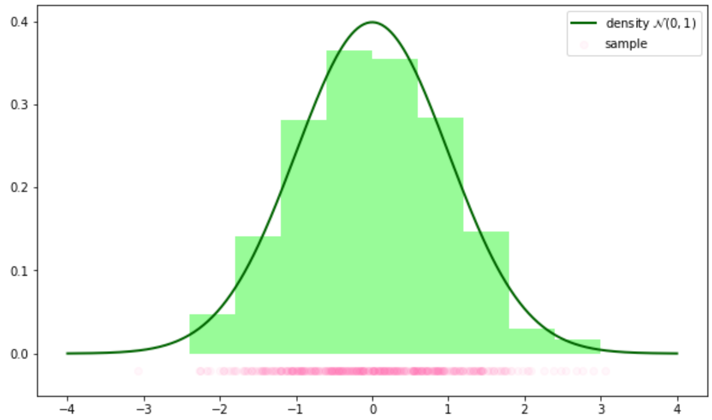
Повторим те же действия для распределений $U(0,1)$ и $Pois(1)$.

In [123]:
```
grid = np.arange(1, 301, 1)
sample = sps.expon.rvs(size=(500, 300)) # генерируем 500 наборов
means = sample.cumsum(axis=1)
expectation = means.mean(axis=0) # математическое ожидание
dispersion = means.var(axis = 0) # дисперсия
sqroot = dispersion** .5 # квадратный корень из дисперсии
z = (means - expectation)/sqroot

plt.figure(figsize=(10, 5))
for i in range (500):
    plt.plot(grid, z[i,...], alpha=0.05, color='darkturquoise')
plt.ylim((-4, 6))
plt.show()
```



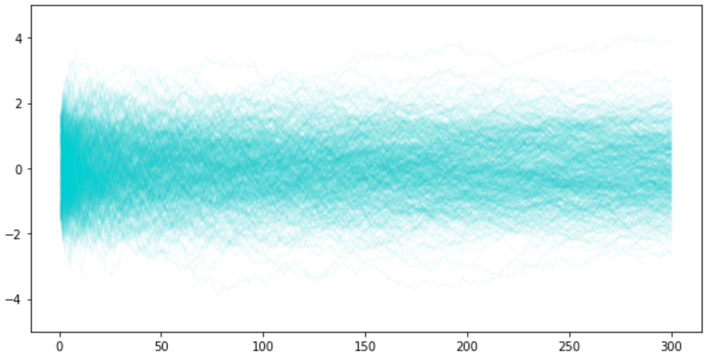
Имеем 500 кривых, каждая из которых соответствует выборке из 300 экспоненциально распределенных случайных величин. На данном графике изображена зависимость величины $(S_n - ES_n)/\sqrt{DS_n}$ от количества слагаемых в этой сумме, сделано это для 500 выборок. По графику видно, что с увеличением числа слагаемых кривые не сходятся к определенной константе.

In [124]:
```
grid = np.linspace(-4, 4, 400)  # задаем сетку для построения графика плотности
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.scatter(z[...,-1], np.zeros(500) - 0.02, alpha=0.05, label='sample', color = 'hotpink')
plt.hist(z[...,-1], range=(-3, 3), bins=10, normed=True, color = 'palegreen')
plt.plot(grid, sps.norm.pdf(grid), color='darkgreen', lw=2, label='density $\mathcal{N}(0, 1)$')
plt.legend()  # добавляет легенду
plt.show()
```



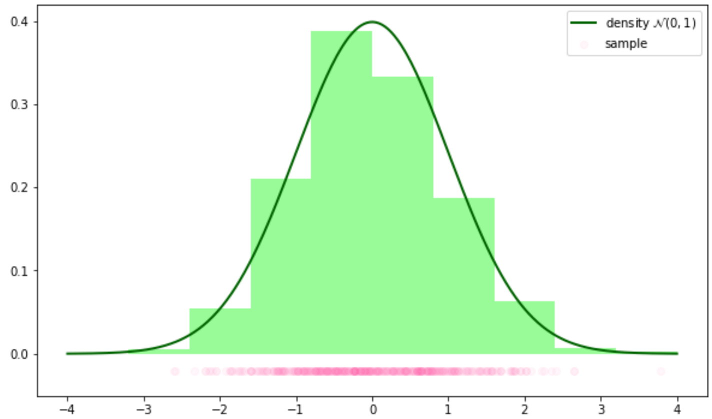
На данном графике изображена гистограмма, построенная по 500 значениям случайных величин $(S_{300} - ES_{300})/\sqrt{DS_{300}}$, где $S_{300} = \xi_1 + ... + \xi_{300}$, каждая величина ξ_i имеет экспоненциальное распределение. Также на данном графике изображена кривая, соответствующая плотности нормального распределения с параметрами 0 и 1. Нетрудно заметить, что построенная гистограмма примерно совпадает с областью под графиком плотности нормального распределения.

In [125]:
```
grid = np.arange(1, 301, 1)
sample = sps.uniform.rvs(size=(500, 300)) # генерируем 500 наборов
means = sample.cumsum(axis=1)
expectation = means.mean(axis=0) # математическое ожидание
dispersion = means.var(axis = 0) # дисперсия
sqroot = dispersion** .5 # квадратный корень из дисперсии
z = (means - expectation)/sqroot

plt.figure(figsize=(10, 5))
for i in range (500):
    plt.plot(grid, z[i,...], alpha=0.05, color='darkturquoise')
plt.ylim((-5, 5))
plt.show()
```



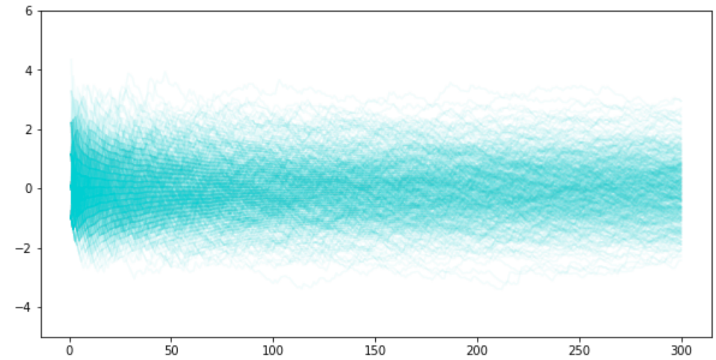
Имеем 500 кривых, каждая из которых соответствует выборке из 300 нормально распределенных случайных величин. На данном графике изображена зависимость величины $(S_n - ES_n)/\sqrt{DS_n}$ от количества слагаемых в этой сумме, сделано это для 500 выборок. По графику видно, что с увеличением числа слагаемых кривые не сходятся к определенной константе.

In [126]:
```
grid = np.linspace(-4, 4, 400)  # задаем сетку для построения графика плотности
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.scatter(z[...,-1], np.zeros(500) - 0.02, alpha=0.05, label='sample', color = 'hotpink')
plt.hist(z[...,-1], range=(-4, 4), bins=10, normed=True, color = 'palegreen')
plt.plot(grid, sps.norm.pdf(grid), color='darkgreen', lw=2, label='density $\mathcal{N}(0, 1)$')
plt.legend()  # добавляет легенду
plt.show()
```



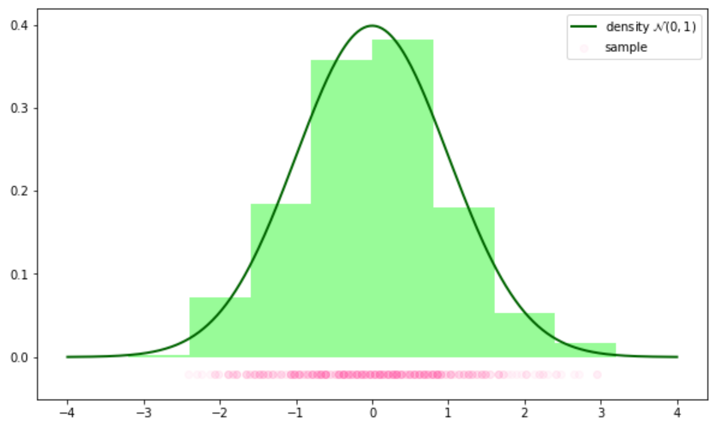
На данном графике изображена гистограмма, построенная по 500 значениям случайных величин $(S_{300} - ES_{300})/\sqrt{DS_{300}}$, где $S_{300} = \xi_1 + ... + \xi_{300}$, каждая величина ξ_i имеет нормальное распределение. Также на данном графике изображена кривая, соответствующая плотности нормального распределения с параметрами 0 и 1. Нетрудно заметить, что построенная гистограмма примерно совпадает с областью под графиком плотности нормального распределения.

In [127]:
```python
grid = np.arange(1, 301, 1)
sample = sps.poisson.rvs(mu=1, size=(500, 300)) # генерируем 500 наборов
means = sample.cumsum(axis=1)
expectation = means.mean(axis=0) # математическое ожидание
dispersion = means.var(axis = 0) # дисперсия
sqroot = dispersion** .5 # квадратный корень из дисперсии
z = (means - expectation)/sqroot

plt.figure(figsize=(10, 5))
for i in range (500):
    plt.plot(grid, z[i,...], alpha=0.05, color='darkturquoise')
plt.ylim((-5, 6))
plt.show()
```



Имеем 500 кривых, каждая из которых соответствует выборке из 300 пуассоновски распределенных случайных величин. На данном графике изображена зависимость величины $(S_n - ES_n)/\sqrt{DS_n}$ от количества слагаемых в этой сумме, сделано это для 500 выборок. По графику видно, что с увеличением числа слагаемых кривые не сходятся к определенной константе.

In [128]:
```python
grid = np.linspace(-4, 4, 400)  # задаем сетку для построения графика плотности
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.scatter(z[...,-1], np.zeros(500) - 0.02, alpha=0.05, label='sample', color = 'hotpink')
plt.hist(z[...,-1], range=(-4, 4), bins=10, normed=True, color = 'palegreen')
plt.plot(grid, sps.norm.pdf(grid), color='darkgreen', lw=2, label='density $\mathcal{N}(0, 1)$')
plt.legend()  # добавляет легенду
plt.show()
```



На данном графике изображена гистограмма, построенная по 500 значениям случайных величин $(S_{300} - ES_{300})/\sqrt{DS_{300}}$, где $S_{300} = \xi_1 + ... + \xi_{300}$, каждая величина ξ_i имеет пуассоновское распределение. Также на данном графике изображена кривая, соответствующая плотности нормального распределения с параметрами 0 и 1. Нетрудно заметить, что построенная гистограмма примерно совпадает с областью под графиком плотности нормального распределения.

Вывод:

Центральная предельная теоремма утверждает, что сумма достаточно большого количества слабо зависимых случайных величин примерно одинакового масштаба, имеет распределение, близкое к нормальному. Как мы заметили ранее, все построенные гистограммы похожи на плотность нормального распределения, поэтому эксперементальные данные подтверждают центральную предельную теорему.