Двойной маятник

Анастасия Палий, ПМ-2101

3 ноября 2023 г.

1 Уравнения движения двойного маятника

Запишем II закон Ньютона (для проекций):

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = -T_1 \sin\theta_1 + T_2 \sin\theta_2, \\ m_1\ddot{y}_1 = T_1 \cos\theta_1 - T_2 \cos\theta_2 - m_1 g, \\ m_2\ddot{x}_2 = -T_2 \sin\theta_2, \\ m_2\ddot{y}_2 = T_2 \cos\theta_2 - m_2 g. \end{cases} \tag{1}$$

Избавимся от T_1, T_2:

$$\begin{cases} -\cos\theta_1(m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2) = \sin\theta_1(m_1\ddot{y}_1 + m_2\ddot{y}_2 + m_1 g + m_2 g, \\ -\cos\theta_2(m_2\ddot{x}_2) = \sin\theta_2(m_2\ddot{y}_2 + m_2 g. \end{cases} \tag{2}$$

Выразим координаты через углы и длины стержней:

$$\begin{aligned} x_1 &= L_1 \sin\theta_1, \\ y_1 &= -L_1 \cos\theta_1, \\ x_2 &= x_1 + L_2 \sin\theta_2, \\ y_2 &= y_1 - L_2 \cos\theta_2. \end{aligned} \tag{3}$$

Запишем выражения для производных первого порядка:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{\theta}_1 L_1 \cos\theta_1, \\ \dot{y}_1 &= \dot{\theta}_1 L_1 \sin\theta_1, \\ \dot{x}_2 &= \dot{x}_1 + \dot{\theta}_2 L_2 \cos\theta_2, \\ \dot{y}_2 &= \dot{y}_1 + \dot{\theta}_2 L_2 \sin\theta_2. \end{aligned} \tag{4}$$

И для производных второго порядка:

$$
\begin{aligned}
&\ddot{x}_1 = \ddot{\theta}_1 L_1 \cos\theta_1 - \dot{\theta}_1^2 L_1 \sin\theta_1,\\
&\ddot{y}_1 = \ddot{\theta}_1 L_1 \sin\theta_1 + \dot{\theta}_1^2 L_1 \cos\theta_1,\\
&\ddot{x}_2 = \ddot{x}_1 + \ddot{\theta}_2 L_2 \cos\theta_2 - \dot{\theta}_2^2 L_2 \sin\theta_2,\\
&\ddot{y}_2 = \ddot{y}_1 + \ddot{\theta}_2 L_2 \sin\theta_2 + \dot{\theta}_2^2 L_2 \cos\theta_2.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Подставим выражения (5) в систему (2). После некоторых преобразований получим следующую систему:

$$
\begin{cases}
\ddot{\theta}_1 L_1 (m_1 + m_2) + \ddot{\theta}_2 L_2 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) = -\dot{\theta}_2^2 L_2 m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2) g \sin\theta_1,\\
\ddot{\theta}_1 L_1 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \ddot{\theta}_2 L_2 m_2 = \dot{\theta}_1^2 L_1 m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 g \sin\theta_2.
\end{cases} \tag{6}
$$

Найдём выражения для $\ddot{\theta}_1$ и $\ddot{\theta}_2$:

$$
\begin{cases}
\ddot{\theta}_1 = -\dfrac{m_1 g \sin\theta_1 + m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1^2 L_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_2^2 L_2 + g\cos\theta_2)}{L_1 (m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2))},\\
\ddot{\theta}_2 = \dfrac{\sin(\theta_1 - \theta_2)((m_1 + m_2)(g\cos\theta_1 + \dot{\theta}_1^2 L_1)) + \dot{\theta}_2^2 L_2 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{L_2 (m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2))}.
\end{cases} \tag{7}
$$

Приведём систему из двух ДУ 2 порядка к системе из четырёх ДУ 1 порядка:

$$
\begin{cases}
\dot{\theta}_1 = \omega_1,\\
\dot{\theta}_2 = \omega_2,\\
\dot{\omega}_1 = -\dfrac{m_1 g \sin\theta_1 + m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)(\omega_1^2 L_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \omega_2^2 L_2 + g\cos\theta_2)}{L_1 (m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2))},\\
\dot{\omega}_2 = \dfrac{\sin(\theta_1 - \theta_2)((m_1 + m_2)(g\cos\theta_1 + \omega_1^2 L_1)) + \omega_2^2 L_2 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{L_2 (m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2))}.
\end{cases} \tag{8}
$$

2 Кривые Лиссажу

Кривые Лиссажу (Lissajous curves) – это семейство кривых, описываемых системой параметрических уравнений вида:

$$\begin{cases} x(t) = A\cos(\omega_x t - \delta_x) \\ y(t) = B\cos(\omega_y t - \delta_y) \end{cases} \tag{9}$$

Иногда их записывают в виде:

$$\begin{cases} x(t) = A\sin(\omega t + \delta) \\ y(t) = B\cos t \end{cases} \tag{10}$$

Выясним, как связаны кривые Лиссажу и ДУ 2 порядка. Для этого дважды продифференцируем уравнения (9).

$$\begin{cases} \dot{x} = -\omega_x A\sin(\omega_x t - \delta_x) \\ \dot{y} = -\omega_y B\sin(\omega_y t - \delta_y) \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\omega_x^2 A\cos(\omega_x t - \delta_x) \\ \ddot{y} = -\omega_y^2 B\cos(\omega_y t - \delta_y) \end{cases} \tag{12}$$

Заметим, что в правых частях стоят выражения для x и y из (9). Таким образом, получаем простую систему ДУ 2 порядка, где ω_x, ω_y – частоты колебаний:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_x^2 x = 0 \\ \ddot{y} + \omega_y^2 y = 0 \end{cases} \tag{13}$$

3 Малые колебания. Линеаризация

Вернёмся к системе (6) и рассмотрим её в предположении малых колебаний: $\theta_1, \theta_2 \approx 0$, разностью $\theta_1 - \theta_2$ пренебрежём, Произведём замены по следующим правилам:

$$\begin{gathered}\sin\theta_1 \to \theta_1,\\ \sin\theta_2 \to \theta_2,\\ \sin(\theta_1-\theta_2) \to 0,\\ \cos(\theta_1-\theta_2) \to 1.\end{gathered}$$

В результате система примет вид:

$$\begin{cases}\ddot\theta_1 L_1(m_1+m_2) + \ddot\theta_2 L_2 m_2 = -(m_1+m_2)g\theta_1,\\ \ddot\theta_1 L_1 m_2 + \ddot\theta_2 L_2 m_2 = -m_2 g\theta_2.\end{cases} \tag{14}$$

Выполним возможные преобразования:

$$\begin{cases}\ddot\theta_1 = \dfrac{g}{L_1 m_1}(m_2\theta_2 - (m_1+m_2)\theta_1),\\ \ddot\theta_2 = \dfrac{g(m_1+m_2)}{L_1 m_1}(\theta_1-\theta_2).\end{cases} \tag{15}$$