Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Нелинейная задача оптимального управления»
«Задача распределения капиталовложений»

Студент 315 группы
А. А. Анашкина

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2024

1 Постановка задачи

Рассматривается модель производства одной группы товаров. Через L обозначен объём доступных трудовых ресурсов, через K — объём производственных фондов. Производственная функция $F(K,\ L)$ описывает связь используемых ресурсов и объёма выпускаемой продукции: $Y = F(K,\ L)$ — объём продукции. Считается, что объём трудовых ресурсов постоянен, а производственные фонды могут изменяться, в том числе за счёт использования продукции. Обозначим через c объём потребления продукции, а через P — объём загрязнений, отходов производства. Отходы производства убывают как за счёт естественных механизмов, так и за счёт борьбы с загрязнениями, на которую отводится часть произведённой продукции. Уравнения, описывающие функционирование системы, имеют вид:

$$c = u_1 F(K,\ L),$$

$$\dot{K} = (1 - u_1 - u_2) F(K,\ L) - \mu K,$$
$$\dot{P} = (\epsilon - \delta u_2) F(K,\ L) - \gamma P.$$

Здесь $\mu > 0$ — коэффициент амортизации основного капитала, $\epsilon > 0$ — доля объёма загрязнений относительно объёма производства, $\delta > 1$ — коэффициент уменьшения загрязнений за счёт затрат продукции, $\gamma > 0$ — коэффициент естественной убыли загрязнений, $u_1 = u_1(t) \in [0,1]$ — доля продукции, выделяемая на потребление, $u_2 = u_2(t) \in [0,1]$ — доля продукции, выделяемая на борьбу с загрязнениями. На значения управляющих параметров u_1 и u_2 наложено ограничение: $u_1(t) + u_2(t) \leqslant 1$. Кроме того, задана некоторая функция полезности $U(c, P)$, оценивающая пользу от текущего уровня потребления и текущего уровня загрязнения окружающей среды.
Начальный и конечный моменты времени фиксированы: $t_0 = 0, t_1 = T$. Необходимо решить задачу управления — распределения капиталовложений с целью максимизации совокупной пользы:

$$\int_{t_0}^{t_1} U(c,\ P)\, e^{-rt}\, dt \to \max_{u(\cdot)}.$$

Здесь $r > 0$ —коэффициент дисконтирования.
Производственная функция имеет следующий вид:

$$F(K,\ L) = K^{\lambda} L^{1-\lambda}, \quad \lambda \in (0,1).$$

Функция полезности имеет следующий вид:

$$U(c,\ P) = C - Ae^{-\alpha c} + Be^{-\beta P}.$$

Здесь A, B, C, α, β — положительные константы, $\alpha < 1$, $\beta > 1$.
В рамках данного задания необходимо численно решить задачу оптимального управления для нелинейной системы дифференциальных уравнений. В качестве основного инструмента должен быть использован принцип максимума Л. С. Понтрягина. Также необходимо написать программу в среде MatLab, обладающую минимальным пользовательским интерфейсом, позволяющим ввести все параметры системы ОДУ, а также параметры численного метода. Она должна корректно определять, разрешима ли задача, и если разрешима, то должно быть выведено приближённое оптимальное значение функционала качества $\mathcal{J}(u)$. Программа должна иметь возможность отображать все необходимые пользователю графики.

2 Теория, необходимая для решения задачи

2.1 Принцип максимума Л. С. Понтрягина

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\dot{x}\left(t\right) = f\left(x, u\right).$$

Здесь $x = \left(x_1, ..., x_n\right)^T, f = \left(f_1, ..., f_n\right)^T$. Функция f является непрерывной по обеим переменным и непрерыно дифференцируемой по x.

$$u = \left(u_1, ..., u_m\right)^T, \quad u\left(t\right) \in \mathcal{P},$$

где $\mathcal{P}$ — замкнутое множество.

$$x\left(t_0\right) = x^0 \in \mathcal{X}^0, \quad x\left(t_1\right) = x^1 \in \mathcal{X}^1.$$

В нашей задаче t_0, t_1, x^0 — фиксированы.
Рассмотрим также интегральный функционал:

$$\mathcal{J} = \int_{t_0}^{t_1} f_0\left(x, u\right) dt \to \inf_{u(\cdot)}.$$

Введём дополнительные координаты x_0, x_{n+1}:

$$x_0\left(t\right) = \int_{t_0}^{t} f_0\left(x, u\right) dt,$$

$$x_{n+1} = t.$$

Тогда нетрудно заметить, что

$$\begin{cases} \dot{x}_0\left(t\right) = f_0\left(x, u\right), \\ x_0\left(t_0\right) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_{n+1} = 1, \\ x_{n+1}\left(t_0\right) = t_0. \end{cases} \tag{2}$$

Теперь будем рассматривать расширенную систему:

$$\dot{\overline{x}}\left(t\right) = \overline{f}\left(x, u\right),$$

где $\overline{x} = \left(x_0, x_1, ..., x_n, x_{n+1}\right)^T, \overline{f} = \left(f_0, f_1, ..., f_n, 1\right)^T$.
Введём векторы сопряжённых переменных:

$$\psi = \left(\psi_1, ..., \psi_n\right)^T,$$

$$\overline{\psi} = \left(\psi_0, \psi_1, ..., \psi_n, \psi_{n+1}\right)^T.$$

Рассмотрим функции Гамильтона—Понтрягина:

$$\widetilde{\mathcal{H}} = \psi_0 f_0 + \langle \psi, f \rangle,$$

$$\overline{\mathcal{H}}\left(\overline{x}, \overline{\psi}, u\right) = \langle \overline{\psi}, \overline{f} \rangle.$$

Заметим, что для $\overline{\mathcal{H}}$ справедлива гамильтонова система:

$$\begin{cases} \dot{\overline{x}} = \dfrac{\partial \overline{\mathcal{H}}}{\partial \overline{\psi}} = \overline{f}\left(x, u\right), \\ \dot{\overline{\psi}} = -\dfrac{\partial \overline{\mathcal{H}}}{\partial \overline{x}}. \end{cases} \tag{3}$$

Также введём обозначение:

$$\overline{\mathcal{M}} = \sup_{u \in \mathcal{P}} \overline{\mathcal{H}}\left(t, \overline{x}, \overline{\psi}, u\right)$$

.

Теперь можем сформулировать основную теорему.

Теорема 1 (ПМП). *Пусть $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ — оптимальная пара на $[t_0, t_1]$, тогда существует вектор сопряжённых переменных $\overline{\psi}$: $[t_0, t_1] \to \mathbb{R}^{n+2}$ такой, что $\overline{\psi} \not\equiv 0$ $\left(\overline{\psi} \neq 0\right)$, и выполняются следующие условия:*
Сопряжённая система:

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi_0^*}{dt} = 0, \\ \dfrac{d\psi^*}{dt} = -\dfrac{\partial \widetilde{\mathcal{H}}}{\partial x}\bigg|_{\substack{x(\cdot) = x^*(\cdot), \\ u(\cdot) = u^*(\cdot), \\ \psi(\cdot) = \psi^*(\cdot).}}, \\ \dfrac{d\psi_{n+1}^*}{dt} = -\dfrac{\partial \widetilde{\mathcal{H}}}{\partial t}\bigg|_{\substack{x(\cdot) = x^*(\cdot), \\ u(\cdot) = u^*(\cdot), \\ \psi(\cdot) = \psi^*(\cdot).}}. \end{cases} \tag{4}$$

Условие максимума:

$$\overline{\mathcal{H}}\left(t, \overline{\psi}^*(t), \overline{x}^*(t), u^*(t)\right) = \sup_{u \in \mathcal{P}} \overline{\mathcal{H}}\left(t, \overline{\psi}^*(t), \overline{x}^*(t), u(t)\right) = \overline{\mathcal{M}}\left(t, \overline{\psi}^*(t), \overline{x}^*(t)\right). \tag{5}$$

Условие на гамильтониан:

$$\overline{\mathcal{M}} \equiv const. \tag{6}$$

Условие на некоторые компоненты вектора сопряженных переменных:

$$\psi_0^* \equiv const \leqslant 0, \quad \psi_{n+1}^* \equiv const. \tag{7}$$

Условия трансверсальности:

$$\psi^*(t_0) \perp T_{x^*(t_0)}\mathcal{X}^0, \tag{8}$$

$$\psi^*(t_1) \perp T_{x^*(t_1)}\mathcal{X}^1. \tag{9}$$

Здесь $T_{x^i}\mathcal{X}^i$ — касательная гиперплоскость ко множеству $\mathcal{X}^i$ в точке x^i.

2.2 Правило множителей Лагранжа

Рассмотрим следующий класс задач:

$$\mathcal{J}(u) \to \inf, \quad u \in U \subset L, \tag{10}$$

$$U = \{u \in U_0 \,|\, g_1(u) \leqslant 0, ..., g_m(u) \leqslant 0\}. \tag{11}$$

Здесь L — произвольное линейное пространство любой размерности, даже необязательно топологическое. Предполагается выполненным следующее основное предположение выпуклости:

Предположение 1. *$\mathcal{J}(u), g_1(u), ..., g_m(u)$ — выпуклые функции, U_0 — выпуклое множество.*

Введём функцию Лагранжа:

$$L(u, \lambda) = \lambda_0 \mathcal{J}(u) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(u), \quad u \in U_0,\ \lambda \in \mathbb{R}_+^{m+1}$$

Введем обозначение:

$$\mathcal{J}_* = \inf_{u \in U} \mathcal{J}(u)$$

Определение 1. $U_* = \{v \in U \,|\, \mathcal{J}(v) = \mathcal{J}_*\}$ *— множество всех оптимальных решений.*

Тогда пусть $u_* \in U_*$ — один из оптимальных элементов.

Сформулируем теорему, содержащую необходимые и достаточные условия оптимальности элемента u_* в задаче 10 – 11.

Теорема 2 (Правило множителей Лагранжа для выпуклых задач)**.** *Пусть задача 10 – 11 выпукла в смысле Предположения1. Тогда если $u_* \in U_*$, то необходимо существует набор множителей Лагранжа $\lambda^* \neq 0$, для которого выполняются:*
Принцип минимума:

$$\min_{u \in U_0} L(u, \lambda^*) = L(u_*, \lambda^*). \tag{12}$$

Неотрицательность множителей:

$$\lambda_i^* \geqslant 0, \quad i = 0, 1, ..., m. \tag{13}$$

Условия дополняющей нежёсткости:

$$\lambda_i^* g_i(u_*) = 0, \quad i = 0, 1, ..., m. \tag{14}$$

Обратно, если для некоторой пары (u_*, λ^*) выполняются условия 12 – 14, причём $u_* \in U$, а $\lambda_0^* \neq 0$, то $u_* \in U_*$, то есть элемент u_* является оптимальным решением задачи 10 – 11.

3 Аналитическое решение задачи

Рассматриваемая нами задача имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{K} = (1 - u_1 - u_2) F(K,\ L) - \mu K, \\ \dot{P} = (\epsilon - \delta u_2) F(K,\ L) - \gamma P, \\ \mathcal{J} = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} U(c,\ P) e^{-rt} \, dt \to \max_{u(\cdot)}. \end{cases} \tag{15}$$

Здесь $t_0 = 0$, $t_1 = T$, $K(0) = K^0, P(0) = P^0$ — фиксированны.
Запишем функцию Гамильтона—Понтрягина:

$$\mathcal{H} = -\psi_0 U(c, P) e^{-rt} + \psi_1 (1 - u_1 - u_2) F(K, L) - \psi_1 \mu K + \psi_2 (\epsilon - \delta u_2) F(K, L) - \psi_2 \gamma P.$$

Теперь можем записать сопряжённую систему:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_0 = 0, \\ \dot{\psi}_1 = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial K} = \psi_0 \alpha A u_1 e^{-\alpha u_1 F(K,L) - rt} \dfrac{\partial F(K,L)}{\partial K} - \psi_1 (1 - u_1 - u_2) \dfrac{\partial F(K,L)}{\partial K} + \psi_1 \mu - \psi_2 (\epsilon - \delta u_2) \dfrac{\partial F(K,L)}{\partial K}, \\ \dot{\psi}_2 = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} = -\psi_0 \beta B e^{-\beta P - rt} + \psi_2 \gamma. \end{cases} \tag{16}$$

Введём обозначение:

$$F = F(K, L), \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial K} = F_K$$

Преобразуем функцию $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H} = e^{-rt} \left[-\psi_0 U(c, P) + \psi_1 e^{rt} ((1 - u_1 - u_2) F - \mu K) + \psi_2 e^{rt} ((\epsilon - \delta u_2) F - \gamma P) \right].$$

Отсюда сразу видим замену переменных:

$$\eta_0 = \psi_0,$$

$$\eta_i = e^{rt} \psi_i, \quad i = 1, 2.$$

Тогда получим:

$$\mathcal{H} = e^{-rt}\left[-\eta_0 U\left(c,P\right) + \eta_1\left(\left(1-u_1-u_2\right)F - \mu K\right) + \eta_2\left(\left(\epsilon - \delta u_2\right)F - \gamma P\right)\right].$$

Введём обозначение:

$$\widetilde{\mathcal{H}} = -\eta_0 U\left(c,P\right) + \eta_1\left(\left(1-u_1-u_2\right)F - \mu K\right) + \eta_2\left(\left(\epsilon - \delta u_2\right)F - \gamma P\right). \tag{17}$$

В дальнейшем можем рассматривать $\widetilde{\mathcal{H}}$ как функцию Гамильтона—Понтрягина для задачи 15. Чтобы записать сопряжённую систему для новых переменных, воспользуемся равенством:

$$\dot{\eta}_i = \dot{\psi}_i e^{rt} + \psi_i r e^{rt}, \quad i = 1,2.$$

Вычислим $\dot{\eta}_1$:

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_1 &= \psi_0 \alpha A u_1 e^{-\alpha u_1 F} F_K - \psi_1 e^{rt}\left(1-u_1-u_2\right)F_K + \psi_1 e^{rt}\mu - \psi_2 e^{rt}\left(\epsilon - \delta u_2\right)F_K + \psi_1 e^{rt} r = \\ &= \eta_0 \alpha A u_1 e^{-\alpha u_1 F} F_K + \eta_1\left(\mu + r - \left(1-u_1-u_2\right)F_K\right) - \eta_2\left(\epsilon - \delta u_2\right)F_K.\end{aligned}$$

Аналогично вычисляем $\dot{\eta}_2$:

$$\dot{\eta}_2 = -\psi_0 \beta B e^{-\beta P} + \psi_2 e^{rt}\gamma + \psi_2 r e^{rt} = -\eta_0 \beta B e^{-\beta P} + \eta_2\left(\gamma + r\right).$$

Теперь сопряжённая система имеет вид:

$$\begin{cases}\dot{\eta}_0 = 0,\\ \dot{\eta}_1 = \eta_0 \alpha A u_1 e^{-\alpha u_1 F} F_K + \eta_1\left(\mu + r - \left(1-u_1-u_2\right)F_K\right) - \eta_2\left(\epsilon - \delta u_2\right)F_K,\\ \dot{\eta}_2 = -\eta_0 \beta B e^{-\beta P} + \eta_2\left(\gamma + r\right).\end{cases} \tag{18}$$

В нашей задаче $\mathcal{X}^0 = \left\{\left(K^0, P^0\right)\right\}$ — одноточечное множество, $\mathcal{X}^1 = \mathbb{R}^2$. В конечный момент времени приходим в точку $\left(K\left(T\right), P\left(T\right)\right) \in \mathcal{X}^1$. Тогда условие трансверсальности 9 можем переписать в более простой форме:

$$\left\langle \psi\left(t_1\right), \left(K\left(T\right), P\left(T\right)\right)\right\rangle = 0, \quad \forall \left(K\left(T\right), P\left(T\right)\right) \in \mathcal{X}^1. \tag{19}$$

Воспользуемся условием трансверсальности на правом конце 19. Из него следует, что:

$$\eta_1\left(T\right) = \eta_2\left(T\right) = 0 \tag{20}$$

Ввиду условия 7 для решения задачи необходимо рассмотреть два случая: $\eta_0 < 0$ и $\eta_0 = 0$.

3.1 Нормальный случай

Проанализируем тертье уравнение системы 18:

$$\dot{\eta}_2 = -\eta_0 \beta B e^{-\beta P} + \eta_2\left(\gamma + r\right). \tag{21}$$

Здесь параметры β, B, γ, r положительны. Таким образом, $-\eta_0 \beta B e^{-\beta P} = \beta B e^{-\beta P} > 0$ и $\gamma + r > 0$. Предположим, что $\eta_2 \geqslant 0$, тогда правая часть уравнения 21 положительна, то есть $\dot{\eta}_2 > 0$. Значит η_2 монотонно возрастает, но из 20: $\eta_2\left(T\right) = 0$. Получили противоречние, значит $\eta_2 \leqslant 0$ на $[0,T]$.

Далее воспользуемся условием максимума 5. Рассмотрим уравнение 17. Нам необходимо максимизировать значение $\widetilde{\mathcal{H}}$ по переменной $u\left(\cdot\right) \in \mathcal{P}$. Для этого выделим из уравнения 17 слагаемые, содержащие управление:

$$\eta_0 A e^{-\alpha u_1 F} - \eta_1 u_1 F - \eta_1 u_2 F - \eta_2 \delta u_2 F \to \max.$$

Составим задачу минимизации:

$$\mathcal{G}\left(u\right) = -\eta_0 A e^{-\alpha u_1 F} + \eta_1 u_1 F + \eta_1 u_2 F + \eta_2 \delta u_2 F \to \min_{u=\left(u_1,u_2\right)}, \tag{22}$$

$$V = \left\{u \in \mathbb{R}^2\left[0,1\right] \,\middle|\, -u_1 \leqslant 0, -u_2 \leqslant 0, u_1 + u_2 - 1 \leqslant 0\right\}.$$

Решим её с помощью *Теоремы 2.*

Введём функцию Лагранжа, причём $\lambda_0 = 1$:

$$L(u) = -\eta_0 A e^{-\alpha u_1 F} + \eta_1 u_1 F + u_2 (\eta_1 F + \delta \eta_2 F) + \lambda_1 (u_1 + u_2 - 1) - \lambda_2 u_1 - \lambda_3 u_2.$$

Здесь $\lambda_i \geqslant 0, \quad \lambda_i^* g_i = 0, \quad i = 1, 2, 3$.
Ввиду того, что $g_i = g_i(u(t))$, то $\lambda_i = \lambda_i(t)$. Справедлива следующая система:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(u)}{\partial u_1} = \eta_0 \alpha A F e^{-\alpha u_1 F} + \eta_1 F + \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \\ \dfrac{\partial L(u)}{\partial u_2} = \eta_1 F + \delta \eta_2 F + \lambda_1 - \lambda_3 = 0. \end{cases} \tag{23}$$

Рассмотрим случаи для всевозможных значений $\lambda_i, \quad i = 1, 2, 3$. Причём зависимость λ_i от времени не влияет на решение, так как в представленных ниже случаях либо $\lambda_i = 0$, либо $\lambda_i \neq 0$, и тогда для поиска управления используется условие дополняющей нежёсткости 14.

3.1.1 Случай 1: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Тогда, подставив эти значения в 23, получим:

$$\frac{\partial L(u)}{\partial u_1} = \eta_0 \alpha A F e^{-\alpha u_1 F} + \eta_1 F = 0.$$

Так как $Y = F(K, L)$ — объём продукции, можно считать, что $F(K, L) > 0 \quad \forall (K, L)$. Тогда разделим обе части уравнения на F:

$$\eta_0 \alpha A F e^{-\alpha u_1 F} = -\eta_1.$$

Теперь рассмотрим второе уравнение системы 23 :

$$\frac{\partial L(u)}{\partial u_2} = \eta_1 F + \delta \eta_2 F = 0.$$

Аналогично разделим обе части уравнения на $F > 0$:

$$\eta_1 + \delta \eta_2 = 0$$

Итак, получим систему:

$$\begin{cases} \eta_0 \alpha A F e^{-\alpha u_1 F} = -\eta_1, \\ \eta_1 + \delta \eta_2 = 0. \end{cases} \tag{24}$$

Из первого уравнения системы 24 можем выразить u_1:

$$e^{-\alpha u_1 F} = -\frac{\eta_1}{\alpha A \eta_0},$$

$$-\alpha u_1 F = \ln\left(-\frac{\eta_1}{\alpha A \eta_0}\right),$$

$$u_1 = -\frac{1}{\alpha F} \ln\left(-\frac{\eta_1}{\alpha A \eta_0}\right). \tag{25}$$

Однако u_2 не определяется из системы 24, то есть $u_2 \in [0, 1]$. Значит возможен особый режим. Рассмотрим второе уравнение системы 24:

$$\eta_1 + \delta \eta_2 = 0 \,\Big|\, \frac{d}{dt},$$

$$\dot{\eta}_1 + \delta \dot{\eta}_2 = 0.$$

Подставим сюда значения из 18:

$$\eta_0 \alpha A u_1 e^{-\alpha u_1 F} F_K + \eta_1 (\mu + r - (1 - u_1 - u_2) F_K) - \eta_2 (\epsilon - \delta u_2) F_K - \eta_0 \delta \beta B e^{-\beta P} + \delta \eta_2 (\gamma + r) = 0,$$

$$\eta_0\alpha A u_1 e^{-\alpha u_1 F}F_K+\eta_1\mu-\eta_1 F_K+u_1\eta_1 F_K-\eta_2\epsilon F_K-\eta_0\delta\beta B e^{-\beta P}+\delta\eta_2\gamma+r\left(\eta_1+\delta\eta_2\right)+u_2 F_K\left(\eta_1+\delta\eta_2\right)=0.$$

Ввиду второго уравнения системы 24 получим:

$$\eta_0\alpha A u_1 e^{-\alpha u_1 F}F_K+\eta_1\mu-\eta_1 F_K+u_1\eta_1 F_K-\eta_2\epsilon F_K-\eta_0\delta\beta B e^{-\beta P}+\delta\eta_2\gamma=0.$$

Видно, что даже из этого уравнения не можем найти зависимость для u_2. Тогда приведём этот случай к противоречию. Подставим в уравнение $\eta_1=-\delta\eta_2$:

$$\begin{gathered}\eta_0\alpha A u_1 e^{-\alpha u_1 F}F_K-\eta_0\delta\beta B e^{-\beta P}-\eta_2\left(\delta\mu-\delta F_K+\delta u_1 F_K+\epsilon F_K-\delta\gamma\right)=0,\\ u_1 F_K\left(\eta_0\alpha A u_1 e^{-\alpha u_1 F}-\eta_2\delta\right)-\eta_0\delta\beta B e^{-\beta P}+\eta_2\delta\left(\gamma-\mu\right)+\eta_2 F_K\left(\delta-\epsilon\right)=0.\end{gathered} \tag{26}$$

Подстановкой $\eta_1=-\delta\eta_2$ в первое уравнение системы 24 получим:

$$\eta_0\alpha A u_1 e^{-\alpha u_1 F}-\eta_2\delta=0.$$

Тогда 26 преобразуется к виду:

$$-\eta_0\delta\beta B e^{-\beta P}+\eta_2\delta\left(\gamma-\mu\right)+\eta_2 F_K\left(\delta-\epsilon\right)=0.$$

Так как хотим прийти к противоречию, введём ограничения на параметры системы:

$$\gamma<\mu. \tag{27}$$

$$\epsilon>\delta. \tag{28}$$

Так как $\delta>1$ получим из 28, что $\epsilon>1$. Это означает, что в нашей задаче объём загрязнений превышает обьём производства.
Ввиду того, что $-\eta_0\delta\beta B e^{-\beta P}>0$, $\delta\left(\gamma-\mu\right)<0$, $F_K\left(\delta-\epsilon\right)<0$, а $\eta_2<0$ на $(0,T)$ получим, что:

$$\delta\beta B e^{-\beta P}+\eta_2\delta\left(\gamma-\mu\right)+\eta_2 F_K\left(\delta-\epsilon\right)>0.$$

Получили противоречие. Значит можем не рассматривать этот случай.

3.1.2 Случай 2: $\lambda_1=\lambda_2=0$, $\lambda_3\neq 0$

Пусть теперь $\lambda_1=\lambda_2=0$, $\lambda_3\neq 0$. Тогда ввиду условия дополняющей нежёсткости 14 получим:

$$u_2=0.$$

Подставим значения λ_i, u_2 в 23:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L\left(u\right)}{\partial u_1}=\eta_0\alpha A F e^{-\alpha u_1 F}+\eta_1 F=0,\\ \dfrac{\partial L\left(u\right)}{\partial u_2}=\eta_1 F+\delta\eta_2 F-\lambda_3=0.\end{cases}$$

Из первого уравнения аналогично предыдущему случаю найдём u_1:

$$u_1=-\frac{1}{\alpha F}\ln\left(-\frac{\eta_1}{\alpha A\eta_0}\right).$$

Явно нашли обе составляющие управления, значит они могут быть оптимальными:

$$\begin{cases}u_1^*=-\dfrac{1}{\alpha F}\ln\left(-\dfrac{\eta_1}{\alpha A\eta_0}\right),\\ u_2^*=0.\end{cases} \tag{29}$$

Так как по условию задачи $0<u_1^*<0$, получим:

$$\alpha A<\frac{\eta_1}{\eta_0}<\alpha A e^{\alpha F}. \tag{30}$$

В дальнейшем, при реализации алгоритма для решения задачи, чтобы использовать условие максимума 5, необходимо сравнивать значения функционала $\mathcal{G}\left(u\right)$ в различных случаях. Для этого введём дополнительные обозначения:

$$\mathcal{G}_1 = \frac{\eta_1}{\alpha} + \eta_1 u_1^* F + \eta_1 u_2^* F + \eta_2 \delta u_2^* F = \frac{\eta_1}{\alpha}\left(1 - \frac{1}{F}\ln\left(-\frac{\eta_1}{\alpha A \eta_0}\right)\right) \tag{31}$$

— значение функционала $\mathcal{G}\left(u\right)$ из 22 при подстановке значений из системы 29.

3.1.3 Случай 3: $\lambda_3 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_1 \neq 0$

Пусть теперь $\lambda_3 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_1 \neq 0$. Тогда ввиду условия дополняющей нежёсткости 14 получим:

$$u_1 + u_2 = 1.$$

Подставим значения λ_i в 23:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L\left(u\right)}{\partial u_1} = \eta_0 \alpha A F e^{-\alpha u_1 F} + \eta_1 F + \lambda_1 = 0, \\ \dfrac{\partial L\left(u\right)}{\partial u_2} = \eta_1 F + \delta \eta_2 F + \lambda_1 = 0. \end{cases} \tag{32}$$

Вычтем из первого уравнения системы 45 второе:

$$\eta_0 \alpha A F e^{-\alpha u_1 F} + \lambda_1 + \eta_1 F - \eta_1 F - \delta \eta_2 F - \lambda_1 = 0,$$

$$\eta_0 \alpha A F e^{-\alpha u_1 F} = \delta \eta_2 F,$$

$$e^{-\alpha u_1 F} = \frac{\delta \eta_2}{\alpha A \eta_0},$$

$$u_1 = -\frac{1}{\alpha F}\ln\left(\frac{\delta \eta_2}{\alpha A \eta_0}\right).$$

Таким образом, нашли u_1. Выразим u_2 из уравнения $u_1 + u_2 = 1$:

$$u_2 = 1 + \frac{1}{\alpha F}\ln\left(\frac{\delta \eta_2}{\alpha A \eta_0}\right).$$

Явно нашли обе составляющие управления, значит они могут быть оптимальными:

$$\begin{cases} u_1^* = -\dfrac{1}{\alpha F}\ln\left(\dfrac{\delta \eta_2}{\alpha A \eta_0}\right), \\ u_2^* = 1 + \dfrac{1}{\alpha F}\ln\left(\dfrac{\delta \eta_2}{\alpha A \eta_0}\right). \end{cases} \tag{33}$$

Ввиду условия $0 < u_1 < 1$ получим:

$$\frac{\alpha A e^{\alpha A}}{\delta} < \frac{\eta_2}{\eta_0} < \frac{\alpha A}{\delta}. \tag{34}$$

Аналогично 3.1.2 введём обозначение:

$$\mathcal{G}_2 = -\frac{\delta \eta_2}{\alpha} + \eta_1 u_1^* F + \eta_1 u_2^* F + \eta_2 \delta u_2^* F = \frac{\delta \eta_2}{\alpha}\left(\ln\left(\frac{\delta \eta_2}{\eta_0 \alpha A}\right) - 1\right) + F\left(\eta_1 + \delta \eta_2\right). \tag{35}$$

— значение функционала $\mathcal{G}\left(u\right)$ из 22 при подстановке значений из системы 33.

3.1.4 Случай 4: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 \neq 0$

Пусть теперь $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 \neq 0$. Тогда ввиду условия дополняющей нежёсткости 14 получим:

$$u_1^* = 0, \quad u_2^* = 0$$

С точки зрения экономического смысла задачи этот случай не очень интересен, однако рассмотрим его подробнее. Знаем обе компоненты управления и можем подставить их в начальную задачу 15:

$$\begin{cases} \dot{K} = K^{\ell} L^{1-\ell} - \mu K, \\ \dot{P} = \epsilon K^{\ell} L^{1-\ell} - \gamma P. \end{cases} \tag{36}$$

Ниже представлен пример решения данной системы в среде MatLab при разных значениях параметров системы. Аналогично 3.1.2 введём обозначение:

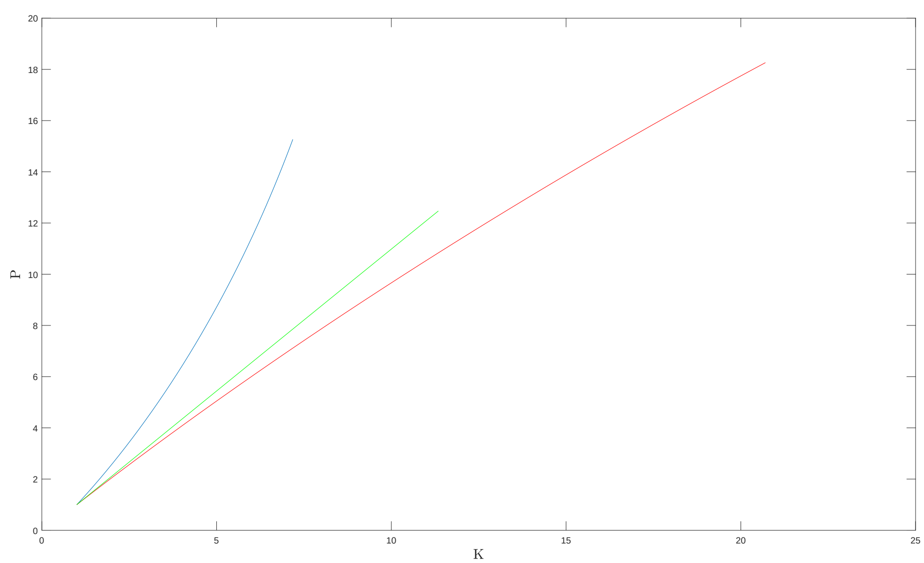


Рис. 1: Траектории при различных значениях параметров

$$\mathcal{G}_3 = -\eta_0 A. \tag{37}$$

3.2 Случай 5: $\lambda_2 = 0, \lambda_1 \neq 0, \lambda_3 \neq 0$

Пусть теперь $\lambda_2 = 0, \lambda_1 \neq 0, \lambda_3 \neq 0$. Тогда ввиду условия дополняющей нежёсткости 14 получим:

$$u_1 + u_2 = 1, \quad u_2 = 0.$$

Отсюда сразу можно выразить управление:

$$u_1^* = 1, \quad u_2^* = 0.$$

Знаем обе компоненты управления и можем подставить их в начальную задачу 15:

$$\begin{cases} \dot{K} = -\mu K, \\ \dot{P} = \epsilon K^{\ell} L^{1-\ell} - \gamma P. \end{cases} \tag{38}$$

Сразу можно сказать, что объём производственных фондов уменьшается. Ниже представлен пример решения данной системы в среде MatLab при разных значениях параметров системы.

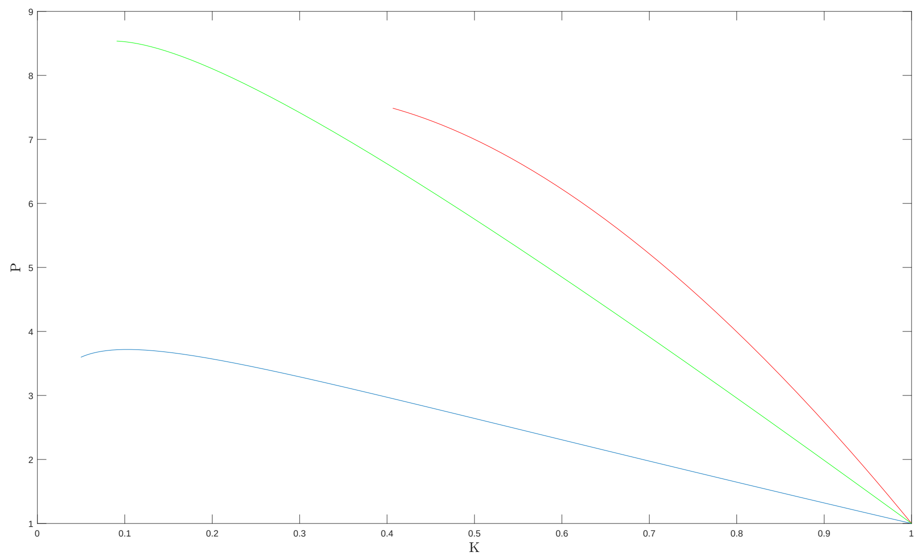


Рис. 2: Траектории при различных значениях параметров

Аналогично 3.1.2 введём обозначение:

$$\mathcal{G}_4 = -\eta_0 A e^{-\alpha F} + \eta_1 F. \tag{39}$$

3.2.1 Случай 6: $\lambda_3 = 0, \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$

Пусть теперь $\lambda_3 = 0, \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$. Тогда ввиду условия дополняющей нежёсткости 14 получим:

$$u_1 = 0, \quad u_1 + u_2 = 1.$$

Отсюда сразу можно выразить управление:

$$u_1^* = 0, \quad u_2^* = 1.$$

Знаем обе компоненты управления и можем подставить их в начальную задачу 15:

$$\begin{cases} \dot{K} = -\mu K, \\ \dot{P} = (\epsilon - \delta) K^{\ell} L^{1-\ell} - \gamma P. \end{cases} \tag{40}$$

Сразу можно сказать, что объём производственных фондов уменьшается. Ниже представлен пример решения данной системы в среде MatLab при разных значениях параметров системы.

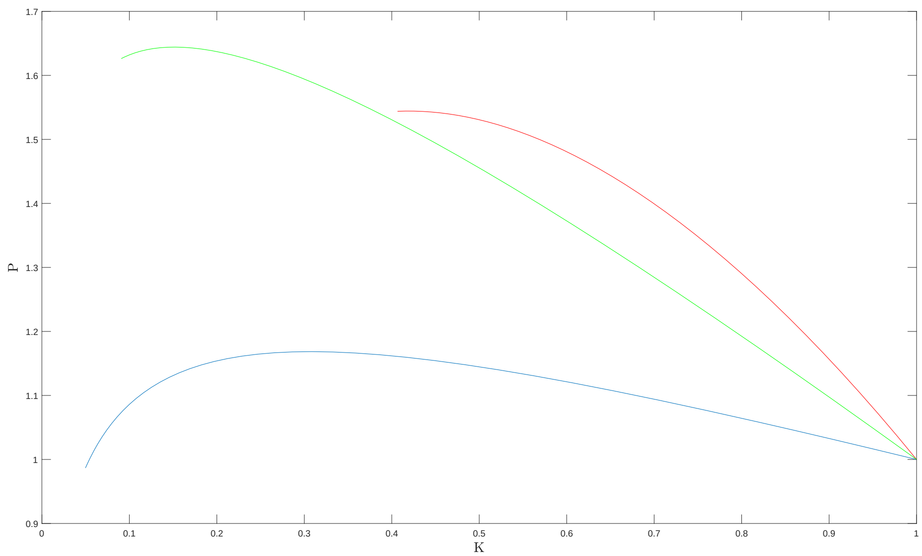


Рис. 3: Траектории при различных значениях параметров

Аналогично 3.1.2 введём обозначение:

$$\mathcal{G}_5 = -\eta_0 A + \eta_1 F + \eta_2 \delta F. \tag{41}$$

3.2.2 Случай 7: $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 \neq 0$

Пусть теперь $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 \neq 0$. Тогда ввиду условия дополняющей нежёсткости 14 получим:

$$\begin{cases} u_1 = 0, \\ u_2 = 0, \\ u_1 + u_2 = 1. \end{cases}$$

Система не имеет решений, значит этот случай рассматривать не нужно.

3.2.3 Случай 8: $\lambda_1 = \lambda_3 = 0, \lambda_2 \neq 0$

Теперь пусть $\lambda_1 = \lambda_3 = 0, \lambda_2 \neq 0$. Тогда ввиду условия дополняющей нежёсткости 14 получим:

$$u_1 = 0$$

Подставим значения λ_i, u_1 в 23:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(u)}{\partial u_1} = \eta_0 \alpha A F + \eta_1 F - \lambda_2 = 0, \\ \dfrac{\partial L(u)}{\partial u_2} = \eta_1 F + \delta \eta_2 F = 0. \end{cases} \tag{42}$$

Из этой системы не можем выразить u_2. Рассмотрим $\mathcal{G}(0, u_2)$:

$$\mathcal{G}(0, u_2) = -\eta_0 A + u_2 F(\eta_1 + \delta\eta_2).$$

Так как мы минимизируем это выражение, u_2 принимает следующие значения:

$$u_2 = \begin{cases} 0, & \eta_1 + \delta\eta_2 > 0, \\ 1, & \eta_1 + \delta\eta_2 < 0, \\ [0,1], & \eta_1 + \delta\eta_2 = 0. \end{cases} \tag{43}$$

Возможен ли особый режим при $\eta_1 + \delta\eta_2 = 0$? Аналогично *Случаю 3.1.1* при таких же ограничениях получим противоречие. Значит особого режима нет. Рассмотрим оставшиеся ситуации:

$$\begin{cases} u_1^* = 0, \\ u_2^* = 0, \end{cases} \quad \eta_1 + \delta\eta_2 > 0.$$

Заметим, что это частный случай 3.1.4, значит отдельно его рассматривать не нужно.

$$\begin{cases} u_1^* = 0, \\ u_2^* = 1, \end{cases} \quad \eta_1 + \delta\eta_2 < 0.$$

Заметим, что это частный случай 3.2.1, значит отдельно его рассматривать не нужно. Итак, получили что случай 3.2.3 можно исключить.

3.3 Анормальный случай

Пусть теперь $\eta_0 = 0$. Вспомним, что из условия трансверсальности получили выражение 20. Тогда в кончный момент времени:

$$\eta_0(T) = \eta_1(T) = \eta_2(T) = 0.$$

Значит $\overline{\eta}(T) = 0$, что противоречит условию *Теоремы 1*. Таким образом, этот случай можно исключить.

3.4 Алгоритм решения задачи

Вспомним все рассмотренные выше случаи:

$$\begin{cases} u_1^* = -\dfrac{1}{\alpha F}\ln\left(-\dfrac{\eta_1}{\alpha A \eta_0}\right), \\ u_2^* = 0, \end{cases} \quad \mathcal{G}_1 = \frac{\eta_1}{\alpha}\left(1 - \frac{1}{F}\ln\left(-\frac{\eta_1}{\alpha A\eta_0}\right)\right). \tag{44}$$

$$\alpha A < \frac{\eta_1}{\eta_0} < \alpha A e^{\alpha F}.$$

$$\begin{cases} u_1^* = -\dfrac{1}{\alpha F}\ln\left(\dfrac{\delta\eta_2}{\alpha A\eta_0}\right), \\ u_2^* = 1 + \dfrac{1}{\alpha F}\ln\left(\dfrac{\delta\eta_2}{\alpha A\eta_0}\right), \end{cases} \quad \mathcal{G}_2 = \frac{\delta\eta_2}{\alpha}\left(\ln\left(\frac{\delta\eta_2}{\eta_0\alpha A}\right) - 1\right) + F(\eta_1 + \delta\eta_2). \tag{45}$$

$$\frac{\alpha A e^{\alpha A}}{\delta} < \frac{\eta_2}{\eta_0} < \frac{\alpha A}{\delta}.$$

$$\begin{cases} u_1^* = 0, \\ u_2^* = 0, \end{cases} \quad \mathcal{G}_3 = -\eta_0 A. \tag{46}$$

$$\begin{cases} u_1^* = 1, \\ u_2^* = 0, \end{cases} \quad \mathcal{G}_4 = -\eta_0 A e^{-\alpha F} + \eta_1 F. \tag{47}$$

$$\begin{cases} u_1^* = 0, \\ u_2^* = 1, \end{cases} \quad \mathcal{G}_5 = -\eta_0 A + \eta_1 F + \eta_2 \delta F. \tag{48}$$

Необходимо решить следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} \dot{K} = (1-u_1-u_2)\,F\,(K,\ L) - \mu K, \quad K\,(0) = K^0, \\ \dot{P} = (\epsilon - \delta u_2)\,F\,(K,\ L) - \gamma P, \quad P\,(0) = P^0, \\ \dot{\eta}_1 = -\alpha A u_1 e^{-\alpha u_1 F} F_K + \eta_1\,(\mu + r - (1-u_1-u_2)\,F_K) - \eta_2\,(\epsilon - \delta u_2)\,F_K, \quad \eta_1\,(T) = 0, \\ \dot{\eta}_2 = \beta B e^{-\beta P} + \eta_2\,(\gamma + r)\,, \quad \eta_2\,(T) = 0. \end{cases} \tag{49}$$

Будем использовать перебор по переменным $\eta_0\,(0)\,, \eta_1\,(0)\,, \eta_2\,(0) \leqslant 0$ по единичной сфере:

$$\eta_0\,(0) = \cos\vartheta, \quad \eta_1\,(0) = \sin\vartheta\cdot\cos\phi, \quad \eta_2\,(0) = \sin\vartheta\cdot\sin\phi, \tag{50}$$

$$\phi \in (-\pi, 0)\,, \quad \vartheta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right).$$

Теперь можем решать краевую задачу вида:

$$\begin{cases} \dot{K} = (1-u_1-u_2)\,F\,(K,\ L) - \mu K, \quad K\,(0) = K^0, \\ \dot{P} = (\epsilon - \delta u_2)\,F\,(K,\ L) - \gamma P, \quad P\,(0) = P^0, \\ \dot{\eta}_1 = -\alpha A u_1 e^{-\alpha u_1 F} F_K + \eta_1\,(\mu + r - (1-u_1-u_2)\,F_K) - \eta_2\,(\epsilon - \delta u_2)\,F_K, \quad \eta_1\,(0) = \eta_1^0, \\ \dot{\eta}_2 = \beta B e^{-\beta P} + \eta_2\,(\gamma + r)\,, \quad \eta_2\,(0) = \eta_2^0. \end{cases} \tag{51}$$

Так же введём перебор по времени переключений:

$$\{t_i\}\ :\ 0 = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = T$$

Важно отметить, что $P_0 = \epsilon F\,(K_0, L)$ ввиду интерпретации заданных параметров.
Теперь, предполагаем, что на i – й итерации вычислили $K^i, P^i, \eta_1^i, \eta_2^i$. Подстановкой значений $\eta_1^i, \eta_2^i, F\left(K^i, L\right)$ можем определить значения $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3, \mathcal{G}_4, \mathcal{G}_5$. Далее среди $\mathcal{G}_j\ \forall j \in [1,5]$ находим минимальное значение и выбираем среди $44-48$ значения u_1^i, u_2^i, соотвествующие $\mathcal{G}_j$. Для большей точности вычислений добавим в систему уравнение для вычисления функционала качества. Теперь можем решить задачу 51:

$$\begin{cases} \dot{K}^{i+1} = \left(1-u_1^i-u_2^i\right)F\left(K^{i+1},\ L\right) - \mu K^{i+1}, \quad K^{i+1}\,(t_i) = K^i, \\ \dot{P}^{i+1} = \left(\epsilon - \delta u_2^i\right)F\left(K^{i+1},\ L\right) - \gamma P^{i+1}, \quad P^{i+1}\,(t_i) = P^i, \\ \dot{\eta}_1^{i+1} = -\alpha A u_1^i e^{-\alpha u_1^i F\left(K^{i+1},\ L\right)} F_K\left(K^{i+1},\ L\right) + \eta_1^{i+1}\left(\mu + r - \left(1-u_1^i-u_2^i\right)F_K\left(K^{i+1},\ L\right)\right) - \\ \quad -\eta_2^{i+1}\left(\epsilon - \delta u_2^i\right)F_K\left(K^{i+1},\ L\right), \quad \eta_1^{i+1}\,(t_i) = \eta_1^i, \\ \dot{\eta}_2^{i+1} = \beta B e^{-\beta P^{i+1}} + \eta_2^{i+1}\,(\gamma + r)\,, \quad \eta_2^{i+1}\,(t_i) = \eta_2^i, \\ \dot{\mathcal{J}}^{i+1} = U\,(c, P)\,e^{-rt}. \end{cases} \tag{52}$$

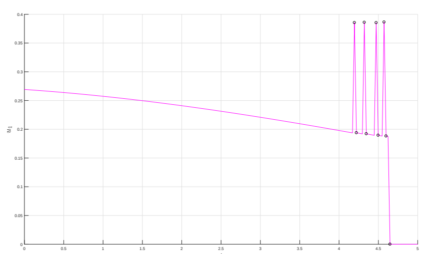
Отсюда нашли $K^{i+1}, P^{i+1}, \eta_1^{i+1}, \eta_2^{i+1}$. Каждый раз необходимо проверять, что $K^{i+1} \geqslant 0, P^{i+1} \geqslant 0$.
Выполнив такой алгоритм для всех $i \in [0, n-1]$, найдём векторы $\overline{K} = \left(K^0, ..., K^n\right), \quad \overline{P} = \left(P^0, ..., P^n\right)$. Так же из системы вычислим значение функционала качества $\mathcal{J}^* = \mathcal{J}^n$ для каждой такой траектории. Таким образом, перебором по $\eta_1\,(0)\,, \eta_2\,(0)$ найдём все субоптимальные траектории. Оптимальной будем считать ту траекторию, у которой значение функционала качества наибольшее.
Погрешность r^* вычисляем как норму конечной координаты вектора сопряжённых переменных η_1^n, η_2^n.

4 Примеры работы алгоритма

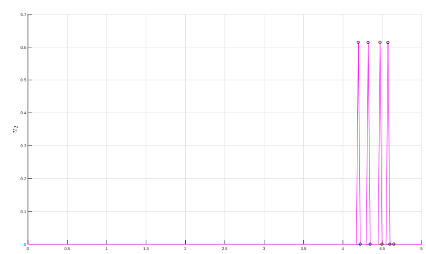
4.1 Пример 1

Решим задачу, используя следующие параметры:

$$L = 50, \quad \lambda = 0.6, \quad \mu = 0.8, \quad \epsilon = 1.5, \quad \delta = 1.4, \quad \gamma = 0.3,$$
$$r = 0.08, \quad A = 3, \quad B = 1, \quad C = 1, \quad \alpha = 0.5, \quad \beta = 1.5$$
$$T = 5, \quad K_0 = 50.$$



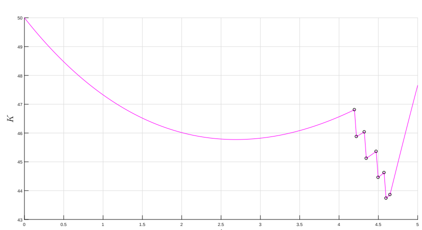
(a) График $u_1(t)$



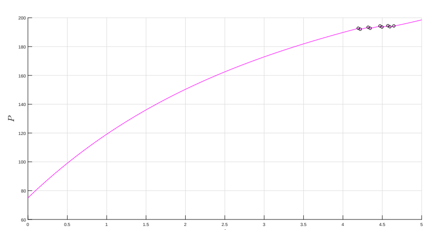
(b) График $u_2(t)$

Рис. 4: Графики управления

Из *Рис.* 4a видим, что доля продукции, выделяемая на потребление постепенно уменьшается до некоторого момента, после чего выделение продукции резко возрастает и уменьшается несколько раз, после чего продукция на потребление вообще перестаёт выделяться. Посмотрев на *Рис.* 4b, можем сказать, что продукция на загрязнения практически не выделялась как раз до момента переключения $u_1(t)$. Аналогично происходит резкое уменьшение и увеличение выделяемой продукции.



(a) График $K(t)$

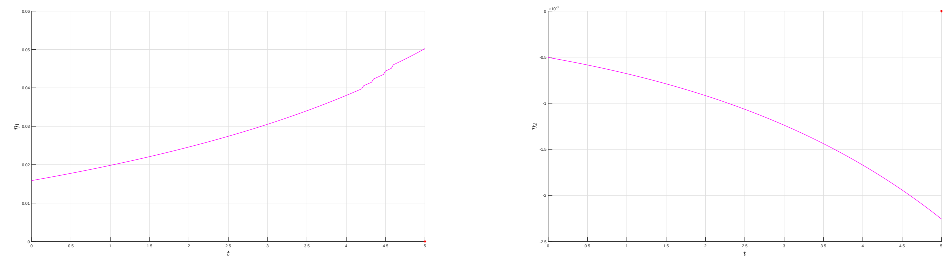


(b) График $P(t)$

Рис. 5: Графики объёма производственных фондов и загрязнений

Глядя на *Рис.* 5b, можно однозначно сказать, что объём загрязнений увеличивется, это естественно, так как на борьбу с загрязнениями практически не выделялась продукция. По *Рис.* 5a можно сказать, что после переключений, то есть начала выделения продукции на борьбу с загрязнениями, объём производственных фондов начинает увеличиваться.

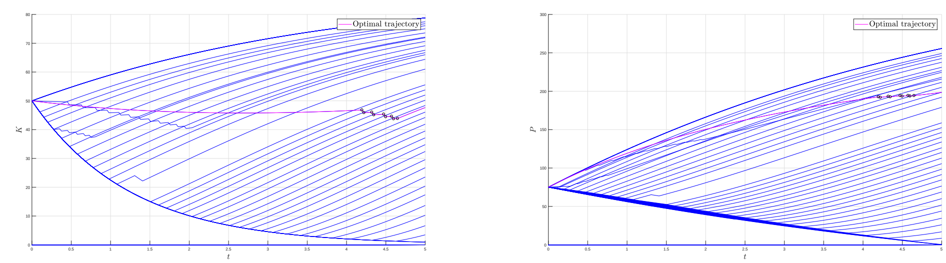
Ниже представим графики зависимости сопряжённых переменных от времени.



(a) График $\eta_1 (t)$ (b) График $\eta_2 (t)$

Рис. 6: Графики зависимости вектора сопряжённых переменных от времени

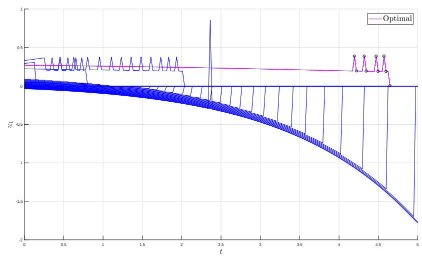
На графиках ниже рассмотрим все субоптимальные траектории объёма производственных фондов и загразнений.



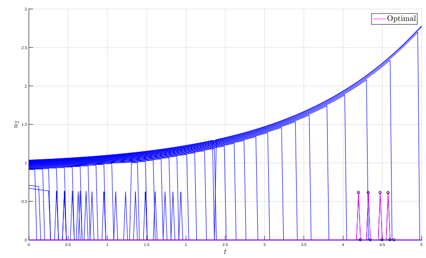
(a) График $K (t)$ (b) График $P (t)$

Рис. 7: Все траектории объёма производственных фондов и загрязнений

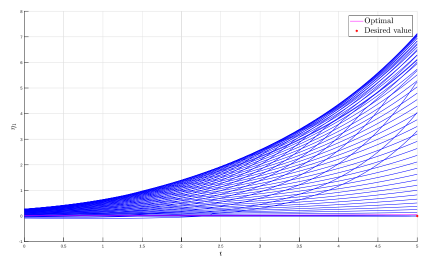
Можно заметить, что в оптимальной стратегии объём производственных фондов принимает среднее значение среди всех возможных. Также для оптимальности нет необходимости уменьшать объём загрязнений.
Далее рассмотим оставшиеся графики со всеми траекториями.



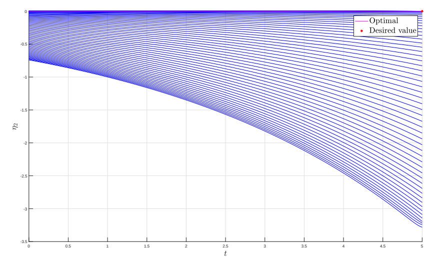
(a) График $u_1\left(t\right)$



(b) График $u_2\left(t\right)$



(c) График $\eta_1\left(t\right)$



(d) График $\eta_2\left(t\right)$

Рис. 8: Графики субоптимальных траекторий

В данном примере получили $\mathcal{J}^* = 7.1107$ и погрешность $r = 0.0503$.

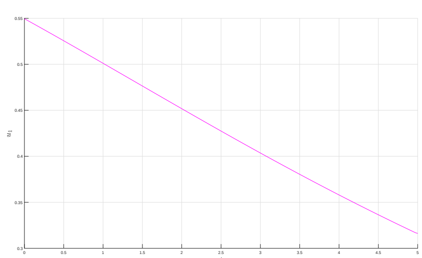
4.2 Пример 2

Далее рассмотрим пример, в котором нет переключений. Решаем задачу, используя следующие значения параметров:

$$L = 20, \quad \lambda = 0.5, \quad \mu = 0.2, \quad \epsilon = 1.3, \quad \delta = 1.2, \quad \gamma = 0.1,$$

$$r = 0.2, \quad A = 3, \quad B = 1, \quad C = 1, \quad \alpha = 0.5, \quad \beta = 1.5$$

$$T = 5, \quad K_0 = 30.$$

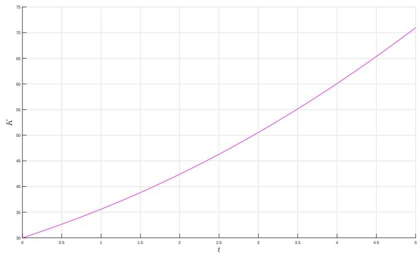


(a) График $u_1\left(t\right)$

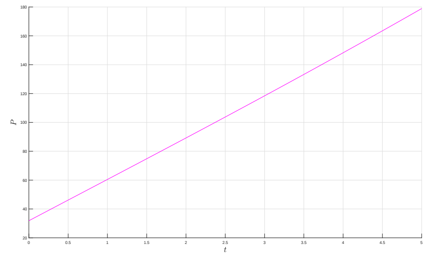
(b) График $u_2\left(t\right)$

Рис. 9: Графики управления

Из *Рис.* 9a видим, что доля продукции, выделяемая на потребление монотонно уменьшается. Из *Рис.* 9b можно сделать вывод, что на борьбу с загрязнениями продукция не выделяется.



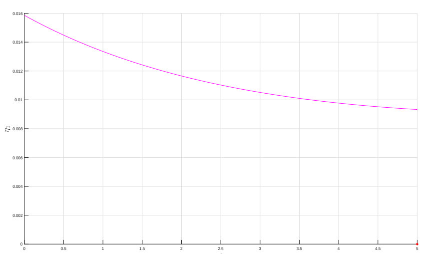
(a) График $K\,(t)$



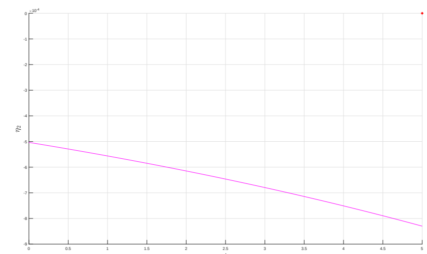
(b) График $P\,(t)$

Рис. 10: Графики объёма производственных фондов и загрязнений

Видим, что в оптимальной стратегии как объём производственных фондов, так и объём загрязнений монотонно возрастает.
Ниже представим графики зависимости сопряжённых переменных от времени.



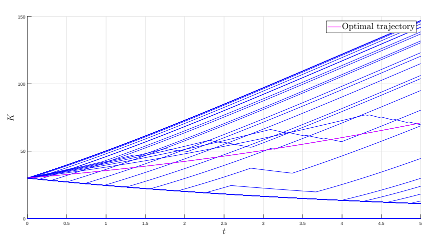
(a) График $\eta_1\,(t)$



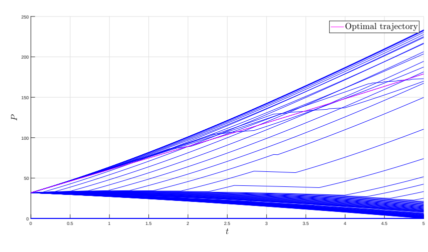
(b) График $\eta_2\,(t)$

Рис. 11: Графики зависимости вектора сопряжённых переменных от времени

На графиках ниже рассмотрим все субоптимальные траектории объёма производственных фондов и загразнений.



(a) График $K\,(t)$

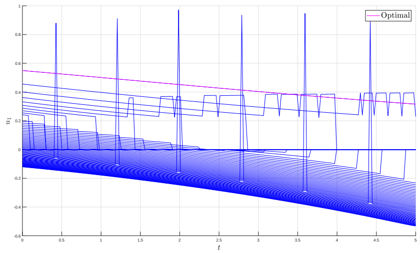


(b) График $P\,(t)$

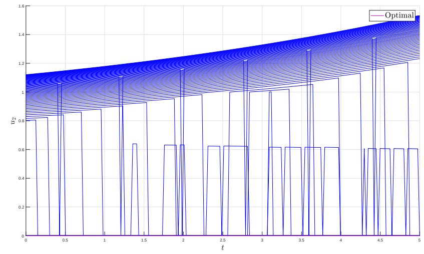
Рис. 12: Все траектории объёма производственных фондов и загрязнений

Из *Рис.* 12a, 12b видно, что для оптимальности необходим небольшой рост объёма производственных фондов и загрязнений.

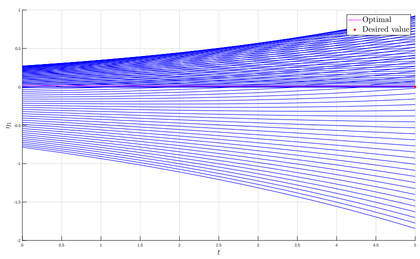
Далее рассмотим оставшиеся графики со всеми траекториями.



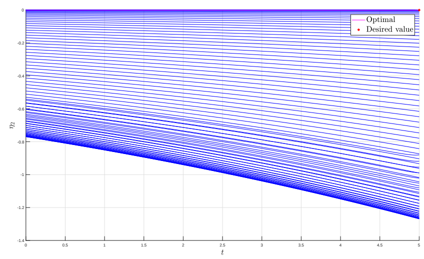
(a) График $u_1\,(t)$



(b) График $u_2\,(t)$



(c) График $\eta_1\,(t)$



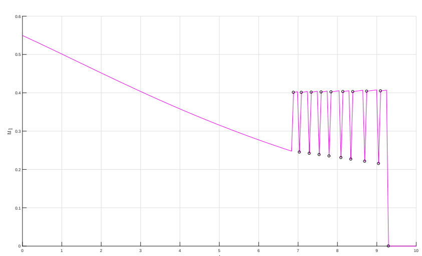
(d) График $\eta_2\,(t)$

Рис. 13: Графики субоптимальных траекторий

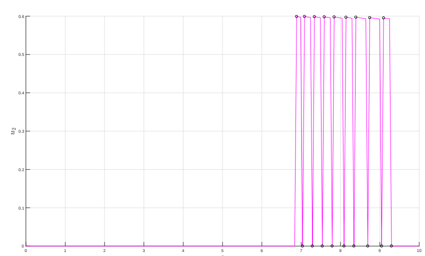
В данном примере получили $\mathcal{J}^* = 2.9694$ и погрешность $r = 0.0094$.

4.3 Пример 3

Теперь рассмотрим *Пример* 4.2, но увеличим время $T = 10$.



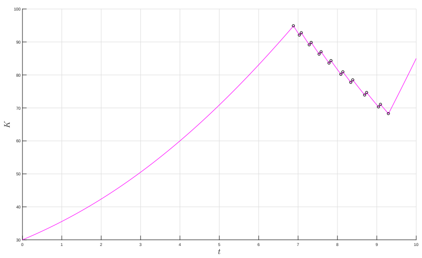
(a) График $u_1\,(t)$



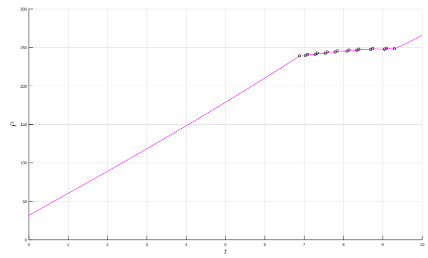
(b) График $u_2\,(t)$

Рис. 14: Графики управления

В отличие от *Рис.* 9a, 9b появились переключения в моменты времени $t \in (6.4,\, 9.2)$.



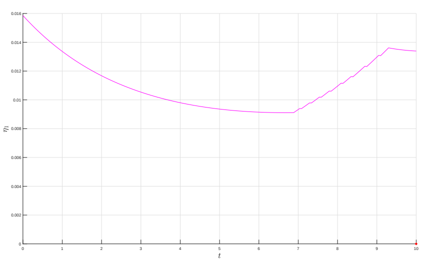
(a) График $K\left(t\right)$



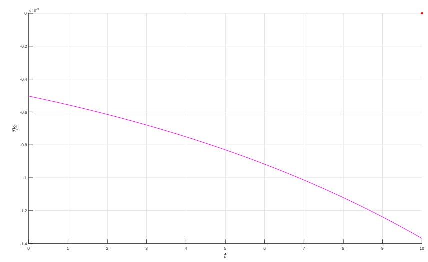
(b) График $P\left(t\right)$

Рис. 15: Графики объёма производственных фондов и загрязнений

Полученные выше графики подтверждают результаты, полученные на *Рис.* 14a, 14b. Ниже представим графики зависимости сопряжённых переменных от времени.



(a) График $\eta_1\left(t\right)$



(b) График $\eta_2\left(t\right)$

Рис. 16: Графики зависимости вектора сопряжённых переменных от времени

В данном примере получили $\mathcal{J}^* = 3.7453$ и погрешность $r = 0.0135$.

Список литературы

[1] *https://sawiki.cs.msu.ru/index.php/Опорная функция множества.*

[2] Арутюнов А. В. *Лекции по выпуклому и многозначному анализу.* ФИЗМАТ-ЛИТ, 2014.

[3] Артемьева Л. А. *Лекции по методам оптимизации*, 2024.

[4] Чистяков И. А. *Лекции по оптимальному управлению*, 2024.