Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Численное решение задачи Дирихле»

Студент 315 группы
А. А. Анашкина

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2023

1 Постановка задачи

Дана следующая краевая задача:

$$\begin{cases} u''_{xx}(x,y) + u''_{yy}(x,y) - \mu \cdot u(x,y) = f(x,y), \\ u(x,0) \equiv u(x,1) \equiv \xi(x), \\ u(0,y) \equiv u(1,y) \equiv \eta(y), \\ \xi(0) = \xi(1) = \eta(0) = \eta(1), \\ \mu > 0,\ f \in C^1([0,1]\times[0,1]), \quad \xi, \eta \in C^1([0,1]). \end{cases} \tag{1}$$

Для этой краевой задачи рассматривается разностная схема:

$$\begin{cases} \dfrac{y_{k+1,\ell} - 2y_{k,\ell} + y_{k-1,\ell}}{h_x^2} + \dfrac{y_{k,\ell+1} - 2y_{k,\ell} + y_{k,\ell-1}}{h_y^2} - \mu \cdot y_{k,\ell} = f_{k,\ell}, \\ y_{k,0} = y_{k,N} = \xi_k, \quad k = \overline{1, M-1}, \\ y_{0,\ell} = y_{M,\ell} = \eta_\ell, \quad \ell = \overline{1, N-1}, \\ y_{k,\ell} \approx u(x_k, y_\ell),\ x_k = k/M,\ y_\ell = \ell/N, \\ f_{k,\ell} = f(x_k, y_\ell),\ \xi_k = \xi(x_k),\ \eta_\ell = \eta(y_\ell), \end{cases} \tag{2}$$

где $h_x = 1/M,\ h_y = 1/N$ и значения $y_{k,\ell}$ аппроксимируют функцию $u(x,y)$ в узлах сетки для x_k, y_ℓ. Необходимо решить данную краевую задачу 1 численно при помощи разностной схемы 2 и алгоритма быстрого преобразования Фурье в двумерном и одномерном случае.

2 Теория, необходимая для решения задачи

Пусть функции $y_{k,\ell}, f_{k,\ell}, \xi_k, \eta_\ell$ являются образами Фурье некоторых коэффициентов:

$$\begin{gathered} y_{k,\ell} = \sum_{r=0}^{M-1}\sum_{s=0}^{N-1} a_{r,s} e^{-2\pi i\left(\frac{rk}{M} + \frac{s\ell}{N}\right)}, \quad k = \overline{0,\ M}, \ell = \overline{0,\ N}, \\ f_{k,\ell} = \sum_{r=0}^{M-1}\sum_{s=0}^{N-1} b_{r,s} e^{-2\pi i\left(\frac{rk}{M} + \frac{s\ell}{N}\right)}, \quad k = \overline{0,\ M}, \ell = \overline{0,\ N}, \\ \xi_k = \sum_{r=0}^{M-1} \xi_r e^{-\frac{2\pi i r k}{M}}, \quad k = \overline{0,\ M}, \\ \eta_l = \sum_{s=0}^{N-1} \eta_s e^{-\frac{2\pi i s \ell}{N}}, \quad \ell = \overline{0,\ N}. \end{gathered} \tag{3}$$

Введём дополнительное обозначение, для сокращения длины формул:

$$c_{r,s} = \frac{1}{h_x^2}\left(e^{-\frac{2\pi i r}{M}} - 2 + e^{\frac{2\pi i r}{M}}\right) + \frac{1}{h_y^2}\left(e^{-\frac{2\pi i s}{N}} - 2 + e^{\frac{2\pi i s}{N}}\right) - \mu. \tag{4}$$

Подставим все полученные в 3 и 4 в первое уравнение разностной схемы 2 :

$$\sum_{r=0}^{M-1}\sum_{s=0}^{N-1} a_{r,s} c_{r,s} e^{-2\pi i\left(\frac{rk}{M} + \frac{s\ell}{N}\right)} = \sum_{r=0}^{M-1}\sum_{s=0}^{N-1} b_{r,s} e^{-2\pi i\left(\frac{rk}{M} + \frac{s\ell}{N}\right)},$$

отсюда получим соотношение:

$$a_{r,s} = \frac{b_{r,s}}{c_{r,s}}, \quad r = \overline{0,\ M-1}, s = \overline{0,\ N-1}. \tag{5}$$

Аналогично рассматриваем краевые условия в 2:

$$\sum_{r=0}^{M-1}\sum_{s=0}^{N-1} a_{r,s} e^{-\frac{2\pi irk}{M}} = \sum_{r=0}^{M-1} \xi_r e^{-\frac{2\pi irk}{M}},$$

$$\sum_{r=0}^{M-1}\sum_{s=0}^{N-1} a_{r,s} e^{-\frac{2\pi isl}{M}} = \sum_{s=0}^{N-1} \eta_s e^{-\frac{2\pi is\ell}{N}}.$$

Отсюда получим соотношения:

$$\sum_{s=0}^{N-1} a_{r,s} = \xi_r, \quad r = \overline{0,\ M-1}, \tag{6}$$

$$\sum_{r=0}^{M-1} a_{r,s} = \eta_s, \quad s = \overline{0,\ N-1}. \tag{7}$$

Введём обозначения:

$$\delta_{r,k} = \frac{e^{\frac{2\pi rk}{M}}}{MN},$$

$$\gamma_{s,\ell} = \frac{e^{\frac{2\pi s\ell}{N}}}{MN}.$$

Теперь запишем обратное преобразование Фурье для $f_{k,l}$ из 3 :

$$b_{r,s} = \frac{1}{NM}\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{\ell=0}^{N-1} f_{k,l} e^{2\pi i\left(\frac{rk}{M}+\frac{s\ell}{N}\right)}, \quad r = \overline{0,\ M-1}, s = \overline{0,\ N-1}.$$

Разобьём формулу для $b_{r,s}$ на четыре слагаемых:

$$b_{r,s} = \tilde{b}_{r,s} + \sum_{k=1}^{M-1} f_{k,0}\delta r, k + \sum_{l=1}^{N-1} f_{0,\ell}\gamma_{s,\ell} + \frac{f_{0,0}}{MN}, \tag{8}$$

$$\tilde{b}_{r,s} = \frac{1}{MN}\sum_{k=1}^{M-1}\sum_{\ell=1}^{N-1} f_{k,\ell} e^{2\pi i\left(\frac{rk}{M}+\frac{s\ell}{N}\right)}.$$

Подставив 8 в 6 и 7, получим СЛАУ относительно независимых переменных $f_{0,\ell}, f_{k,0}, f_{0,0}$:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{s=0}^{N-1} \frac{\tilde{b}_{r,s} + \sum_{k=1}^{M-1} f_{k,0}\delta r, k + \sum_{l=1}^{N-1} f_{0,\ell}\gamma_{s,\ell} + \frac{f_{0,0}}{MN}}{c_{r,s}} = \xi_r, \quad r = \overline{0,\ M-1}, \\ \displaystyle\sum_{r=0}^{M-1} \frac{\tilde{b}_{r,s} + \sum_{k=1}^{M-1} f_{k,0}\delta r, k + \sum_{l=1}^{N-1} f_{0,\ell}\gamma_{s,\ell} + \frac{f_{0,0}}{MN}}{c_{r,s}} = \eta_s, \quad s = \overline{0,\ N-1}. \end{cases} \tag{9}$$

Решив эту систему, получим $f_{0,\ell}, f_{k,0}, f_{0,0}$ и подставим эти значения в 8. Далее по формуле 5 найдём $a_{r,s}$. Искомую величину $y_{k,l}$ посчитаем, применив преобразование Фурье по формуле из 3.

3 Алгоритм решения задачи

1. Применив обратное преобразование Фурье в одномерном случае для ξ_k и η_l, получаем ξ_r и η_s.
2. По формулам 4, 7, 6 вычисляем $c_{r,s}$, $\delta_{r,k}$, $\gamma_{s,\ell}$.
3. Вычисляем $\tilde{b}_{r,s}$ с помощью многомерного преобразования Фурье из $f_{k,\ell}$. Берем неизвестные $f_{k,0}, f_{0,\ell}, f_{0,0}$ нулевыми.
4. Решаем СЛАУ 9, находим из неё неизвестные $f_{k,0}, f_{0,\ell}, f_{0,0}$.
5. Пересчитываем $\tilde{b}_{r,s}$, используя обратное двумерное преобразование Фурье к $f_{k,\ell}$.
6. Находим $a_{r,s}$ по формуле 5.
7. Вычисляем $y_{k,l}$, используя двумерное преобразование Фурье к $a_{r,s}$.

4 Аналитическое решение задачи Дирихле

Пусть теперь $f(x,y) = (1+x^3)\sin(x) - 3ye^{2y} - \sin(y)$. Разделим эту задачу на две подзадачи, то есть будем считать, что $f(x,y) = f_1(x) - f_2(y)$, а $u(x,y) = u_1(x) - u_2(y)$, где $f_1(x) = (1+x^3)\sin(x)$ и $f_2(y) = 3ye^{2y} + \sin(y)$. Таким образом, исходная задача преобразуется к задаче вида:

$$\begin{cases} u_k''(t) - \mu \cdot u_k(t) = f_k(t),\ 0 < t < 1,\ \mu > 0, \\ u_k(0) = u_k(1) = u_0^k, \end{cases} \qquad k = 1, 2,$$

где $u_0^k \in \mathbb{R},\ k = 1, 2$ — заданные начальные условия.

4.1 Вычисление $u_1(x)$

Рассмотрим случай $k = 1$.

$$\begin{cases} u''(x) - \mu \cdot u(x) = (1+x^3)\sin(x),\ 0 < x < 1,\ \mu > 0 \\ u(0) = u(1) = u_0^1, \end{cases} \tag{10}$$

Общее решение имеет вид:

$$u_0(x) = C_1 e^{\sqrt{\mu}x} + C_2 e^{-\sqrt{\mu}x}.$$

Частное решение будем искать в виде:

$$u_*(x) = (a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1)\cos(x) + (a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2)\sin(x).$$

Взяв вторую производную для u_* и подставив её в первое уравнение 10, получим:

$$\cos(x)(-a_1(1+\mu)x^3 + (6a_2 - b_1(1+\mu))x^2 + (6a_1 + 4b_2 - c_1(1+\mu))x + 2b_1 + 2c_2 - d_1(1+\mu)) +$$

$$+ \sin(x)(-a_2(1+\mu)x^3 + (-6a_1 - b_2(1+\mu))x^2 + (6a_2 - 4b_1 - c_2(1+\mu))x + 2b_2 - 2c_1 - d_2(1+\mu)) =$$

$$= \sin(x) + x^3\sin(x).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x и тригонометрических функциях, получим систему:

$$\begin{cases} -a_1(1+\mu) = 0; \\ 6a_2 - b_1(1+\mu) = 0; \\ 6a_1 + 4b_2 - c1(1+\mu) = 0; \\ 2b_1 + 2c_1 - d_1(1+\mu) = 0; \\ -a_2(1+\mu) = 1; \\ -6a_1 - b_2(1+\mu) = 0; \\ -6a_2 - 4b_1 - c_2(1+\mu) = 0; \\ 2b_2 - 2c_1 - d_2(1+\mu) = 1. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим:

$$\begin{cases} a_1 = 0; \\ b_1 = -\dfrac{6}{(1+\mu)^2}; \\ c_1 = 0; \\ d_1 = \dfrac{48}{(1+\mu)^4} - \dfrac{24}{(1+\mu)^3}; \\ a_2 = -\dfrac{1}{1+\mu}; \\ b_2 = 0; \\ c_2 = -\dfrac{6}{(1+\mu)^2} + \dfrac{24}{(1+\mu)^3}; \\ d_2 = -\dfrac{1}{1+\mu}. \end{cases}$$

Для удобства введём обозначение:

$$\alpha = \frac{1}{1+\mu}.$$

Теперь можем записать решение полностью:

$$u(x) = u_0(x) + u_*(x),$$

$$u(x) = C_1 e^{\sqrt{\mu}x} + C_2 e^{-\sqrt{\mu}x} + (-6\alpha^2 x^2 + 48\alpha^4 - 24\alpha^3)\cos(x) + (-\alpha x^3 - 6\alpha^2 x + 24\alpha^3 x)\sin(x). \quad (11)$$

Для нахождения констант C_1, C_2 подставим полученное выражение в краевые условия в 10:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + u_*(0) = u_0^1; \\ C_1 e^{\sqrt{\mu}} + C_2 e^{-\sqrt{\mu}} + u_*(1) = u_0^1. \end{cases}$$

Выражаем из этой системы C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_2 = \dfrac{u_0^1 - e^{\sqrt{\mu}}(u_0^1 - u_*(0)) - u_*(1)}{e^{-\sqrt{\mu}} - e^{\sqrt{\mu}}}; \\ C_1 = u_0^1 - u_*(0) - C_2. \end{cases}$$

Теперь осталось только подставить полученные коэффициенты C_1, C_2 в 11. Таким образом, получили решение $u_1(x)$.

4.2 Вычисление $u_2(y)$

Рассмотрим случай $k = 2$.

$$\begin{cases} u''(y) - \mu \cdot u(y) = 3ye^{2y} + \sin(y),\ 0 < y < 1,\ \mu > 0 \\ u(0) = u(1) = u_0^2, \end{cases} \tag{12}$$

Общее решение имеет вид:

$$u_0(x) = C_1 e^{\sqrt{\mu}x} + C_2 e^{-\sqrt{\mu}x}.$$

Частное решение разобьём на два, для функции $3ye^{2y}$ и для функции $\sin(y)$. Сначала вычислим частное решение u_*^1 с неоднородностью $f^1(y) = 3ye^{2y}$. Будем искать его в виде $u_*^1 = (ay + b)e^{2y}$. Вычислим вторую производную u_*^1 и подставим в первое уравнение 12 :

$$4ae^{2y} + 4(ay + b)e^{2y} - \mu(ay + b)e^{2y} = 3ye^{2y}.$$

Сократим обе части уравнения на e^{2y} и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях y. Получим систему:

$$\begin{cases} 4a + 4b - \mu b = 0; \\ 4a - \mu a = 3. \end{cases}$$

Отсюда выражаем коэффициенты a, b:

$$a = \frac{3}{4 - \mu}, \quad b = -\frac{12}{(4 - \mu)^2}.$$

Тогда u_*^1 принимает вид:

$$u_*^1 = \left(\frac{3}{4 - \mu} x - \frac{12}{(4 - \mu)^2} \right) e^{2y}. \tag{13}$$

Теперь перейдём к вычислению u_*^2 с неоднородностью $f^2(y) = \sin(y)$.Будем искать это частное решение в виде $u_*^2 = c\sin(y) + d\cos(y)$. Вычислим вторую производную u_*^2 и подставим в первое уравнение 12 :

$$-c\sin(y) - d\cos(y) - \mu c\sin(y) - \mu d\cos(y) = \sin(y).$$

Приравниваем коэффициенты для соответствующих тригонометрических функций. Получим выражения для c, d:

$$c = \frac{1}{1 + \mu}, \quad d = 0.$$

Тогда u_*^2 принимает вид:

$$u_*^2 = \frac{1}{1 + \mu} \sin(x).$$

Теперь запишем общее решение для задачи 12 по формуле $u_*(y) = u_*^1 + u_*^2$, используя 13 и 4.2:

$$u_*(y) = \left(\frac{3}{4 - \mu} x - \frac{12}{(4 - \mu)^2} \right) e^{2y} + \frac{1}{1 + \mu} \sin(x).$$

Теперь можем записать решение полностью:

$$u(y) = u_0(y) + u_*(y),$$

$$u(x) = C_1 e^{\sqrt{\mu}x} + C_2 e^{-\sqrt{\mu}x} + u_*(y). \tag{14}$$

Для нахождения констант C_1, C_2 подставим полученное выражение в краевые условия в 12:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + u_*(0) = u_0^2; \\ C_1 e^{\sqrt{\mu}} + C_2 e^{-\sqrt{\mu}} + u_*(1) = u_0^2. \end{cases}$$

Выражаем из этой системы C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_2 = \dfrac{u_0^2 - e^{\sqrt{\mu}}(u_0^2 - u_*(0)) - u_*(1)}{e^{-\sqrt{\mu}} - e^{\sqrt{\mu}}}; \\ C_1 = u_0^2 - u_*(0) - C_2. \end{cases}$$

Теперь осталось только подставить полученные коэффициенты C_1, C_2 в 14. Таким образом, получили решение $u_2(x)$.
Теперь можем записать решение $u(x,y) = u_1(x) - u_2(y)$ для исходной задачи 1 с неоднородностью $f(x,y) = (1+x^3)\sin(x) - 3ye^{2y} - \sin(y)$.

5 Сравнение аналитического и численного решений

Сравним результат работы алгоритма с аналитически полученным решением исходной задачи 1 с неоднородностью $f(x,y) = (1+x^3)\sin(x) - 3ye^{2y} - \sin(y)$. Также рассмотрим погрешность вычислений.

Рис. 1: Аналитическое и численное решения при $\mu = 8, M = 100, N = 200, u_0^1 = 0.5, u_0^2 = 0.5$.

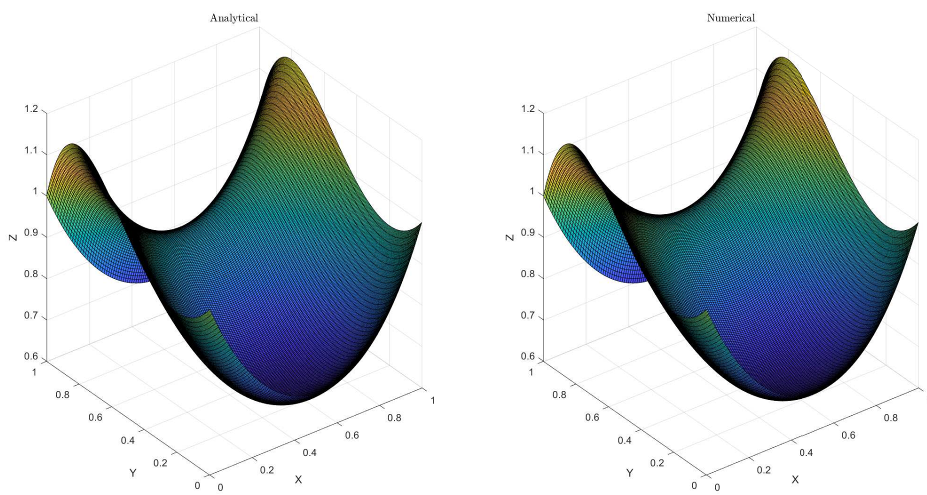


Рис. 2: Погрешность решения 1.

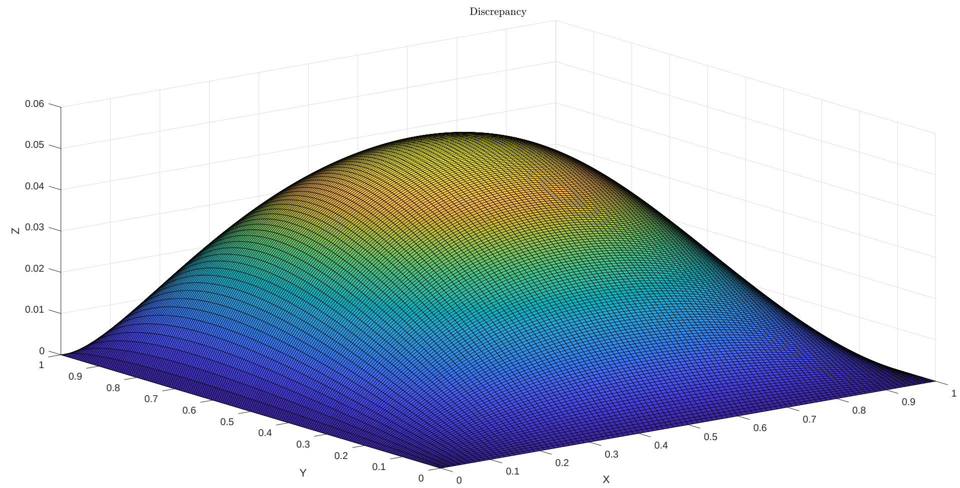


Рис. 3: Аналитическое и численное решения при $\mu = 132, M = 50, N = 100, u_0^1 = 0.5, u_0^2 = 0.5$.

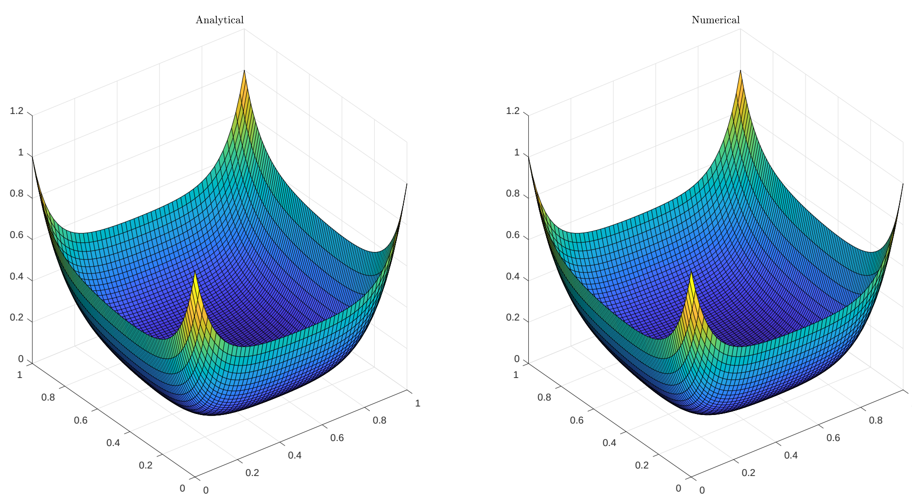
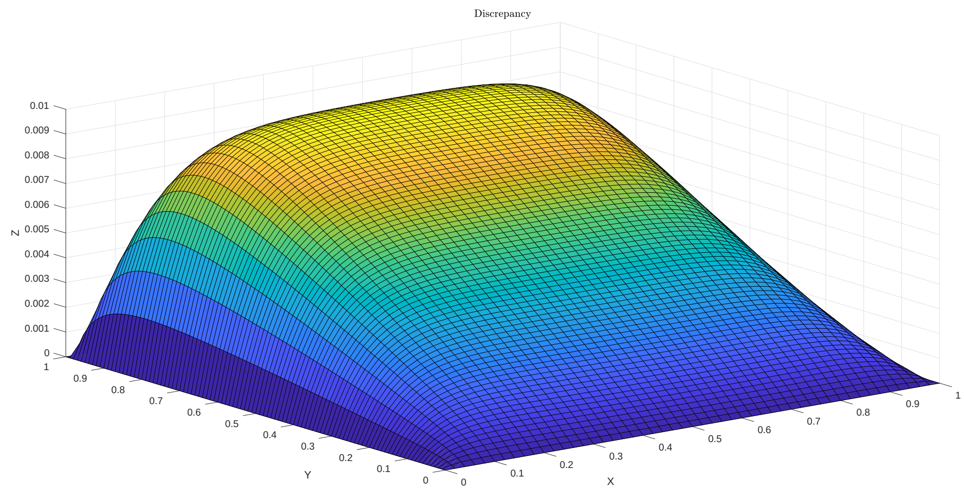


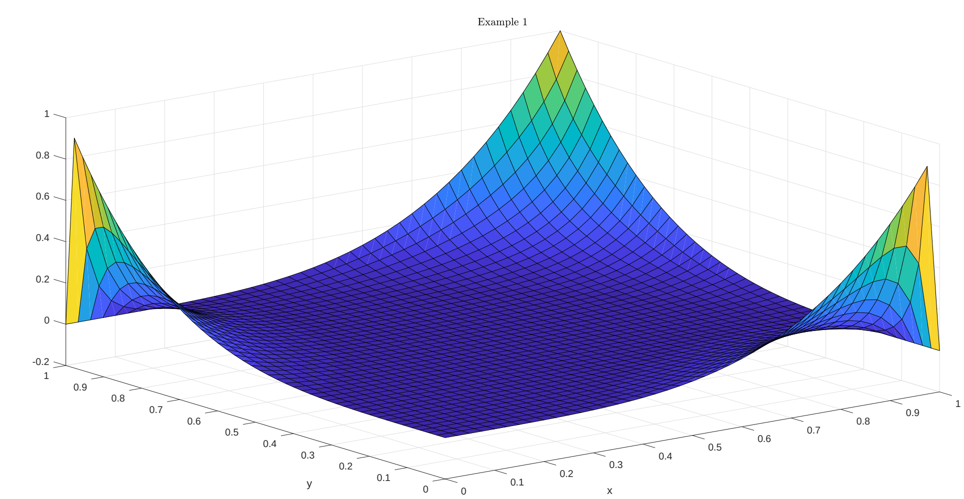
Рис. 4: Погрешность решения 3.



6 Примеры результата работы программы для некоторых функций

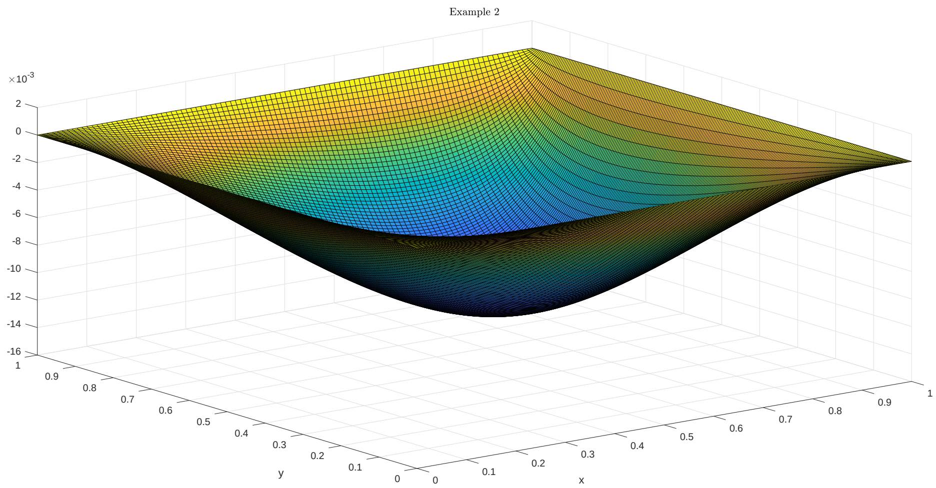
Рассмотрим $f_1(x, y) = (x^2 + y^2)^2$ и соответствующие краевые условия $\xi(x) = x^4, \eta(x) = y^4$.

Рис. 5: Результат работы алгоритма при $\mu = 120, M = 40, N = 45$.



Рассмотрим $f_2(x,y) = \sin(xy)$ и соответствующие краевые условия $\xi(x) = 0, \eta(x) = 0$.

Рис. 6: Результат работы алгоритма при $\mu = 10, M = 100, N = 250$.



Список литературы

[1] *https://sawiki.cs.msu.ru/index.php/Многомерное преобразование Фурье.*

[2] Денисов А. М., Разгулин А. В *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, 2009