

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΑΕ II:

ΒΕΛΤΙΩΣΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

Το υπό έλεγχο σύστημα είναι ένας κινητήρας. Εφαρμόζοντας τάση στον κινητήρα, αυτός περιστρέφεται συνεχώς με περίπου σταθερή ταχύτητα. Επομένως είναι ένα ευσταθές σύστημα ως προς την ταχύτητα. Αντίθετα, λόγω της περιστροφής η θέση του άξονα μεταβάλλεται συνεχώς, άρα είναι ασταθές σύστημα ως προς την θέση.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ 1: ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Στο πρώτο εργαστήριο/στάδιο της εργασίας εργαστήκαμε πειραματικά για να βρούμε τις παραμέτρους που περιγράφουν το σύστημα του κινητήρα.

Η τάση μόνιμης κατάστασης της ταχογεννήτριας υπολογίστηκε $V_{\text{tacho}}=8\text{V}$ ενώ η τάση εισόδου $V_{\text{in}}=9.92\text{V}$ (τιμές παλμογράφου).

Επομένως $k_m k_T = \frac{8}{9.92} = 0.8$

Η σταθερά χρόνου T_m του υποσυστήματος τάσης εισόδου - ταχογεννήτριας υπολογίστηκε μέσω των πειραμάτων και των ενδείξεων του παλμογράφου ίση με 0.63sec (ελαφρώς μεγαλύτερη από τις τυπικές τιμές).

Η παράμετρος k_μ του μειωτήρα που αντιστοιχεί στο λόγο της γωνίας στροφής του άξονα εξόδου προς τη γωνία στροφής του άξονα του κινητήρα, δηλαδή πόσο μειωμένες είναι οι στροφές της εξόδου σε σχέση με αυτές τις εισόδου, έπειτα από μια πλήρη περιστροφή του άξονα του κινητήρα προέκυψε ίση με $k_\mu = \frac{1}{36}$.

Η θέση του άξονα του κινητήρα εμφανίστηκε ως πριονωτή κυματομορφή στον παλμογράφο. Η κλίση της υπολογίστηκε ίση με 15,4 και από την παρακάτω εξίσωση θα βρω την παράμετρο k_o :

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = k_m k_o \omega \text{ όπου } \omega = 36 \omega_{\text{εξόδου}} \text{ όπου } \omega_{\text{εξόδου}} = 64,17 \text{rpm.}$$

$$\text{Άρα } k_o = 0.24$$

Η σχέση που συνδέει τη ταχύτητα του κινητήρα με την τάση ταχογεννήτριας οδηγεί στην εύρεση της παραμέτρου k_T :

$$V_{\text{tach}} = k_T \omega \Rightarrow k_T = 0.0034$$

Τέλος από το γινόμενο $k_m k_T = 0.8$ που υπολογίστηκε στο πείραμα βρίσκουμε την παράμετρο $k_m = 237,2$

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ 2:ΕΛΕΓΧΟΣ ΤΗΣ ΘΕΣΗΣ-ΤΑΣΗΣ ΜΕΣΩ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΝΑΔΡΑΣΗΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ

Από το δομικό διάγραμμα του συστήματος προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις:

$$\frac{V_{tacho}}{U}(s) = \frac{km}{Tms+1} \cdot kt \text{ και } \frac{\Theta}{V_{tacho}}(s) = \frac{k\mu \cdot ko}{kt} \cdot \frac{1}{s}$$

Το σύστημα είναι 2ης τάξης, επομένως επιλέγω 2 μεταβλητές κατάστασης $x_1 = v_{tacho}$ και $x_2 = \theta$, καθώς αυτή η επιλογή με διευκολύνει εφόσον τα μετρήσιμα μεγέθη του πειράματος (τάσεις από τα δύο ποτενσιόμετρα του κινητήρα-ένα της εξόδου και ένα της ταχογεννήτριας) είναι τάσεις σε Volts. Φέρνω τις παραπάνω εξισώσεις σε πιο απλή μορφή:

$$(Tms + 1) \cdot V_{tacho} = km \cdot kt \cdot U \text{ και } s\theta = k\mu \cdot ko \cdot \frac{V_{tacho}}{kt}$$

Εφαρμόζοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace στις παραπάνω, προκύπτουν οι εξισώσεις κατάστασης του συστήματος (για μηδενικές αρχικές συνθήκες):

$$\dot{x}_1 = -x_1 \cdot \frac{1}{Tm} + \frac{km}{Tm} \cdot kt \cdot U \text{ όπου } U \text{ η είσοδος ελέγχου}$$

$$\dot{x}_2 = k\mu \cdot \frac{ko}{kt} \cdot x_1 \text{ και } y = x_2$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{Tm} & 0 \\ \frac{k\mu \cdot ko}{kt} & 0 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} \frac{km \cdot kt}{Tm} & 0 \end{bmatrix}^T$$

Αρχικά θα ελέγξω αν το σύστημα είναι ελέγξιμο, ώστε να είναι εφικτή η μετάβαση της θέσης-τάσης στην επιθυμητή τιμή θ_{ref} .

$$\text{Ο πίνακας ελεγχιμότητας } M = [B \ AB] = \begin{bmatrix} \frac{km \cdot kt}{Tm} & -\frac{km \cdot kt}{Tm^2} \\ 0 & \frac{k\mu \cdot ko \cdot km}{Tm} \end{bmatrix} \text{ με } \det(M) \neq 0$$

Άρα το σύστημα είναι ελέγξιμο.

Μέσω γραμμικής ανάδρασης καταστάσεων η θέση-τάση του κινητήρα θα συγκλίνει στην τάση αναφοράς $\theta_{\text{ref}} = 5\text{Volts}$, ενώ το πείραμα ξεκινάει με αρχικές συνθήκες $x_1(0) = 0\text{Volts}$ και $x_2(0) = 2\text{Volts}$, ωστόσο επειδή το σύστημα είναι γραμμικό οι αρχικές συνθήκες **δεν** επηρεάζουν την επιλογή των κερδών του ελεγκτή.

Επομένως επιλέγω ελεγκτή $U = -k_1 x_1 - k_2 x_2 + k_r r$ όπου $r = \theta_{\text{ref}} = 5\text{Volts}$.

Οι εξισώσεις κατάστασης τότε γίνονται:

$$X' = (A - BK)x + Bk_r r \quad \text{όπου } X' = [x_1, x_2]^T, K = [K_1 \ K_2]$$

$$Y = x_2$$

$$\text{Όπου } A - BK = \begin{bmatrix} \frac{-km \cdot kt \cdot k_1 - 1}{Tm} & \frac{-km \cdot kt \cdot k_2}{Tm} \\ \frac{k\mu \cdot k_o}{kt} & 0 \end{bmatrix}$$

Και υπολογίζοντας το k_r για $D=0$ αφού η έξοδος y δεν εξαρτάται από την είσοδο προκύπτει $k_r = k_2$.

Μέσω των κερδών k_1, k_2 επιλέγω τις ιδιοτιμές του νέου συστήματος ώστε να εξασφαλίσω την ευστάθεια του συστήματος αλλά και την συμπεριφορά του πριν φτάσει στην μόνιμη κατάσταση. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος:

$$P(s) = s^2 + \frac{(km \cdot kt \cdot k_1 + 1)}{Tm} s + \frac{km \cdot k_o \cdot k\mu \cdot k_2}{Tm}$$

Το σύστημα δεν πρέπει να έχει υπερύψωση, δηλαδή να μην εκτελέσει ταλαντώσεις επομένως για τη σταθερά απόσβεσης ζ αρκεί $\zeta \geq 1$.

Επιπλέον απαιτείται ο ελάχιστος δυνατός χρόνος αποκατάστασης t_s , άρα επιλέγω το σύστημα να έχει κρίσιμη απόσβεση, δηλαδή $\zeta = 1$ και διπλό πραγματικό πόλο στο σημείο $s = -p$, το οποίο θα είναι

σημείο απόσχισης του γεωμετρικού τόπου ριζών του συστήματος και θα εξασφαλίζεται η παραπάνω απαίτηση (για μικρότερες τιμές του s ο κυρίαρχος πόλος βρίσκεται πιο κοντά στον φανταστικό άξονα και προκύπτει μεγαλύτερος χρόνος αποκατάστασης).

$Pd(s)=s^2 +2ps +p^2$, $p > 0$ ώστε να είναι ευσταθές το σύστημα.

Από την ισότητα των δύο πολυωνύμων:

$$K_1 = \frac{2 \cdot Tm \cdot p - 1}{km \cdot kt} \quad \text{και} \quad K_2 = \frac{Tm \cdot p^2}{km \cdot ko \cdot k\mu}$$

Άρα $U=-k_1 x_1-k_2(y-r)$ και ο χρόνος αποκατάστασης $t_s = \frac{4}{p}$

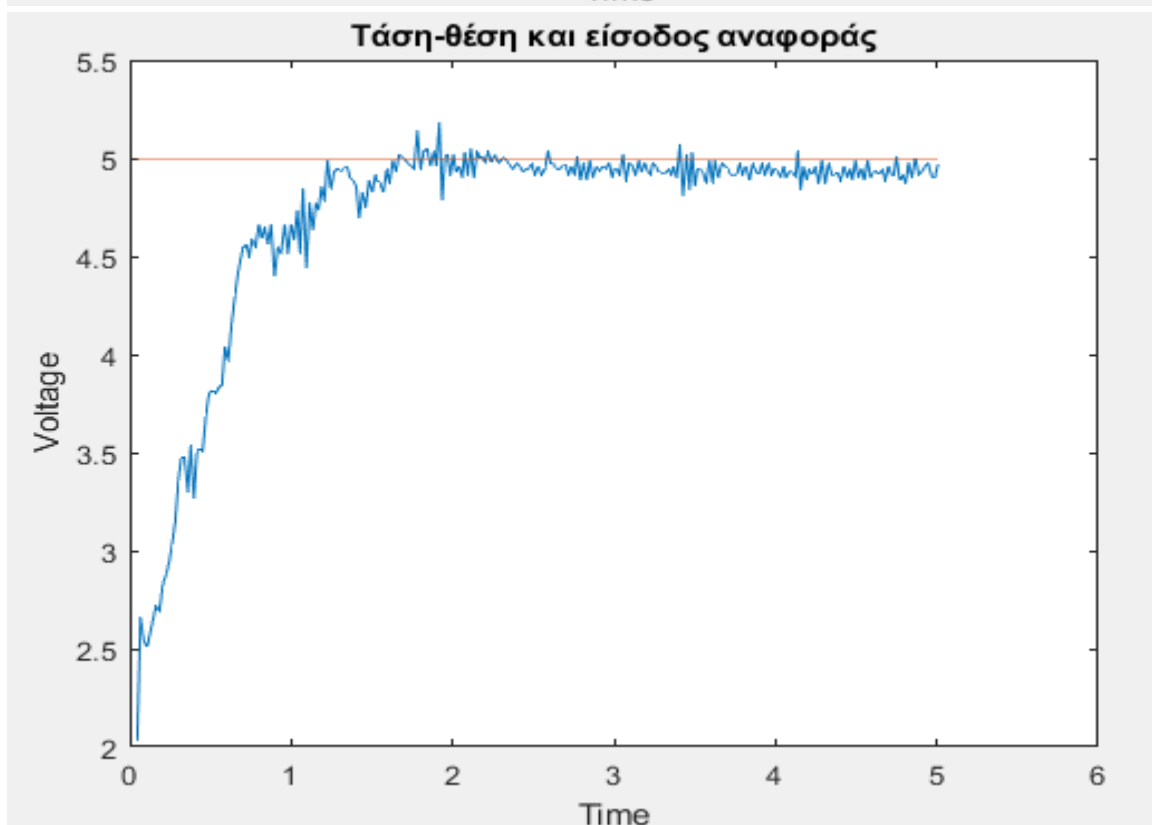
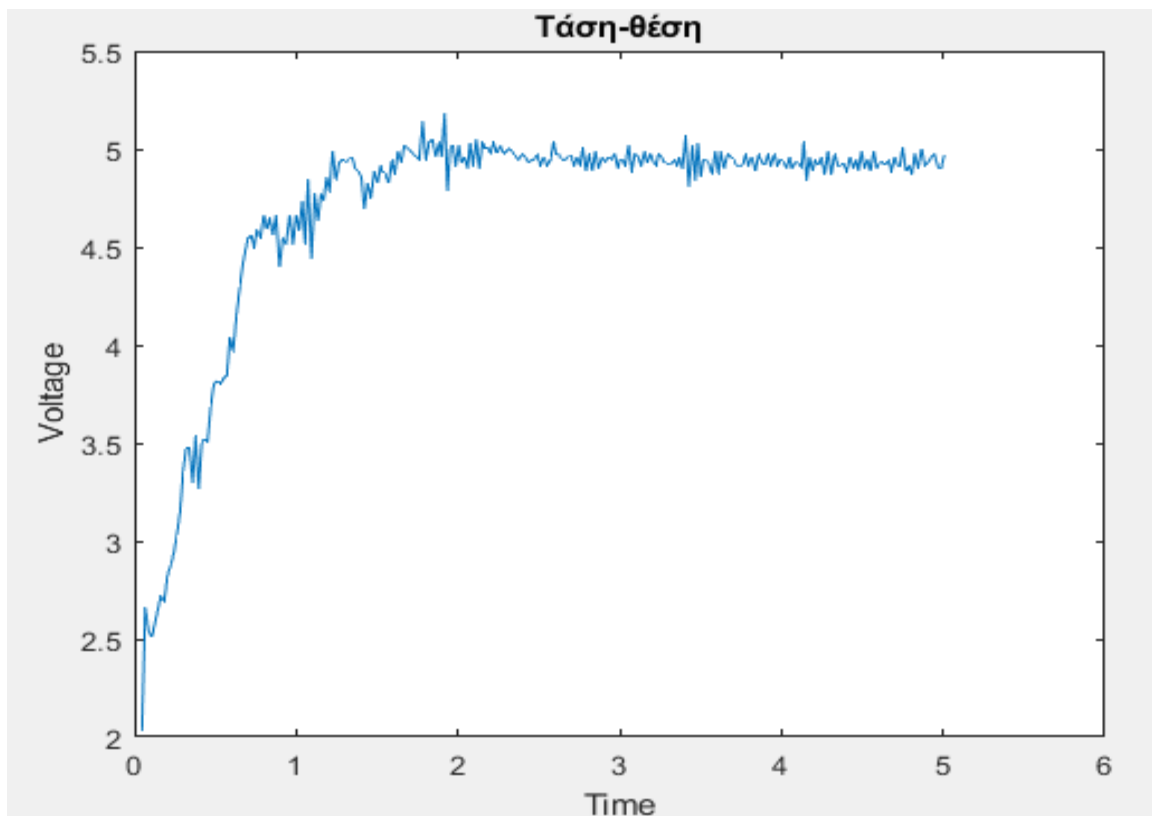
Μετακινώντας τη τιμή του πόλου p παρατηρώ την απόκριση του συστήματος και το χρόνο αποκατάστασης του. Η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του p που ταυτόχρονα δεν οδηγεί σε κορεσμό της ταχογεννήτριας και επιτρέπει τη δειγματοληψία στο Matlab, είναι η επιθυμητή και μέσω αυτής βρίσκω τα κέρδη K_1 , K_2 .

Στο πείραμα ο πόλος p επιλέχτηκε στο σημείο $s=-p=-5.8$ και τα κέρδη υπολογίστηκαν:

$$K_1 = 7.8 \text{ και } K_2 = 13.4 \text{ επομένως και } K_r = 13.4$$

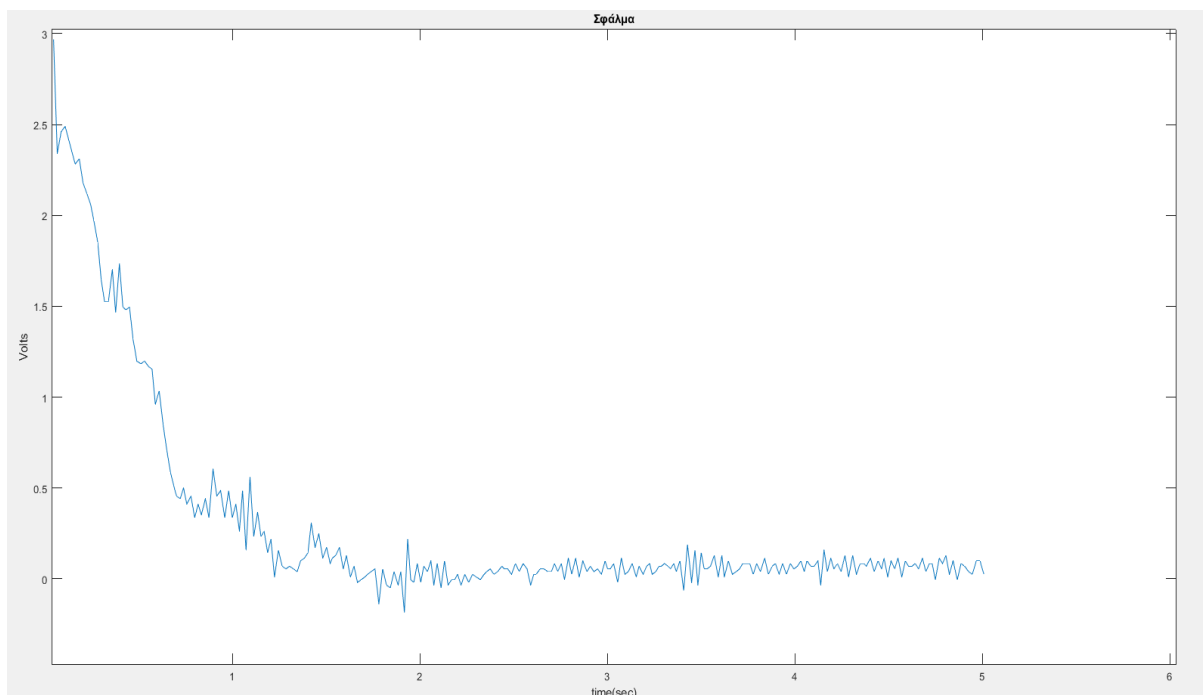
Ο χρόνος αποκατάστασης τότε από το γράφημα ισούται περίπου με 1 δευτερόλεπτο, ενώ θεωρητικά προσεγγίζεται στα 0,7 δευτερόλεπτα περίπου, δηλαδή υπάρχει μια μικρή απόκλιση.

Από την πειραματική διαδικασία η απόκριση του συστήματος κλειστού βρόχου προέκυψε:

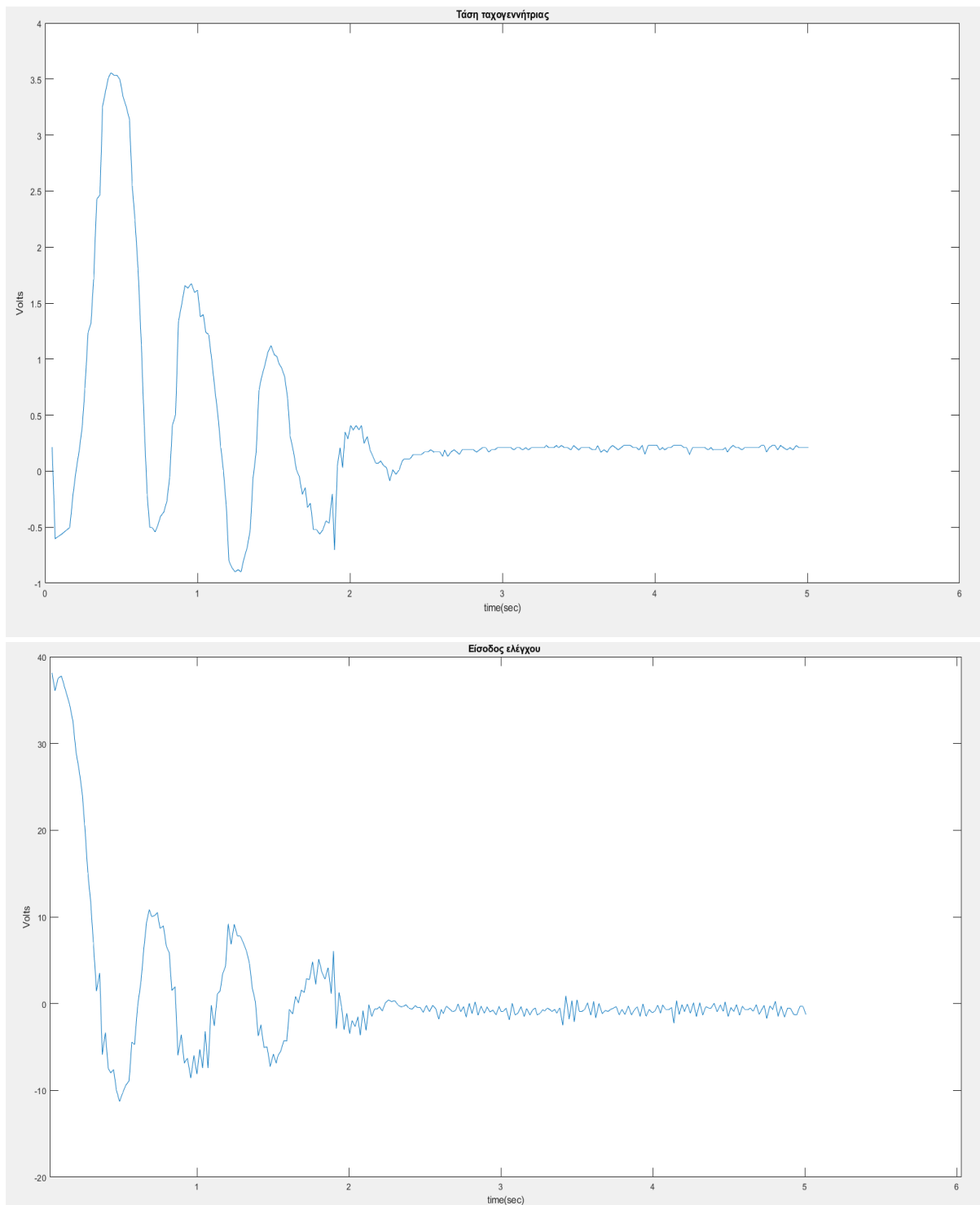


Παρατηρούμε ότι υπάρχει ένα σφάλμα το οποίο οφείλεται στη μετρητική διάταξη, στην προσεγγιστική μοντελοποίηση του

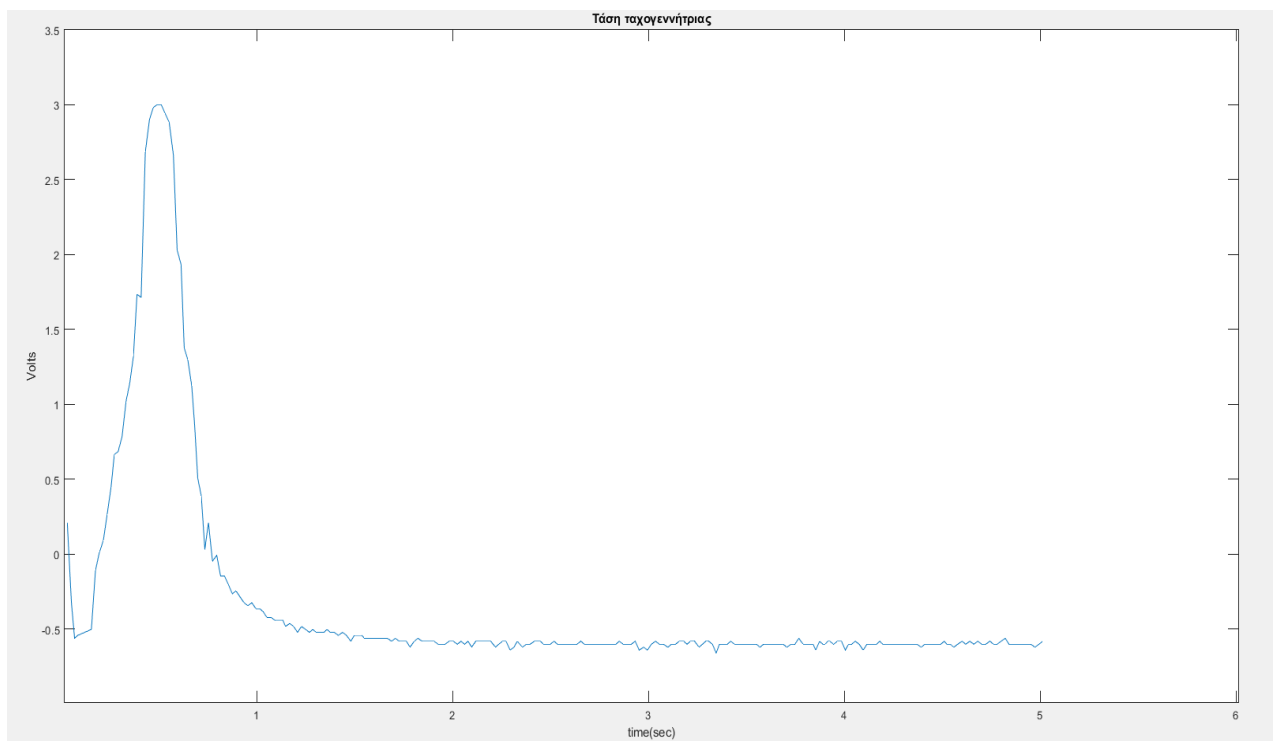
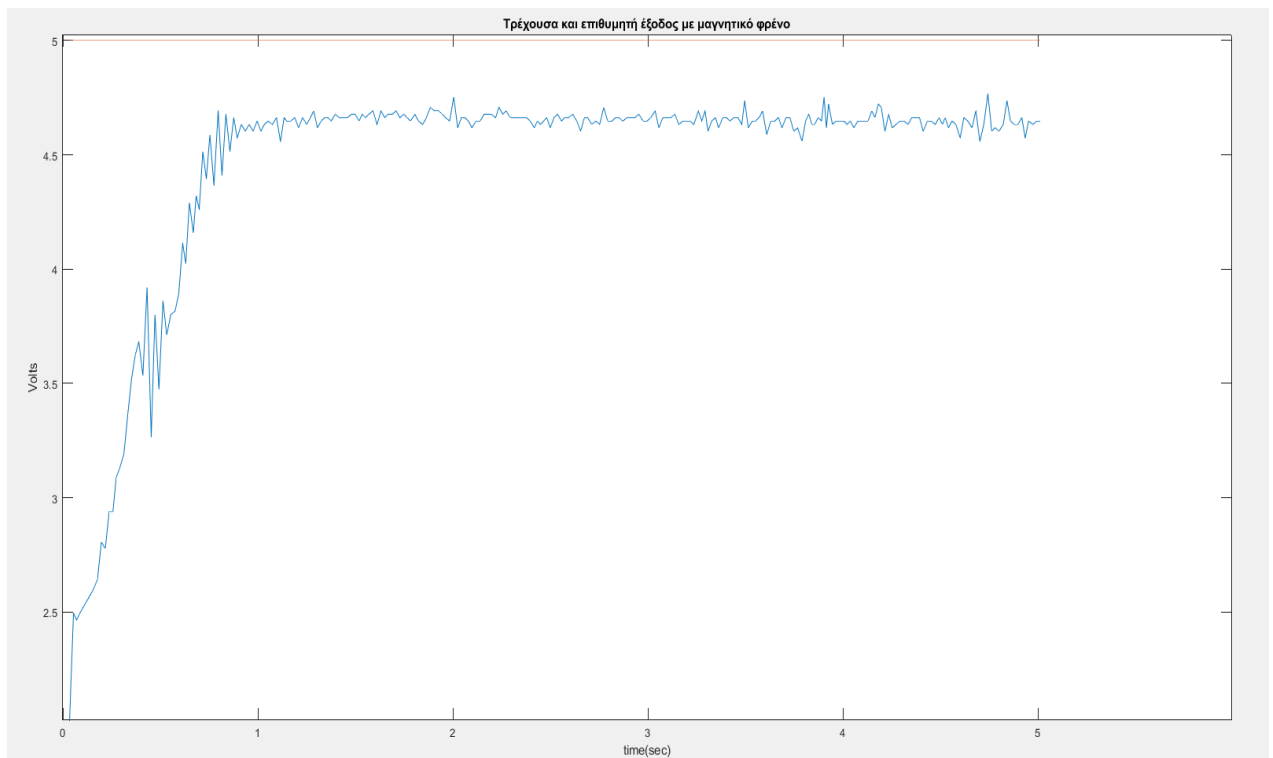
συστήματος και κυρίως στην χρονική καθυστέρηση την οποία εισάγει το Matlab στον κλειστό βρόχο.



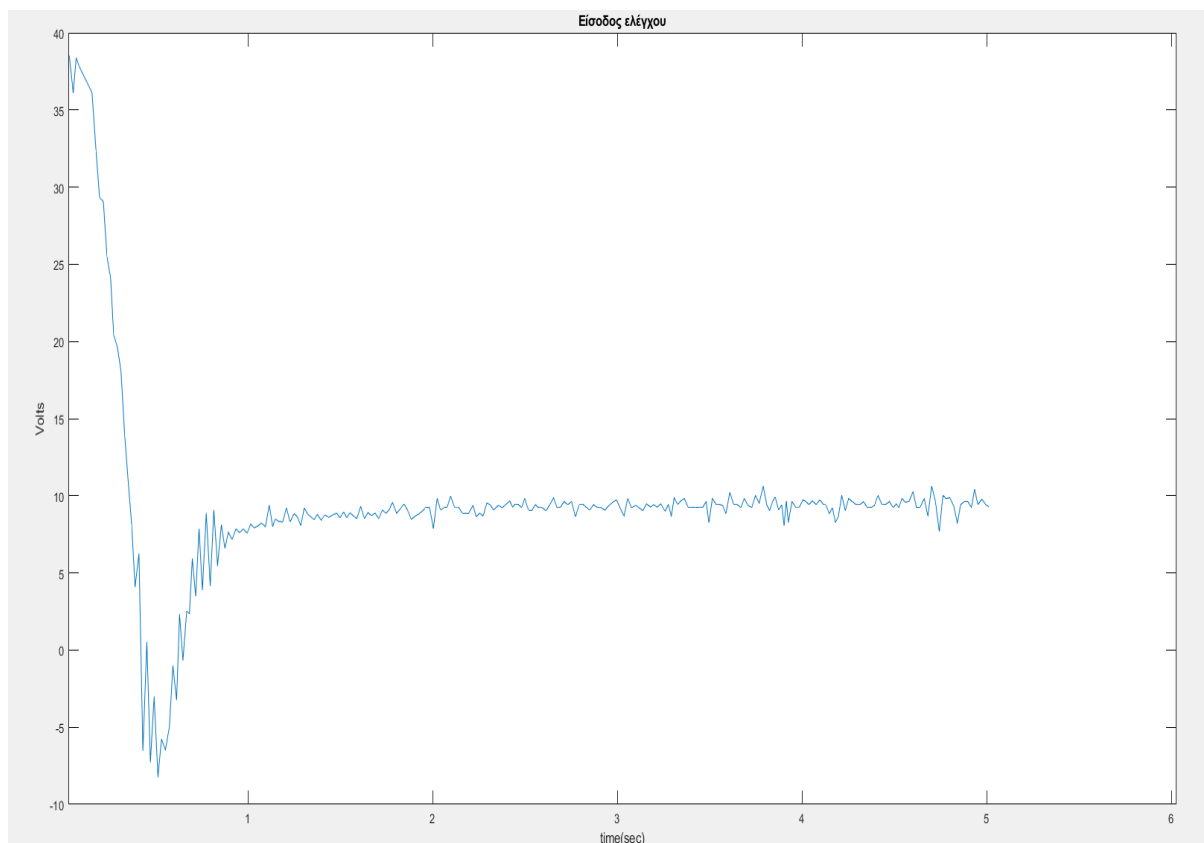
Παρακάτω παρουσιάζονται τα διαγράμματα της τάσης της ταχογεννήτριας (1η κατάσταση του συστήματος) και ο ελεγκτής-είσοδος ελέγχου. Αξίζει να σημειωθεί ότι η είσοδος ελέγχου $U = -k_1 x_1 - k_2 x_2 + k_r r$, όπου $r - x_2 = \text{error}$ (σφάλμα), με την πάροδο του χρόνου ταυτίζεται με την 1η κατάσταση-τάση ταχογεννήτριας και διαφέρουν κατά το κέρδος k_1 , διότι το σφάλμα τείνει στο μηδέν, αφού η έξοδος-θέση/τάση ταυτίζεται (σχεδόν) με την είσοδο αναφοράς $r = \theta_{\text{ref}}$.



Κατεβάζοντας το μηχανικό φρένο του κινητήρα, στο σύστημα προστίθεται μια σταθερή διαταραχή d (μηχανικό φρένο). Με τα κέρδη που υπολογίσαμε παραπάνω, οι δύο καταστάσεις του συστήματος πλέον είναι:



Και η είσοδος ελέγχου:



Λόγω της διαταραχής (μηχανικό φρένο) η τιμή της εξόδου/θέσης-τάσης δεν φτάνει την επιθυμητή θ_{ref} αλλά απέχει κατά την ποσότητα στην μόνιμη κατάσταση:

$$Y = \theta_{ref} - \frac{d}{kr} \quad \text{όπου } d \text{ η σταθερή διαταραχή και } k_r = k_2.$$

Έτσι εξηγείται και απόκλιση της εξόδου από την είσοδο θ_{ref} στην μόνιμη κατάσταση στο διάγραμμα θέσης-τάσης/χρόνου.

Τέλος η επιθυμητή έξοδος/θέση-τάση είναι $\theta_{ref} = 5 + 2 \cdot \sin(\omega t)$, όπου η γωνιακή ταχύτητα ω λαμβάνει τιμές:

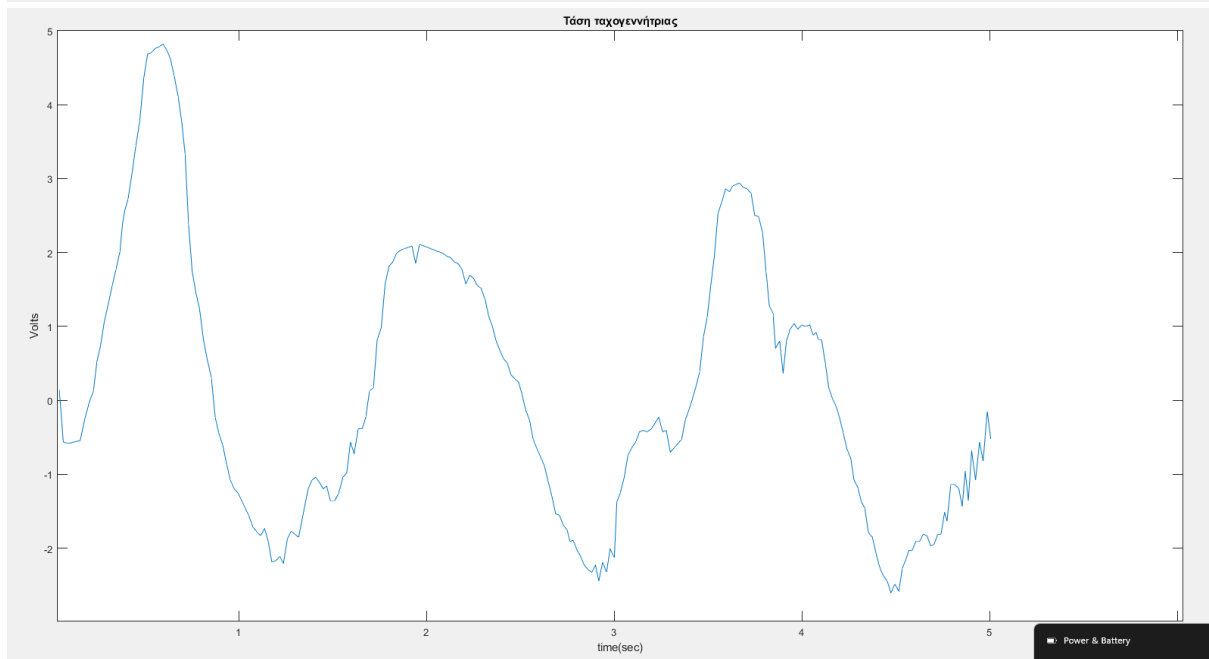
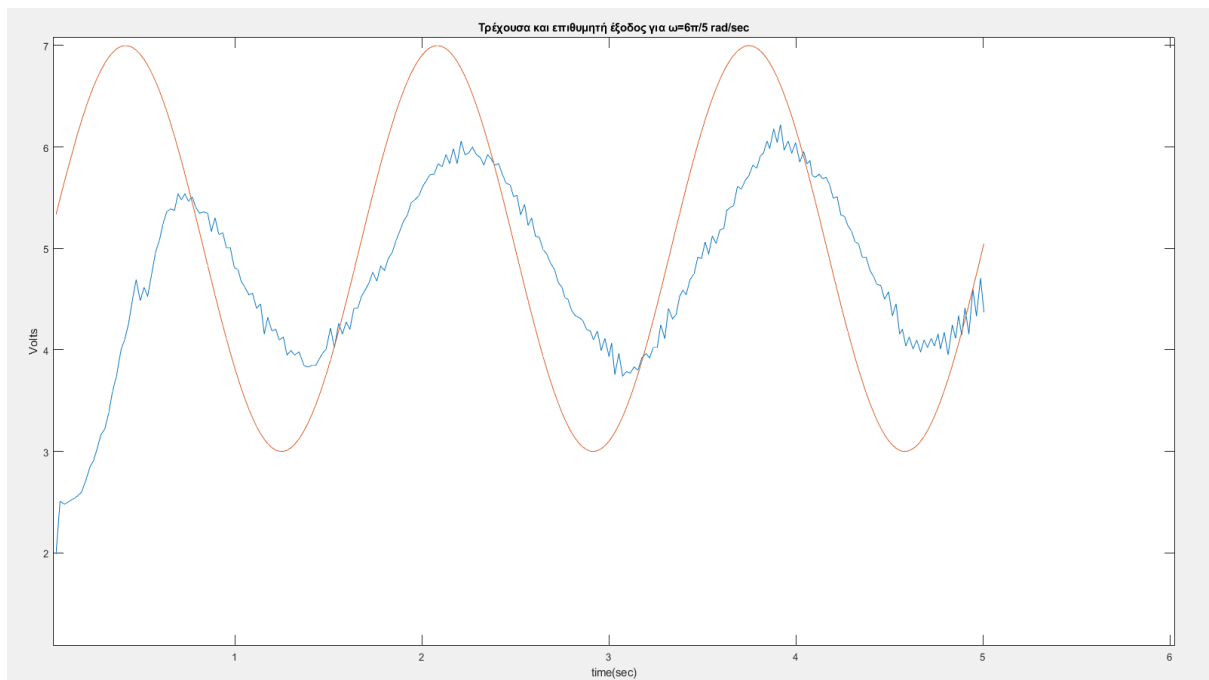
$\omega_1 = 6\pi/5 \text{ rad/sec}$ (3 περίοδοι σε 5 δευτερόλεπτα)

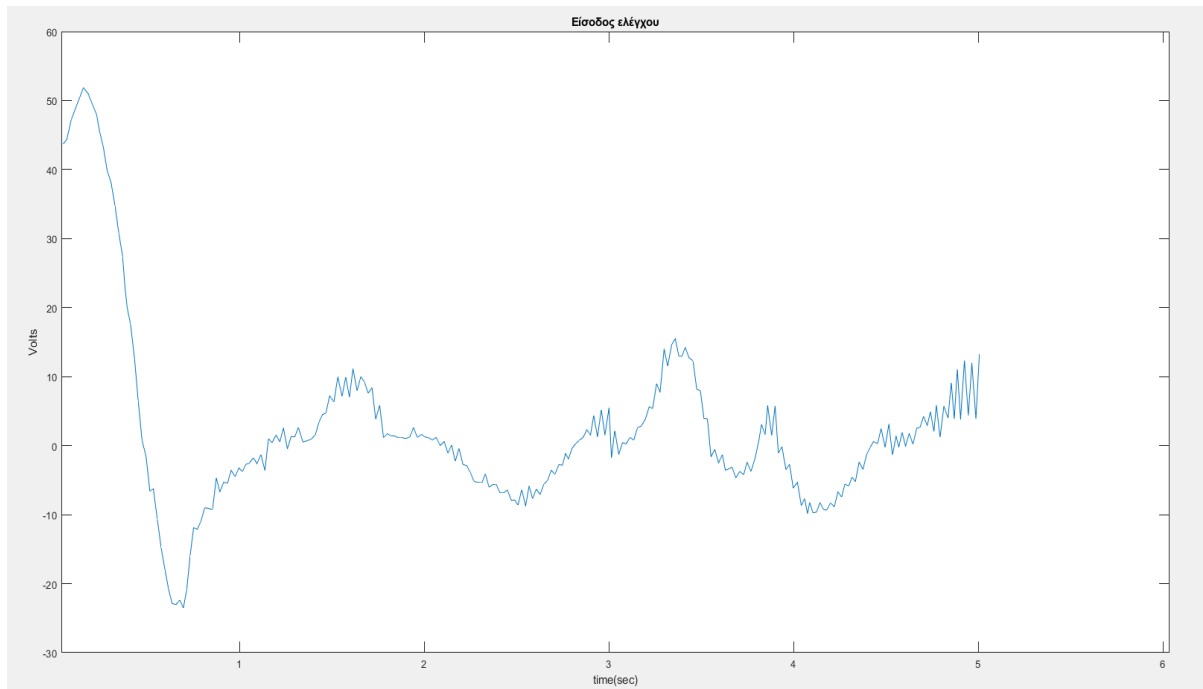
$\omega_2 = 2\pi/5 \text{ rad/sec}$ (1 περίοδος σε 5 δευτερόλεπτα)

$\omega_3 = \pi/10 \text{ rad/sec}$ (1 περίοδος σε 20 δευτερόλεπτα)

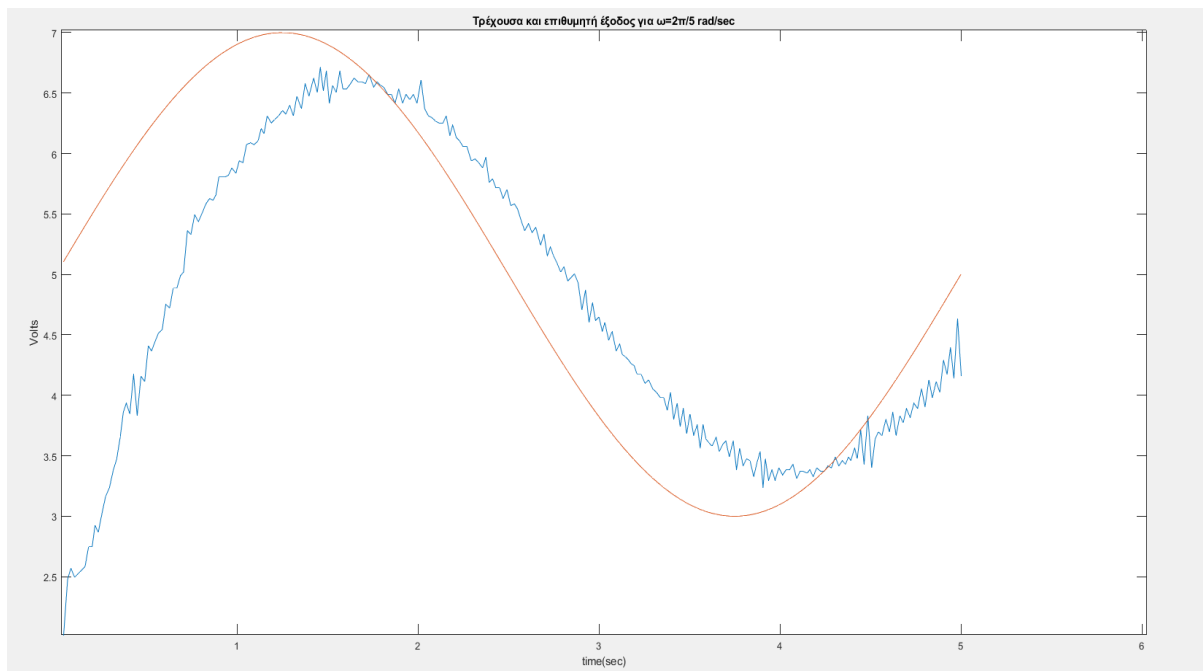
Για κάθε τιμή της γωνιακής ταχύτητας οι μεταβλητές κατάστασης και η είσοδος ελέγχου μετρήθηκαν:

Για $\omega = 6\pi/5 \text{ rad/sec}$ τα παρακάτω 3 γραφήματα:

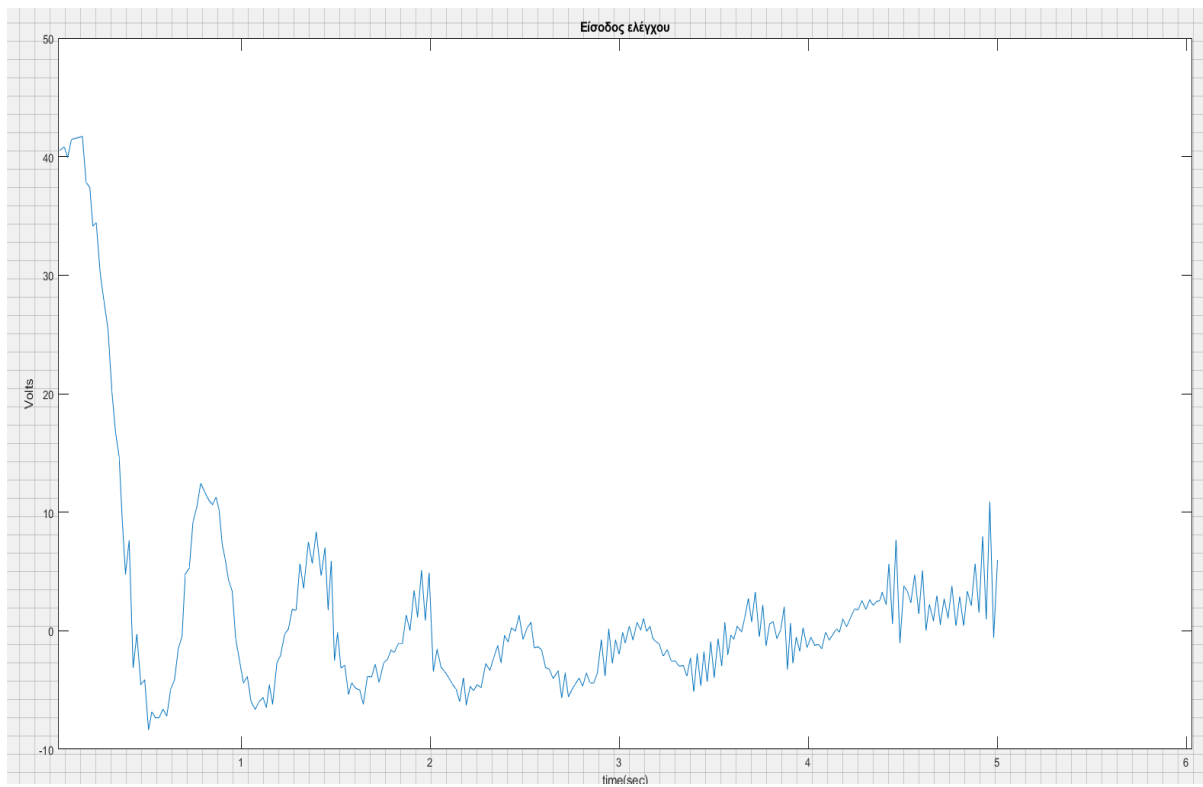
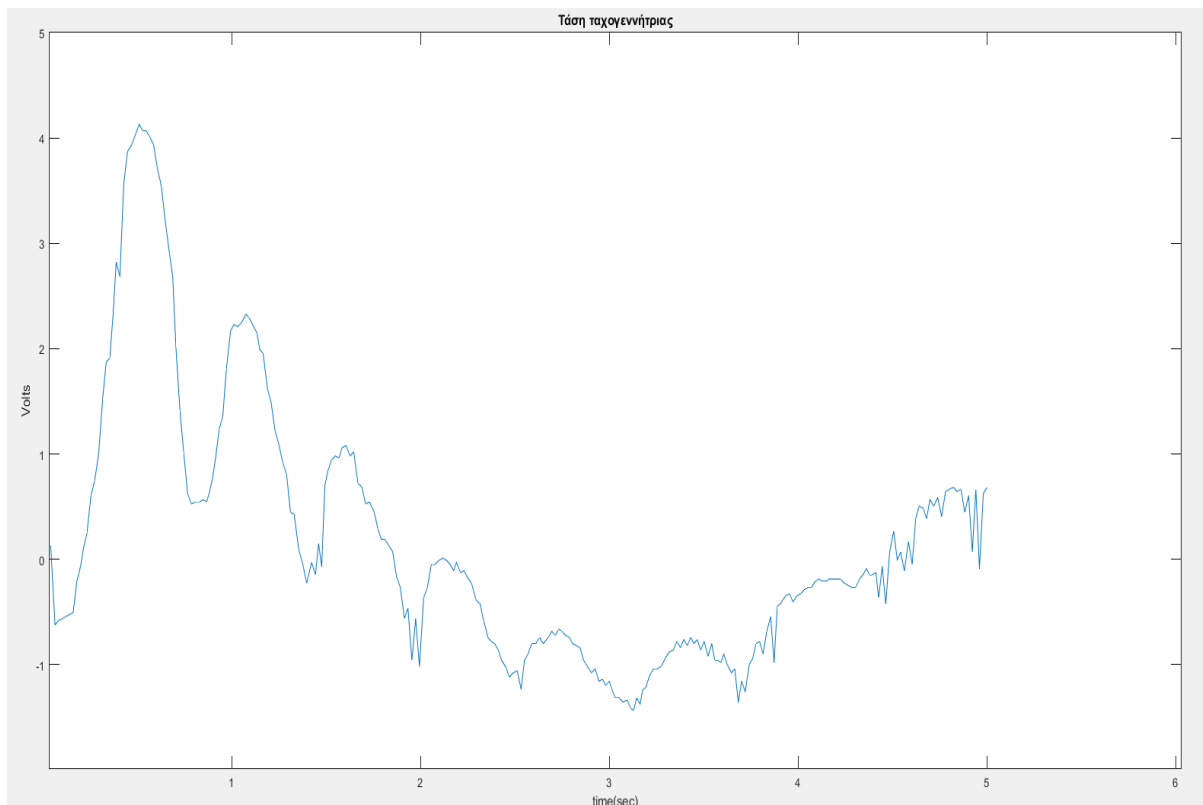




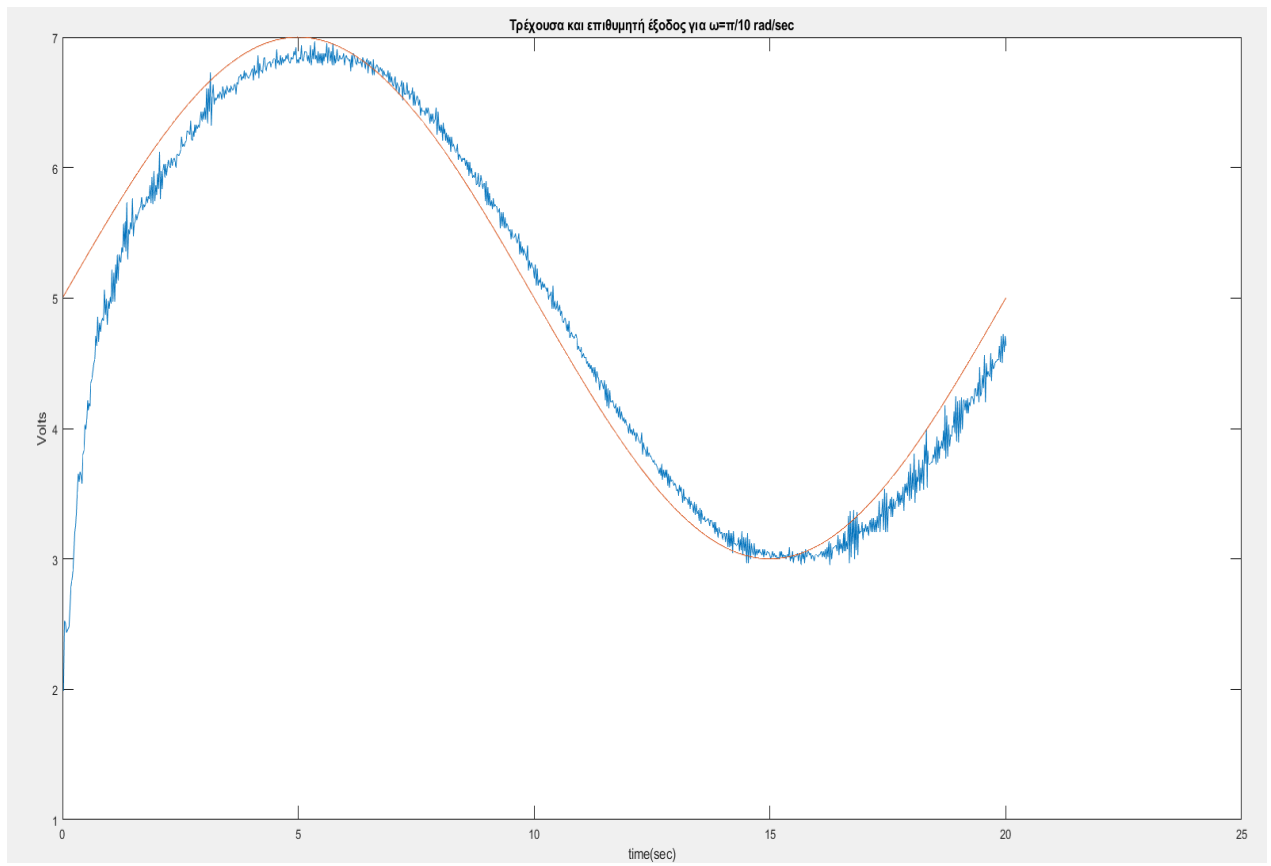
Για $\omega=2\pi/5$ rad/sec τα παρακάτω τρία γραφήματα:

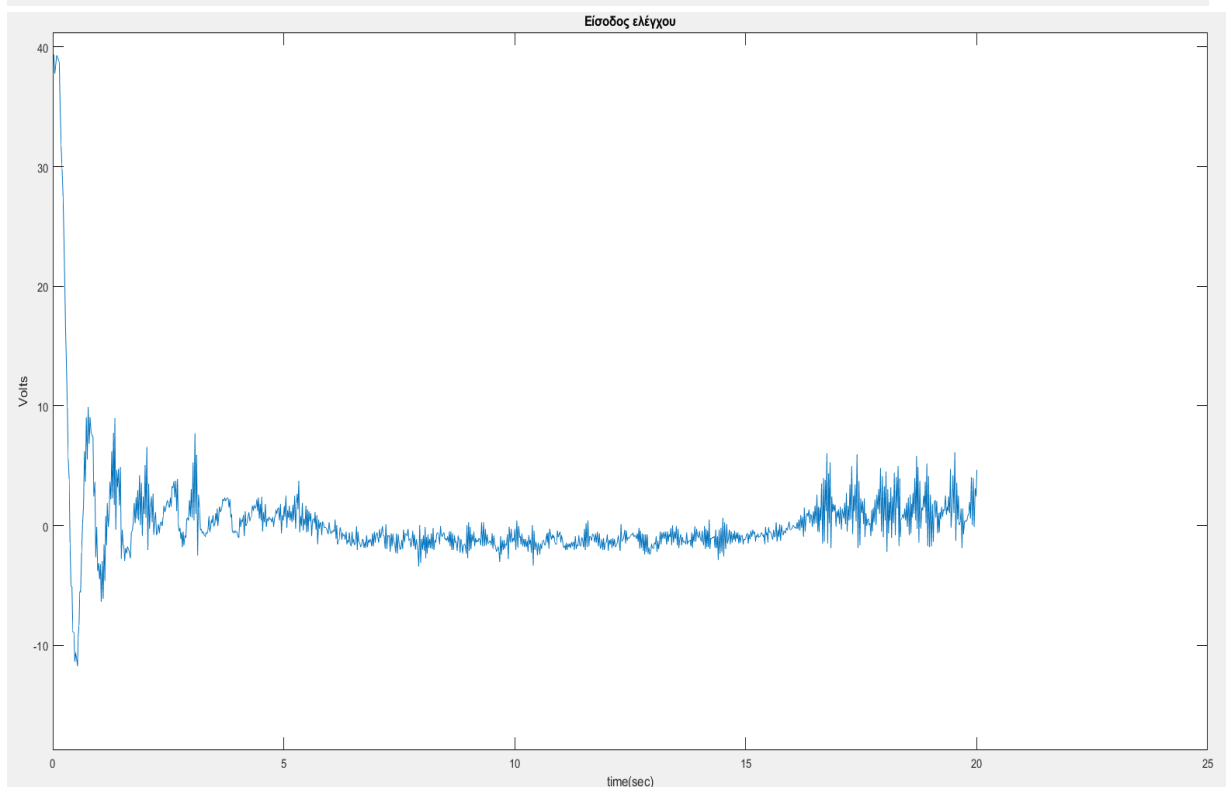
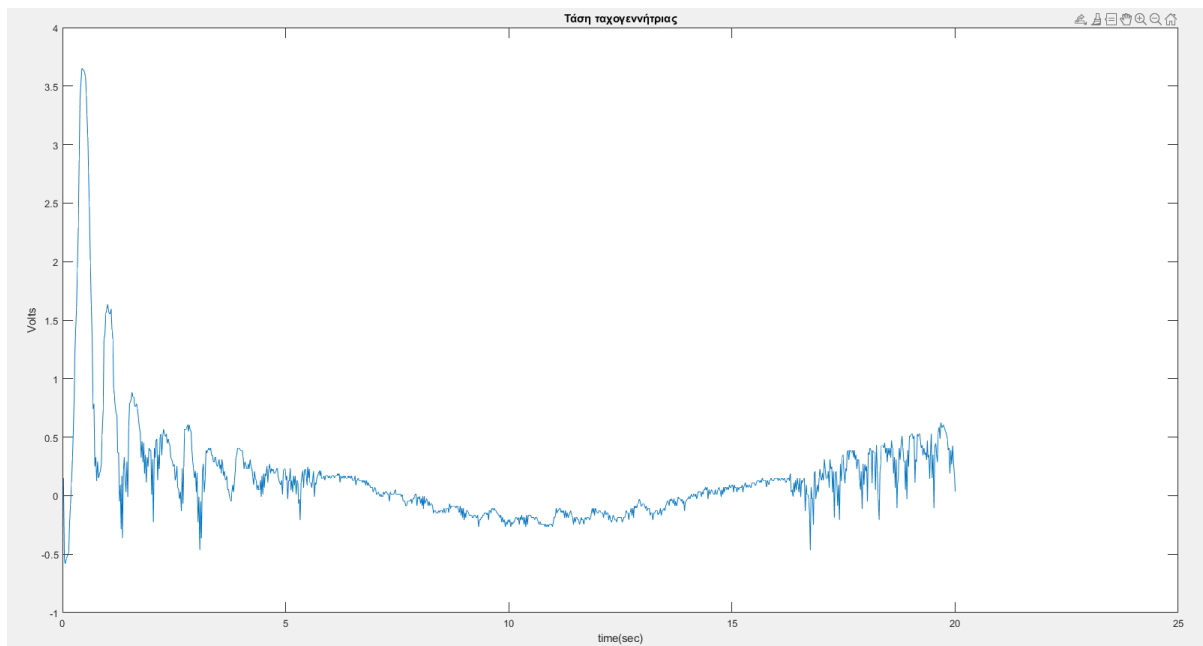


Είναι φανερό πως υπάρχει αδυναμία της εξόδου να ακολουθήσει την είσοδο αναφοράς θ_{ref} , ιδιαίτερα στα πρώτα δύο δευτερόλεπτα, για τις συχνότητες ω_1 , ω_2 . Σημαντικό είναι να αναφέρουμε πως η έξοδος (θέση-τάση) ξεκινάει από τα 2Volts ενώ η είσοδος αναφοράς από τα 5Volts, το οποίο ισχύει για κάθε γωνιακή ταχύτητα ω .



Τέλος για $\omega = \pi/10$ rad/sec :





Από τα παραπάνω διαγράμματα παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται η συχνότητα του ημιτόνου της εισόδου αναφοράς, τόσο μεγαλύτερο είναι και το σφάλμα. Το σφάλμα αυτό σχεδόν μηδενίζεται στην μόνιμη κατάσταση στην πιο μικρή συχνότητα, το οποίο είναι αναμενόμενο γιατί η είσοδος αναφοράς μεταβάλλεται πιο <<αργά>> και έτσι η έξοδος προλαβαίνει τη μεταβολή αυτής.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ 3: ΑΠΟΣΒΕΣΗ ΔΙΑΤΑΡΑΧΩΝ ΜΕ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΝΑΔΡΑΣΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ

Στο 2ο εργαστήριο είχε επιλεγεί κατάλληλος ελεγκτής γραμμικής ανάδρασης καταστάσεων που ανάγκαζε την έξοδο του συστήματος να συγκλίνει στην επιθυμητή τιμή θ_{ref} . Ωστόσο το μηχανικό φρένο (διαταραχή) αλλοίωνε την αποτελεσματικότητα του ελεγκτή. Για αυτό είναι αναγκαία η επιλογή ενός νέου ελεγκτή **δυναμικής** ανάδρασης καταστάσεων που θα αποσβένει το μαγνητικό φρένο (διαταραχή) και θα επιτυγχάνεται ο στόχος ελέγχου $y = \theta_{\text{ref}}$ ασυμπτωτικά.

Έχοντας αποδείξει στο 2ο εργαστήριο ότι το σύστημα είναι **ελέγξιμο**, και πάλι το ζητούμενο είναι εφικτό μέσω του παρακάτω ελεγκτή:

Οι εξισώσεις του ελεγκτή δυναμικής ανάδρασης καταστάσεων είναι :

$$U = -k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_3 z \quad \text{όπου } z \in \mathbb{R} \text{ και } X = [x_1 \ x_2]^T$$

$$Z' = y - r = x_2 - r$$

Κλείνοντας τον βρόχο το σύστημα πλέον γίνεται:

$$X_1' = -\frac{1}{Tm} x_1 + \frac{km \cdot kt}{Tm} (-k_1 \cdot x_1 - k_2 \cdot x_2 - k_3 \cdot z)$$

$$X_2' = \frac{k\mu \cdot k_o}{k\tau} x_1$$

$$Z' = x_2 - r$$

Σε μορφή πινάκων το σύστημα μπορεί να γραφεί:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ z' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{(1+kmktk_1)}{Tm} & -\frac{kmktk_2}{Tm} & -\frac{kmktk_3}{Tm} \\ \frac{k\mu \cdot k_o}{k\tau} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot r \end{aligned}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του είναι :

$$\det(sI-A) = s^3 + \frac{(1+km \cdot kt \cdot k_1)}{Tm} s^2 + \frac{km \cdot k\mu \cdot ko \cdot k_2}{Tm} s + \frac{k\mu \cdot ko \cdot km \cdot k_3}{Tm}$$

Με απαιτούμενη την ευστάθεια του συστήματος, θα εφαρμόσω το κριτήριο Routh-Hurwitz :

$$\begin{array}{l|ll} s^3 & 1 & \frac{km \cdot k\mu \cdot ko \cdot k_2}{Tm} & 0 \\ s^2 & \frac{(1+km \cdot kt \cdot k_1)}{Tm} & \frac{k\mu \cdot ko \cdot km \cdot k_3}{Tm} & 0 \\ s & \frac{\left(\frac{k\mu \cdot ko \cdot km \cdot k_2}{Tm^2} (1+km \cdot kt \cdot k_1) - \frac{k\mu \cdot ko \cdot km \cdot k_3}{Tm} \right)}{\frac{(1+km \cdot kt \cdot k_1)}{Tm}} & & 0 \\ s^0 & \frac{k\mu \cdot ko \cdot km \cdot k_3}{Tm} & & 0 \end{array}$$

Πρέπει οι όροι της 1ης στήλης να είναι ομόσημοι, επομένως λόγω του 1ου στοιχείου πρέπει να είναι θετικοί ώστε το σύστημα να είναι ευσταθές, έτσι προκύπτει ο περιορισμός:

$$\frac{\left(\frac{k\mu \cdot ko \cdot km \cdot k_2}{Tm^2} (1+km \cdot kt \cdot k_1) - \frac{k\mu \cdot ko \cdot km \cdot k_3}{Tm} \right)}{\frac{(1+km \cdot kt \cdot k_1)}{Tm}} > 0 \Rightarrow$$

Με αριθμητική αντικατάσταση προκύπτει:

$$3,985 \cdot k_1 + 3,213 \cdot k_2 \cdot k_1 > 2,52 \cdot k_3$$

Προκύπτει ο παραπάνω περιορισμός (1) για τα κέρδη του ελεγκτή ώστε το σύστημα να είναι ευσταθές.

Επιπλέον, απαιτείται η απόκριση του συστήματος να μην παρουσιάζει υπερύψωση και ο χρόνος αποκατάστασης να είναι ελάχιστος δυνατός.

Για αυτούς τους λόγους το επιθυμητό πολυώνυμο του συστήματος είναι της μορφής :

$$P_d(s) = (s+m) \cdot (s+p)^2 = s^3 + (2p+m)s^2 + (p^2 + 2pm)s + mp^2 \text{ όπου } m, p > 0 \text{ και } m > p$$

Το επιθυμητό πολυώνυμο έχει τρεις πραγματικές αρνητικές ρίζες, δηλαδή έναν απλό πόλο στη θέση $s=-m$ και έναν διπλό στη θέση $s=-p$. Η επιλογή πραγματικών πόλων, δηλαδή πραγματικών ιδιοτιμών εξασφαλίζει ότι το σύστημα δεν θα έχει υπερύψωση.

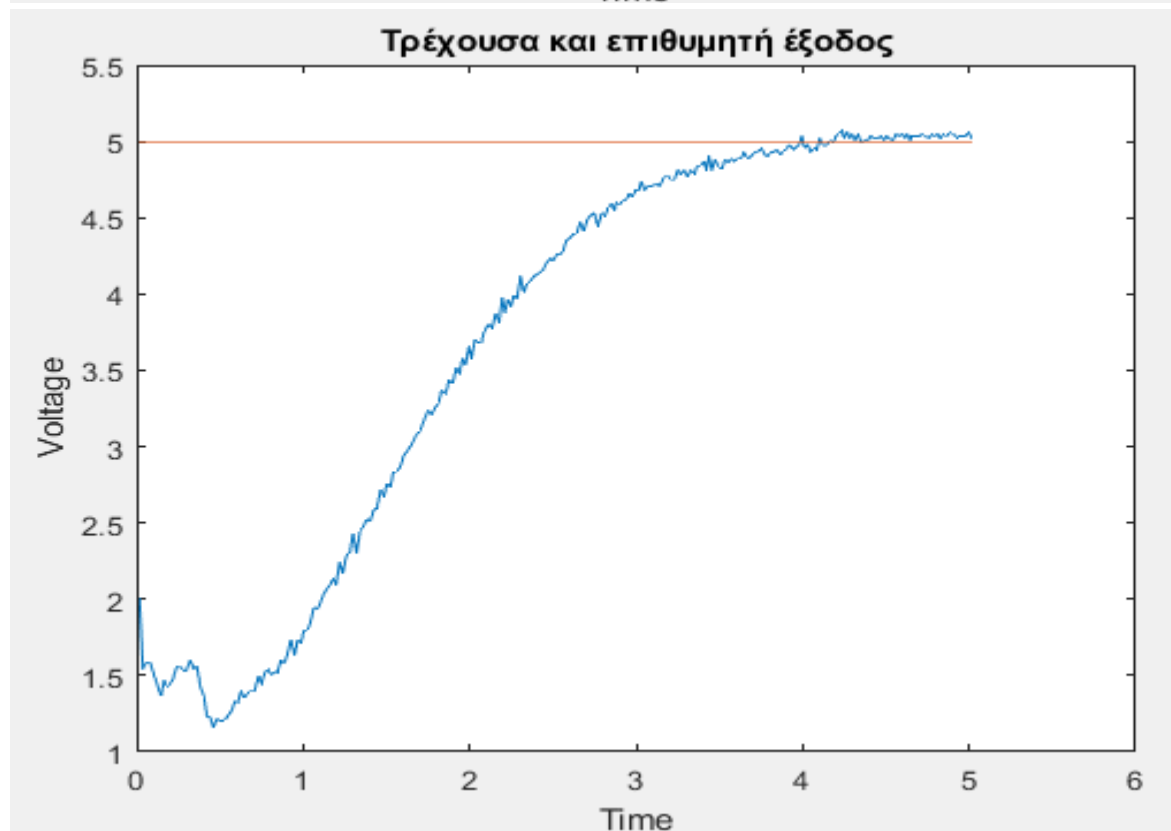
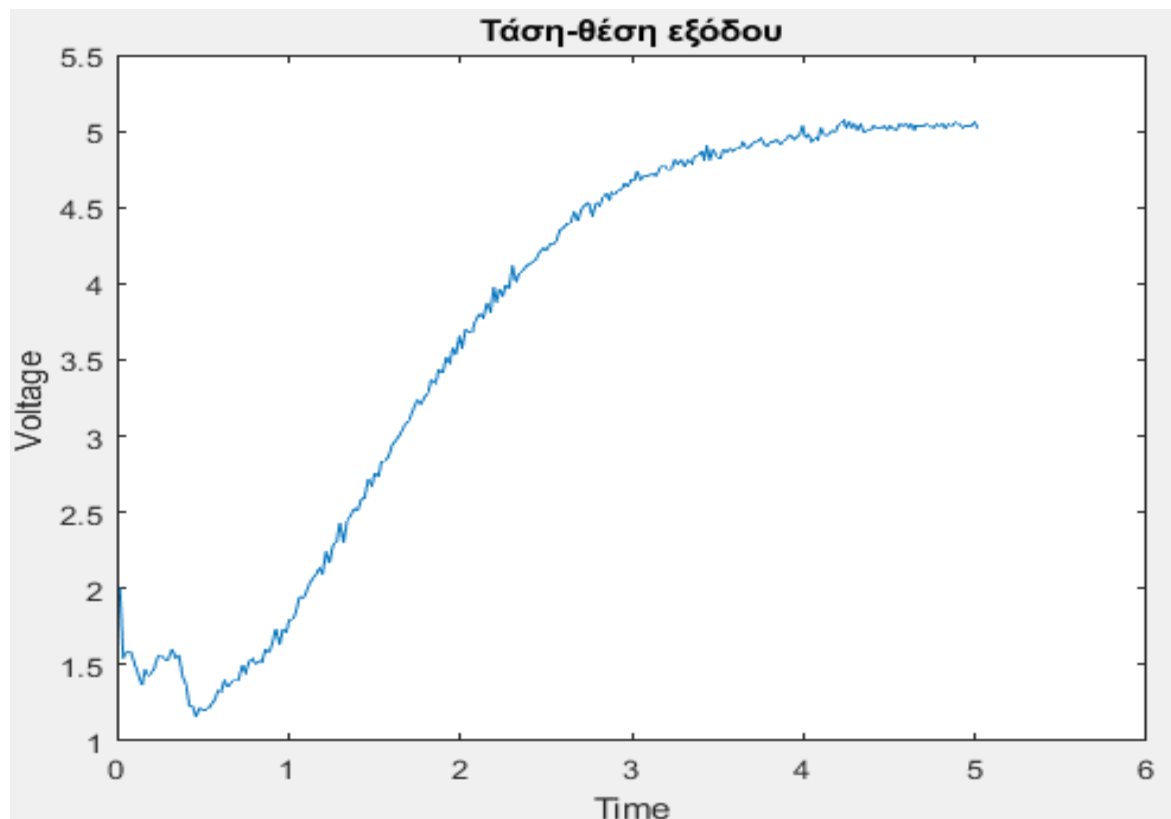
Ο γεωμετρικός τόπος ριζών του συστήματος, καθώς αυτό έχει τρεις πόλους, θα έχει τρεις κλάδους που τείνουν στο άπειρο με την αύξηση των κερδών και ένα σημείο απόσχισης. Με την επιλογή του διπλού πόλου $s=-p$, ο κυρίαρχος πόλος που καθορίζει την ταχύτητα της απόκρισης, βρίσκεται όσο πιο αριστερά γίνεται, επομένως η απόκριση είναι η ταχύτερη δυνατή και ο χρόνος αποκατάστασης ισούται περίπου $t_s \cong \frac{4}{p}$.

Εξισώνοντας τους συντελεστές των δύο πολυωνύμων, τα κέρδη του ελεγκτή προκύπτουν:

$$k_1 = \frac{(2p+m) \cdot Tm-1}{kmkt} \quad k_2 = \frac{(p^2 + 2pm) \cdot Tm}{kmk\mu ko} \quad k_3 = \frac{mp^2 \cdot Tm}{kmk\mu ko}$$

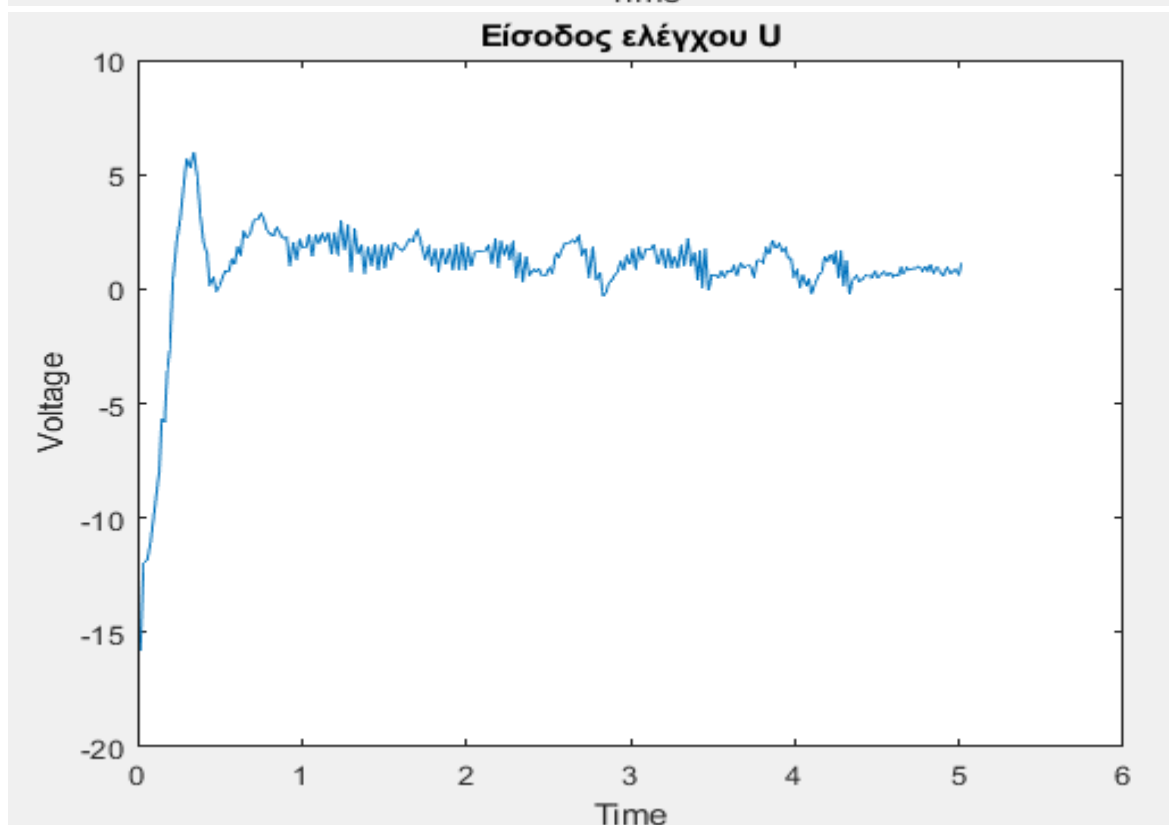
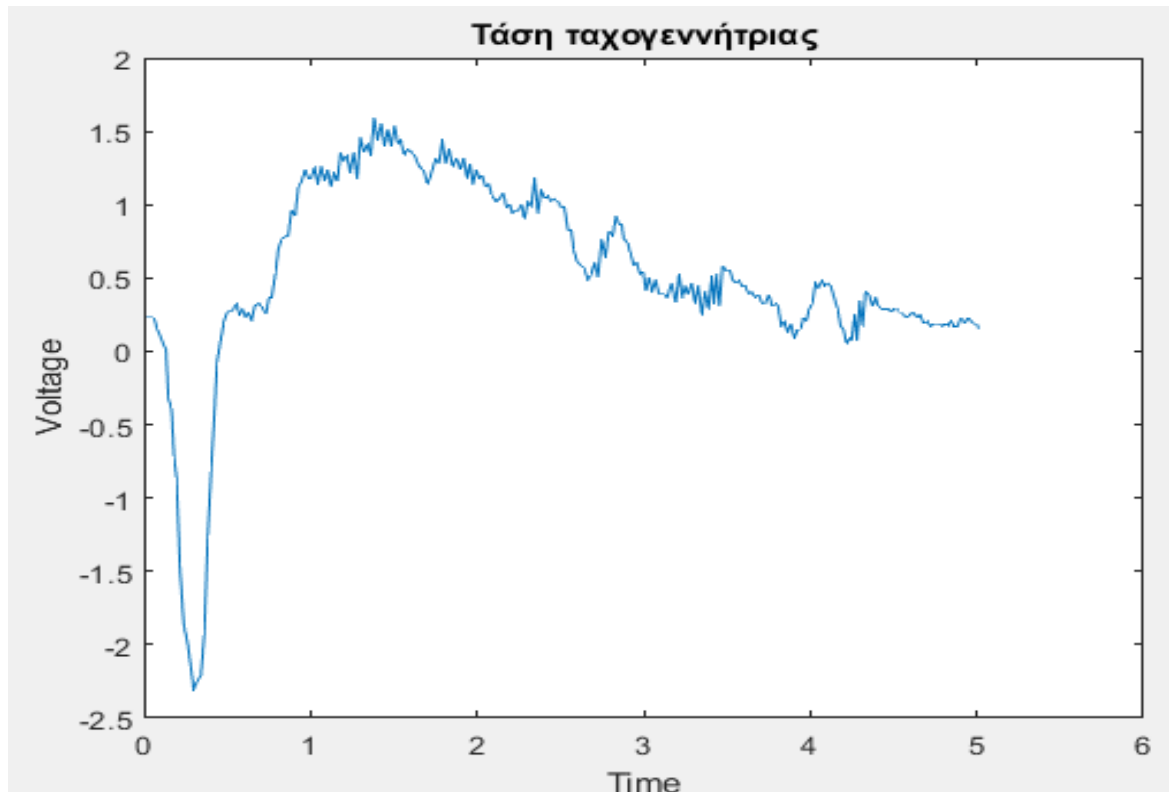
Με κατάλληλη επιλογή των σταθερών m, p με $m > p > 0$ βρίσκουμε τα κέρδη του ελεγκτή μέσω του πειράματος που ταυτόχρονα πρέπει εξασφαλίζουν την ευστάθεια του συστήματος, δηλαδή ικανοποιούν τον περιορισμό (1).

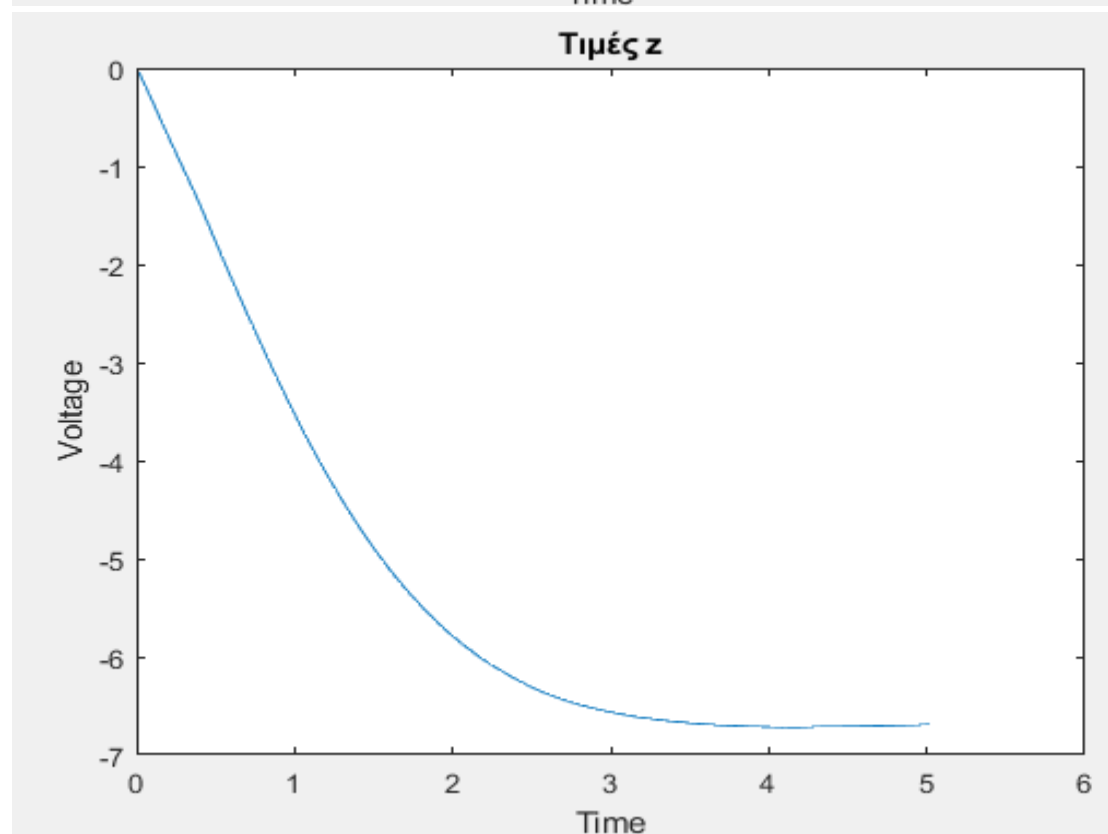
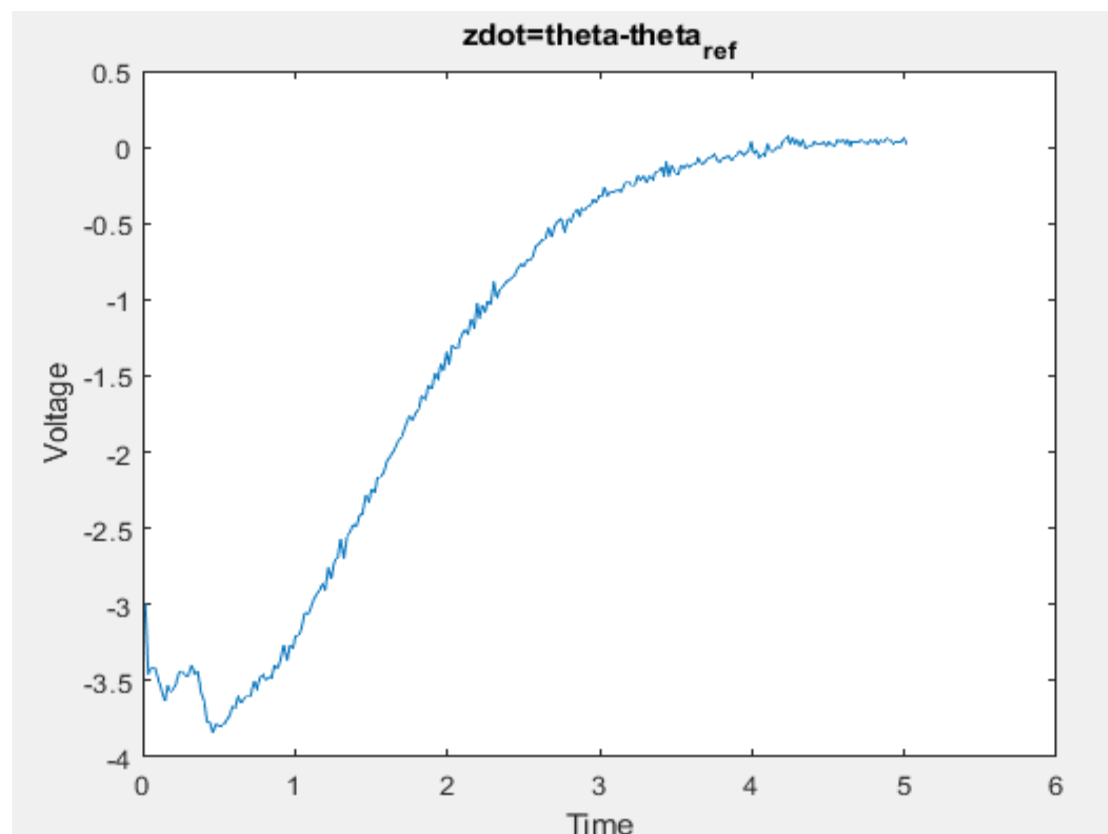
Στο πείραμα οι πόλοι επιλέχτηκαν: $m=3.7$, $p=2$ επομένως τα κέρδη υπολογίστηκαν $k_1=4.8$, $k_2=7.5$ και $k_3=5.8$ τα οποία και ικανοποιούν τον περιορισμό (1) από το κριτήριο Ruth-Hurwitz.



Παρατηρώ ότι ο χρόνος αποκατάστασης είναι 3,5 δευτερόλεπτα.

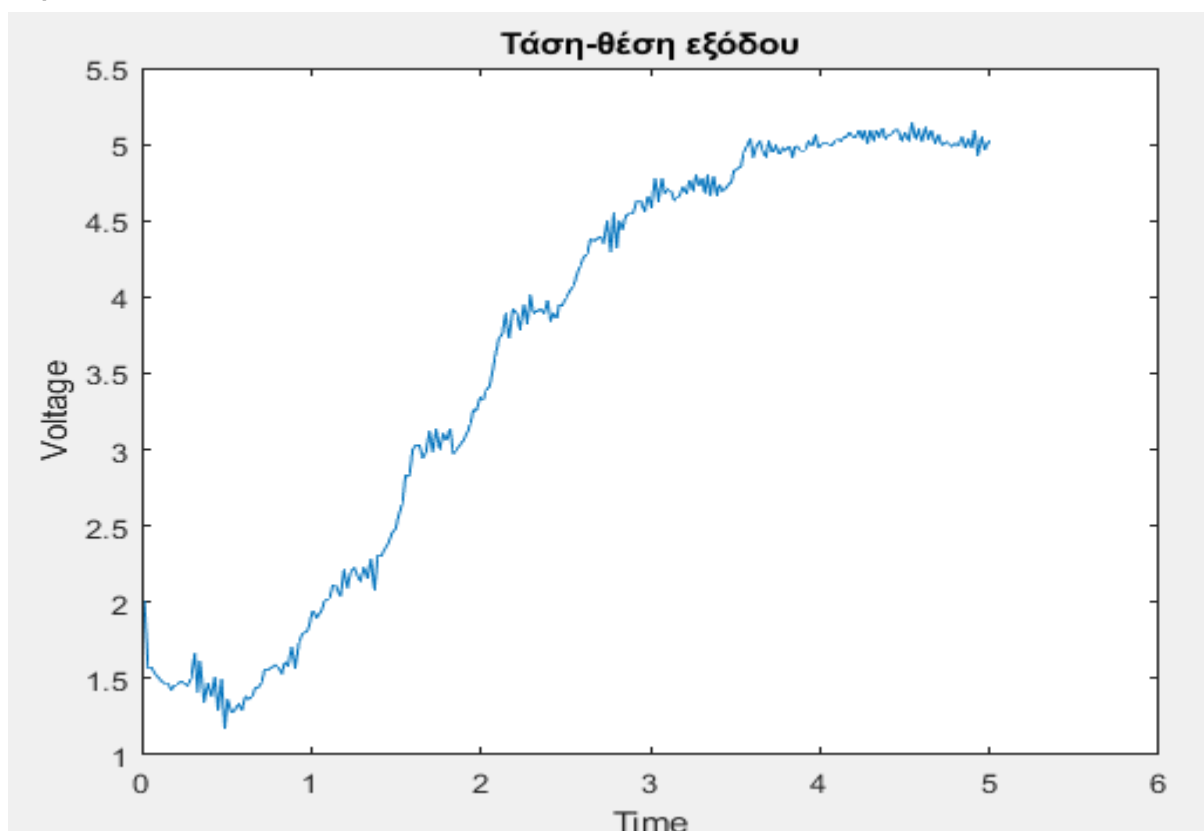
Παρακάτω είναι τα διαγράμματα της τάσης της ταχογεννήτριας (1η κατάσταση) ,της είσοδου ελέγχου U και της τιμής z παράγωγος, δηλαδή ο ελεγκτής.

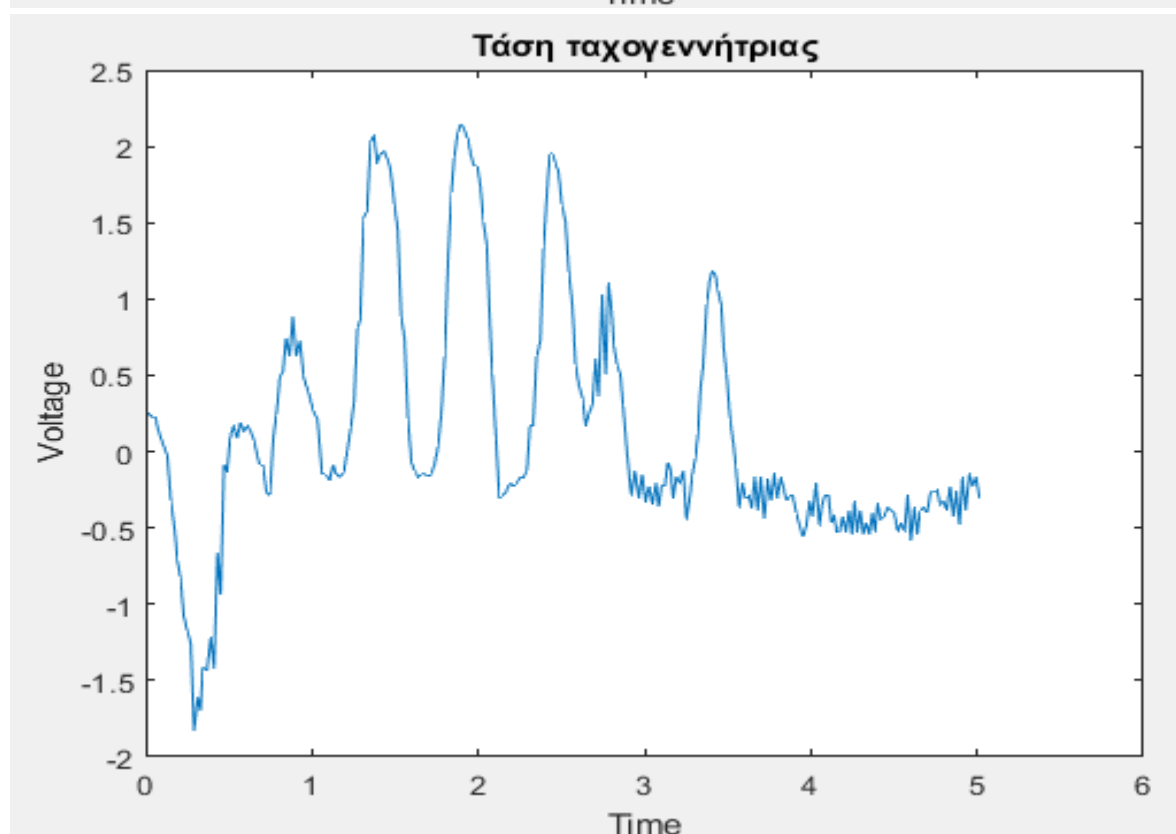
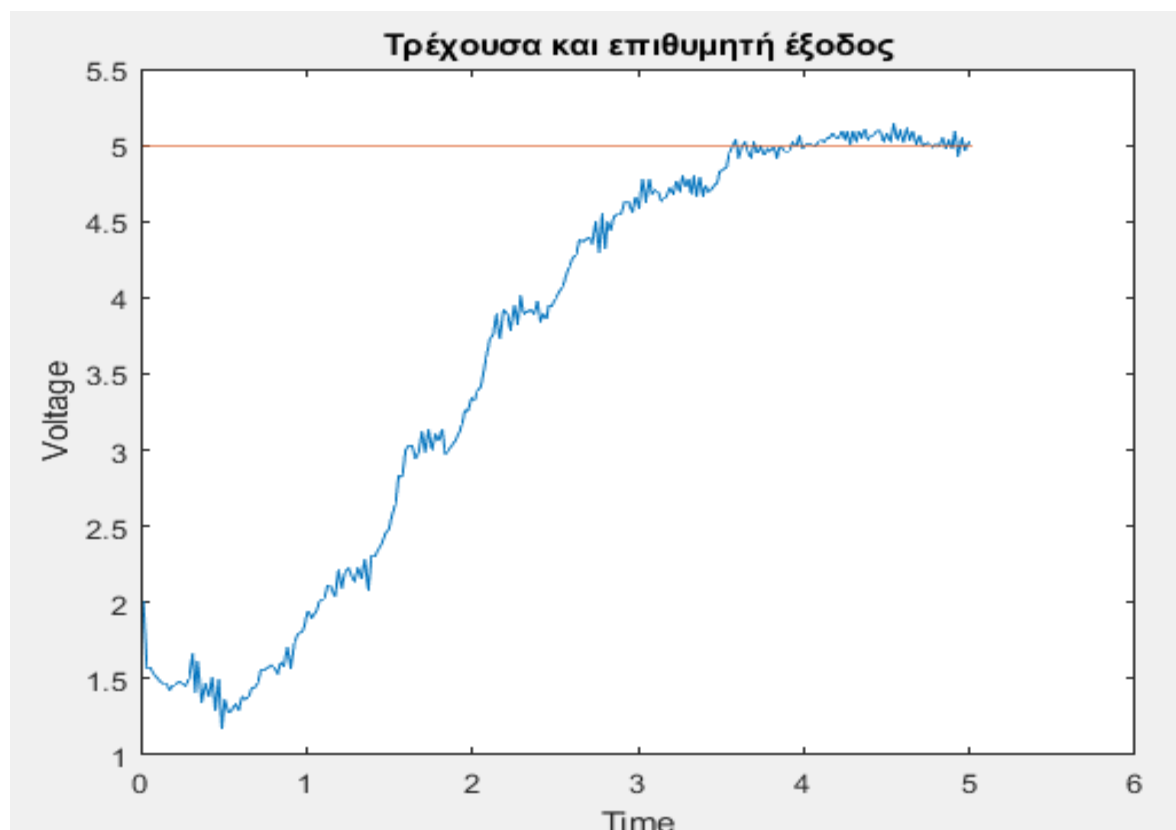


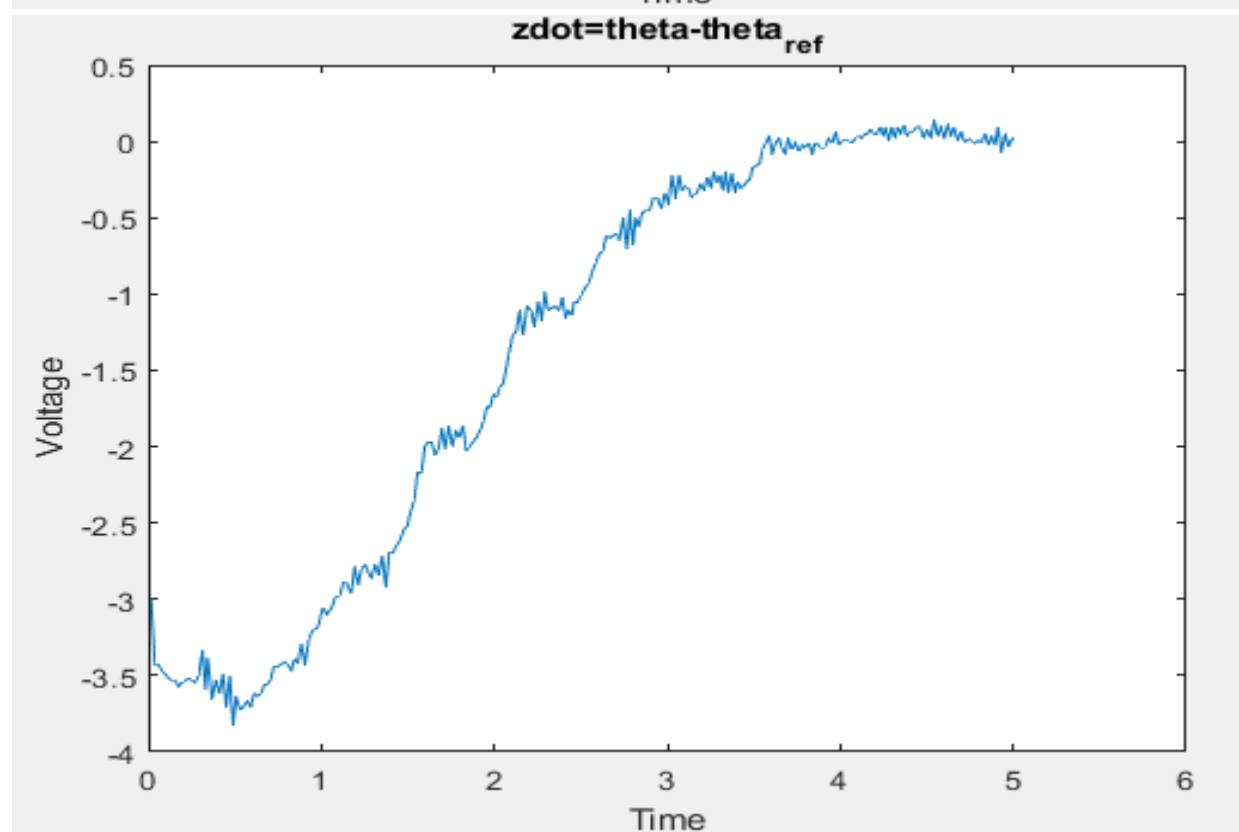
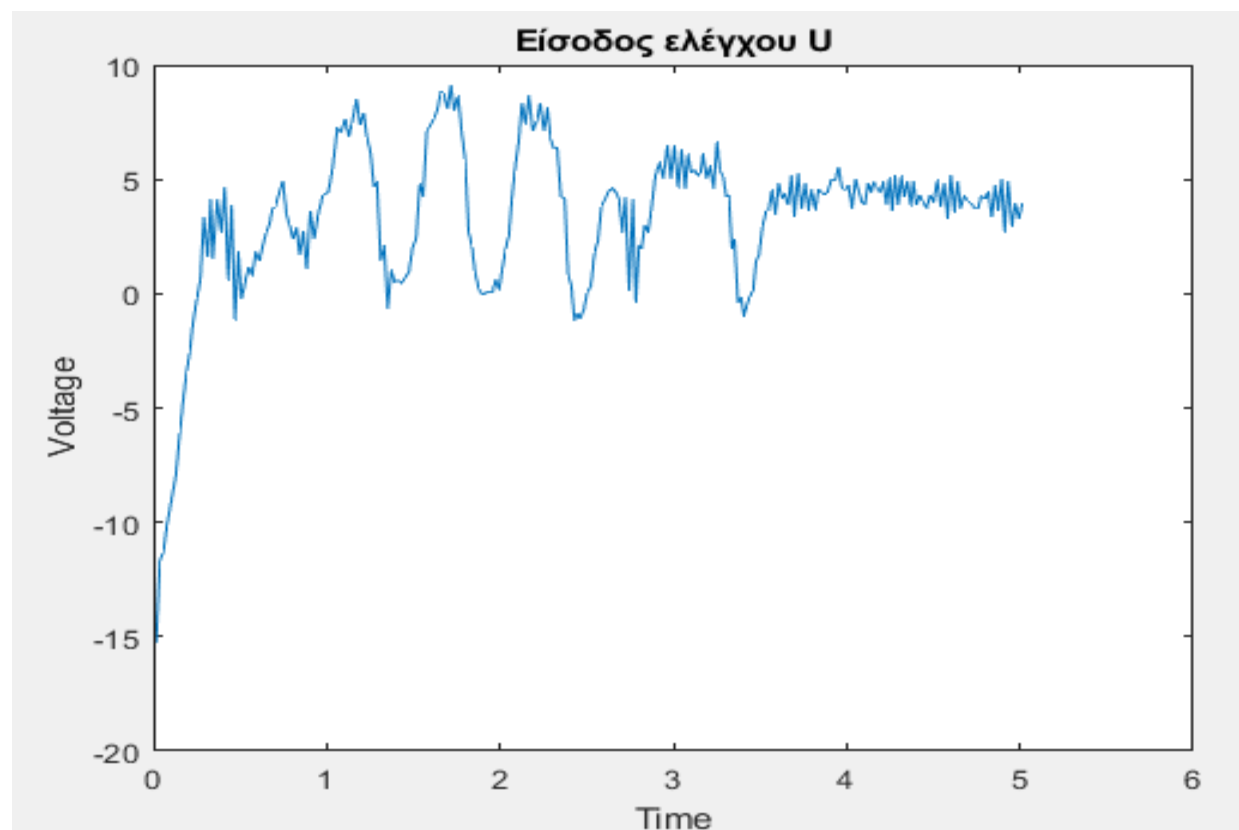


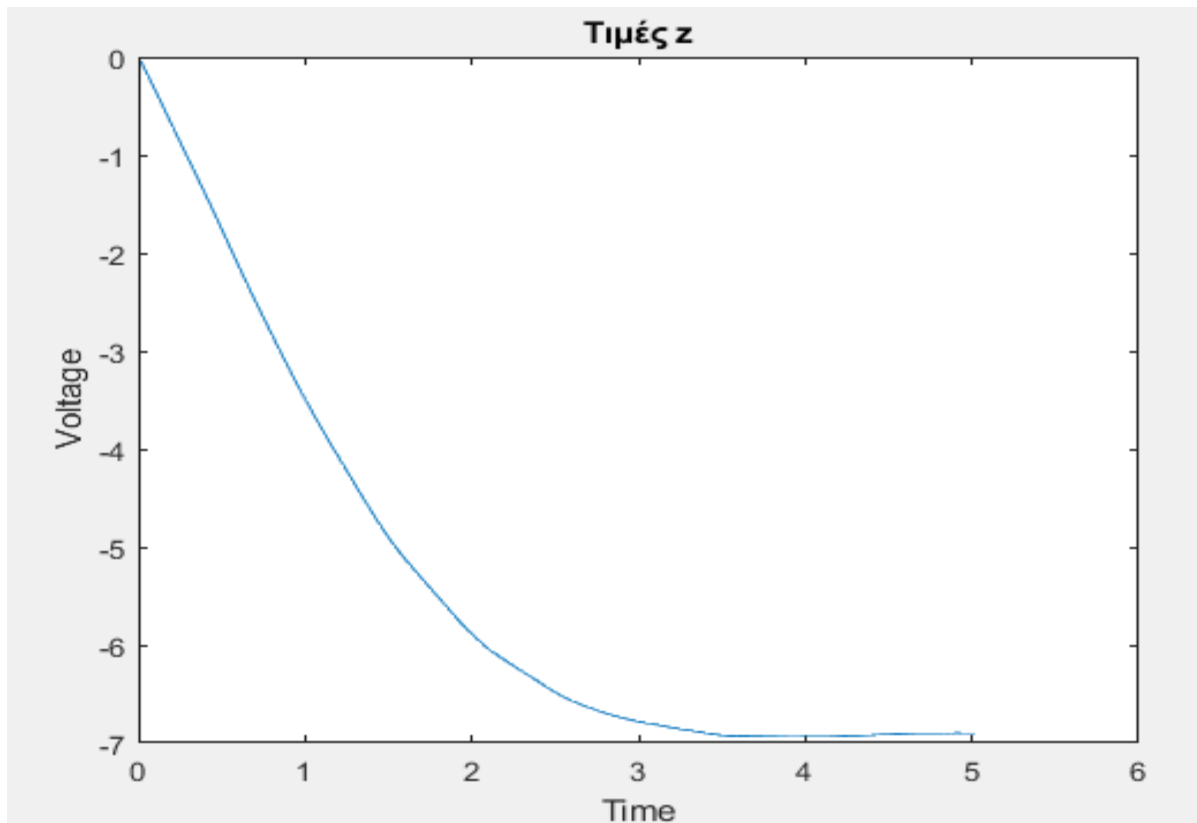
Όπως παρατηρώ από το διάγραμμα του $zdot$ το οποίο εκφράζει το σφάλμα (error) αυτό σταθεροποιείται στο 0 μετά από 3,5 περίπου δευτερόλεπτα, δηλαδή στη μόνιμη κατάσταση πράγματι η έξοδος (θέση) ακολουθεί την είσοδο αναφοράς θ_{ref} .

Επειδή στην εργαστηριακή άσκηση είχα τον DC κινητήρα με το **μηχανικό φρένο**, για λόγους πληρότητας θα προσθέσω και τα διαγράμματα με κατεβασμένο το μηχανικό φρένο για να φανεί κατά πόσο εφικτή ήταν η απόσβεση της διαταραχής και ο έλεγχος της εξόδου:









Παρατηρώ ότι πράγματι η έξοδος φτάνει στην επιθυμητή θέση, δηλαδή ακολουθεί την είσοδο αναφοράς θ_{ref} .

Οι πόλοι επιλέχτηκαν $p=2$ και $m=3.5$ και τα κέρδη υπολογίστηκαν: $k_1=4.6$, $k_2=7.2$ και $k_3=5.6$

Παρατηρώ ότι ο χρόνος αποκατάστασης είναι περίπου 4 δευτερόλεπτα.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ 4: ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΣ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΑΠΟ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΕΙΣΟΔΟΥ-ΕΞΟΔΟΥ

Στο συγκεκριμένο εργαστήριο σχεδιάστηκε ένα σύστημα εκτίμησης των καταστάσεων του συστήματος (παρατηρητής).

Προκειμένου να σχεδιάσουμε έναν παρατηρητή του συστήματος, πρέπει αρχικά να διαπιστώσουμε εάν αυτό είναι παρατηρήσιμο. Η συνθήκη που το εξασφαλίζει αυτό είναι ο πίνακας παρατηρησιμότητας W να έχει βαθμό ίσο με την τάξη του συστήματος, δηλαδή $\text{rank}(W)=2$.

$W = \begin{bmatrix} C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ παρατηρώ ότι $\det(W) = -\frac{k_0 \cdot k_\mu}{kt} \neq 0$
 $\begin{bmatrix} C A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k_0 \cdot k_\mu}{kt} & 0 \end{bmatrix}$ άρα ο W έχει βαθμό 2, συνεπώς το σύστημα είναι παρατηρήσιμο.

Έτσι είναι δυνατή η σχεδίαση ενός συστήματος εκτιμήσεων των καταστάσεων από μετρήσεις εισόδου - εξόδου, όπου είσοδος είναι η είσοδος ελέγχου U και έξοδος η θέση-τάση.

Έστω x_{est} η εκτίμηση των καταστάσεων από τον παρατηρητή και το σύστημα που τον περιγράφει :

$\dot{x}_{\text{est}} = Ax_{\text{est}} + Bu + L(y - Cx_{\text{est}})$ όπου ο όρος $L(y - Cx_{\text{est}})$ περιγράφει το αναλογικό σφάλμα στη μέτρηση της εξόδου.

Αν ορίσω το σφάλμα $e = x - x_{\text{est}}$ τότε η διαφορική του εξίσωση είναι:

$e' = (A - LC)e$ επομένως ο πίνακας L θα επιλεγεί έτσι ώστε όλες οι ιδιοτιμές του $A - LC$ να έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος ώστε το σφάλμα e να συγκλίνει εκθετικά στο μηδέν.

Όπως είναι γνωστά:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{Tm} & 0 \end{bmatrix} \quad C = [0 \ 1] \quad \text{και ορίζω } L = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{bmatrix} \frac{k\mu \cdot k_0}{kt} & 0 \end{bmatrix}$$

Τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A-LC:

$$p(s) = s^2 + (l_2 + \frac{1}{Tm})s + l_1 \cdot k\mu \cdot \frac{k_0}{kt} + l_2 \cdot \frac{1}{Tm}$$

Έστω το επιθυμητό πολυώνυμο :

$P_d(s) = s^2 + 2ps + p^2$ με $p > 0$ ώστε οι ιδιοτιμές (ρίζες του πολυωνύμου) να είναι αρνητικές.

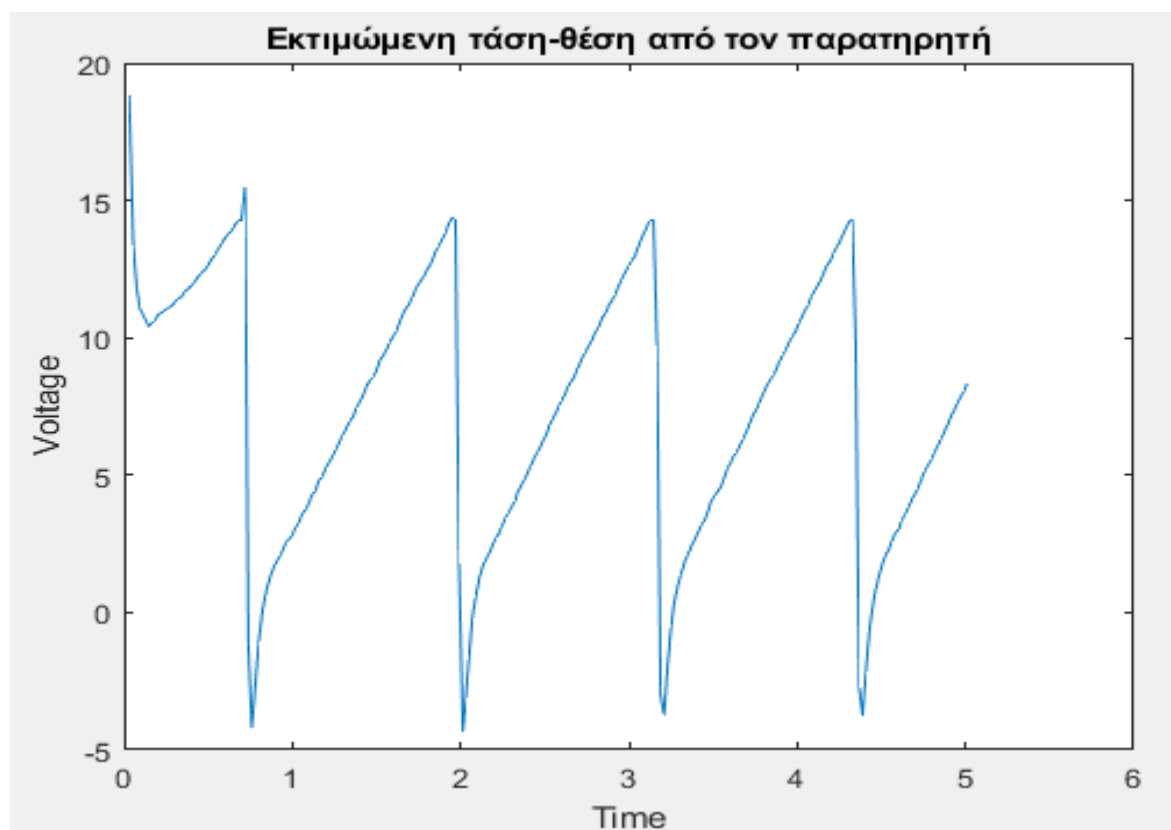
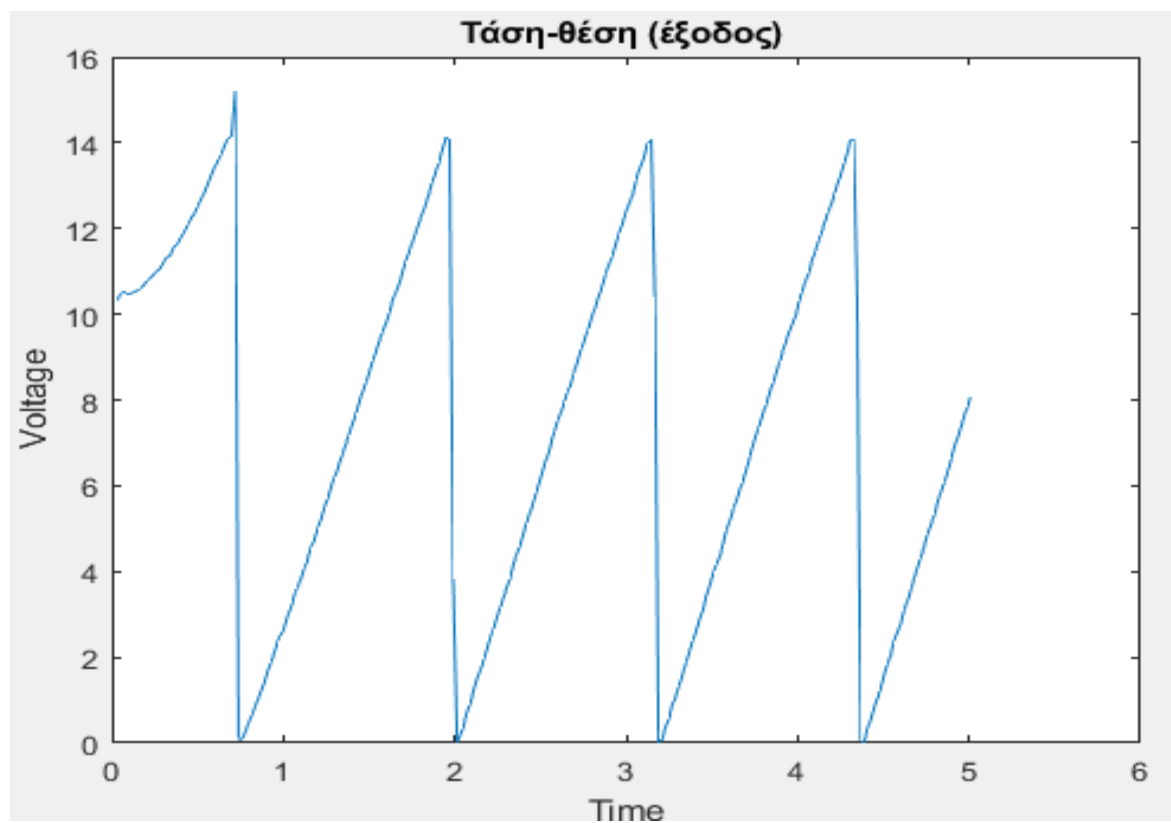
Έτσι οι τιμές l_1, l_2 , μπορούν να υπολογιστούν από την ισότητα των δύο πολυωνύμων:

$l_2 = 2p - \frac{1}{Tm}$ και $l_1 = \left(p^2 - \left(2p - \frac{1}{Tm} \right) \cdot \frac{1}{Tm} \right) \cdot \frac{kt}{k\mu \cdot k_0}$ και πλέον το σύστημα του παρατηρητή είναι γνωστό.

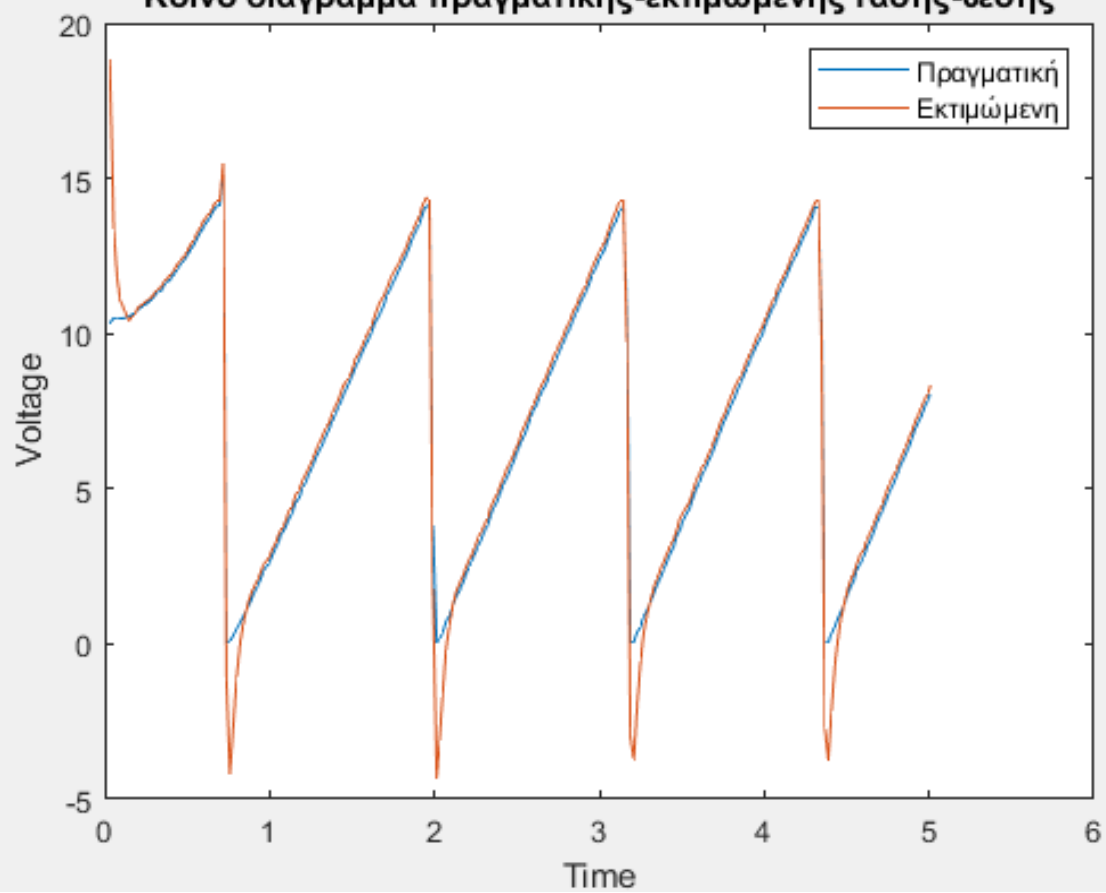
Επιλέγοντας μεγάλες τιμές του p ο παρατηρητής γίνεται όλο και ταχύτερος (αφού το σφάλμα συγκλίνει γρηγορότερα στο 0) με αποτέλεσμα οι εκτιμήσεις του να είναι ολοένα και πιο κοντά στις πραγματικές, δηλαδή ο παρατηρητής γίνεται ακριβέστερος.

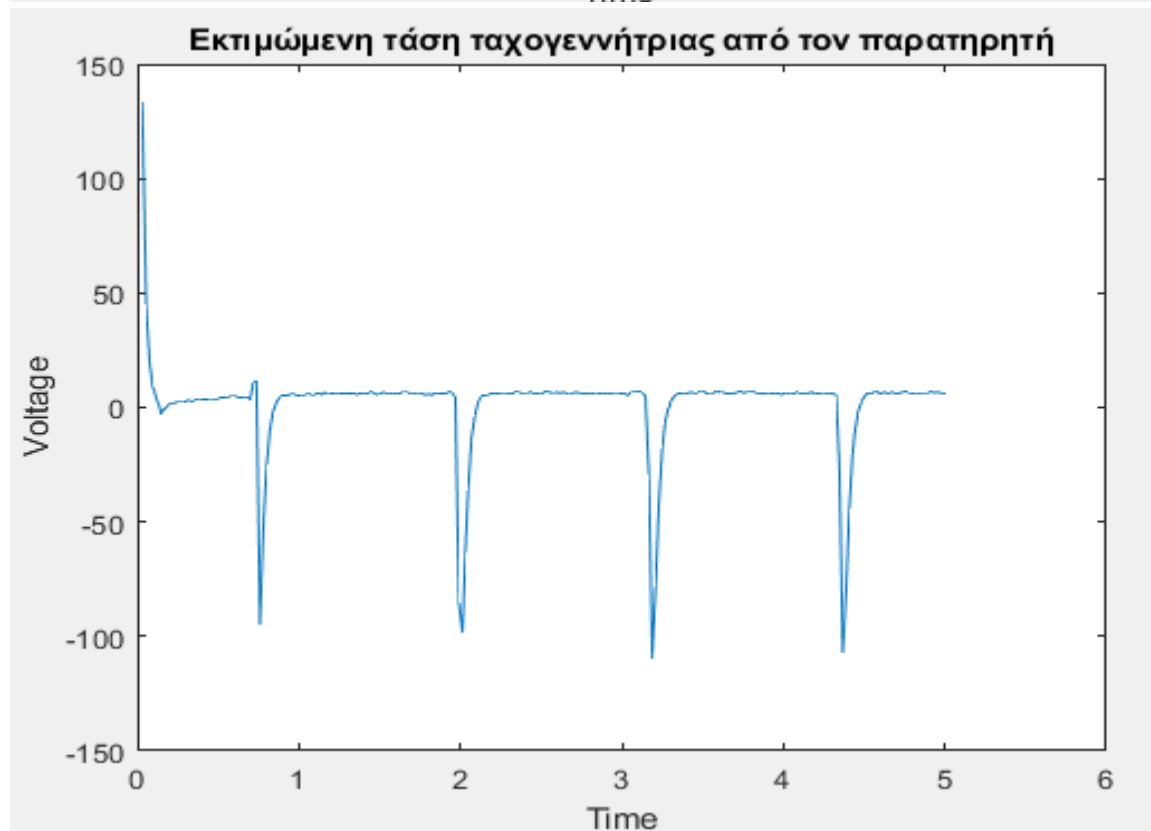
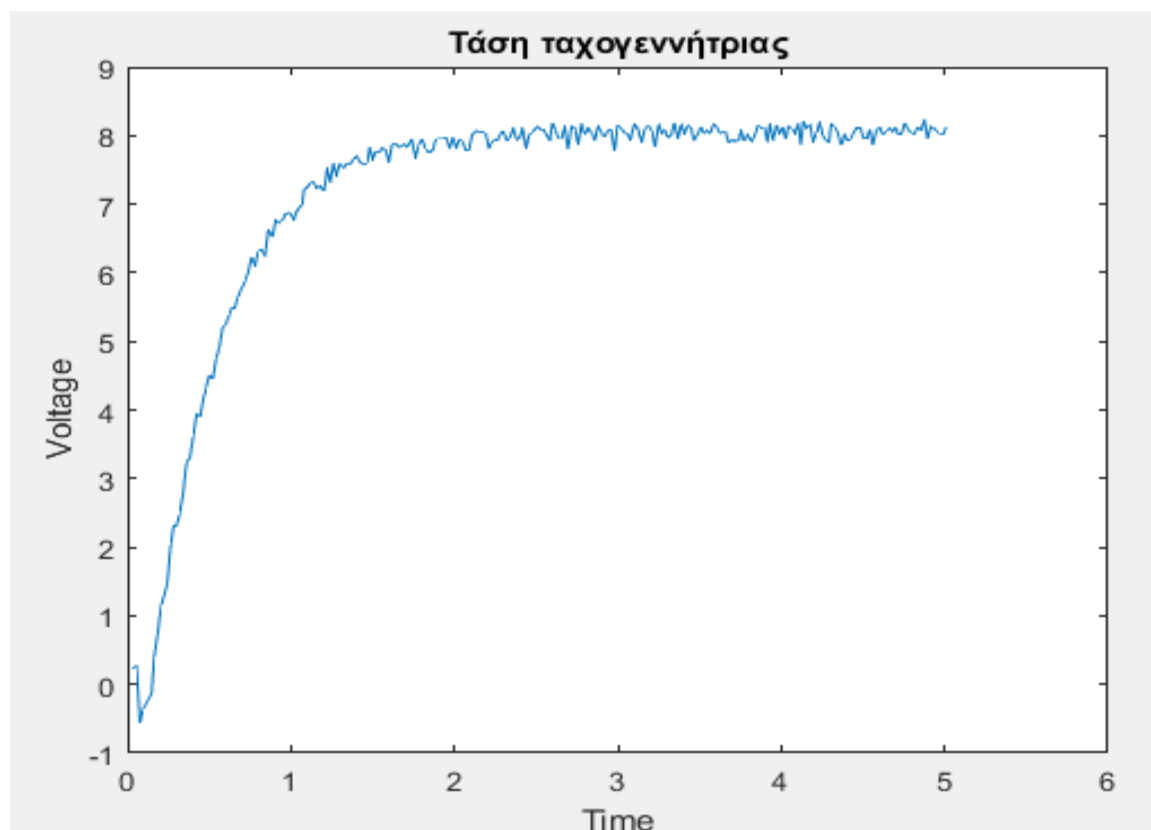
Στο πείραμα δοκιμάστηκε ένα εύρος τιμών των πόλων $p > 0$ και αναλόγως η εκτίμηση των δύο καταστάσεων ήταν καλύτερη:

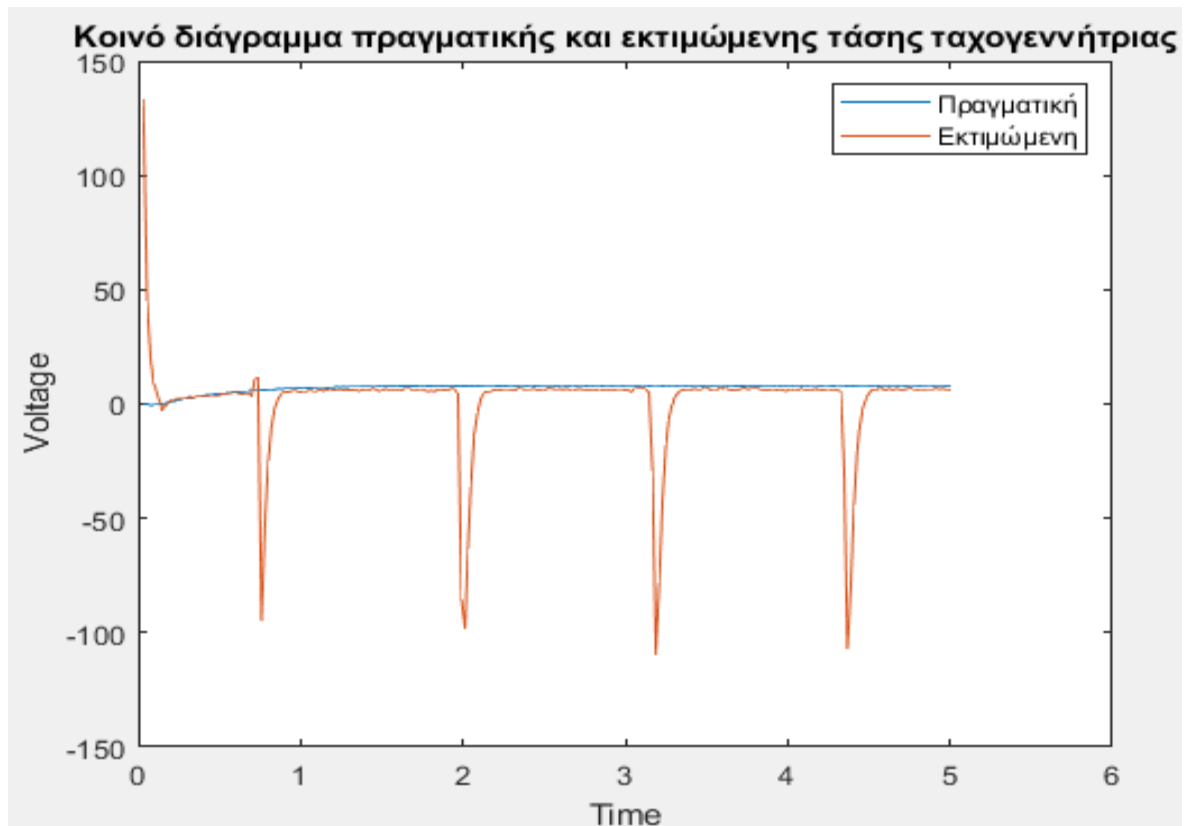
Η πραγματική τάση-θέση (έξοδος) παρουσιάζεται στο παρακάτω διάγραμμα και ακριβώς από κάτω η εκτιμώμενη τάση-θέση που προέκυψε από τον παρατηρητή για $p=30$ και $l_1=411$ και $l_2=58.4$. Παρατηρούμε ότι παρόλο που αρχικά υποθέσαμε τυχαίες αρχικές συνθήκες, ο παρατηρητής αν και υπάρχει κάποιο σφάλμα αρχικά, καταφέρνει να εκτιμήσει με μεγάλη ακρίβεια τις δύο καταστάσεις.



Κοινό διάγραμμα πραγματικής-εκτιμώμενης τάσης-θέσης

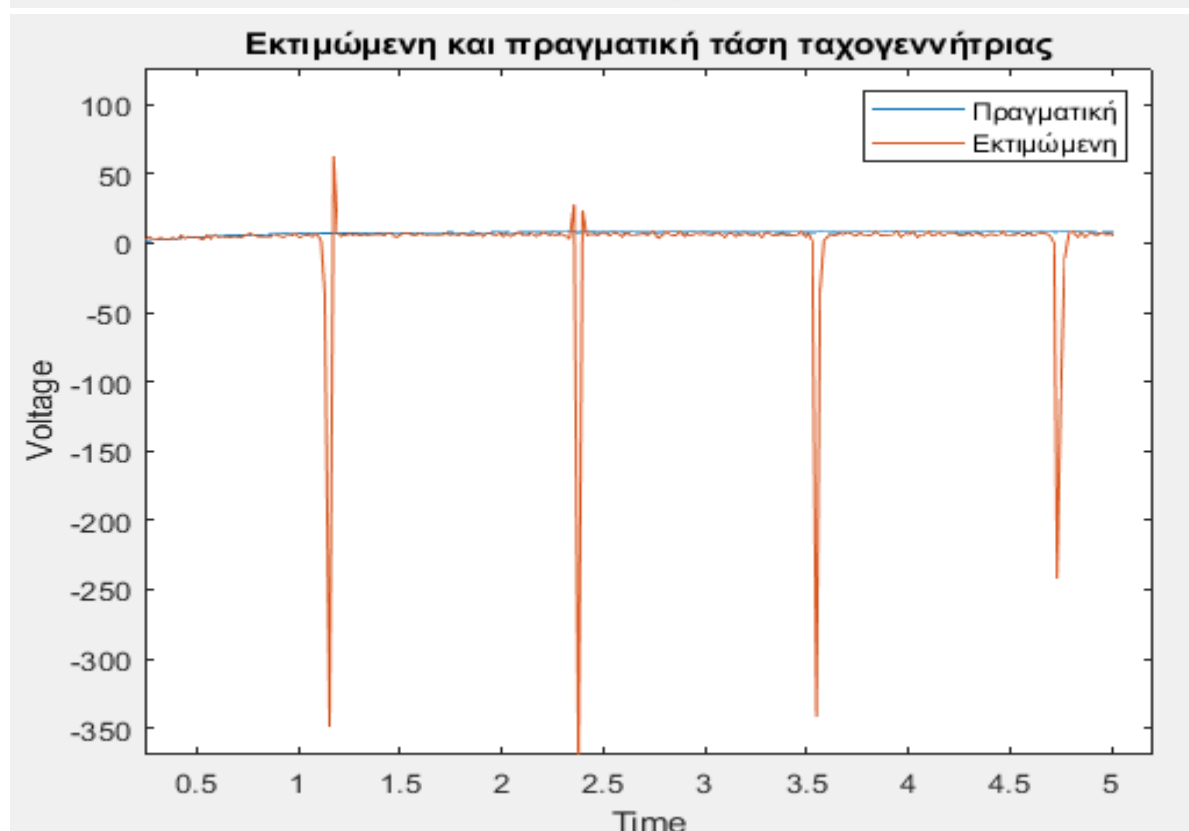
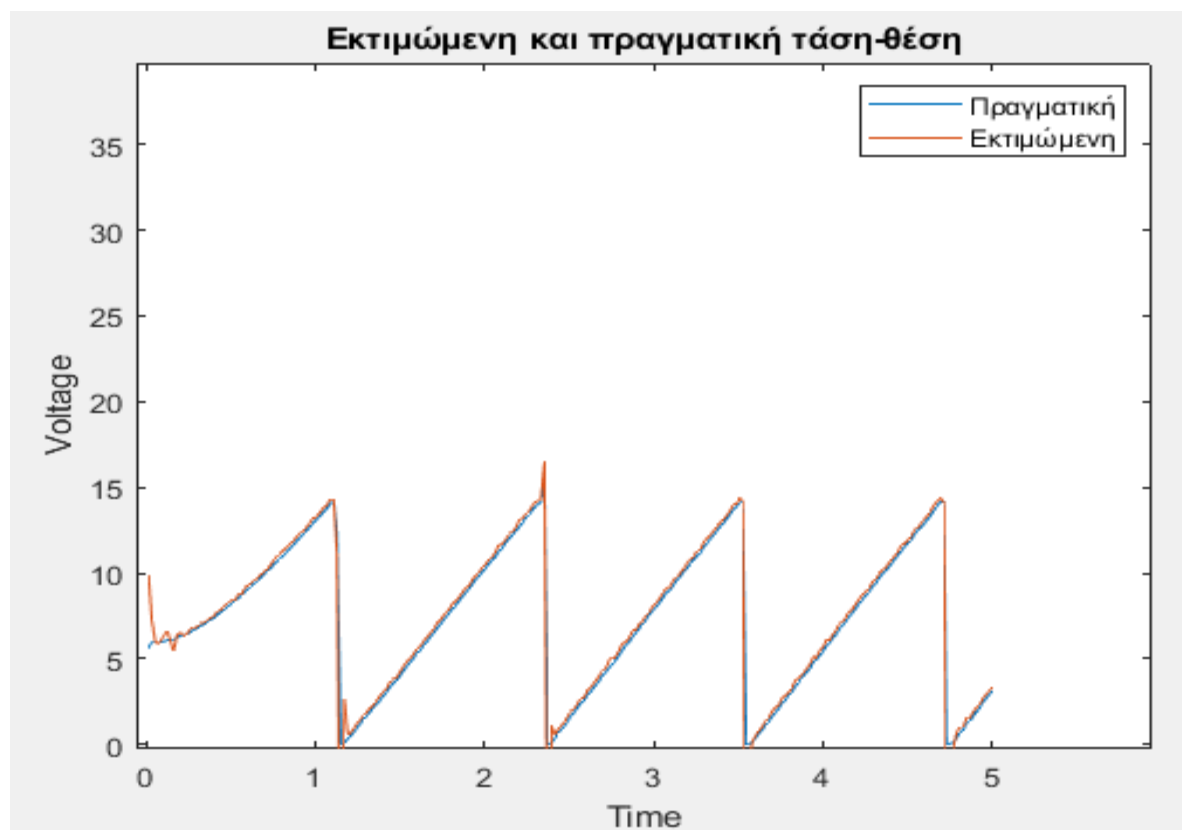


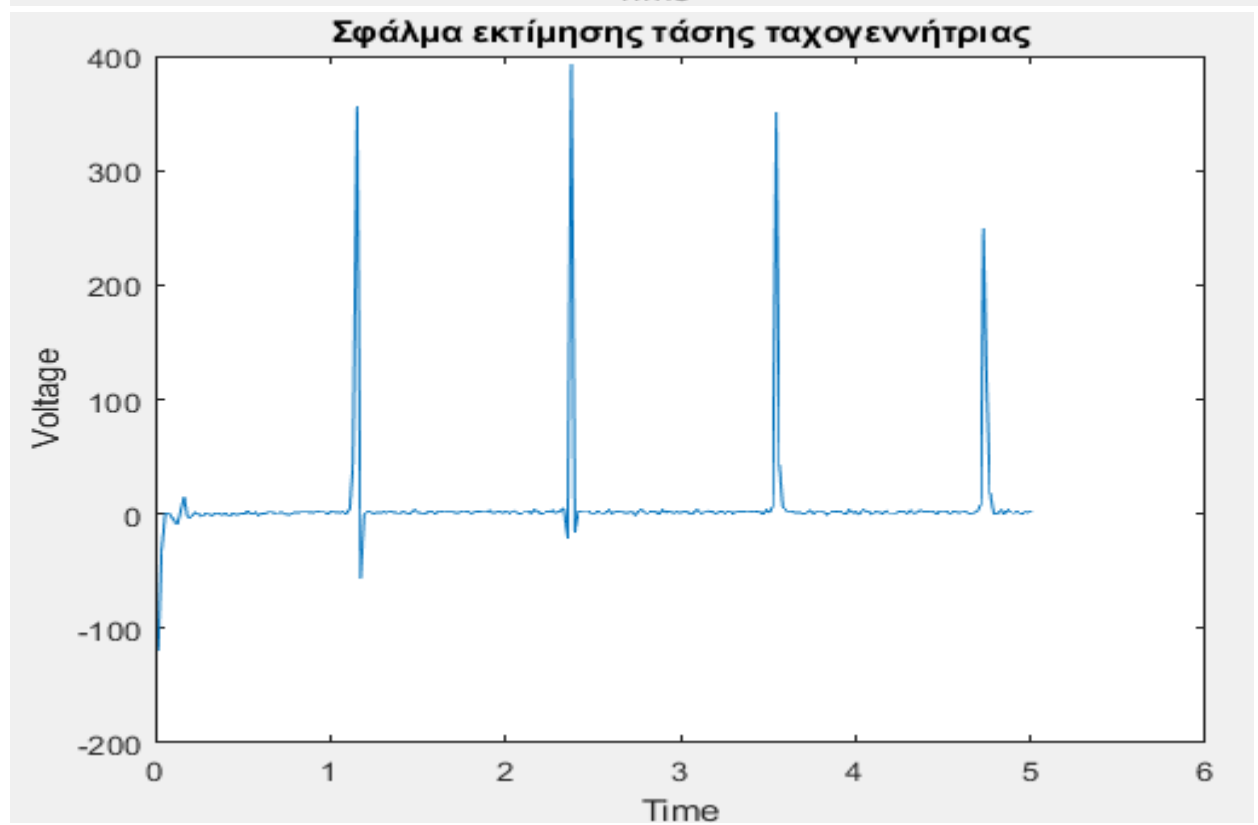
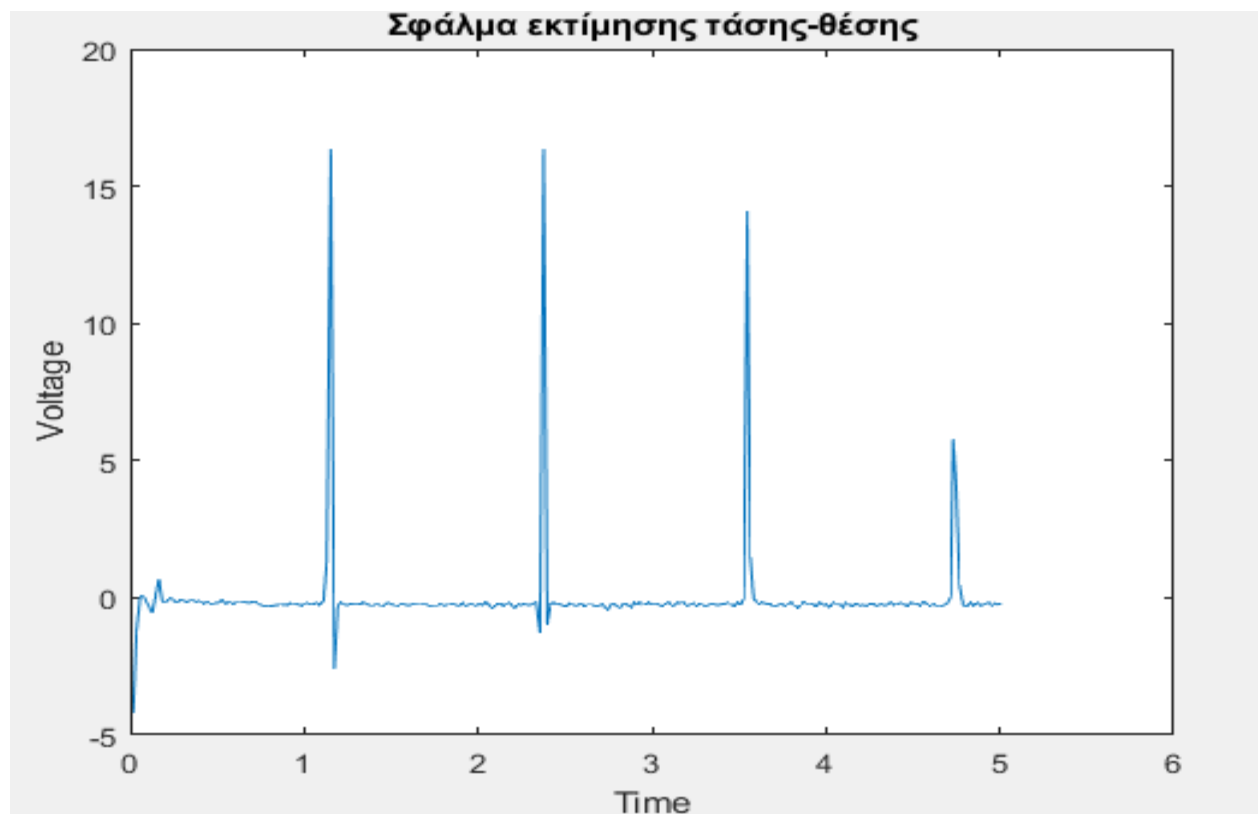




Οι αιχμές-ασυνέχειες του διαγράμματος δείχνει ότι η εκτιμώμενη τάση ταχογεννήτριας αυξάνεται απότομα όταν ομοίως απότομα μηδενίζεται η τάση-θέση (έξοδος) και αυτό συμβαίνει κατά ίσα χρονικά διαστήματα (πλήρη περιστροφή του κινητήρα-μία περίοδος). Αυτό (θεωρώ) ότι οφείλεται στην μεγάλη τιμή του αναλογικού σφάλματος εκτίμησης εκείνη τη χρονική στιγμή.

Στα παρακάτω διαγράμματα ο πόλος p τοποθετείται $p=50$ με $l_1=1.120$ και $l_2=98.4$ και έτσι ο παρατηρητής γίνεται ταχύτερος, δηλαδή το σφάλμα εκτίμησης μηδενίζεται γρηγορότερα.





Έλεγχος ανάδρασης εξόδου με χρήση παρατηρητή:

Το δεύτερο ζητούμενο της άσκησης είναι να σχεδιαστεί ελεγκτής γραμμικής ανάδρασης εξόδου ώστε η τάση-θέση του κινητήρα να συγκλίνει σε μια επιθυμητή τιμή θ_{ref} .

Εφόσον το σύστημα είναι ελέγξιμο όπως αποδείξαμε και στο εργαστήριο 2 και επιπλέον το σύστημα είναι παρατηρήσιμο, χρησιμοποιούμε τον παρατηρητή που σχεδιάσαμε παραπάνω για την ανάδραση.

$$\dot{x}_{est} = Ax_{est} + Bu + L(y - Cx_{est})$$

Έτσι ο ελεγκτής:

$$U = -Kx_{est} + k_r \cdot r \text{ όπου } r \text{ η είσοδος αναφοράς με } r = \theta_{ref}.$$

επιτυγχάνει το ζητούμενο, όπου x_{est} το διάνυσμα εκτίμησης των καταστάσεων όπως παράγεται από τον παρατηρητή & $K = [k_1 \ k_2]^T$

Τότε το σφάλμα εκτίμησης έχει διαφορική εξίσωση, όπως πριν:

$e' = (A - LC)e$ οπότε οι τιμές του πίνακα L πρέπει όπως πριν να επιλεγούν έτσι ώστε το σφάλμα να συγκλίνει εκθετικά στο μηδέν.

Το σύστημα **κλειστού βρόχου** τότε γίνεται:

$$\dot{x}' = (A - BK)x + BK e + Bk_r \cdot r$$

Σε μορφή πινάκων:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Bk_r \end{bmatrix} \cdot r$$

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Όπου A, B οι πίνακες του συστήματος όπως έχουν γραφεί και παραπάνω.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος είναι:

$$p(s) = \det(sI - (A - BK)) \cdot \det(sI - (A - LC)).$$

Τα προβλήματα σχεδίασης παρατηρητή και ελεγκτή μπορούν να μελετηθούν ανεξάρτητα,επομένως:

Το κέρδος K εξαρτάται από τα A, B και επιλέγεται έτσι ώστε το σύστημα να είναι ευσταθές και η απόκριση εξόδου να μην παρουσιάζει ταλαντώσεις:

$$A-BK=[(-km \cdot kt \cdot k_1 - 1)/T_m \quad -km \cdot kt \cdot k_2/T_m] \\ [\quad k_{\mu} \cdot k_o/kt \quad \quad 0 \quad \quad]$$

Και υπολογίζοντας το k_r για $D=0$ αφού η έξοδος y δεν εξαρτάται από την είσοδο προκύπτει $k_r = k_2$.

Μέσω των κερδών k_1, k_2 επιλέγω τις ιδιοτιμές του νέου συστήματος ώστε να εξασφαλίσω την ευστάθεια του συστήματος αλλά και την συμπεριφορά του πριν φτάσει στην μόνιμη κατάσταση.Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος:

$$P(s)=s^2 + (km \cdot kt \cdot k_1 + 1) \cdot \frac{1}{T_m}s + km \cdot k_o \cdot k_{\mu} \cdot k_2 \cdot \frac{1}{T_m}$$

Το σύστημα δεν πρέπει να έχει υπερύψωση,δηλαδή να μην εκτελέσει ταλαντώσεις επομένως για τη σταθερά απόσβεσης ζ αρκεί $\zeta \geq 1$.

Επιπλέον απαιτείται ο ελάχιστος δυνατός χρόνος αποκατάστασης t_s , άρα επιλέγω κρίσιμη απόσβεση,δηλαδή $\zeta=1$ και διπλό πραγματικό πόλο στο σημείο $s=-p$.

$$P_d(s)=s^2 + 2ps + p^2, \quad p > 0 \quad \text{ώστε να είναι ευσταθές το σύστημα.}$$

Από την ισότητα των δύο πολυωνύμων:

$$k_1 = (2 \cdot T_m \cdot p - 1)/km \cdot kt \quad \text{και} \quad k_2 = T_m \cdot p^2 / (km \cdot k_o \cdot k_{\mu})$$

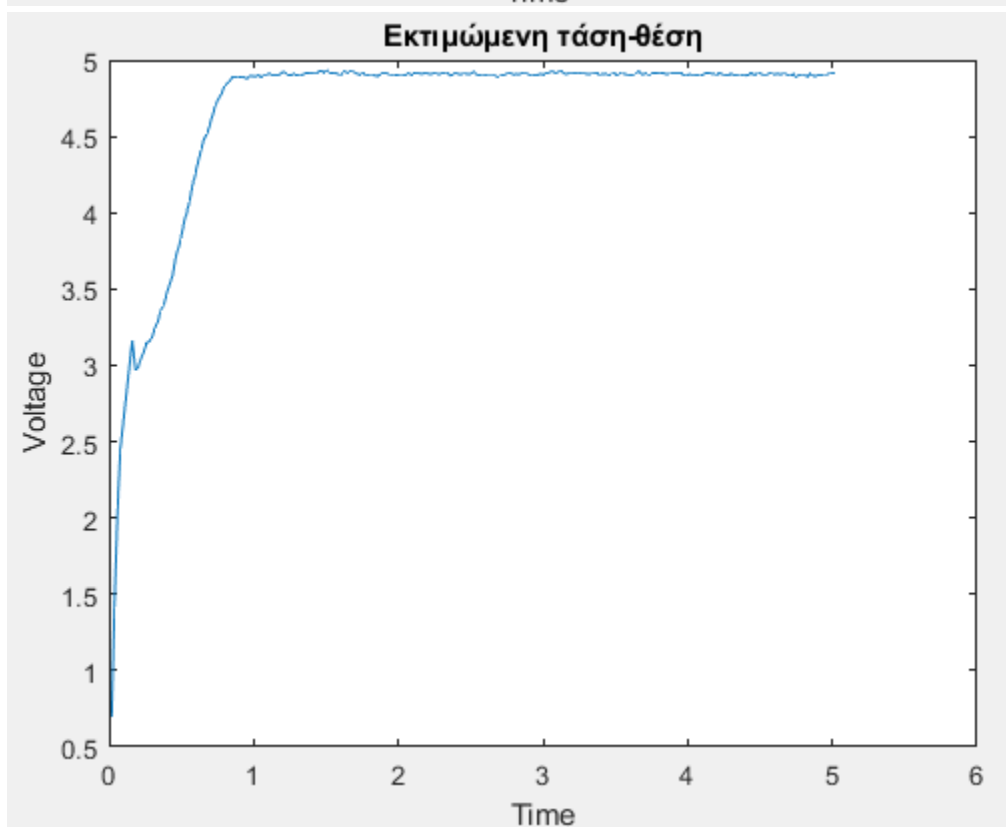
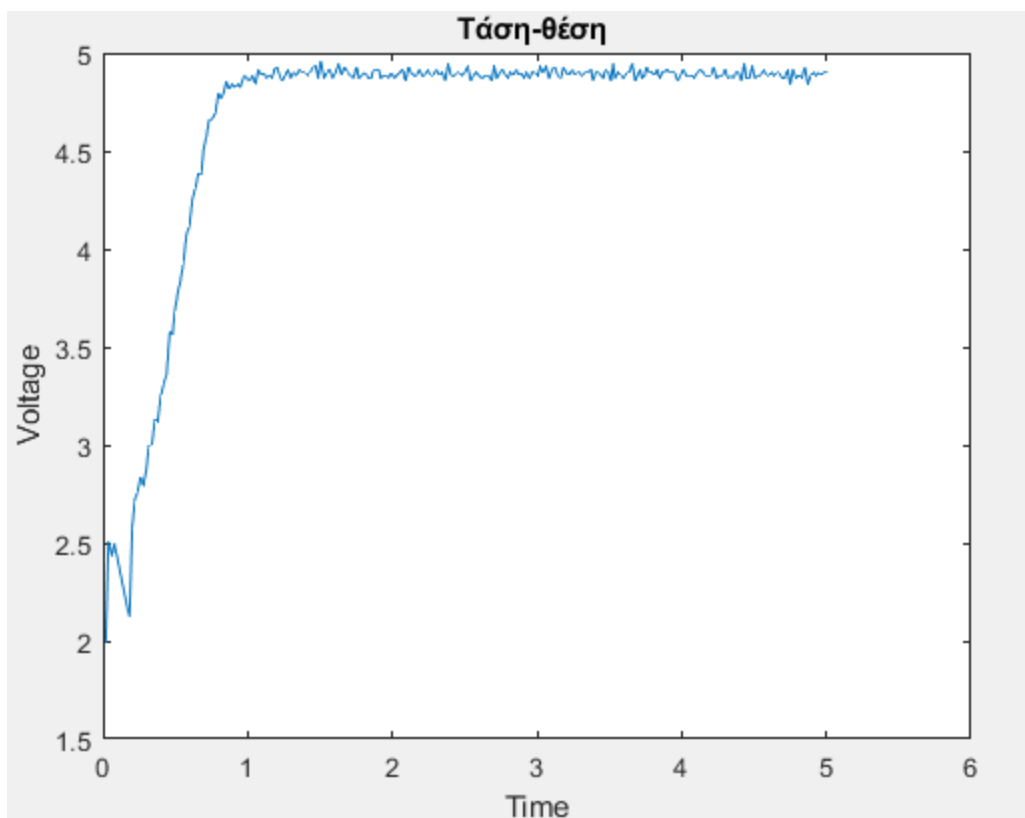
$$\text{Άρα } U = -k_1 x_1 - k_2 (y - r) \quad \text{και ο χρόνος αποκατάστασης } t_s = 4/p$$

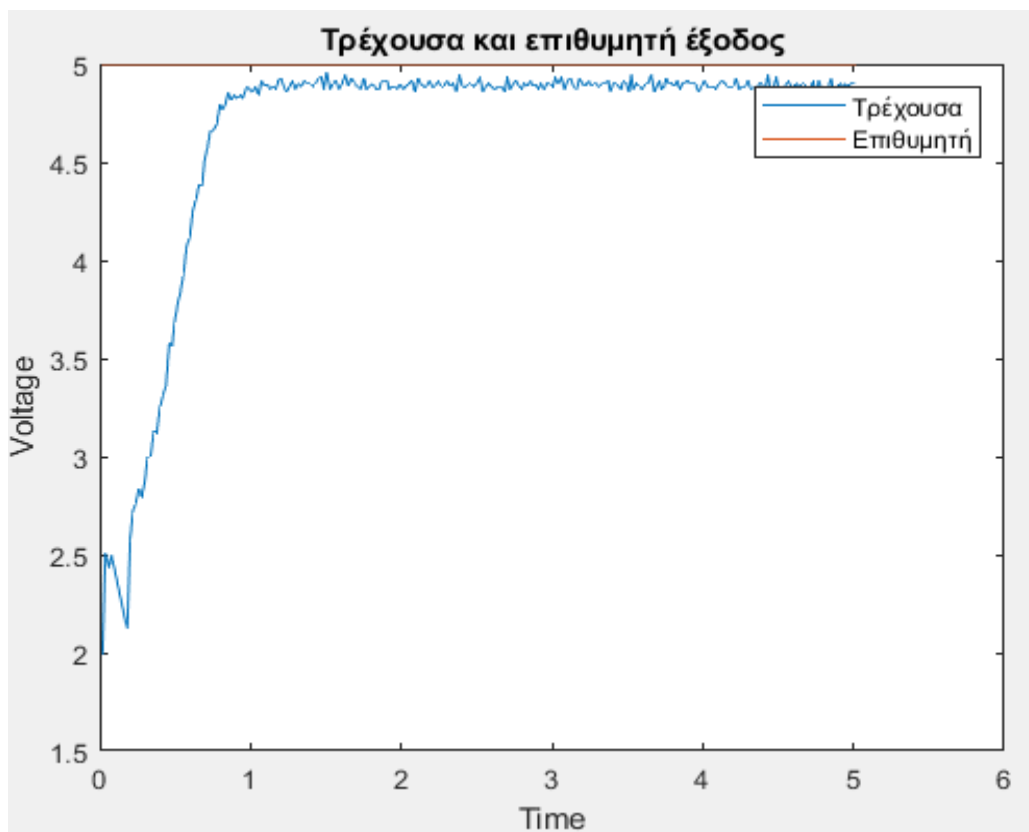
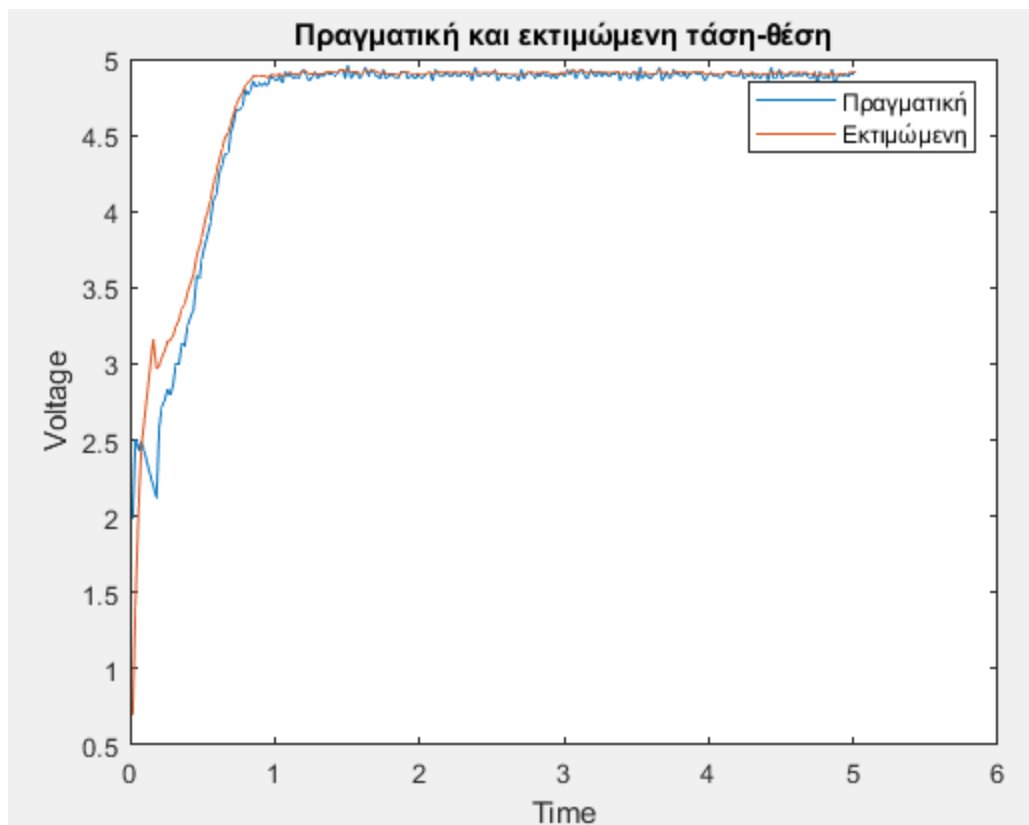
Μετακινώντας τη τιμή του πόλου p παρατηρώ την απόκριση του συστήματος και το χρόνο αποκατάστασης του.Η μεγαλύτερη δυνατή

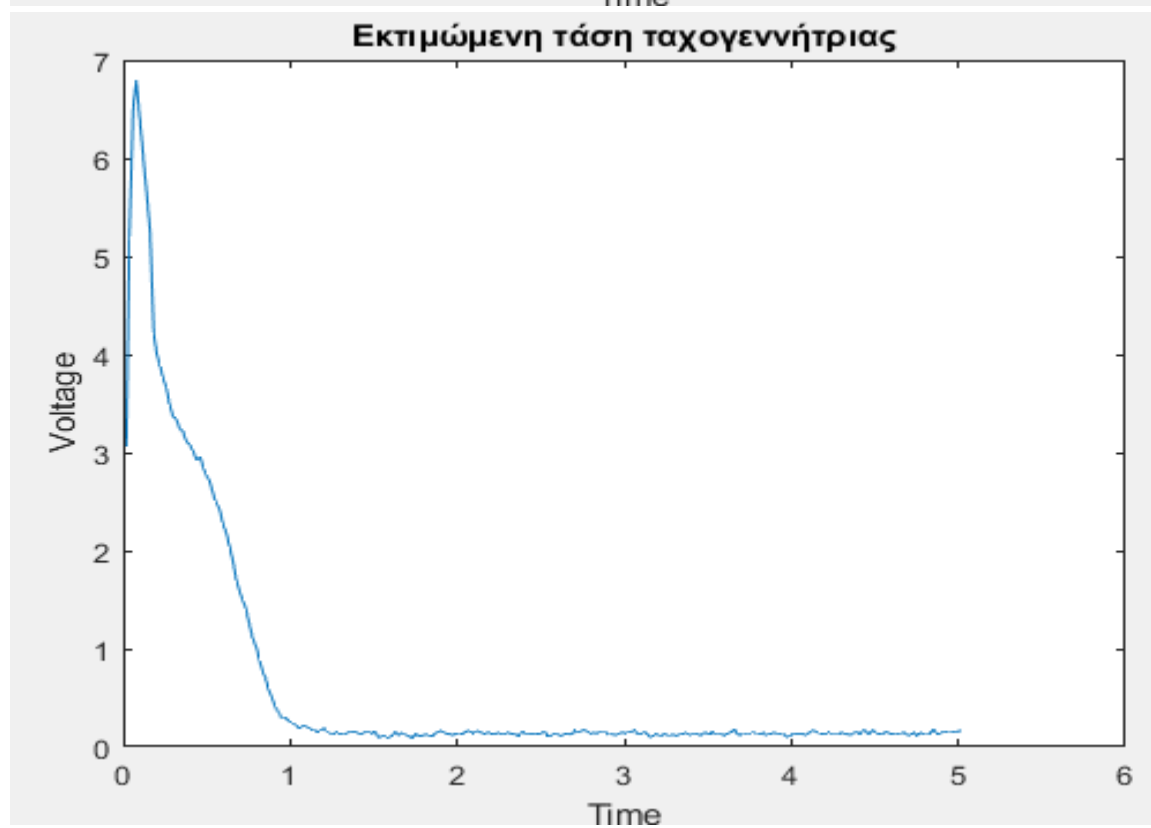
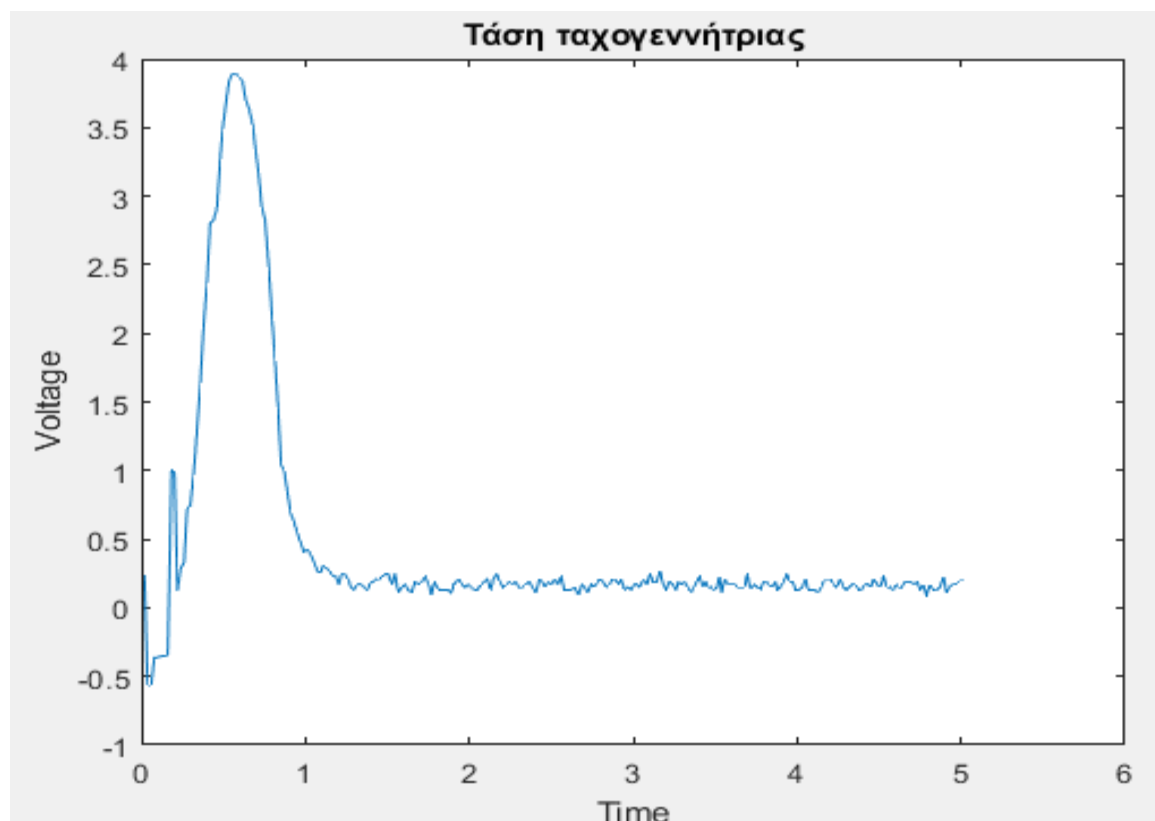
τιμή του p που ταυτόχρονα δεν οδηγεί σε κορεσμό της ταχογεννήτριας είναι η επιθυμητή και μέσω αυτής βρίσκω τα κέρδη k_1, k_2 .

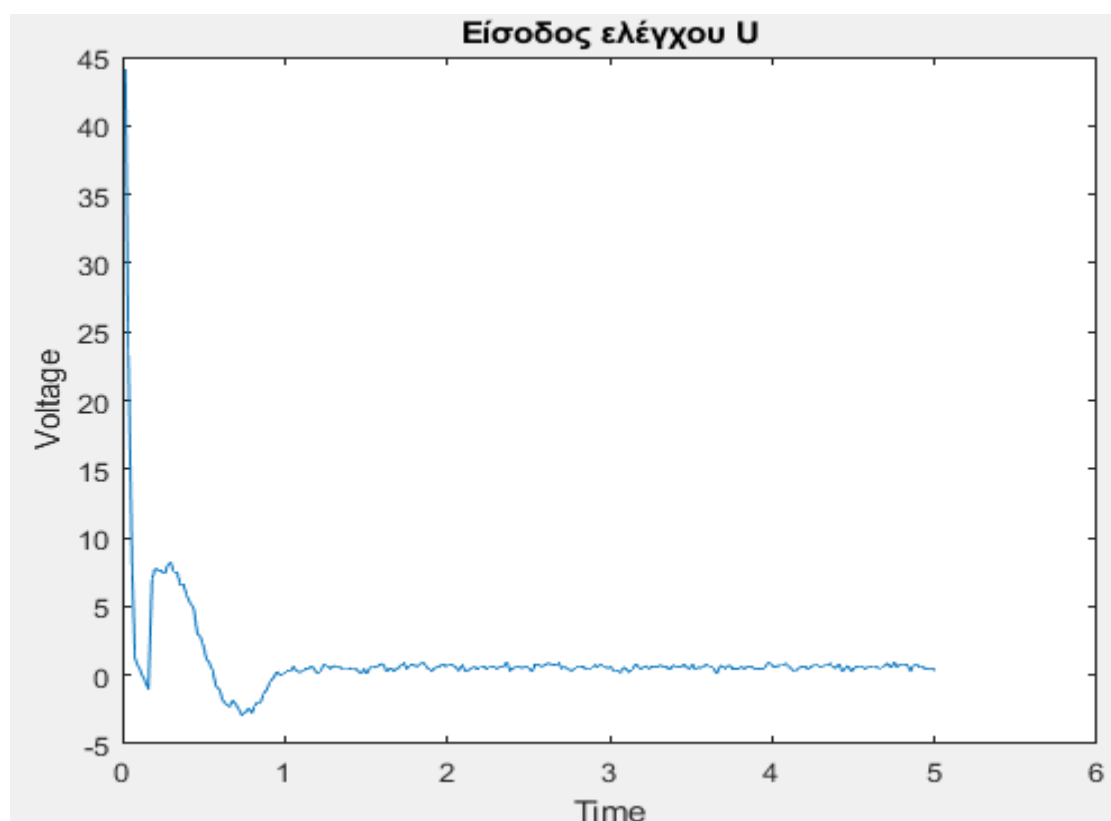
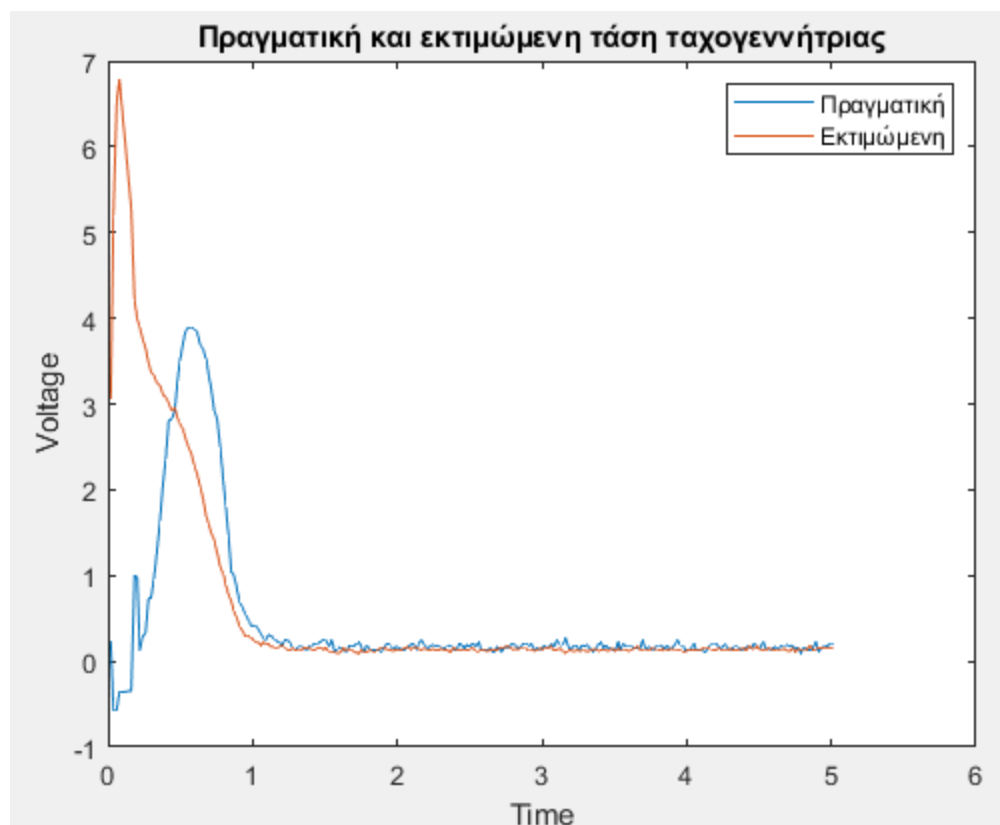
Ο πίνακας L εξαρτάται από τα A, C και οι τιμές του είναι τέτοιες ώστε να συγκλίνει εκθετικά στο μηδέν το σφάλμα εκτίμησης, όπως ακριβώς ειπώθηκε και υπολογίστηκε παραπάνω.

Στο πείραμα ο πόλος p του ελεγκτή επιλέχτηκε στο σημείο $s = -p = -5$ και τα κέρδη υπολογίστηκαν: $k_1 = 5$ και $k_2 = k_r = 13.8$, ενώ του παρατηρητή $p_{est} = 10$ (σχετικά αργός) με $l_1 = 36,1$ και $l_2 = 18.4$ με χρόνο αποκατάστασης περίπου 1 δευτερόλεπτο.









Επειδή αρχικά επιλέχθηκε αργός πόλος για τον παρατηρητή η εκτίμηση δεν είναι ακριβής και έτσι δεν είναι εφικτός ο σωστός έλεγχος της εξόδου, για αυτό και δεν φτάνει την επιθυμητή θ_{ref} .

Αυξάνοντας την τιμή του πόλου $p_{est}=17$, όπως είναι αναμενόμενο ο παρατηρητής εκτιμά με ακρίβεια τη τάση-θέση και την τάση ταχογεννήτριας, επομένως ο ελεγκτής καταφέρνει να ελέγξει την έξοδο και τα l_1, l_2 υπολογιστηκαν: $l_1=121,15$ και $l_2=32.4$

