Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Кафедра системного анализа

Анашкина Анастасия Алексеевна

Исследование экономического поведения домашних хозяйств на основе модели рамсеевского типа

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Научный руководитель:

академик РАН, д.ф.-м.н., профессор

А. А. Шананин

Москва, 2025

Содержание

1 Введение

1.1 Актуальность исследования

Разработка экономико-математических моделей для среднесрочного анализа основывается на принципах рационального поведения экономических агентов. Экономические агенты принимают самостоятельные решения, что приводит к задачам управления их поведением. В данной работе проводится исследование экономического поведения домашних хозяйств в условиях несовершенного рынка. Основные принципы исследования моделей рамсеевского типа в форме задачи оптимального управления представлены, например, в [2].

Гипотеза Рамсея о социальной стратификации утверждает, что богатство в популяции домохозяйств концентрируется у наиболее бережливых агентов, которые дисконтируют потребительские расходы с наименьшим коэффициентом дисконтирования. Гипотезу Рамсея можно рассматривать как проявление принципа естественного отбора Фишера в популяции домохозяйств. В данной работе также рассматривается модель для популяции домохозяйств. Похожее исследование для совершенного рынка проводилось в работе [1].

1.2 Цель и задачи исследования

Целью данной работы является исследование экономического поведения домашних хозяйств в условиях несовершенного рынка и проверка гипотезы Рамсея о социальной стратификации для популяции домохозяйств.

Для достижения этой цели необходимо выполнить следующие задачи:

- Исследовать математическое описание экономического поведения репрезентативного рационального домашнего хозяйства на несовершенном рынке.
- Построить в форме синтеза решение задачи оптимального управления для модифицированной модели рамсеевского типа.
- Исследовать математическое описание модели социальной динамики для популяции домохозяйств.
- Разработать численное решение задачи для исследования выполнимости гипотезы Рамсея.

2 Моделирование поведения экономических агентов

Основополагающей работой математического моделирования экономического поведения домашних хозяйств является работа Ф. Рамсея [12], в которой исследуется поведение рационального репрезентативного экономического агента в условиях совершенного рынка кредитов и депозитов. Рамсей выдвинул гипотезу о том, что в равновесном состоянии сообщество экономических агентов разделяется на два класса: агенты, увеличивающие сбережения, в долгосрочной перспективе владеющие всем капиталом и агенты, сокращающие сбережения — впоследствии их потребление стабилизируется на уровне заработной платы. Согласно этой гипотезе, агент с наименьшим коэффициентом дисконтирования в конечном итоге концентрирует в своих руках все богатство. Модель Рамсея формализована в виде задачи оптимального управления на конечном временном горизонте. Домашнее хозяйство максимизирует дисконтированное потребление с постоянным отвращением к риску, управляя динамикой своих расходов в зависимости от текущих параметров экономической конъюнктуры и поведенческих характеристик самого домашнего хозяйства.

Исследуемую в работе модель экономического поведения можно описать как задачу оптимального управления рамсеевского типа. Важно отсутствие арбитража на рынке потребительского кредита и сбережений:

$$0 < r_D < r_L,$$

где r_L — процентная ставка по потребительскому кредиту, r_D — процентная ставка по депозитам. Из рациональности поведения агента следует, что он не осуществляет займы по потребительскому кредиту и не сберегает в форме депозитов одновременно.

Отметим также, что агент потребляет, изменяет депозитарный счёт и осуществляет займ по потребительскому кредиту с целью максимизации дисконтированного потребления с учётом бюджетных ограничений. Кроме того, мы предполагаем, что агент не может предсказать изменение экономической конъюнктуры и принимает решения, предполагая, что его зарлата w и процентные ставки r_D и r_L остаются неизменными.

В каждый момент времени t финансовое состояние агента описывается его капитлом $k(t)$. Полагаем, что капитал изменяется за счёт поступления зарплаты, взаимодействия с рынками потребительского кредитования и сбережений в форме депозитов, а также расходов на потребление $c(t) \geq 0$. Таким образом, динамика финансового состояния экономического агента описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{k}(t) = r_D (k)_+ - r_L (-k)_+ + w - c(t)$$

с начальным условием

$$k(0) = k_0,$$

где $(a)_+ = \max\{a, 0\}$.

Агент стремится максимизировать дисконтированное потребление с коэффициентом дисконтирования $\rho > 0$ и постоянным отвращением к риску $1 - \beta$, где $\beta \in (0, 1)$, управляя потреблением $c(t)$:

$$J(c(\cdot)) = \int_0^{+\infty} e^{-\rho s} (c(s))^\beta \, \mathrm{d}s \to \max_{c(\cdot)}.$$

В нашей задаче допускается потребительский кредит, то есть капитал может принимать отрицательные значения. В этом случае задолженность по потребительскому кредиту должна быть закрыта будущим доходом от заработной платы, то есть

$$k\left(t\right)\geq-\frac{w}{r_L},\quad t\in\left[0,+\infty\right).$$

Таким образом, задача оптимального управления на бесконечном временном горизонте формулируется в следующем виде

$$\int_0^{+\infty}e^{-\rho s}\left(c\left(s\right)\right)^{\beta}\mathrm{d}s\to\max_{c(\cdot)},\tag{1}$$

$$\dot{k}\left(t\right)=r_D\left(k\right)_+-r_L\left(-k\right)_++w-c\left(t\right),\quad k\left(0\right)=k_0,\tag{2}$$

$$c\left(t\right)\geq0,\tag{3}$$

$$k\left(t\right)\geq-\frac{w}{r_L}.\tag{4}$$

В дальнейшем хотим исследовать эту модель как модель «популяции» агентов, в которой важную роль играет коэффициент дисконтирования, формирующийся эндогенно и влияющий на распределение капитала между агентами. Поэтому далее необходимо найти потребление агента в форме синтеза оптимального управления $c\left(k,\rho\right)$.

3 Синтез оптимального управления

Во избежание трудностей с определением понятия оптимальности в случае, когда функционал 1 является расходящимся несобственным интегралом, будем рассматривать задачу на конечном временном интервале $[0, T]$. Причём, если значение функционала 1 конечно, полученное решение для задачи на $[0, T]$ совпадает с классическим решением.

Для новой задачи функционал принимает вид

$$\int_0^T e^{-\rho s} \left(c\left(s\right)\right)^{\beta} \mathrm{d}s \to \max_{c(\cdot)}, \tag{5}$$

задача Коши 2 решается на интервале $[0, T]$, ограничение 3 тоже расматривается на конечном временном горизонте.

$$\dot{k}\left(t\right) = r_D \left(k\right)_+ - r_L \left(-k\right)_+ + w - c\left(t\right), \quad k\left(0\right) = k_0, \quad t \in \left[0, T\right], \tag{6}$$

$$c\left(t\right) \geq 0, \quad t \in \left[0, T\right]. \tag{7}$$

Теперь для новой задачи можем изменить ограничение для k на ограничение

$$k\left(T\right) \geq 0, \tag{8}$$

что означает, что к конечному моменту времени агент должен расплатиться со своими кредитами.

Теорема 1. *Пусть* $w + r_L k_0 > 0$, $T > \left(\frac{1}{r_L} \ln\left(\frac{w}{w + k_0 r_L}\right)\right)_+$. *Тогда задача оптимального управления 5, 6,7, 8 имеет решение.*

Доказательство. Пусть $k_0 < 0$. При выполнении условия $w + r_L k_0 > 0$, а также $T > \left(\frac{1}{r_L} \ln\left(\frac{w}{w + k_0 r_L}\right)\right)_+$ управление $c\left(t\right) \equiv 0$ порождает в силу решения задачи Коши

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} = -r_L \left(-k\right)_+ + w, \quad k\left(0\right) = k_0$$

траекторию $k\left(t\right)$, удовлетворяющую всем ограничениям задачи оптимального управления. Из ограничений задачи оптимального управления следует, что

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} \leq r_L k + w, \quad k\left(0\right) = k_0.$$

Из неравенства Гронуолла (см. [3], с.17) имеем оценку

$$k\left(t\right) \leq -\frac{w}{r_L} + \left(\frac{w}{r_L} + k_0\right) e^{r_L t} \leq \left(\left(k_0\right)_+ + \frac{w}{r_L}\right) e^{r_L t}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Легко видеть, что

$$k\left(T\right) - k_0 \leq \int_0^T \left(r_D k\left(t\right) + w - c\left(t\right)\right) \mathrm{d}t = Tw + r_D T k\left(t\right) - \int_0^T c\left(t\right) \mathrm{d}t.$$

Подставив известную оценку для $k\left(t\right)$, получаем

$$k\left(T\right) - k_0 \leq Tw + \left(r_D T \left(k_0\right)_+ + Tw\right) e^{r_L T} - \int_0^T c\left(t\right) \mathrm{d}t.$$

Поскольку $k(T) \geq 0$, можем оценить интеграл

$$\int_0^T c(t)\,\mathrm{d}t \leq (k_0)_+ + Tw + \left(r_D T (k_0)_+ + Tw\right) e^{r_L T}.$$

Случай $k_0 \geq 0$ приводит к аналогичным оценкам.

Таким образом, в силу выполнения условия $k(T) \geq 0$, допустимые управления равномерно ограничены в норме пространства L_1. Значит существует минимизирующая последовательность $\{c_i(t)\,|i = 1, 2, \ldots\}$ допустимых управлений

$$\lim_{i\to+\infty} \int_0^T (c_i(t))^\beta e^{-\rho t}\mathrm{d}t = A.$$

По теореме Комлоша (см. [4]) из ограниченной в норме пространства L_1 функциональной последовательности $\{c_i(t)\,|i = 1, 2, \ldots\}$ можно выделить подпоследовательность $\{c_{i_n}(t)\,|n = 1, 2, \ldots\}$, среднее по Чезаро которой сходится почти всюду на отрезке $[0, T]$ к функции $c_{opt}(t)$, то есть

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n c_{i_j}(t) = c_{opt}(t)$$

для почти всех $t \in [0, T]$. Так как функция $(c)^\beta$ при $\beta \in (0, 1)$ по c на $[0, +\infty)$, можем применить неравенство Йенсена (см. [5])

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n c_{i_j}(t)\right)^\beta \geq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \left(c_{i_j}(t)\right)^\beta.$$

Тогда

$$\int_0^T \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n c_{i_j}(t)\right)^\beta e^{-\rho t}\mathrm{d}t \geq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \int_0^T \left(c_{i_j}(t)\right)^\beta e^{-\rho t}\mathrm{d}t.$$

Откуда получаем, что

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^T \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n c_{i_j}(t)\right)^\beta e^{-\rho t}\mathrm{d}t = A.$$

По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла (см. [6]) получаем

$$\int_0^T (c_{opt}(t))^\beta e^{-\rho t}\mathrm{d}t = A.$$

Поскольку $c_{i_n}(t) \geq 0$, то, без ограничения общности, можно считать, что $c_{opt}(t) \geq 0$.

Определим фазовую траекторию $\{k_{opt}(t)\,|t \in [0, T]\}$, соответствующую управлению $\{c_{opt}(t)\,|t \in [0, T]\} \geq 0$, как решение задачи Коши

$$\dot{k}(t) = r_D (k(t))_+ - r_L (-k(t))_+ + w - c_{opt}(t), \quad k(0) = k_0.$$

Обозначим через $k_j(t), t \in [0, T]$ решение задачи Коши

$$\dot{k}(t) = r_D (k(t))_+ - r_L (-k(t))_+ + w - c_{i_j}(t), \quad k(0) = k_0.$$

По построению $k_j(T) \geq 0$. Положим $\tilde{k}_n(t) = \dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^n k_j(t)$. Очевидно, что $\tilde{k}_n(T) \geq 0$ и

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{k}_n(t)}{\mathrm{d}t} = w - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n c_{i_j}(t) + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \left(r_D (k_j(t))_+ - r_L (-k_j(t))_+\right), \quad \tilde{k}_n(0) = k_0.$$

Так как $r_L > r_D$, то функция $r_D\left(k\right)_+ - r_L\left(-k\right)_+$ вогнута по переменной k, значит справедливо неравенство Йенсена

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{k}_n\left(t\right)}{\mathrm{d}t} \le w - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} c_{i_j}\left(t\right) + \left(r_D\left(\tilde{k}_n\left(t\right)\right)_+ - r_L\left(-\tilde{k}_n\left(t\right)\right)_+\right).$$

Определим $\hat{k}_n\left(t\right), t \in [0,T]$ как решение задачи Коши

$$\frac{\mathrm{d}\hat{k}_n\left(t\right)}{\mathrm{d}t} = w - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} c_{i_j}\left(t\right) + \left(r_D\left(\hat{k}_n\left(t\right)\right)_+ - r_L\left(-\hat{k}_n\left(t\right)\right)_+\right), \quad \hat{k}_n\left(0\right) = k_0.$$

Можно показать, что функция

$$w - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} c_{i_j}\left(t\right) + \left(r_D\left(k\right)_+ - r_L\left(-k\right)_+\right)$$

монотонно возрастает по переменной k. Значит $\tilde{k}_n\left(t\right) \le \hat{k}_n\left(t\right)$, следовательно, $\hat{k}_n\left(T\right) \ge \tilde{k}_n\left(T\right) \ge 0$. Таким образом, управление $\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} c_{i_j}\left(t\right) | t \in [0,T]\right\}$ и соответствующая ему фазовая траектория $\hat{k}_n\left(t\right)$удовлетворяют всем ограничениям 6, 7, 8 задачи оптимального управления.

По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^T |c_{opt}\left(t\right) - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} c_{i,j}\left(t\right)|\mathrm{d}t = 0.$$

Иными словами

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}:\ \forall n \ge n_\varepsilon \Rightarrow \int_0^T |c_{opt}\left(t\right) - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} c_{i,j}\left(t\right)|\mathrm{d}t < \varepsilon.$$

Заметим, что функция $f\left(z,u\right) = w - u + r_D\left(z\right)_+ - r_L\left(-z\right)_+$ удовлетворяет условию Липшица, то есть существует постоянная $C > 0$, такая, что $\forall z, u, h, v$ справедливо неравенство

$$|f\left(z,u\right) - f\left(h,v\right)| \le C\left(|z-h| + |u-v|\right).$$

Поскольку

$$\hat{k}_n\left(t\right) = k_0 + \int_0^t f\left(\hat{k}_n\left(\tau\right), \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} c_{i,j}\left(\tau\right)\right)\mathrm{d}\tau,$$

$$k_{opt}\left(t\right) = k_0 + \int_0^t f\left(k_{opt}\left(\tau\right), c_{opt}\left(\tau\right)\right)\mathrm{d}\tau,$$

при $t \in [0,T]$ справедлива оценка

$$|\hat{k}_n\left(t\right) - k_{opt}\left(t\right)| \le \int_0^t \left|f\left(\hat{k}_n\left(\tau\right), \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} c_{i,j}\left(\tau\right)\right) - f\left(k_{opt}\left(\tau\right), c_{opt}\left(\tau\right)\right)\right|\mathrm{d}\tau \le$$

$$\le C\left(\int_0^t \left|\hat{k}_n\left(\tau\right) - k_{opt}\left(\tau\right)\right|\mathrm{d}\tau + \int_0^t \left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} c_{i,j}\left(\tau\right) - c_{opt}\left(\tau\right)\right|\mathrm{d}\tau\right).$$

Откуда получаем, что при $t \in [0,T],\ n \ge n_\varepsilon$ справедливо неравенство (см. [7], теорема 2.1, с.17)

$$|\hat{k}_n\left(t\right) - k_{opt}\left(t\right)| \le \varepsilon e^{Ct}.$$

Следовательно, $\lim_{n\to+\infty}\hat{k}_n\left(T\right) = k_{opt}\left(T\right)$, значит, $k_{opt}\left(T\right) \ge 0$. Таким образом, управление $c_{opt}\left(t\right)$ и фазовая траектория $k_{opt}\left(t\right)$ на $t \in [0,T]$ являются решением задачи оптимального управления 5, 6, 7, 8. □

Замечание 1. *Чтобы обеспечить условие $k(T) \geq 0$, необходимо выполнение неравенства*

$$k > -\frac{w}{r_L},$$

что совпадает с ограничением 4.

Отметим, что данное неравенство не зависит от времени. При $T \to +\infty$ данное условие является достаточным. В случае, если неравенство 4 нарушается, то домашнее хозяйство не может расплатиться с кредитами при сохранении текущей экономической конъюнктуры и образуется финансовая пирамида.

Обратим внимание, что правая часть дифференциального уравнения 6 негладкая. В таких случаях применяется принцип максимума Понтрягина в форме Ф. Кларка [8]. С его помощью выделяются три режима экономического поведения домашнего хозяйства: заимствования, не взаимодействия с банковской системой и режим сбережения в форме депозитов. Режимы выделяются в зависимости от финансового состояния домашнего хозяйства и параметров экономической конъюнктуры.

Теорема 2. *Если $\{c(t), k(t) | t \in [0,T]\}$ — решение задачи оптимального управления 5, 6,7, 8, то существует абсолютно непрерывная функция $\{\psi(t) | t \in [0,T]\}$, такая что*

$$c(t) = \left(\frac{\psi(t)}{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta - 1}}. \tag{9}$$

1. Если $k(t) > 0$, то

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} = r_D k(t) + w - \left(\frac{\psi(t)}{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta - 1}}, \tag{10}$$

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = \psi(\rho - r_D). \tag{11}$$

2. Если $k(t) < 0$, то

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} = r_L k(t) + w - \left(\frac{\psi(t)}{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta - 1}}, \tag{12}$$

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = \psi(\rho - r_L). \tag{13}$$

Кроме того, выполняется условие трансверсальности

$$k(T) = 0.$$

Доказательство. Оптимальное решение задачи оптимального управления должно удовлетворять необходимым условиям принципа максимума Понтрягина в форме Ф. Кларка, поскольку функция в правой части ограничения 2 является негладкой.

Функция Гамильтона имеет вид

$$H(t,k,\varphi) = \sup_{c \geq 0} \left\{ c^{\beta} e^{-\rho t} + \varphi \left(r_D (k)_+ - r_L (-k)_+ + w - c \right) \right\}.$$

Пусть сопряжённая функция $\psi = e^{\rho t}\varphi$. Тогда оптимальное управление определяется соотношением

$$0 \in \beta c^{\beta-1} - \psi.$$

Если $\psi(t) \le 0$, то функция Гамильтона достигает максимума в $c = +\infty$. Поэтому, чтобы управление было конечным, возьмём $\psi(t) > 0$. Тогда управление определяется по формуле

$$c(t) = \left(\frac{\psi(t)}{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}.$$

Сопряжённая переменная удовлетворяет соотношениям

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} \in \psi\left(\rho + \left(r_L\partial_k(-k)_+ - r_D\partial_k(k)_+\right)\right), \quad \psi(T)\,k(T) = 0.$$

Для того, чтобы значение оптимального управления $c(t)$ было конечным, необходимо выполнение условия $\psi(t) \neq 0$ при $t \in [0, T]$. Следовательно, из условия трансверсальности следует условие $k(T) = 0$.

Вычисляя обобщённые градиенты ∂_k, получаем справедливость Теоремы 2. $\square$

Теорема 3 (Синтез в задаче оптимального управления 1 – 4)**.**

Тип 1. *Если $\rho > r_L$, то синтез оптимального управления определяется выражением*

$$c(k,\rho) = \begin{cases} \dfrac{\frac{\rho}{r_L} - \beta}{1-\beta}\left(r_L k + w\right), & k \le 0 \\ w\hat{x}(k,\rho), & k > 0, \end{cases}$$

где $\hat{x}(k,\rho)$ — решение уравнения

$$-\frac{k}{w} - \frac{1}{r_D} + \frac{1-\beta}{\rho-\beta r_D}x + x^{-\frac{r_D(1-\beta)}{\rho-r_D}}\left(\frac{\frac{\rho}{r_L}-\beta}{1-\beta}\right)^{\frac{r_D(1-\beta)}{\rho-r_D}}\frac{1}{r_D}\left(1 - \frac{\frac{\rho}{r_L}-\beta}{\frac{\rho}{r_D}-\beta}\right) = 0. \tag{14}$$

Тип 2. *Если $\rho < r_D$, то синтез оптимального управления определяется выражением*

$$c(k,\rho) = \begin{cases} w\hat{x}(k,\rho), & k < 0, \\ \dfrac{\frac{\rho}{r_D} - \beta}{1-\beta}\left(r_D k + w\right), & k \ge 0 \end{cases}$$

где $\hat{x}(k,\rho)$ — решение уравнения

$$-\frac{k}{w} - \frac{1}{r_L} + \frac{1-\beta}{\rho-\beta r_L}x + x^{\frac{r_L(1-\beta)}{r_L-\rho}}\left(\frac{\frac{\rho}{r_D}-\beta}{1-\beta}\right)^{-\frac{r_L(1-\beta)}{r_L-\rho}}\frac{1}{r_L}\left(1 - \frac{\frac{\rho}{r_D}-\beta}{\frac{\rho}{r_L}-\beta}\right) = 0. \tag{15}$$

Тип 3. *Если $r_D \le \rho \le r_L$, то синтез оптимального управления определяется выражением*

$$c(k,\rho) = \begin{cases} w\hat{x}_1(k,\rho), & k < 0, \\ w, & k = 0, \\ w\hat{x}_2(k,\rho), & k > 0, \end{cases}$$

где $\hat{x}_1(k,\rho), \hat{x}_2(k,\rho)$ — решения уравнений 15, 14 соответственно.

Структуру оптимального управления удобно исследовать на плоскости (k,ψ). Режимы заимствования и сбережения разделены на плоскости (k,ψ) прямой $k=0$.

Лемма 1. *На плоскости (k,ψ) имеется траектория $\psi_z(k)$, для которой выполнено условие $\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t}=0$. Она имеет вид*

$$\psi_z=\begin{cases}\dfrac{\beta}{(r_Lk+w)^{1-\beta}}, & k\le 0,\\ \dfrac{\beta}{(r_Dk+w)^{1-\beta}}, & k>0.\end{cases}\tag{16}$$

Доказательство. Рассмотрим уравнение 12 для области $k<0$ и приравняем правую часть к нулю

$$r_Lk+w-\left(\frac{\psi}{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}=0.$$

Тогда

$$\psi=\frac{\beta}{(r_Dk+w)^{1-\beta}}.$$

Отсюда на оси ординат получим

$$\psi=\frac{\beta}{w^{1-\beta}}.$$

Теперь рассмотрим уравнение 10 в области $k>0$ и приравняем правую часть к нулю

$$r_Dk+w-\left(\frac{\psi}{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}=0.$$

Значит

$$\psi=\frac{\beta}{(r_Lk+w)^{1-\beta}}.$$

Подставляя в это выражение $k=0$, также получим

$$\psi=\frac{\beta}{w^{1-\beta}}.$$

Таким образом, Лемма 1 доказана. □

Замечание 2. *Траекторию ψ_z будем называть кривой разворота. Заметим, что функция $\psi_z(k)$ непрерывна и обладает свойствами*

$$\lim_{k\to-\frac{w}{r_L}+0}\psi_z(k)=+\infty,\quad \lim_{k\to+\infty}\psi_z(k)=0.$$

Замечание 3. *Отметим, что кривая ψ_z проходит через точку покоя систем $\left(0,\frac{\beta}{w^{1-\beta}}\right)$.*

Лемма 2. *Если $\rho>r_L$, то синтез в задаче оптимального управления 1 – 4 в области заимствования принимает вид*

$$c_{1,L}(k,\rho)=\frac{\left(\frac{\rho}{r_L}-\beta\right)}{1-\beta}(r_Lk+w).\tag{17}$$

Доказательство. Сначала рассмотрим задачу 5 – 8.

Рассмотрим дифференциальные уравнения для фазовой и сопряжённой переменных, соответствующие области $k<0$. Из уравнения 13 получаем

$$\psi=\psi_0e^{(\rho-r_L)t}.$$

Подставив это выражение в 12 получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} = r_L k\left(t\right) + w - \left(\frac{\psi_0 e^{(\rho - r_L)t}}{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta-1}},$$

с начальным условием

$$k\left(0\right) = k_0, \quad -\frac{w}{r_L} \leq k_0 \leq 0.$$

Решением представленной задачи Коши является следующее выражение для капитала:

$$k\left(t\right) = -\frac{w}{r_L} - \left(\frac{\psi_0}{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta-1}} \frac{\beta - 1}{\rho - \beta r_L} e^{\frac{r_L - \rho}{\beta - 1}t} + e^{r_L t}\left(\frac{w}{r_L} + \left(\frac{\psi_0}{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta-1}} \frac{\beta-1}{\rho - \beta r_L} + k_0\right).$$

Воспользуемся условием трансверсальности $k\left(T\right) = 0$.

$$-\frac{w}{r_L} - \left(\frac{\psi_0}{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta-1}} \frac{\beta - 1}{\rho - \beta r_L} e^{\frac{r_L - \rho}{\beta - 1}T} + e^{r_L T}\left(\frac{w}{r_L} + \left(\frac{\psi_0}{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta-1}} \frac{\beta-1}{\rho - \beta r_L} + k_0\right) = 0. \tag{18}$$

Из Теоремы 2

$$c_0 = c\left(0\right) = \left(\frac{\psi_0}{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}.$$

Подставив c_0 в выражение 18, получим:

$$-\frac{w}{r_L} - c_0 \frac{\beta - 1}{\rho - \beta r_L} e^{\frac{r_L - \rho}{\beta - 1}T} + e^{r_L T}\left(\frac{w}{r_L} + c_0 \frac{\beta-1}{\rho - \beta r_L} + k_0\right) = 0.$$

Отсюда выразим c_0 через k_0, T:

$$c_0 = \frac{\rho - \beta r_L}{1 - \beta} \cdot \frac{\left(\frac{w}{r_L} + k_0\right) - \frac{w}{r_L} e^{-r_L T}}{1 - e^{-\frac{\rho - \beta r_L}{1-\beta}T}}.$$

Так как начальное значение k_0 произвольно из допустимого множества $\left(-\frac{w}{r_L}, 0\right)$, получим выражение для синтеза

$$c_{1,T}\left(k, T\right) = \frac{\rho - \beta r_L}{1 - \beta} \cdot \frac{\left(\frac{w}{r_L} + k\right) - \frac{w}{r_L} e^{-r_L T}}{1 - e^{-\frac{\rho - \beta r_L}{1-\beta}T}}. \tag{19}$$

Перейдём к решению задачи 1 – 4.

Переходя к пределу при $T \to +\infty$ в выражении 19, получим

$$c_{1,L}\left(k, \rho\right) = \lim_{T \to +\infty} c_{1,T}\left(k, T\right) = \frac{\rho - \beta r_L}{1 - \beta}\left(\frac{w}{r_L} + k\right).$$

Тогда, преобразовав выражение, получим утверждение Леммы 2.

Таким образом, рассмотрен случай $k_0 < 0, \psi_0 < \psi_z$. Для выполнения условия трансверсальности необходимо, чтобы функция $\psi\left(k\right)$ возрастала и пересекла кривую разворота. Тогда предельная траектория должна находится ниже кривой ψ_z, что обеспечивается условием $\rho > r_L$:

$$\psi\left(k\right) = \beta\left(\frac{\frac{\rho}{r_L} - \beta}{1 - \beta}\right)^{\beta - 1} \frac{1}{\left(r_L k + w\right)^{1-\beta}} < \frac{\beta}{\left(r_L + w\right)^{1-\beta}}.$$

Таким образом, полученная траектория $\psi\left(k\right)$ является частью оптимальной траектории для случая $\rho > r_L$.

□

Лемма 3. *Если $\rho > r_L$, то синтез в задаче оптимального управления 1 – 4 в области сбережения выражется как $c_{2,L}(k,\rho) = w\hat{x}(k,\rho)$, где $\hat{x}(k,\rho)$ — решение уравнения*

$$-\frac{k}{w} - \frac{1}{r_D} + \frac{1-\beta}{\rho - \beta r_D} x + x^{-\frac{r_D(1-\beta)}{\rho - r_D}} \left(\frac{\frac{\rho}{r_L} - \beta}{1-\beta} \right)^{\frac{r_D(1-\beta)}{\rho - r_D}} \frac{1}{r_D} \left(1 - \frac{\frac{\rho}{r_L} - \beta}{\frac{\rho}{r_D} - \beta} \right) = 0. \qquad (20)$$

Доказательство. Теперь задачей является продолжение предельной траектории, найденной в Лемме 2 в область $k > 0$. На границе областей оптимальная траектория попадает в точку

$$k_1 = 0, \quad \psi_1 = \beta c_{1,L}^{\beta-1} = \beta \left(\frac{\frac{\rho}{r_L} - \beta}{1-\beta} w \right)^{\beta-1}.$$

Решаем диференциальные уравнения 10, 11 в обратном времени с начальными условиями ψ_1, k_1. Тогда

$$\psi = \psi_1 e^{(\rho - r_D)t},$$

$$k(t) = -\frac{w}{r_D} + \frac{1-\beta}{\rho - \beta r_D} \left(\frac{\psi_1}{\beta} \right)^{\frac{1}{\beta-1}} e^{\frac{\rho - r_D}{\beta - 1} t} + e^{r_D t} \left(\frac{w}{r_D} - \frac{1-\beta}{\rho - \beta r_D} \left(\frac{\psi_1}{\beta} \right)^{\frac{1}{\beta-1}} + k_1 \right).$$

Выполнив подставновки и замену $e^t = \left(\frac{\psi}{\psi_1} \right)^{\frac{1}{\rho - r_D}}$, получаем

$$k = -\frac{w}{r_D} + \frac{1-\beta}{\rho - \beta r_D} \cdot \left(\frac{\psi}{\beta} \right)^{\frac{1}{\beta-1}} + \left(\frac{\psi}{\beta} \right)^{\frac{r_D}{\rho - r_D}} \left(\frac{\frac{\rho}{r_L} - \beta}{1-\beta} w \right)^{\frac{(1-\beta)r_D}{\rho - r_D}} \left(\frac{w}{r_D} - \frac{1-\beta}{\rho - \beta r_D} \cdot \frac{\frac{\rho}{r_L} - \beta}{1-\beta} w \right).$$

Подставим в выражение $c = \left(\frac{\psi}{\beta} \right)^{\frac{1}{\beta-1}}$ и разделим обе части уравнения на w. Тогда

$$-\frac{k}{w} - \frac{1}{r_D} + \frac{1-\beta}{\rho - \beta r_D} \cdot \frac{c}{w} + \left(\frac{c}{w} \right)^{-\frac{r_D(1-\beta)}{\rho - r_D}} \left(\frac{\frac{\rho}{r_L} - \beta}{1-\beta} \right)^{\frac{(1-\beta)r_D}{\rho - r_D}} \left(\frac{1}{r_D} - \frac{1}{r_D} \frac{\frac{\rho}{r_L} - \beta}{\frac{\rho}{r_D} - \beta} \right) = 0. \qquad (21)$$

Выполним замену $x = \frac{c}{w}$. Тогда полученное уравнение совпадает с 20.

Докажем, что уравнение имеет единственный корень. Для этого проанализируем функцию

$$f(x) = ax + bx^{-\gamma} - d,$$

где

$$a = \frac{1-\beta}{\rho - \beta r_D} > 0,$$

$$b = \left(\frac{\frac{\rho}{r_L} - \beta}{1-\beta} \right)^{\frac{(1-\beta)r_D}{\rho - r_D}} \frac{1}{r_D} \left(1 - \frac{\frac{\rho}{r_L} - \beta}{\frac{\rho}{r_D} - \beta} \right) > 0,$$

$$d = \frac{k}{w} + \frac{1}{r_D} > 0,$$

$$\gamma = \frac{r_D(1-\beta)}{\rho - r_D} > 0.$$

На границе областей синтез принимает значение $c = \frac{\frac{\rho}{r_L} - \beta}{1-\beta} w$. Ввиду убывания траектории по ψ в обратном времени, c возрастает, значит можем рассматривать функцию $f(x)$ на $[\frac{\frac{\rho}{r_L} - \beta}{1-\beta}, +\infty)$.

Рассмотрим значения функции в граничных точках:

$$f\left(\frac{\frac{\rho}{r_L}-\beta}{1-\beta}\right)=\frac{1}{r_D}\cdot\frac{\frac{\rho}{r_L}-\beta}{\frac{\rho}{r_D}-\beta}+\frac{1}{r_D}\left(1-\frac{\frac{\rho}{r_L}-\beta}{\frac{\rho}{r_D}-\beta}\right)-\frac{k}{w}-\frac{1}{r_D}=-\frac{k}{w}<0.$$

$$\lim_{x\to+\infty}=+\infty.$$

Вычислим производную функции:

$$\frac{\mathrm{d}f\left(x\right)}{\mathrm{d}x}=a-\gamma bx^{-\gamma-1}.$$

Тогда $x^*=\left(\frac{a}{\gamma b}\right)^{-\frac{1}{\gamma+1}}$ — единственная точка экстремума.

Вычислим вторую производную функции:

$$\frac{\mathrm{d}^2f\left(x\right)}{\mathrm{d}x^2}=\gamma\left(\gamma+1\right)bx^{-\gamma-2}>0.$$

Значит $f\left(x\right)$ вогнутая функция.

Таким образом, существует и единственна точка $\hat{x}\in[\frac{\frac{\rho}{r_L}-\beta}{1-\beta},+\infty)$ такая, что $f\left(\hat{x}\right)=0$. Значит уравнение 20 имеет единственное решение $\hat{x}$, а $c_{2,L}=w\hat{x}$ — искомый синтез. □

Лемма 4. *Если $\rho<r_D$, то синтез задачи оптимального управления 1 – 4 в области сбережения принимает вид*

$$c_{1,D}\left(k,\rho\right)=\frac{\left(\frac{\rho}{r_D}-\beta\right)}{1-\beta}\left(r_Dk+w\right). \tag{22}$$

Доказательство. Рассмотрим $k_0>0$. С учетом условия $\rho<r_D$ оптимальная траектория убывает по ψ, следовательно, для выполнения условия трансверсальности необходимо, чтобы она лежала выше кривой разворота ψ_z.

Решим дифференциальные уравнения 10, 11 с начальными условиями k_0,ψ_0.

$$\psi=\psi_0e^{(\rho-r_D)t},$$

$$k\left(t\right)=-\frac{w}{r_D}+\frac{1-\beta}{\rho-\beta r_D}\left(\frac{\psi_0}{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}e^{\frac{\rho-r_D}{\beta-1}t}+e^{r_Dt}\left(\frac{w}{r_D}-\frac{1-\beta}{\rho-\beta r_D}\left(\frac{\psi_0}{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}+k_0\right).$$

Пусть в момент времени T_1 траектория пересекает ψ_z в точке k_2. Тогда $\psi_2=\frac{\beta}{(r_Dk+w)^{1-\beta}}$. Подставим эти точки в полученное уравнение:

$$k_2=-\frac{w}{r_D}+\frac{1-\beta}{\rho-\beta r_D}\left(r_Dk+w\right)+e^{r_DT_1}\left(\frac{w}{r_D}-\frac{1-\beta}{\rho-\beta r_D}\left(\frac{\psi_0}{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}+k_0\right).$$

Чтобы найти предельную траекторию, устремим $T_1\to+\infty$. Тогда

$$e^{-r_DT_1}\left(k_2+\frac{w}{r_D}-\frac{1-\beta}{\rho-\beta r_D}\left(r_Dk+w\right)\right)=\frac{w}{r_D}-\frac{1-\beta}{\rho-\beta r_D}\left(\frac{\psi_0}{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}+k_0.$$

Отсюда, заменив $\left(\frac{\psi_0}{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}=c_0$, получим

$$c_0=\frac{\left(\frac{\rho}{r_D}-\beta\right)}{1-\beta}\left(r_Dk_0+w\right).$$

Так как начальное значение k_0 произвольно из допустимого множества $(0,+\infty)$, получим справедливость Леммы 4. □

Лемма 5. *Если $\rho < r_D$, то синтез в задаче оптимального управления 1 – 4 в области заимствования выражается как $c_{2,D}(k,\rho) = w\hat{x}(k,\rho)$, где $\hat{x}(k,\rho)$ — решение уравнения*

$$-\frac{k}{w} - \frac{1}{r_L} + \frac{1-\beta}{\rho-\beta r_L}x + x^{\frac{r_L(1-\beta)}{r_L-\rho}} \left(\frac{\frac{\rho}{r_D}-\beta}{1-\beta}\right)^{-\frac{r_L(1-\beta)}{r_L-\rho}} \frac{1}{r_L}\left(1 - \frac{\frac{\rho}{r_D}-\beta}{\frac{\rho}{r_L}-\beta}\right) = 0. \tag{23}$$

Доказательство. Продолжим предельную траекторию $\psi(k)$, найденную в Лемме 4, в область $k < 0$. На границе областей оптимальная траектория попадает в точку

$$k_3 = 0, \quad \psi_3 = c_{1,D}(0,\rho) = \left(\frac{\frac{\rho}{r_D}-\beta}{1-\beta}w\right)^{\beta-1}\beta.$$

Решаем дифференциальные уравнения 12, 13 в обратном времени с начальными условиями k_3, ψ_3. Тогда

$$\psi = \psi_1 e^{(\rho-r_L)t},$$

$$k(t) = -\frac{w}{r_L} + \frac{1-\beta}{\rho-\beta r_L}\left(\frac{\psi_3}{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta-1}} e^{\frac{\rho-r_L}{\beta-1}t} + e^{r_L t}\left(\frac{w}{r_L} - \frac{1-\beta}{\rho-\beta r_L}\left(\frac{\psi_3}{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta-1}} + k_3\right).$$

Выполнив подстановки и замену $e^t = \left(\frac{\psi}{\psi_3}\right)^{\frac{1}{\rho-r_L}}$, получим

$$k = -\frac{w}{r_L} + \frac{1-\beta}{\rho-\beta r_L}\left(\frac{\psi}{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta-1}} + \left(\frac{\psi}{\beta}\right)^{-\frac{r_L}{r_L-\rho}}\left(\frac{\frac{\rho}{r_D}-\beta}{1-\beta}w\right)^{-\frac{r_L(1-\beta)}{r_L-\rho}}\left(\frac{w}{r_L} - \frac{1-\beta}{\rho-\beta r_L}\cdot\frac{\frac{\rho}{r_D}-\beta}{1-\beta}w\right).$$

Подставив $c = \left(\frac{\psi}{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}$ и разделив обе части уравнения на w, получим

$$-\frac{k}{w} - \frac{1}{r_L} + \frac{1-\beta}{\rho-\beta r_L}\cdot\frac{c}{w} + \left(\frac{c}{w}\right)^{\frac{r_L(1-\beta)}{r_L-\rho}}\left(\frac{\frac{\rho}{r_D}-\beta}{1-\beta}\right)^{-\frac{r_L(1-\beta)}{r_L-\rho}}\frac{1}{r_L}\left(1 - \frac{\frac{\rho}{r_D}-\beta}{\frac{\rho}{r_L}-\beta}\right) = 0.$$

Выполним замену $x = \frac{c}{w}$. Тогда полученное уравнение совпадает с 23.

Докажем, что уравнение имеет единственный корень. Для этого проанализируем функцию

$$f(x) = ax^\gamma + bx - d,$$

где

$$a = \left(\frac{\frac{\rho}{r_D}-\beta}{1-\beta}\right)^{-\frac{r_L(1-\beta)}{r_L-\rho}}\frac{1}{r_L}\left(1 - \frac{\frac{\rho}{r_D}-\beta}{\frac{\rho}{r_L}-\beta}\right),$$

$$b = \frac{1-\beta}{\rho-\beta r_L},$$

$$d = -\frac{k}{w} - \frac{1}{r_L},$$

ввиду ограничения $k > -\frac{w}{r_L}$ в области заимствования $d < 0$,

$$\gamma = \frac{r_L(1-\beta)}{r_L-\rho} > 0.$$

На границе областей синтез принимает значение $c = \frac{\frac{\rho}{r_D}-\beta}{1-\beta}w$. Ввиду возрастания траектории в обратном времени по ψ, c убывает, значит можем рассматривать функцию на $\left[0, \frac{\frac{\rho}{r_D}-\beta}{1-\beta}\right]$.

Вычислим значения функции в граничных точках:

$$f(0) = d < 0,$$

$$f\left(\frac{\frac{\rho}{r_D} - \beta}{1-\beta}\right) = -\frac{k}{w} > 0.$$

Вычислим производную функции

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = a\gamma x^{\gamma-1} + b.$$

Тогда $x^* = \left(-\frac{b}{a\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$ — единственная точка экстремума на сегменте $[0, +\infty)$.

Вычислим вторую производную функции:

$$\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} = a\gamma(\gamma-1)x^{\gamma-2}.$$

Если $\rho > \beta r_L$, то $\gamma - 1 > 0,\ a < 0$, тогда $\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} < 0$. Если $\rho < \beta r_L$, то $\gamma - 1 < 0,\ a > 0$, и $\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} < 0$. Таким образом, функция $f(x)$ выпуклая.

Таким образом, существует и единственна точка $\hat{x} \in \left[0, \frac{\frac{\rho}{r_D} - \beta}{1-\beta}\right]$ такая, что $f(\hat{x}) = 0$. Значит уравнение 23 имеет единственное решение $\hat{x}$, и $c_{2,D} = w\hat{x}$ — искомый синтез. □

Лемма 6. *Если $r_D \le \rho \le r_L$, то синтез в задаче оптимального управления представим в форме*

$$c_{D,L}(k,\rho) = \begin{cases} c_{2,D}(k,\rho), & k < 0, \\ w, & k = 0, \\ c_{2,L}(k,\rho), & k > 0. \end{cases} \tag{24}$$

Доказательство. Рассмотрим случай $k_0 < 0$. Тогда ввиду того, что $\rho \le r_L$, функция $\psi(k)$ убывает по ψ. Для достижения условия трансверсальности функция должна возрастать по k. Тогда траектория $\psi(k)$ находится выше кривой разворота ψ_z. Этот случай был расмотрен ранее в Лемме 5. Значит, если $k < 0$, $c(k,\rho) = c_{2,D}(k,\rho)$.

Аналогично рассмотрим случай $k_0 > 0$. Тогда ввиду того, что $\rho \ge r_D$, траектория возрастает по ψ. Тогда для достижения условия трансверсальности функция должна убывать по k. Таким образом, траектория находится ниже кривой разворота ψ_z. Этот случай был рассмотрен ранее в Лемме 3. Значит, если $k > 0$, $c(k,\rho) = c_{2,L}(k,\rho)$.

Из вогнутости функции цены следует монотонность сопряжённой переменной $\psi(k)$, и, значит синтез оптимального управления также должен быть монотонен. Поэтому на границе областей $k = 0$ оптимальная траектория приходит в точку покоя $\psi = \frac{\beta}{w^{1-\beta}}$. Отсюда $c(0,\rho) = w$. □

Доказательство Теоремы 3. Доказательство опирается на ранее сформулированные леммы.

Структура управления, соответствующая ***Типу 1***, устанавливается непосредственно из Лемм 2, 3.

Структура управления, соответствующая ***Типу 2***, устанавливается непосредственно из Лемм 4, 5.

Структура управления, соответствующая ***Типу 3***, устанавливается непосредственно из Леммы 6. □

Замечание 4. *Каждому из типов синтеза задачи оптимального управления, описанных в Теореме 3, соответствует определённая экономическая интерпретация.*

Условие $\rho > r_L$ отражает высокий коэффициент дисконтирования у агентов, что соответствует поведенческой модели, характерной для представителей менее обеспеченной части популяции. Такие агенты придают значительно больший вес текущему потреблению по сравнению с будущим, что типично для так называемого «бедного» класса.

Напротив, условие $\rho < r_D$ указывает на низкий уровень субъективной дисконтной ставки, свойственный экономическим агентам, ориентированным на долгосрочное накопление. Это позволяет отнести их к условно «богатой» группе населения, обладающей высокой склонностью к сбережениям.

Промежуточный диапазон значений параметра ρ, удовлетворяющий условию $r_D \le \rho \le r_L$, соответствует экономическим агентам с умеренным уровнем дисконтирования. В этом случае агенты не демонстрируют крайних поведенческих стратегий: с одной стороны, они не стремятся немедленно расходовать все ресурсы (как при высоком $\rho > r_L$), с другой — не склонны к чрезмерному сбережению (что характерно для $\rho < r_D$).

4 Модель социальной динамики

Используя решение задачи оптимального управления в форме синтеза, представленное в Теореме 3, опишем модель социальной динамики для популяции из H домохозяйств.

Предполагаем, что в начальный момент времени $t_0 = 0$ известна величина сбережений каждого агента, причём

$$k_0^h \geq 0, \quad h \in \{1, \ldots, H\}.$$

Введём обозначение общих сбережений всех домохозяйств

$$K = \sum_{h=1}^{H} r\left(k^h\right) k^h + wH,$$

где

$$r\left(k^h\right) = \begin{cases} r_L, & k^h \leq 0, \\ r_D, & k^h > 0. \end{cases}$$

Используя найденный ранее синтез, можем описать динамику капитала в форме задачи Коши

$$\frac{\mathrm{d}k^h}{\mathrm{d}t} = r\left(k^h\right) \cdot k^h + w - c\left(k^h, \rho^h\left(k^h, K\right)\right), \quad k^h(0) = k_0^h. \tag{25}$$

Настоящая работа направлена на эмпирическую проверку гипотезы Рамсея, согласно которой в долгосрочной динамике общество неизбежно разделяется на два устойчивых класса с ярко выраженным экономическим неравенством. Ключевой вопрос исследования заключается в следующем: действительно ли социально-экономические системы эволюционируют к биполярной структуре, где разрыв между классами становится экстремально большим?

Неравенство в обществе невозможно адекватно объяснить без учёта подхода Дъюзенбери [9]. Его гипотеза заключается в том, что потребление агента зависит не только от его дохода, но и от его дохода относительно других агентов. Введение этой гипотезы в модель позволяет учесть ключевые аспекты человеческой мотивации, которые игнорируются традиционными экономическими подходами:

1. Классические модели исходят из того, что агенты принимают решения рационально, ориентируясь лишь на собственные доходы и предпочтения. Однако в реальности выбор домохозяйства часто определяется стремлением соответствовать групповым стандартам. Гипотеза Дьюзенберри объясняет, почему агенты могут сопротивляться снижению уровня потребления даже при падении доходов.

2. Агенты сравнивают себя не только с другими, но и с собственным прошлым. Таким образом, даже в кризис они неохотно сокращают потребление, что влияет на экономическую динамику.

В соответствии с гипотезой Дъюзенбери представим функцию $\rho\left(k^h, K\right)$ в виде

$$\rho^h\left(k^h, K\right) = r\left(k^h\right) \varphi\left(\frac{r\left(k_0^h\right) \cdot k_0^h + w}{K}\right).$$

Определение 1. *Функция* $\varphi(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *удовлетворяет следующим условиям:*

- *Непрерывна по Липшицу, монотонно убывает на* $[0, 1]$,
- $\varphi(x) = \varphi(1), \quad x \geq 1,$
- $\varphi(x) = \varphi(0), \quad x \leq 0,$
- $\beta \leq \varphi(1) < \varphi\left(\frac{1}{H}\right) \leq 1 < \varphi(0),$
- *вогнута на* $[0, 1]$.

Для качественного анализа выполнимости гипотезы Рамсея на несовершенном рынке кредитов и депозитов было разработано численное решение. В качестве платформы, на которой разрабатывалась программа, была взята платформа MATLAB®.

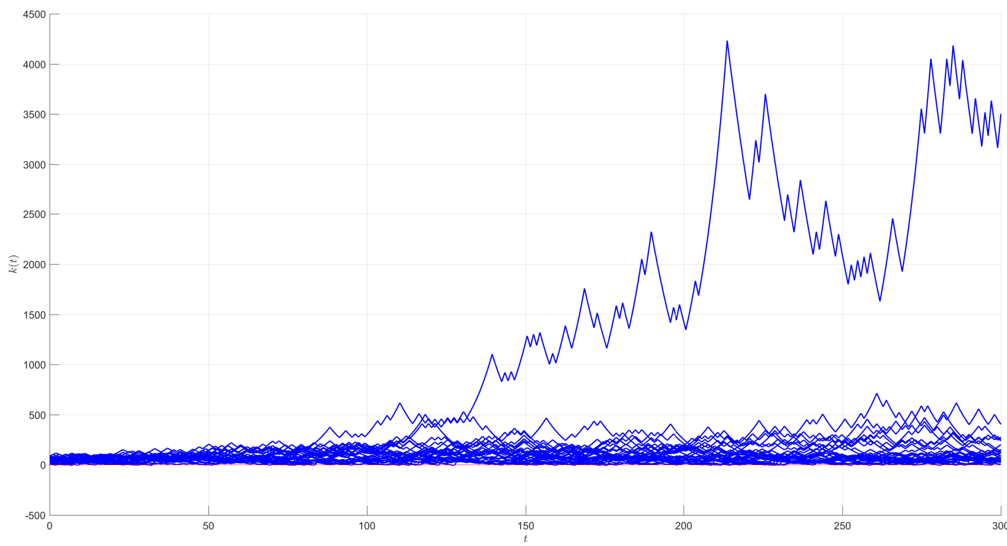


Рис. 1: Динамика капитала. Траектории для каждого агента изображена синим цветом. Ограничение $-\frac{w}{r_L}$ изображено красным цветом.

Пусть $r_L = 0.5, r_D = 0.1, \beta = 0.8, w = 3, H = 30, T = 100$. При данных значениях параметров изобразили динамику капитала на Рис.1. Начальное распределение капитала — вектор со значениями из диапазона $[0, 500]$ без повторений. Из графика видно,что всех агентов можно разделить на три группы:

1. Агент, капитал которого больше чем у остальных агентов. В некоторый момент времени его капитал даже начинает увеличиваться монотонно. В пределе $k \to +\infty$;
2. Агенты, капитал которых сильно меньше капитала предыдущего агента, но для которых в пределе капитал остаётся на одном и том же уровне;
3. Агенты, капитал которых очень быстро становится отрицательным и в пределе $k \to \frac{w}{r_L}$.

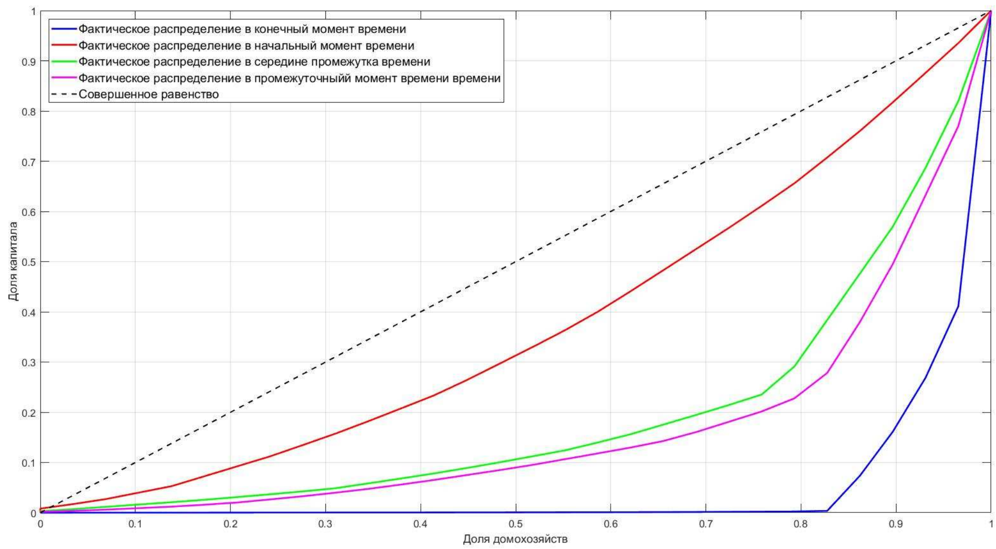


Рис. 2: Кривая Лоренца.

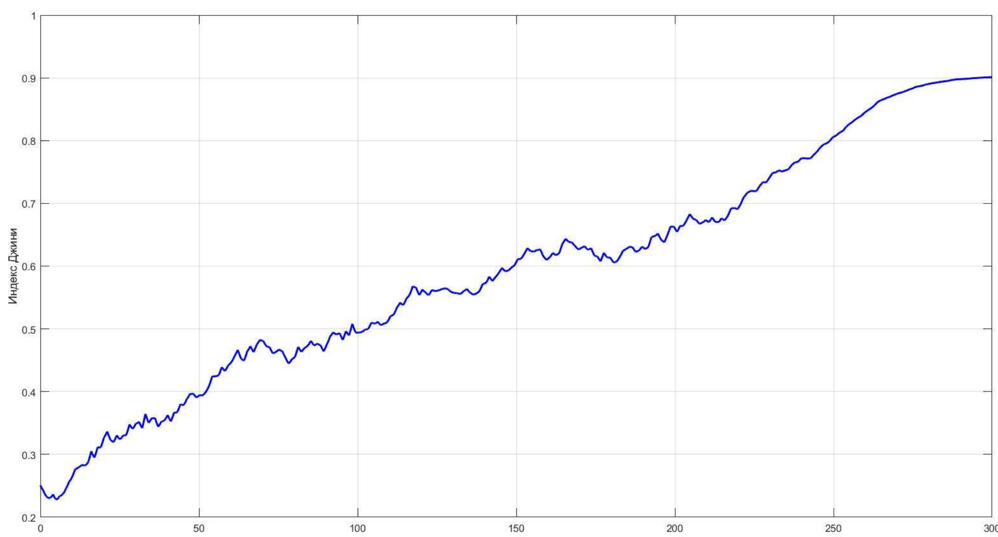


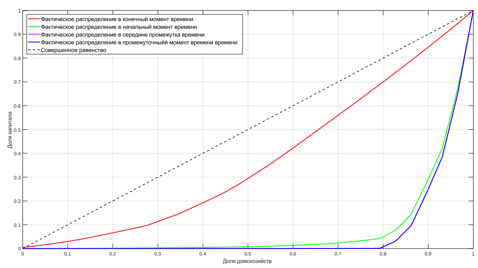
Рис. 3: Изменение индекса Джини.

График кривой Лоренца [10], представленный на рис. 2, демонстрирует значительное отклонение от линии абсолютного равенства, что указывает на выраженную степень неравномерности распределения капитала в конечный момент времени. Из анализа формы кривой можно выделить три характерные группы агентов.

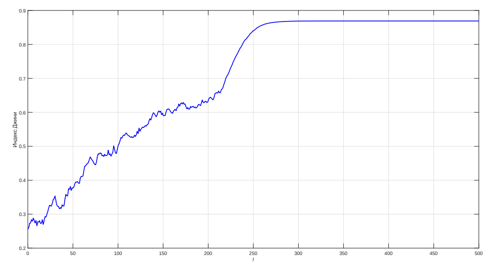
Во-первых, значительная часть домохозяйств практически не располагает капиталом, что отражается в пологом участке кривой у основания. Во-вторых, последующее отклонение кривой под определённым углом свидетельствует о наличии группы агентов, обладающих небольшой, но ненулевой долей совокупного капитала. Наконец, резкое возрастание графика в завершающем сегменте указывает на то, что основная масса капитала сосредоточена в руках одного агента.

Поскольку начальное распределение капитала было сформировано без повторений, можно сделать вывод, что в конечной точке наблюдается почти полная концентрация капитала у одного агента. Этот вывод также подтверждается высоким значением индекса Джини [11]. На рис. 3 представлен график изменения индекса Джини для представленных выше параметров. В конечный момент времени его значение примерно равно 0.9, что отражает крайне высокий уровень имущественного неравенства.

На основе численных экспериментов также можно убедиться в том, что рассматриваемая модель чувствительна к изменению значения параметра r_L.

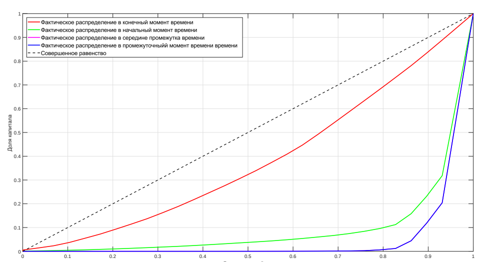


(a) Кривая Лоренца.

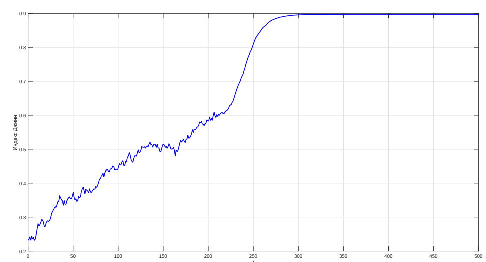


(b) Изменение индекса Джини.

Рис. 4: Графики для случая $r_L = 3$



(a) Кривая Лоренца.



(b) Изменение индекса Джини.

Рис. 5: Графики для случая $r_L = 25$

Сравним графики кривой Лоренца, представленные на рис. 2, 4, 5. Можно выявить следующую зависимость: при увеличении значения r_L пологая часть графика уменьшается, то есть уменьшается доля агентов, владеющих нулевым капиталом. Это обусловлено тем, что повышение ставки по кредитам, делает их менее доступными для агентов, поэтому домохозяйства, владеющие меньшим капиталом вынуждены сокращать потребление и отказываться от кредитов.

При этом из графиков, представленных на рис. 4b, 5b, видно, что уровень неравенства остаётся крайне большим. Значение индекса Джини приближается к единице.

Таким образом, на основе полученных численных результатов можно заключить, что гипотеза Рамсея не подтверждается в рамках представленной модели экономического поведения домохозяйств. В отличие от предсказаний, содержащихся в оригинальной формулировке гипотезы, согласно которой сообщество агентов со временем разделяется на две группы — с нулевым и положительным уровнем накоплений, — в данной модели формируются три устойчивые группы. В частности, помимо агентов с нулевыми и высокими уровнями капитала, возникает промежуточная группа, характеризующаяся ограниченным, но ненулевым объёмом накоплений, что свидетельствует о более сложной структуре неравенства, чем предполагалось в изначальной теории.

5 Заключение

В ходе проведения исследования были получены следующие результаты:

- Изучена математическая модель поведения домашних хозяйств, учитывающая несовершенство рынка кредитов и депозитов.

- Доказана теорема о существовании решения задачи оптимального управления на конечном временном горизонте.

- Получено решение задачи оптимального управления в форме синтеза для модифицированной модели рамсеевского типа, что позволило описать динамику капитала домашних хозяйств в зависимости от их финансового состояния и параметров экономической конъюнктуры.

- На основе численного анализа модели социальной динамики в популяции домохозяйств установлено, что гипотеза Рамсея о бинарной стратификации населения не подтверждается в рамках рассматриваемой модели. Вместо разделения на две группы — с положительным и нулевым уровнем капитала — наблюдается формирование трёх устойчивых социальных классов, отражающих различия в субъективных коэффициентах дисконтирования.

- Построены кривая Лоренца и график изменения индекса Джини, которые продемонстрировали крайне неравномерное распределение капитала.

Список литературы

[1] *G. S. Parastaev, A. A. Shananin* Ramsey's Conjecture of Social Stratification as Fisher's Selection Principle // *Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2024, Vol. 64, No. 12, pp. 2952–2981..* - 2024.

[2] *Н. В. Трусов* Математическое моделирование динамики поведения экономических агентов // *Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук .* - 2024.

[3] *А. М. Денисов, А. В. Разгулин* Обыкновенные дифференциальные уравнения // *Учебное пособие для подготовки к коллоквиуму.* - 2007.

[4] *J. A. Komlos* A generalization of a problem of Steinhaus // *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae, Vol.18, P.217-229.* - 1967.

[5] *А. В. Арутюнов* Лекции по выпуклому и многозначному анализу// *Москва, ФИЗМАТЛИТ.* - 2014.

[6] *А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин* Элементы теории функций и функционального анализа// *М.: Наука.* - 1972.

[7] *Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений// *М.: изд. Иностранной литературы.* - 1958.

[8] *Ф. Кларк* Оптимизация и негладкий анализ// *М.: Наука.* - 1988.

[9] *J. S. Duesenberry* Income, Saving and the Theory of Consumer Behavior// *Harvard University Press.* - 1949.

[10] *M. O. Lorenz* Methods of Measuring the Concentration of Wealth// *Publications of the American Statistical Association.* - 1905.

[11] *C. Gini* Variabilità e mutabilità// *Memorie di metodologica statistica.* - 1912.

[12] *F. P. Ramsey* A mathematical theory of savings // *The Economic Journal Vol.152, No.38, P.543-559.* - 1928.