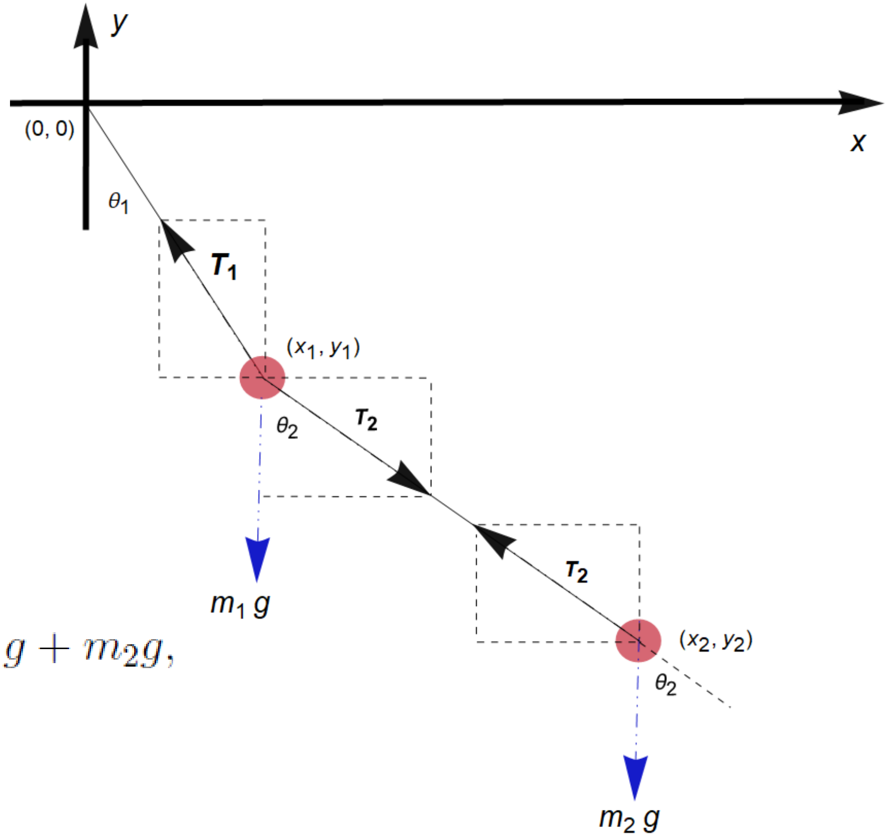
Двойной маятник

Палий Анастасия, ПМ-2101

Физическая модель. Анализ сил

Запишем II закон Ньютона (для проекций):

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = -T_1\sin\theta_1 + T_2\sin\theta_2, \\ m_1\ddot{y}_1 = T_1\cos\theta_1 - T_2\cos\theta_2 - m_1 g, \\ m_2\ddot{x}_2 = -T_2\sin\theta_2, \\ m_2\ddot{y}_2 = T_2\cos\theta_2 - m_2 g. \end{cases} \qquad (1)$$



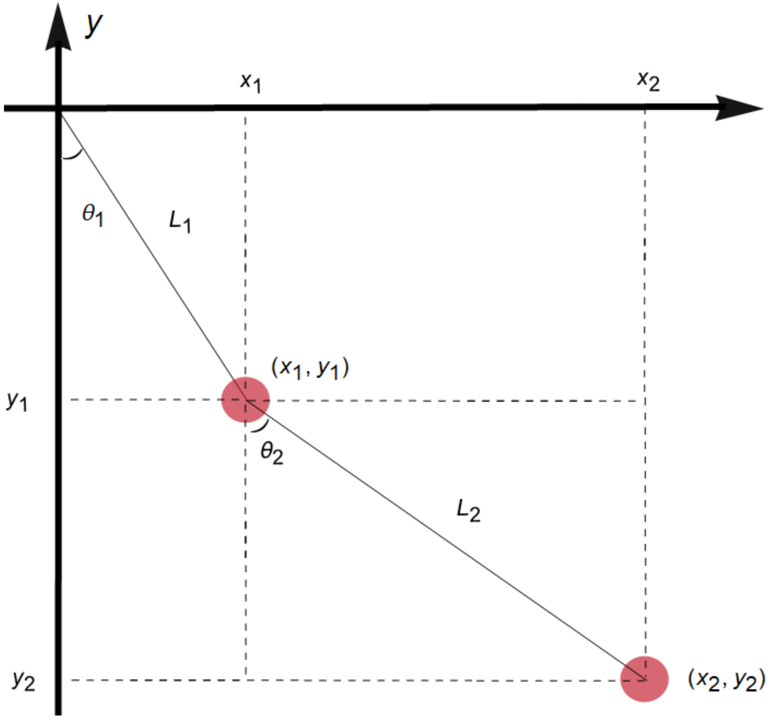
Избавимся от T_1, T_2:

$$\begin{cases} -\cos\theta_1(m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2) = \sin\theta_1(m_1\ddot{y}_1 + m_2\ddot{y}_2 + m_1 g + m_2 g, \\ -\cos\theta_2(m_2\ddot{x}_2) = \sin\theta_2(m_2\ddot{y}_2 + m_2 g. \end{cases} \qquad (2)$$

Физическая модель. Кинематика

Выразим координаты через углы и длины стержней:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= L_1 \sin\theta_1, \\
y_1 &= -L_1 \cos\theta_1, \\
x_2 &= x_1 + L_2 \sin\theta_2, \\
y_2 &= y_1 - L_2 \cos\theta_2.
\end{aligned}
\qquad (3)
$$



Физическая модель. Кинематика

Запишем выражения для производных первого порядка:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \dot{\theta}_1 L_1 \cos\theta_1, \\
\dot{y}_1 &= \dot{\theta}_1 L_1 \sin\theta_1, \\
\dot{x}_2 &= \dot{x}_1 + \dot{\theta}_2 L_2 \cos\theta_2, \\
\dot{y}_2 &= \dot{y}_1 + \dot{\theta}_2 L_2 \sin\theta_2.
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

И для производных второго порядка:

$$
\begin{aligned}
\ddot{x}_1 &= \ddot{\theta}_1 L_1 \cos\theta_1 - \dot{\theta}_1^2 L_1 \sin\theta_1, \\
\ddot{y}_1 &= \ddot{\theta}_1 L_1 \sin\theta_1 + \dot{\theta}_1^2 L_1 \cos\theta_1, \\
\ddot{x}_2 &= \ddot{x}_1 + \ddot{\theta}_2 L_2 \cos\theta_2 - \dot{\theta}_2^2 L_2 \sin\theta_2, \\
\ddot{y}_2 &= \ddot{y}_1 + \ddot{\theta}_2 L_2 \sin\theta_2 + \dot{\theta}_2^2 L_2 \cos\theta_2.
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

Уравнения движения

Подставим выражения (5) в систему (2).

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 L_1(m_1+m_2) + \ddot{\theta}_2 L_2 m_2 \cos(\theta_1-\theta_2) = -\dot{\theta}_2^2 L_2 m_2 \sin(\theta_1-\theta_2) - (m_1+m_2) g \sin\theta_1, \\ \ddot{\theta}_1 L_1 m_2 \cos(\theta_1-\theta_2) + \ddot{\theta}_2 L_2 m_2 = \dot{\theta}_1^2 L_1 m_2 \sin(\theta_1-\theta_2) - m_2 g \sin\theta_2. \end{cases} \quad (6)$$

Найдём выражения для $\ddot{\theta}_1$ и $\ddot{\theta}_2$:

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 = -\dfrac{m_1 g \sin\theta_1 + m_2 \sin(\theta_1-\theta_2)(\dot{\theta}_1^2 L_1 \cos(\theta_1-\theta_2) + \dot{\theta}_2^2 L_2 + g\cos\theta_2)}{L_1(m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1-\theta_2))}, \\ \ddot{\theta}_2 = \dfrac{\sin(\theta_1-\theta_2)((m_1+m_2)(g\cos\theta_1 + \dot{\theta}_1^2 L_1)) + \dot{\theta}_2^2 L_2 m_2 \cos(\theta_1-\theta_2)}{L_2(m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1-\theta_2))}. \end{cases} \quad (7)$$

Уравнения движения

Приведём систему из двух ДУ 2 порядка к системе из четырёх ДУ 1 порядка:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \omega_1, \\ \dot{\theta}_2 = \omega_2, \\ \dot{\omega}_1 = -\dfrac{m_1 g \sin\theta_1 + m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)(\omega_1^2 L_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \omega_2^2 L_2 + g\cos\theta_2)}{L_1(m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2))}, \\ \dot{\omega}_2 = \dfrac{\sin(\theta_1 - \theta_2)((m_1 + m_2)(g\cos\theta_1 + \omega_1^2 L_1)) + \omega_2^2 L_2 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{L_2(m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2))}. \end{cases} \tag{8}$$

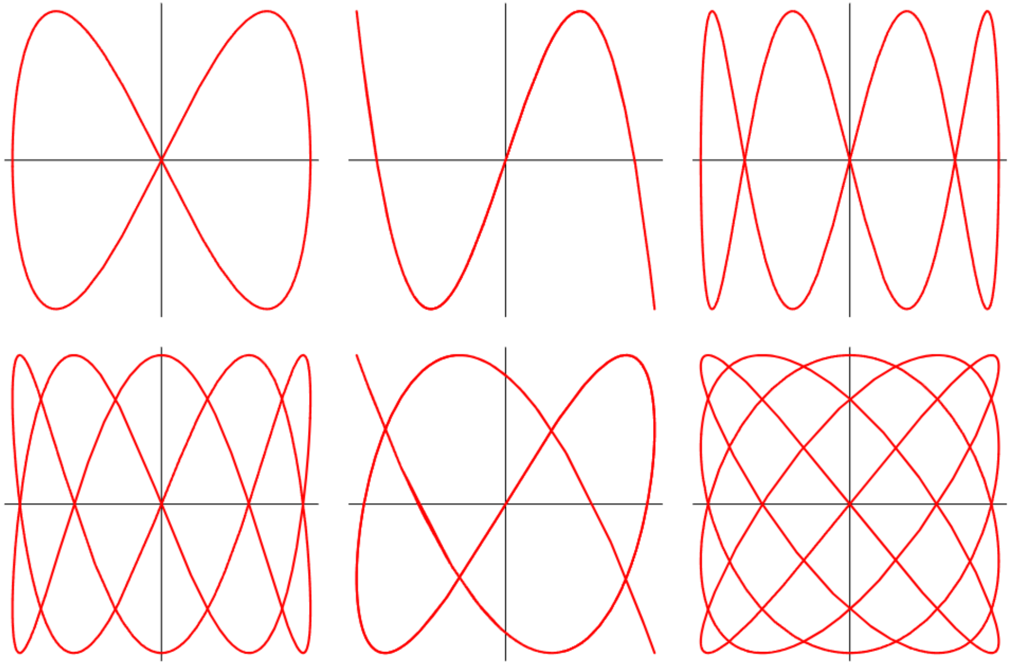
Кривые Лиссажу

Кривые Лиссажу (Lissajous curves) – это семейство кривых, описываемых системой параметрических уравнений вида:

$$\begin{cases} x(t) = A\cos(\omega_x t - \delta_x) \\ y(t) = B\cos(\omega_y t - \delta_y) \end{cases} \quad (9)$$

Иногда их записывают в виде:

$$\begin{cases} x(t) = A\sin(\omega t + \delta) \\ y(t) = B\cos t \end{cases} \quad (10)$$



Кривые Лиссажу. Связь с системой ДУ

Выясним, как связаны кривые Лиссажу и ДУ 2 порядка. Для этого дважды продифференцируем уравнения (9).

$$\begin{cases} \dot{x} = -\omega_x A \sin(\omega_x t - \delta_x) \\ \dot{y} = -\omega_y B \sin(\omega_y t - \delta_y) \end{cases} \qquad (11)$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\omega_x^2 A \cos(\omega_x t - \delta_x) \\ \ddot{y} = -\omega_y^2 B \cos(\omega_y t - \delta_y) \end{cases} \qquad (12)$$

Заметим, что в правых частях стоят выражения для x и y из (9). Таким образом, получаем простую систему ДУ 2 порядка, где ω_x, ω_y – частоты колебаний:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_x^2 x = 0 \\ \ddot{y} + \omega_y^2 y = 0 \end{cases} \qquad (13)$$

Малые колебания. Линеаризация

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 L_1(m_1+m_2) + \ddot{\theta}_2 L_2 m_2 \cos(\theta_1-\theta_2) = -\dot{\theta}_2^2 L_2 m_2 \sin(\theta_1-\theta_2) - (m_1+m_2) g \sin\theta_1, \\ \ddot{\theta}_1 L_1 m_2 \cos(\theta_1-\theta_2) + \ddot{\theta}_2 L_2 m_2 = \dot{\theta}_1^2 L_1 m_2 \sin(\theta_1-\theta_2) - m_2 g \sin\theta_2. \end{cases} \quad (6)$$

Вернёмся к системе (6) и рассмотрим её в предположении малых колебаний: $\theta_1, \theta_2 \approx 0$, разностью $\theta_1 - \theta_2$ пренебрежём, Произведём замены по следующим правилам:

$$\sin\theta_1 \to \theta_1,$$
$$\sin\theta_2 \to \theta_2,$$
$$\sin(\theta_1-\theta_2) \to 0,$$
$$\cos(\theta_1-\theta_2) \to 1.$$

Малые колебания. Линеаризация

В результате система примет вид:

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 L_1(m_1 + m_2) + \ddot{\theta}_2 L_2 m_2 = -(m_1 + m_2) g \theta_1, \\ \ddot{\theta}_1 L_1 m_2 + \ddot{\theta}_2 L_2 m_2 = -m_2 g \theta_2. \end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 = \dfrac{g}{L_1 m_1}(m_2 \theta_2 - (m_1 + m_2)\theta_1), \\ \ddot{\theta}_2 = \dfrac{g(m_1 + m_2)}{L_1 m_1}(\theta_1 - \theta_2). \end{cases} \tag{15}$$

500 double pendulums.