Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Курсовая работа

«Исследование динамики нелинейных дискретных и непрерывных динамических систем на плоскости»

Студент 315 группы
А. А. Анашкина

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2024

Содержание

1 Исследование дискретной системы без запаздывания 2
1.1 Постановка задачи . . . 2
1.2 Нахождение неподвижных точек системы . . . 2
1.3 Исследование характера устойчивости неподвижных точек . . . 3
1.4 Проверка существования циклов длины 2 и 3 . . . 5
1.5 Построение бифуркационной диаграммы . . . 8
1.6 Показатель Ляпунова . . . 11

2 Исследование дискретной системы с запаздыванием 13
2.1 Постановка задачи . . . 13
2.2 Поиск особых точек системы . . . 13
2.3 Исследование характера устойчивости особых точек . . . 13
2.4 Бифуркация Неймарка—Сакера . . . 15

3 Исследование нелинейной динамической системы с непрерывным временем на плоскости 18
3.1 Постановка задачи . . . 18
3.2 Биологическая интерпретация характеристик системы . . . 18
3.3 Введение безразмерных переменных . . . 19
3.4 Исследование неподвижных точек и характера их устойчивости . . . 20
3.5 Построение фазовых портретов системы . . . 23
3.6 Исследование предельных циклов . . . 24
3.7 Биологическая интерпретация полученных результатов . . . 25

1 Исследование дискретной системы без запаздывания

1.1 Постановка задачи

Для анализа представлена следующая дискретная система без запаздывания:

$$u_{t+1} = ru_t\left(1 - u_t^3\right), \quad u_t \in (0, 1)\,. \tag{1}$$

В ходе исследования системы 1 необходимо:

1. Найти неподвижные точки и исследовать их устойчивость;
2. Проверить существование циклов длины 2 и 3;
3. Построить бифуркационную диаграмму (в смысле предельного поведения траекторий) в зависимости от значения бифуркационного параметра (значения других параметров и значение u_0 следует зафиксировать при построении);
4. Построить зависимость показателя Ляпунова от значения параметра.

1.2 Нахождение неподвижных точек системы

Рассмотрим следующую дискретную динамическую систему:

$$\begin{cases} u_{t+1} = f\left(u_t\right), \quad t = 0, 1, 2, ... \\ u\left.\right|_{t=0} = u_0 \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $u_t \in X \subset \mathbb{R}^n \quad \forall t = 0, 1, 2, ...$

Определение 1. *Множество X называется пространством состояний системы 2.*

Определение 2. *Особыми (неподвижными) точками системы 2 называются точки $u^* \in X$, удовлетворяющие выражению:*

$$u^* = f\left(u^*\right).$$

Перейдём к поиску особых точек системы 1:

$$u = ru\left(1 - u^3\right),$$

$$u\left(1 - r\left(1 - u^3\right)\right) = 0.$$

Отсюда сразу находим особую точку $u_0^* = 0$.
Вторая неподвижная точка зависит от параметра системы r:

$$1 - r + ru^3 = 0,$$

$$u_1^* = \sqrt[3]{\frac{r-1}{r}}. \tag{3}$$

Рассмотрим при каких значениях параметра r особая точка u_1^* существует. По условию задачи $u \in (0, 1)$. Тогда для выражения 3 можем записать неравенство:

$$0 < \frac{r-1}{r} < 1.$$

Отсюда получим $r > 1$. Причём при $r = 1$ точка u_1^* вырождается в точку u_0^*.
Итак, нашли две неподвижные точки системы 1:

$$u_0^* = 0, \quad \forall r \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

$$u_1^* = \sqrt[3]{\frac{r-1}{r}}, \quad r > 1. \tag{5}$$

1.3 Исследование характера устойчивости неподвижных точек

Сначала рассмотрим всю необходимую теорию.

Определение 3. *Неподвижная точка* u^* *называется устойчивой по Ляпунову, если* $\forall\ \epsilon > 0 \quad \exists\ \delta(\epsilon) > 0$ *и* $\forall\ \overline{u}$ *такого, что* $\|\overline{u} - u^*\| < \delta$, *выполняется* $\|u(t, \overline{u}) - u^*\| < \epsilon$.

Определение 4. *Точка* u^* *— асимптотически устойчива по Ляпунову, если дополнительно в Определении 3 :*

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t, \overline{u}) - u^*\| = 0$$

Определение 5. *Неподвижная точка* u^* *называется неустойчивой, если она не является устойчивой.*

Следующее утверждение рассматриваем в обозначениях системы 2. Точка u^* — особая точка этой системы.

Утверждение 1. *Если* $|\ f'(u^*)\ | < 1$, *то* u^* *— асимптотически устойчивая неподвижная точка. Если* $|\ f'(u^*)\ | > 1$, *то* u^* *— неустойчивая неподвижная точка.*

Замечание 1. *Важно отметить, что если* $|\ f'(u^*)\ | = 1$, *то о характере устойчивости неподвижной точки* u^* *ничего сказать нельзя, и требуются дополнительные исследования.*

Перейдем к рассмотрению особых точек системы 1, найденных в 1.2.
Чтобы воспользоваться *Утверждением* 1, необходимо найти производную правой части системы 1:

$$f(u_t) = ru_t\left(1 - u_t^3\right),$$

$$f'(u_t) = r - 4ru_t^3.$$

Сначала проведем анализ для точки $u_0^* = 0$:

$$f'(u_0^*) = r.$$

Получили результат, зависящий от параметра. Тогда можем рассмотреть несколько случаев. Считаем, что всегда $r > 0$.
Если $r < 1$, то $|\ f'(u_0^*)\ | < 1$, значит по *Утверждению* 1 u_0^* — асимптотически устойчивая неподвижная точка. Ниже приведена иллюстрация, доказывающая, что при данных ограничениях на параметр u_0^* — аттрактор.

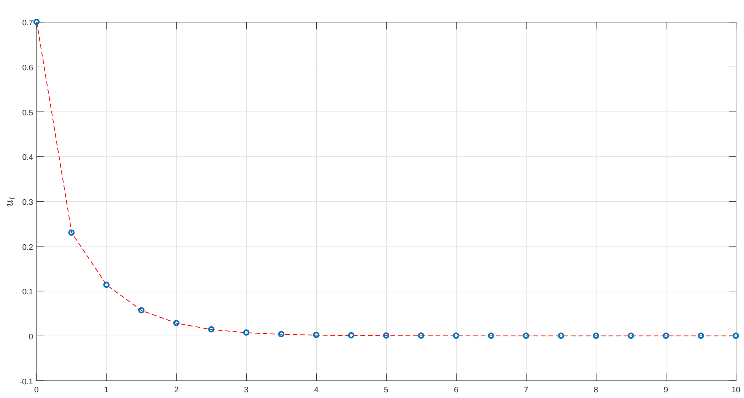

Рис. 1: Траектория системы при $u_0 = 0.7$, $r = 0.5$

Если $r > 1$, то по *Утверждению* 1 u_0^* — неустойчивая неподвижная точка. Ниже представлена иллюстрация, доказывающая, что в данном случае u_0^* — репеллер.

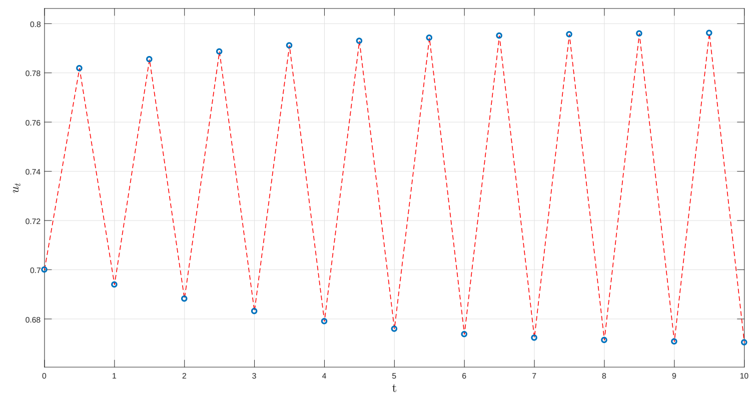

Рис. 2: Траектория системы при $u_0 = 0.7$, $r = 1.7$

Если $r = 1$, то об устойчивости неподвижной точки u_0^* ничего сказать нельзя.
Теперь проанализируем устойчивость точки $u_1^* = \sqrt[3]{\frac{r-1}{r}}$:

$$f'(u_1^*) = 4 - 3r.$$

Рассмотрим ситуацию, когда $|\ f'(u_1^*)\ | < 1$:

$$-1 < 4 - 3r < 1,$$

$$-5 < -3r < -3,$$

$$1 < r < \frac{5}{3}.$$

Таким образом, по *Утверждению* 1 при $r \in \left(1, \frac{5}{3}\right)$ точка u_1^* — асимптотически устойчивое положение равновесия. Ниже представлена иллюстрация, доказывающая, что в данном случае u_1^* — аттрактор.

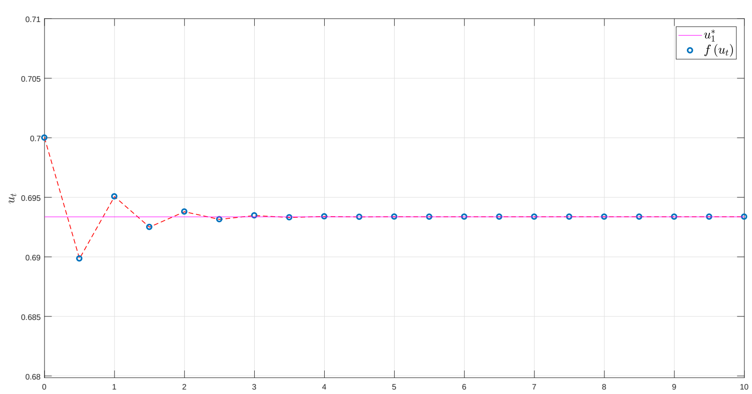

Рис. 3: Траектория системы при $u_0 = 0.7$, $r = 1.5$

Теперь рассмотрим случай $\left| f'\left(u_1^*\right) \right| > 1$. В 1.2 вычислили, что u_1^* существует при $r > 1$. Значит достаточно рассмотреть неравенство:

$$4 - 3r < -1,$$
$$r > \frac{5}{3}.$$

В этом случае u_1^* — неустойчивое положение равновесия. Иллюстрация ниже подтверждает, что u_1^* — репеллер.

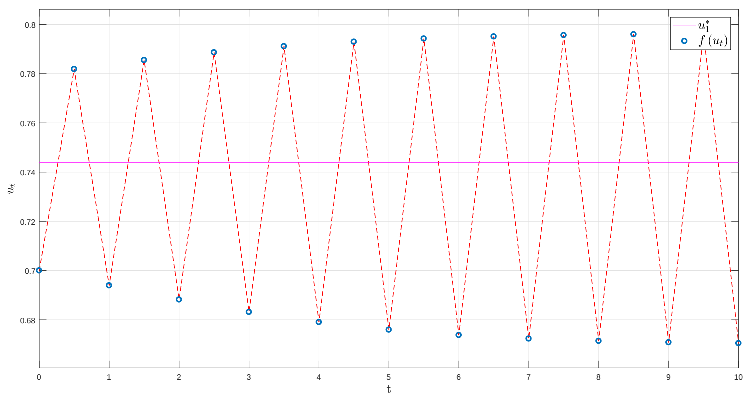

Рис. 4: Траектория системы при $u_0 = 0.7$, $r = 1.7$

Осталось рассмотреть случай $r = \frac{5}{3}$. Характер устойчивости точки u_1^* меняется в зависимости от u_0, поэтому ничего конкретного про это положение сказать нельзя.
Итак, получим:

1. При $0 \leqslant r < 1$: u_0^* — аттрактор;
2. При $r = 1$: одна особая точка u_0^*, о характере устойчивости ничего сказать нельзя;
3. При $1 < r < \frac{5}{3}$: u_0^* — репеллер, u_1^* — аттрактор;
4. При $r = \frac{5}{3}$: u_0^* — репеллер, о характере устойчивости особой точки u_1^* ничего сказать нельзя;
5. При $r > \frac{5}{3}$: u_0^* — репеллер, u_1^* — репеллер.

1.4 Проверка существования циклов длины 2 и 3

Определение 6. *Циклом длины k дискретной системы 2 называется упорядоченный набор точек $(\widetilde{u}_1, ..., \widetilde{u}_k)$ такой, что*

$$f\left(\widetilde{u}_1\right) = \widetilde{u}_2, ..., f\left(\widetilde{u}_{k-1}\right) = \widetilde{u}_k, f\left(\widetilde{u}_k\right) = \widetilde{u}_1.$$

В силу определения цикла, каждая из точек $\widetilde{u}_i, \quad i = 1, 2, ..., k$, является неподвижной точкой k-ой итерации отображения:

$$f^k\left(u\right) = \underbrace{f \circ ... \circ f}_{k}.$$

Отсюда получим, что неподвижные точки самого отображения f также являются неподвижными точками отображения f^k.
Сначала попробуем найти цикл длины 3. Для этого рассмотрим график функции $f^3\left(u\right)$. Подбираем параметр r так, чтобы график касался биссектрисы первого координатного угла в трёх точках.

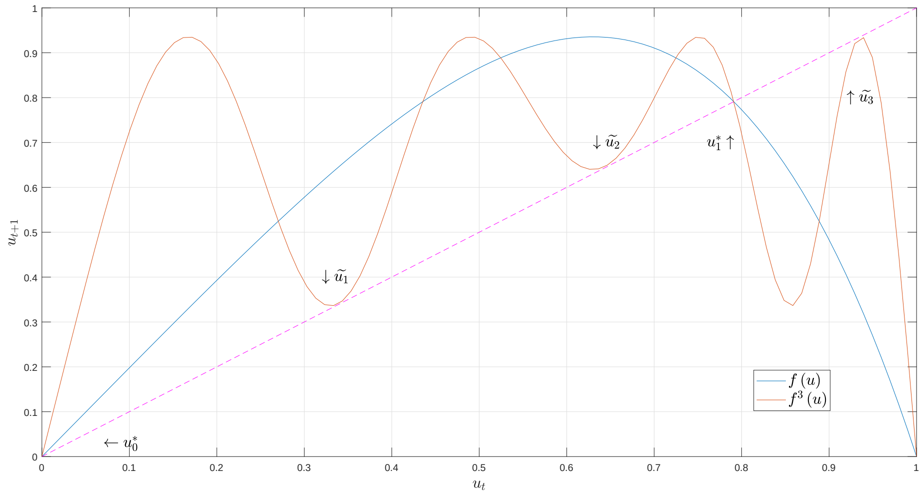

Рис. 5: Касание графика $f^3(u)$ биссектрисы первого координатного угла, $r = 1.98$

Таким образом, подобрав значение параметра, нашли случай, когда график функции $f^3(u)$ касается биссектрисы первого координатного угла в трёх точках. Значит можем сделать вывод, что в нашей задаче при фиксированном значении параметра цикл длины 3 существует. Посчитаем значения $\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2, \widetilde{u}_3$ численно в системе MatLab. Причем правая часть системы 1 зависит от параметра r.
Для начала заметим, что в точках касания графика имеет место равенство:

$$\frac{df^3(u,r)}{du} = 1.$$

Так же из *Определения* 6 для точек цикла справедливо равенство:

$$f^3(u,r) = u.$$

Теперь можем записать систему , содержащую две неизвестные: величину u и значение параметра r:

$$\begin{cases} f^3(u,r) = u, \\ \dfrac{df^3(u,r)}{du} = 1. \end{cases} \tag{6}$$

С помощью *Рис.*5 определили, что нужное значение параметра находится в пределах $[1.7, 2]$. Перебором по параметру находим наилучшее решение:

$$\widetilde{u}_1 \approx 0.3364.$$

$$r \approx 1.98$$

Тогда по формуле $f(\widetilde{u}_{i-1}) = \widetilde{u}_i \quad i = 2, 3$ находим оставшиеся точки цикла.

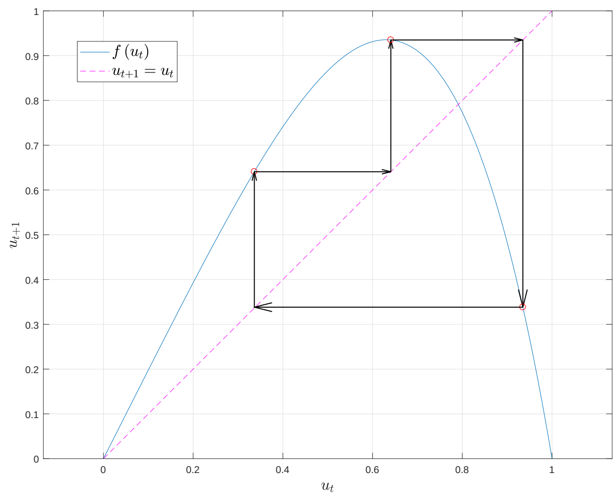

Рис. 6: Цикл длины 3

Итак, доказали, что в нашей системе есть цикл длины 3.

Определение 7. *Порядком по Шарковскому называется упорядочивание всех натуральных чисел:*

$$3 \succ 5 \succ 7 \succ 9 \succ ...$$

$$\succ 2 \cdot 3 \succ 2 \cdot 5 \succ 2 \cdot 7 \succ ...$$

$$\succ 2^2 \cdot 3 \succ 2^2 \cdot 5 \succ 2^2 \cdot 7 \succ ...$$

$$\succ ... \succ$$

$$\succ 2^3 \succ 2^2 \succ 2 \succ 1.$$

Теорема 1 (Шарковский)**.** *Пусть динамическая система 2 имеет цикл длины k. Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ такого, что $k \succ m$ (в смысле Определения 7), в этой системе существует цикл длины m.*

Следствие 1. *Если динамическая система 2 имеет цикл длины 3, то в этой системе существуют циклы произвольной длины, то есть цикл длины 3 порождает «хаос».*

Вернёмся к рассмотрению задачи 1. Выше было доказано, что цикл длины 3 существует. Значит по *Теореме* 1 существует цикл длины 2. Найдём точки цикла аналогично 6. Для этого необходимо численно решить систему:

$$\begin{cases} f^2(u, r) = u, \\ \dfrac{df^2(u, r)}{du} = 1. \end{cases} \tag{7}$$

Итак, получим, что цикл длины 2 зарождается при $r \approx 1.7, \quad \widetilde{u}_1 \approx 0.6710$. Ниже рассмотрим пример с параметром $r > 1.7$ для большей наглядности.

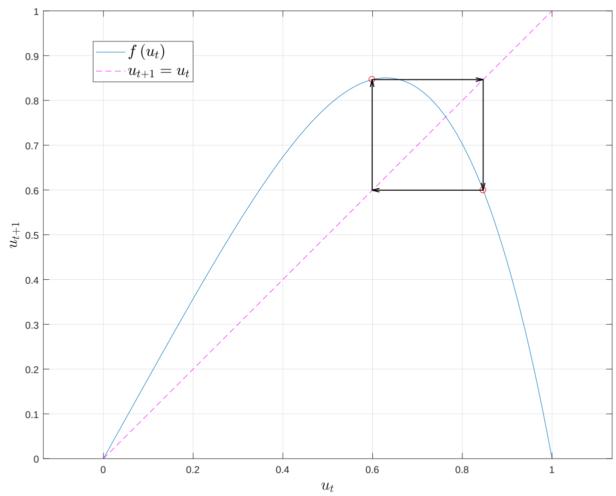

Рис. 7: Цикл длины 2, $r = 1.8$

1.5 Построение бифуркационной диаграммы

Определение 8. *Множество точек $\{u(t, u_0) \mid t \in \mathbb{Z}\}$ — фазовая кривая (траектория) системы 2.*

Определение 9. *Набор фазовых траекторий — фазовый портрет системы 2.*

Рассмотрим следующие динамические системы:

$$\dot{u}_1 = f(u_1), \quad u_1 \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

$$\dot{u}_2 = g(u_1), \quad u_2 \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Определение 10. *Динамические системы 8 и 9 топологически эквивалентны, если у них совпадает число особых точек, характер их устойчивости и положение на прямой.*

Определение 11. *Бифуркация — это получение топологически неэквивалентных фазовых портретов при изменении параметров системы.*

Определение 12. *Бифуркационной диаграммой динамической системы называется разбиение пространства параметров на максимальные связные подмножества, которые определяются соотношениями топологической эквивалентности и рассматриваются вместе с фазовыми портретами для каждого элемента разбиения.*

При качественном анализе динамической системы желательно получить её бифуркационную диаграмму, так как в ней в сжатом виде содержатся все возможные модели поведения данной системы. Бифуркационная диаграмма одномерной динамической системы с одним параметром r может быть представлена на плоскости (r, u). Фазовые портреты в данном случае — это сечения бифуркационной диаграммы при $r = const$.
Построим бифуркационную диаграму для системы 1.

Утверждение 2 (Алгоритм построения бифуркационной диаграммы)**.** *Введём необходимые обозначения:*
N — число итераций (достаточно большое) необходимое для того, чтобы система, если это возможно, стабилизировалась. В нашем случае $N = 500$.

M — число итераций необходимое для того, чтобы найти возможные положения равновесия в данном состоянии. В нашем случае $M = 100$.
Введем вспомогательную переменную v. Положим $v_0 = 0.1$ — начальное состояние системы.

1. *Определяем отрезок $[r_0, r_{max}]$ на котором будем производить исследование. Пусть $r \in [0,\ 2.1]$.*

2. *Запускаем цикл по j, перебирая по равномерной сетке все значения r.*

3. *Для каждого значения r_j запускаем цикл по i от 1 до N, в котором находим $v_{i+1} = r_j v_i \left(1 - v_i^3\right)$. В конце получаем значение v_N.*

4. *Далее запускаем новый цикл по i от 1 до M. Полагаем $u_0 = v_N$, и на каждой итерации вычисляем $u_{i+1} = r_j u_i \left(1 - u_i^3\right)$. Каждое полученное значение заносим на график как точку с координатами (r_j, u_i).*

Таким образом, бифуркационная диаграмма получена.

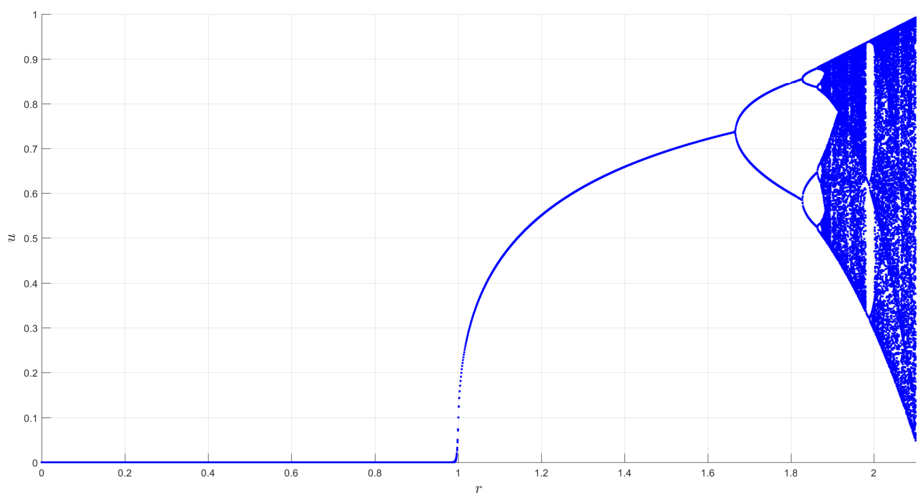

Рис. 8: Бифуркационная диаграмма системы

Проанализируем полученные результаты:

1. Неподвижная точка $u_0^* = 0$ является предельной при $r \in [0,\ 1]$.

2. Неподвижная точка $u_1^* = \sqrt[3]{\frac{r-1}{r}}$ является предельной при $r \in (1, 1.67]$.

3. При $r \in (1.67, 1.83)$ получаем цикл длины 2, что подтверждает результаты, полученные в 1.4.

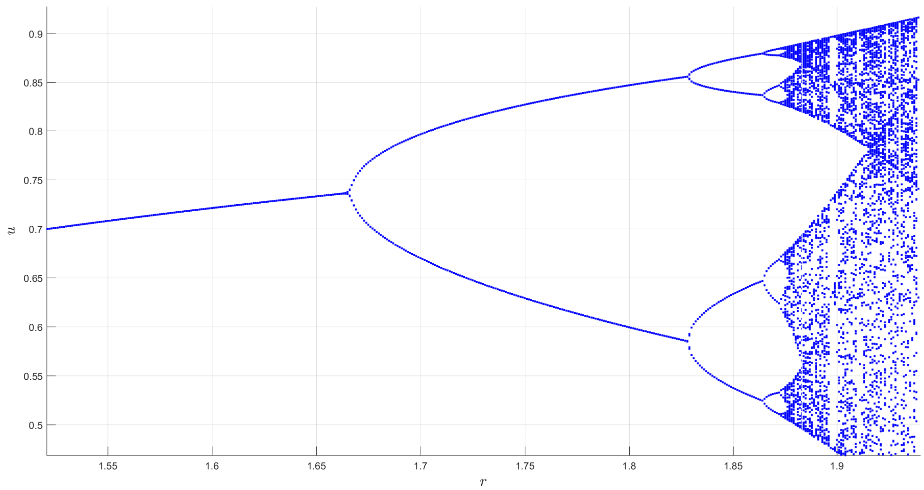

Рис. 9: Часть бифуркационной диаграммы, соответствующая циклу длины 2

4. При $r \in (1.9822, 1.9878)$ получаем цикл длины 3, что подтверждает результаты, полученные в 1.4.

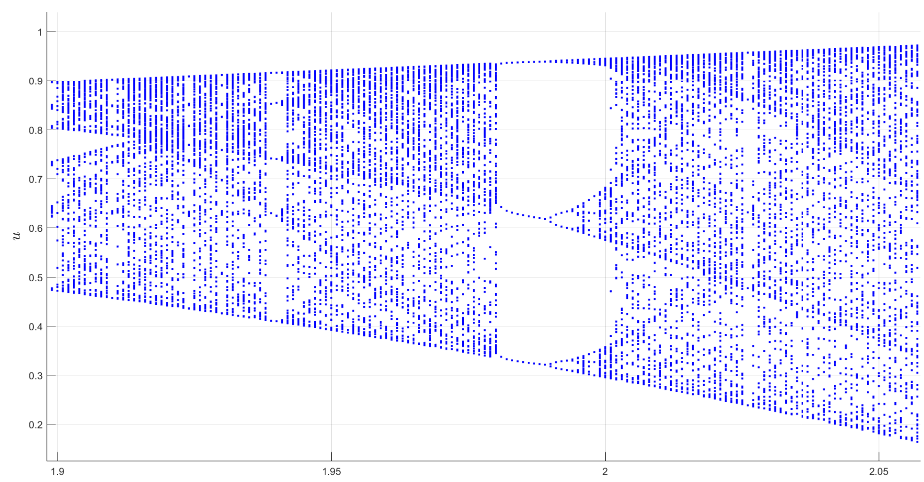

Рис. 10: Часть бифуркационной диаграммы, соответствующая циклу длины 3

5. Из *Следствия* 1 цикл длины 3 порождает «хаос», что мы и наблюдаем на *Рис.* 8.

1.6 Показатель Ляпунова

Пусть u_0 и $\overline{u}_0$ — две достаточно близкие начальные точки системы 2. Рассмотрим траектории, порождённые этими двумя точками:

$$u_0, u_1, ..., u_k, ...; \quad \overline{u}_0, \overline{u}_1, ..., \overline{u}_k, ...$$

Возникает вопрос, как измерить расстояние между этими двумя траекториями.

Определение 13. *Числом Ляпунова траектории* $u_0, u_1, ..., u_k, ...$ *называется величина*

$$\ell(u_0) = \lim_{n\to\infty} \left(|f'(u_0)| \cdot |f'(u_1)| \cdot ... \cdot |f'(u_n)|\right)^{\frac{1}{n}},$$

если этот предел существует.

Определение 14. *Показателем Ляпунова траектории* $u_0, u_1, ..., u_k, ...$ *называется величина*

$$h(u_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln|f'(u_0)| + \ln|f'(u_1)| + ... + \ln|f'(u_n)|}{n},$$

если этот предел существует.

Число и показатель Ляпунова характеризуют поведение близких траекторий при изменении дискретной величины t. Показатель Ляпунова является легко вычислимым признаком хаотического поведения траекторий. Если $h(u_0)$ положителен, то близкие траектории разбегаются, и в системе может наблюдаться хаотическое поведение. Поэтому нас интересует выявление зависимости показателя Ляпунова от значения параметра системы 1.
Все вычисления и построение графика зависимости показателя Ляпунова $h(u_0, r)$ от значения параметра r проводим в системе MatLab. Выберем $u_0 = 0.1$.

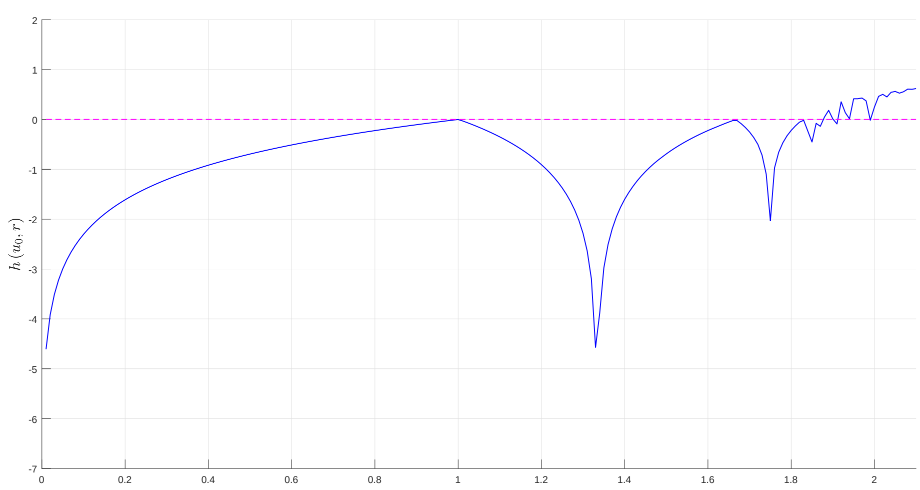

Рис. 11: График зависимости показателя Ляпунова $h(u_0, r)$ от значения параметра r

Заметим, что при $r \in [0.5, 1.8763) \cup (1.9003, 1.9116)$ значение $h(u_0, r) < 0$, значит траектории с близкими начальными точками бесконечно сближаются. При остальных значениях параметра близкие траектории разбегаются, и в системе наблюдается «хаос», что подтверждает результаты, полученные при построении бифуркационной диаграммы.

Рассмотрим график подробнее:

1. При $0 < r < 1, \quad h\left(u_0, r\right) < 0$: траектории сближаются, так как на этом промежутке особая точка u_0^* — аттрактор,и все траектории сходятся к ней.

2. При $r \in (1, 1.67), \quad h\left(u_0, r\right) < 0$: траектории сближаются, так как особая точка u_1^* — аттрактор,и все траектории сходятся к ней.

3. При $r \in (1.67, 1.83), \quad h\left(u_0, r\right) < 0$: траектории сближаются, так как в системе при данных значениях параметра появляется цикл длины 2.

4. При $r \in (1.83, 1.8763), \quad h\left(u_0, r\right) < 0$: траектории сближаются, так как в системе возникают циклы длины 4 и 8.

5. При $r \in (1.9003, 1.9116), \quad h\left(u_0, r\right) < 0$: траектории сближаются, так как примерно на этом промежутке возникает цикл длины 3.

2 Исследование дискретной системы с запаздыванием

2.1 Постановка задачи

Для анализа предлагается следующая дискретная система с запаздыванием:

$$u_{t+1} = ru_t\left(1 - u_{t-1}^3\right). \tag{10}$$

В ходе исследования системы 10 необходимо:

1. Найти особые точки и исследовать их устойчивость;
2. Проверить существование бифуркации Неймарка—Сакера, если она присутствует — построить инвариантную кривую.

2.2 Поиск особых точек системы

Для начала введём замену переменных, чтобы перейти от решения исходной задачи 10 к исследованию двумерной системы:

$$v_1(t) = u_t,$$
$$v_2(t) = u_{t-1}.$$

Тогда получим следующую систему:

$$\begin{cases} v_1(t+1) = rv_1(t)\left(1 - v_2^3(t)\right), \\ v_2(t+1) = v_1(t). \end{cases} \tag{11}$$

Особые точки найдём, решив систему:

$$\begin{cases} v_1 = rv_1\left(1 - v_2^3\right), \\ v_2 = v_1. \end{cases}$$

Итак, получим особые точки:

$$v_0^* = (0, 0), \quad v_1^* = \left(\sqrt[3]{\frac{r-1}{r}}, \sqrt[3]{\frac{r-1}{r}}\right). \tag{12}$$

Однако v_1^* зависит от значения параметра r системы, поэтому необходимо рассмотреть промежутки её существования. Из биологической интерпритации $v_1(t) > 0, \quad \forall t \in \mathbb{Z}$. Таким образом, необходимо решить следующеее неравенство:

$$\frac{r-1}{r} > 0$$

$$\frac{1}{r} < 1 \quad \Rightarrow r > 1.$$

Получим, что особая точка v_1^* существует при $r > 1$.

2.3 Исследование характера устойчивости особых точек

Рассмотрим следующую динамическую систему:

$$u_{t+1} = f(u_t). \tag{13}$$

Здесь $u_t \in \mathbb{R}^m, \quad f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, \quad t \in \mathbb{Z}$.

Теорема 2. *Пусть u^* — особая точка системы 13, $\mu_1, ..., \mu_n$ — собственные значения матрицы Якоби функции f в точке u^*. Тогда если $|\mu_i| < 1 \quad \forall i = 1, ..., n$, то u^* — устойчивое положение равновесия. Если существует хотя бы одно значение $\mu_i: \ |\mu_i| > 1$, то положение равновесия u^* неустойчиво.*

Воспользуемся этой теоремой для решения поставленной задачи. Для начала необходимо найти матрицу Якоби системы 13:

$$A\left(v_1, v_2\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial v_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial v_2} \\ \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial v_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial v_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\left(1 - v_2^3\right) & -3rv_1v_2^2 \\ \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Посчитаем значения матрицы Якоби в точке v_0^*:

$$A\left(0, 0\right) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим характеристический многочлен матрицы:

$$\mathcal{X} = \left(r - \mu\right) \cdot \left(-\mu\right).$$

Теперь найдём собственные значения матрицы:

$$\mathcal{X} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_2 = r.$$

Воспользуемся *Теоремой* 2 для исследования характера устойчивости особой точки v_0^*:

1. $\mu_1 < 0, \quad \forall r > 0.$
2. Если $0 < r < 1$, то $\mu_2 < 1$, значит v_0^* — асимптотически устойчивая особая точка.
3. Если $r > 1$, то $\mu_2 > 1$, значит v_0^* — неустойчивая особая точка.
4. Если $r = 1$, то о характере устойчивости особой точки v_0^* ничего сказать нельзя.

Перейдём к исследованию характера устойчивости особой точки v_1^*. Напомним, что она существует при $r > 1$.
Посчитаем значения матрицы Якоби 14 в точке v_1^*:

$$A\left(\sqrt[3]{\frac{r-1}{r}}, \sqrt[3]{\frac{r-1}{r}}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 3\left(1 - r\right) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим её характеристический многочлен:

$$\mathcal{X} = \left(1 - \mu\right) \cdot \left(-\mu\right) + 3\left(r - 1\right).$$

Найдём собственные значения матрицы:

$$\mathcal{X} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\mu_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13 - 12r}}{2}. \tag{15}$$

Сначала рассмотрим случай, когда полученные собственные значения вещественные, то есть $r < \frac{13}{12}$. Чтобы воспользоваться *Теоремой* 2, необходимо сравнить модули собственных значений с единицей:

$$|\mu_1| = |\ \frac{1 + \sqrt{13 - 12r}}{2}\ | < 1$$

$$-3 < \sqrt{13 - 12r} < 1,$$

$$13 - 12r < 1,$$

$$-12r < -12,$$

$$r > 1.$$

Получили, что если $\mu_1 \in \mathbb{R}$, то всегда $\mu_1 < 1$.

$$|\mu_2| = |\ \frac{1-\sqrt{13-12r}}{2}\ | < 1$$

$$-1 < \sqrt{13-12r} < 3,$$

$$13 - 12r < 9,$$

$$-12r < -4,$$

$$r > \frac{1}{3}.$$

Получили, что при $1 < r \leqslant \frac{13}{12}$ собственные значения $\mu_{1,2} < 1$. Значит по *Теореме* 2 особая точка v_1^* асимптотически устойчива.
Теперь рассмотрим случай, когда полученные собственные значения 15 комплексные. В этом случае $r > \frac{13}{12}$.

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{12r-13}}{2} i.$$

Посчитаем квадрат модуля этих величин:

$$|\mu_{1,2}|^2 = \frac{1}{4} + \frac{12r-13}{4} = \frac{12r-12}{4} = 3r - 3.$$

Сравним полученное значение с единицей:

$$3r - 3 < 1 \Rightarrow r < \frac{4}{3}.$$

Тогда по *Теореме* 2 можем сделать выводы о характере устойчивости точки v_1^*:

1. Если $1 < r < \frac{4}{3}$, то $\mu_{1,2} < 1$ и точка v_1^* асимптотически устойчива.
2. Если $r = \frac{4}{3}$, то о характере устойчивости точки $v_1^a st$ ничего сказать нельзя.
3. Если $r > \frac{4}{3}$, то v_1^* — неустойчивая особая точка.

2.4 Бифуркация Неймарка—Сакера

Рассмотрим систему 13 при $u_t \in \mathbb{R}^2$. Для неё справедливо следующее определение.

Определение 15. *Бифуркация положения равновесия, соответствующая появлению собственных значений* $\mu_1 = \overline{\mu_2}, \quad |\mu_1| = |\mu_2| = 1$, *называется бифуркацией Неймарка—Сакера.*

Из определения следует, что при прохождении параметром r бифуркационного значения происходит смена устойчивости неподвижной точки. Из 2.3, можем заметить, что бифуркационное значение $r = \frac{4}{3}$. При $r < \frac{4}{3}$ особая точка v_1^* устойчива, а при $r > \frac{4}{3}$ она становится неустойчивой. Исходя из теории, при прохождении параметром значения $\frac{4}{3}$ в малой окрестности точки u_1^* должно происходить рождение замкнутой инвариантной кривой. Проверим это с помощью графического представления фазового портрета в системе MatLab.

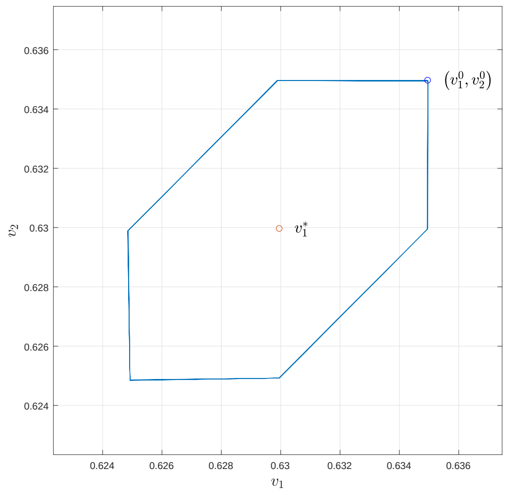

Рис. 12: Фазовый портрет при $r = \frac{4}{3}$

Получили несколько замкнутых траекторий, расположенных очень близко друг к другу. Теперь рассмотрим как изменятся траектории при небольшом изменении параметра. Пусть $\epsilon = 0.005$.

Заметим, что на *Рис.*13 траектории приближаются к точке u_1^*, это естественно, так как при уменьшении параметра особая точка становится устойчивой. Аналогично на *Рис.*14 при увеличении параметра траектории удаляютя от особой точки, так как она неустойчива. Глядя на графики, можем сказать, что замкнутые траектории не сохранились, значит инвариантные кривые неустойчивы.

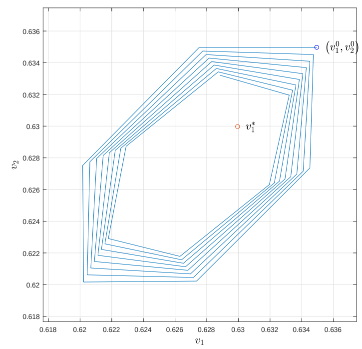

Рис. 13: Фазовый портрет при отклонении параметра $r = \frac{4}{3} - \epsilon$

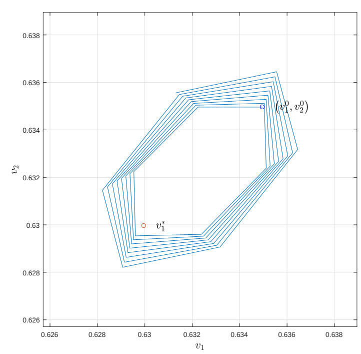

Рис. 14: Фазовый портрет при отклонении параметра $r = \frac{4}{3} + \epsilon$

3 Исследование нелинейной динамической системы с непрерывным временем на плоскости

3.1 Постановка задачи

Для анализа предлагается следующая нелинейная динамическая система с непрерывным временем:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{ax^2}{N+x} - bxy, \\ \dot{y} = -cy + dxy, \end{cases} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2_+; \tag{16}$$

В ходе исследования системы 16 необходимо:

1. Дать биологическую интерпретацию характеристик системы;
2. Ввести новые безразмерные переменные, максимально уменьшив число входящих параметров. Выбрать два свободных параметра. Если число параметров больше двух, то считать остальные параметры фиксированными;
3. Найти неподвижные точки системы и исследовать их характер в зависимости от значений параметров. Результаты исследования представить в виде параметрического портрета системы;
4. Для каждой характерной области параметрического портрета построить фазовый портрет. Дать характеристику поведения системы в каждом из этих случаев;
5. Исследовать возможность возникновения предельного цикла. В положительном случае найти соответствующее первое ляпуновское число. Исследовать характер предельного цикла;
6. Дать биологическую интерпретацию полученным результатам.

3.2 Биологическая интерпретация характеристик системы

Система 16 является системой типа «хищник-жертва». В общем случае, модель описывается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(x) - B(x,y), \\ \dot{v} = -C(y) + D(x,y). \end{cases} \tag{17}$$

Здесь x, y — численности жертв и хищников соответственно, $A(x)$ — функция, описывающая размножение жертв при отсутствии хищников, $C(y)$ — функция, описывающая вымирание хищников при отсутствии жертв, функция $B(x,y)$ описывает выедание жертв хищниками, $D(x,y)$ — эффективность потребления жертв хищниками.
В нашем случае в функции $A(x) = \frac{ax^2}{N+x}$ учитывается нелинейность размножения жертв при малой численности популяции, вызванная, например, отсутствием достаточного количества брачных пар.
Обычно считается, что функции $B(x,y)$, $D(x,y)$ можно представить в виде:

$$B(x,y) = B_1(x)\, B_2(y), \quad D(x,y) = D_1(x)\, D_2(y).$$

Функция $B_1(x)$ называется трофической функцией хищника. В нашей системе $B_1(x) = bx$ — линейная функция. Функция $B_2(y) = y$ описывает зависимость скорости выедания жертвы от плотности популяции хищника. Тогда

$$B(x,y) = yB_1(x).$$

Можно объяснить такой вид зависимости исключением из рассмотрения конкуренции хищников за жертв. Естественно предположить, что отсутствие конкуренции означает малую

плотность популяции хищников.
Функция $D_1(x) = x$ пропорциональна $B_1(x)$, а $D_2(y) = dy$. Это значит, что кэффициент переработки хищником пищи в собственную биомассу постоянен, то есть

$$D(x,y) = \frac{d}{b} y B_1(x).$$

Функция $C(y)$ отвечает за вымирание хищников при отсутсвии популяции жертв. В нашем случае $C(y) = cy$, то есть зависимость от численности хищников линейная.

3.3 Введение безразмерных переменных

Введём замену пременных $t = T\tau$, $x = Ap(\tau)$, $y = Bq(\tau)$. Здесь T, A, B — положительные постоянные. Далее можем записать:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{T} \cdot \frac{d}{d\tau}.$$

Тогда систему 16 можно записать в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{A}{T}\dot{p} = \dfrac{aA^2p^2}{N + Ap} - bABpq, \\ \dfrac{B}{T}\dot{q} = -cBq + dABpq. \end{cases}$$

Упростим оба выражения системы:

$$\begin{cases} \dot{p} = \dfrac{ap^2}{\dfrac{N}{A} + p} T - bBTpq, \\ \dot{q} = -cTq + dTApq. \end{cases}$$

Пусть теперь

$$T = \frac{1}{a}, \quad B = \frac{a}{b}, \quad A = \frac{a}{d}.$$

Тогда система будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{p} = \dfrac{p^2}{\dfrac{Nd}{a} + p} - pq, \\ \dot{q} = -\dfrac{c}{a}q + pq. \end{cases}$$

Обозначим

$$\gamma = \frac{Nd}{a} > 0, \quad \mu = \frac{c}{a} > 0.$$

Переобозначим $p \leftrightarrow x$, $q \leftrightarrow y$. Тогда получим систему с привычными переменными:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{x^2}{\gamma + x} - xy, \\ \dot{y} = -\mu y + xy, \end{cases} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2_+, \quad \gamma > 0, \quad \mu > 0. \tag{18}$$

3.4 Исследование неподвижных точек и характера их устойчивости

Рассмотрим систему, определённую в области $D \subset \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} \dot{x} = f\left(x\right), \quad x \in D, \\ x\left(0\right) = x^0. \end{cases} \tag{19}$$

Определение 16. *Точку пространства $a \in D$ такую, что $f\left(a\right) = 0$, называют положением равновесия, или особой точкой системы 19.*

Тогда для нахождения особых точек системы 18 необходимо решить следующую систему:

$$\begin{cases} x\left(\dfrac{x}{\gamma + x} - y\right) = 0, \\ y\left(x - \mu\right) = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Очевидно, точка $(0, 0)$ является решением системы 20. Далее считаем $x \neq 0$, $y \neq 0$. Тогда система 20 преобразуется к виду:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\gamma + x} = y, \\ x = \mu. \end{cases} \tag{21}$$

Отсюда легко находим вторую особую точку $\left(\mu, \dfrac{\mu}{\gamma + \mu}\right)$.
Таким образом, система 18 содержит две неподвижные точки:

$$O\left(0, 0\right), \quad A\left(\mu, \frac{\mu}{\gamma + \mu}\right).$$

Теперь перейдём к исследованию характера устойчивости особых точек. Обозначим через λ_i собственные значения матрицы Якоби системы 19

Теорема 3 (Ляпунова—Пуанкаре)**.** *Нулевое положение равновесия системы 19 является асимптотически устойчивым, если $\operatorname{Re}\lambda_i < 0, \quad i = 1, ..., n$. Если существует $\lambda_j : \operatorname{Re}\lambda_j > 0, \quad j \in \{1, ..., n\}$, то нулевое положение равновесия является неустойчивым. Если существует $\lambda_j : \operatorname{Re}\lambda_j = 0, \quad j \in \{1, ..., n\}$, то о характере устойчивости положения равновесия ничего сказать нельзя, и требуются дополнительные исследования.*

Для начала найдём матрицу Якоби для системы 18:

$$J\left(x, y\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2x\left(\gamma + x\right) - x^2}{\left(\gamma + x\right)^2} - y & -x \\ \\ y & -\mu + x \end{pmatrix} \tag{22}$$

1. Посчитаем значения матрицы Якоби в точке O:

$$J\left(0, 0\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим характеристический многочлен полученной матрицы:

$$\mathcal{X} = -\lambda\left(-\mu - \lambda\right) = \lambda\left(\mu + \lambda\right).$$

Теперь можем найти собственные значения:

$$\mathcal{X} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -\mu.$$

По *Теореме* 3 ввиду того, что $\lambda_1 = 0$, можем сделать вывод, что о характере устойчивости нулевого положения ничего сказать нельзя.

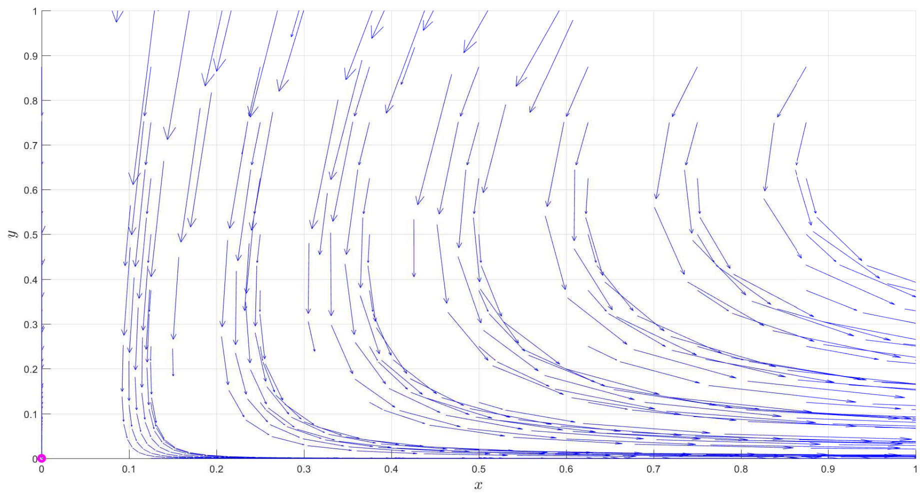

Рис. 15: Фазовый портрет при $\mu = 1.2$, $\gamma = 0.5$

На *Рис.* 15 представлен пример фазового портрета для исследования точки O. Заметим, что о характере её устойчивости ничего сказать нельзя, так как очень много траекторий отдаляются от неё, однако существуют и такие траектории, которые входят в нулевую точку.

2. Теперь исследуем характер устойчивости второй особой точки A. Посчитаем значение матрицы Якоби в этой точке:

$$J\left(\mu, \frac{\mu}{\gamma+\mu}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\gamma\mu}{(\gamma+\mu)^2} & -\mu \\ \dfrac{\mu}{\gamma+\mu} & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим характеристический многочлен полученной матрицы:

$$\mathcal{X} = -\lambda\left(\frac{\gamma\mu}{(\gamma+\mu)^2} - \lambda\right) + \frac{\mu^2}{\gamma+\mu} = \lambda^2 - \frac{\gamma\mu}{(\gamma+\mu)^2}\lambda + \frac{\mu^2}{\gamma+\mu}.$$

Таким обазом, чтобы найти собственные значения матрицы Якоби, необходимо решить следующее квадратное уравнение относительно λ:

$$\lambda^2(\gamma+\mu)^2 - \gamma\mu\lambda + \mu^2(\gamma+\mu) = 0.$$

Посчитаем дискриминант:

$$D = \gamma^2\mu^2 - 4\mu^2(\gamma+\mu)^3.$$

Ввиду того, что параметры системы положительны, то есть $\mu > 0$, $\gamma > 0$, можно сказать, что $D < \gamma^2\mu^2$. Теперь запишем корни уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\gamma\mu \pm \sqrt{D}}{2(\gamma+\mu)^2} \tag{23}$$

Можно заметить, что в зависимости от значения дискриминанта рассмотрение устойчивости особой точки разбивается еще на два случая.

(a) Пусть $D \geqslant 0$:

$$\gamma^2\mu^2 - 4\mu^2\left(\gamma+\mu\right)^3 \geqslant 0,$$
$$\gamma^2 \geqslant 4\left(\gamma+\mu\right)^3,$$
$$\gamma^{\frac{2}{3}} \geqslant \sqrt[3]{4}\left(\gamma+\mu\right),$$
$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\gamma^{\frac{2}{3}} - \gamma \geqslant \mu. \tag{24}$$

Ранее показали, что $D < \gamma^2\mu^2$, значит в этом случае оба корня λ_1, λ_2 — вещественные положительные числа.

Определение 17. *В случае, когда $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ и $\lambda_1\lambda_2 > 0$, положение равновесия называется узлом.*

Так как $\operatorname{Re}\lambda_1 > 0$, $\operatorname{Re}\lambda_2 > 0$, то по *Теореме* 3 полученное положение равновесия является неустойчивым.
Таким образом, особая точка A является неустойчивым узлом.

(b) Пусть теперь $D < 0$. Аналогично предыдущему случаю получим, что

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\gamma^{\frac{2}{3}} - \gamma < \mu. \tag{25}$$

В этом случае корни уравнения $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$, также они являются комплексносопряжёнными. Причём ввиду положительности параметров системы получим:

$$\operatorname{Re}\lambda_{1,2} = \frac{\gamma\mu}{2\left(\gamma+\mu\right)^2} > 0.$$

Определение 18. *Положение равновесия называется фокусом, если $\overline{\lambda_1} = \lambda_2$, $\operatorname{Re}\lambda_1 \neq 0$.*

Так как $\operatorname{Re}\lambda_1 > 0$, $\operatorname{Re}\lambda_2 > 0$, то по *Теореме* 3 полученное положение равновесия является неустойчивым.
Таким образом, особая точка A является неустойчивым фокусом.

Для более удобного анализа построим параметрический портрет системы на плоскости (γ, μ).

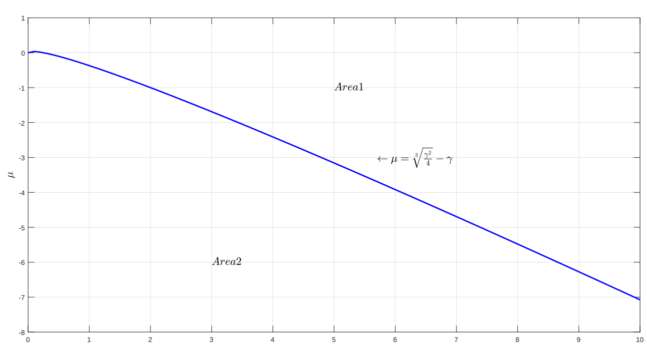

Рис. 16: Параметрический портрет системы

По *Рис.* 16 замечаем, что параметрическая плоскость делится на две части. Первая область соответствует случаю, когда точка A — неустойчивый фокус. Вторая область соотвествует случаю, когда A — неустойчивый узел. Заметим, что большая часть графика находится в области $\mu < 0$, но при рассмотрении системы 18 мы полагали значения параметров положительными. Значит нам подходит только та часть параметрического портрета где $\mu > 0$.

3.5 Построение фазовых портретов системы

Фазовый портрет в окрестности точки O построен на *Рис.* 15. Нас будут интересовать фазовые портеры в окрестности точки A. В 3.4 мы узнали, что положение равновесия является либо узлом, либо фокусом в зависимости от значений параметров. Также эти наблюдения отражены на *Рис.* 16.

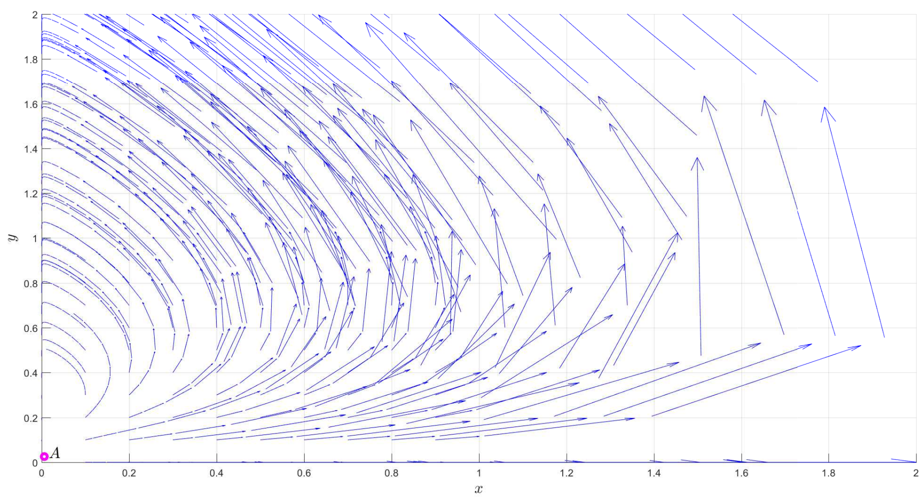

Рис. 17: Фазовый портрет системы при $\mu = 0.06$, $\gamma = 0.23$

По *Рис.* 17 становится понятно, что точка $A\,(0.06, 0.207)$ — неустойчивый узел при данных значениях параметров. Убедимся в этом, подставив значения μ, γ в неравенство 24:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}} 0.23^{\frac{2}{3}} - 0.23 \approx 0.0065 > 0.06.$$

Таким образом, при значениях параметров из второй области параметрического портрета действительно получим неустойчивый узел.

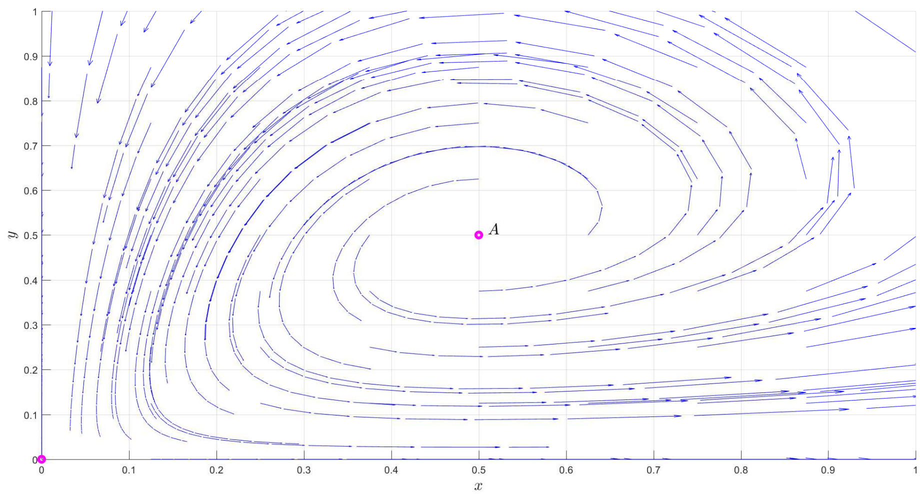

Рис. 18: Фазовый портрет системы при $\mu = 0.5$, $\gamma = 0.5$

На *Рис.* 18 точка $A\,(0.5, 0.5)$ является неустойчивым фокусом. Убедимся в этом, подставив данные значения параметров в неравенство 25:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}} 0.5^{\frac{2}{3}} - 0.5 \approx -0.103 < 0.5.$$

Таким образом, для параметров из первой области параметрического портрета особая точка — неустойчивый фокус.

3.6 Исследование предельных циклов

Определение 19. *Кривая* Γ *— предельный цикл системы 19, если*

1. Γ *— траектория системы 19,*
2. Γ *— замкнутая кривая,*
3. *В малой окрестности* Γ *нет других замкнутых траекторий системы.*

Определение 20. *Бифуркация положения равновесия, соответствующая появлению собственных чисел* $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$, *называется бифуркацией Пуанкаре—Андронова—Хопфа или бифуркацией рождения цикла.*

В 3.4 получили комплексные собственные значения только при рассмотрении неустойчивого фокуса. Однако было отмечено, что $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} > 0$ ввиду положительности значений параметров. Таким образом, в рассматриваемой задаче 18 нет бифуркации Пуанкаре—Андронова—Хопфа, а следовательно нет предельных циклов.

3.7 Биологическая интерпретация полученных результатов

В самом начале исследования мы перешли от исходной системы к новой с помощью замены переменных:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{x^2}{\gamma + x} - xy, \\ \dot{y} = -\mu y + xy, \end{cases} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2_+, \quad \gamma > 0, \quad \mu > 0.$$

Здесь $\gamma = \dfrac{Nd}{a} > 0, \quad \mu = \dfrac{c}{a} > 0.$
Заметим, что биологическая интерпретация не изменилась:

1. Функция, отвечающая за размножение жертв так и осталась нелинейной. Причём за счёт N в знаменателе она описывает нелинейность при малой численности популяции.

2. Функция, описывающая вымирание хищников осталась линейной, изменилась лишь скорость вымирания. Она также пропорциональна скорости вымирания хищников в первоначальной и системе.

3. Трофическая функция осталась линейной. Скорость выедания жертвы осталась прежней.

4. Кэффициент переработки хищником пищи в собственную биомассу остался постоянным.

В 3.4 выявили, что ненулевое положение равновесия может быть фокусом или узлом, причём в обоих случаях особые точки неустойчивы. Это значит, что возможны два варианта развития популяций жертв и хищников. Ввиду неустойчивости при малых изменениях параметров системы траектории будут изменяться. Рассмотрим подробнее каждый случай:

1. Рассмотрим случай, проиллюстрированный на *Рис.* 18. Жертвы быстро размножаются при малом числе хищников. Далее при большом числе жертв, число хищников начинает быстро расти, что логично, так как они ничинают выедать больше жертв. В связи с этим численность жертв начинает уменьшаться, после чего и количество хищников сокращается. Такой же принцип повторяется дальше. Полученная интерпретация удовлетворяет простейшим биологическим представлениям о взаимодействии хищников и жертв.

2. Рассмотрим случай, изображённый на *Рис.* 17. Сначала число жертв стремительно возрастает до какого-то значения. После этого численность хищников начинает быстро увеличиваться, а число жертв быстро уменьшаться, это связано с тем, что хищники начинают выедать большее число жертв. Этот процесс происходит до момента вымирания жертв, после чего вымирают и хищники.

Важно отметить, что ранее было выделено также нулевое положение равновесия, причём оно было устойчивым для некоторых траекторий. Нулевая особая точка соответсвует вымиранию обоих видов.

Список литературы

[1] *https://sawiki.cs.msu.ru/index.php/Неподвижные точки системы.*

[2] *https://sawiki.cs.msu.ru/index.php/Бифуркационная диаграмма.*

[3] Абрамова В. В. *Лекции по динамическим системам и биоматематике*, 2024.

[4] Братусь А. С., Новожилов А. С., Платонов А. П. *Динамические системы и модели биологии*, 2011.