



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Линейная задача быстродействия»

Студент 315 группы
А. А. Анашкина

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

1 Постановка задачи

Задана линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = Ax + Bu + f, \quad t \in [t_0, +\infty).$$

Здесь $x, f \in \mathbb{R}^2$, $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $u \in \mathbb{R}^2$. На значения управляющих параметров u наложено поточечное ограничение: $u \in \mathcal{P}$. Пусть \mathcal{X}_0 — начальное множество значений фазового вектора, \mathcal{X}_1 — целевое множество значений фазового вектора. Необходимо решить следующую задачу быстродействия:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + f, \\ x(t_0) \in \mathcal{X}_0, \\ u \in \mathcal{P}, \quad u = u(t), \\ x(t_1) \in \mathcal{X}_1, \quad t_1 \geq t_0, \\ \mathcal{J}[u(\cdot)] = t_1 - t_0 \rightarrow \inf\{u(\cdot)\}. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь t_0 — фиксированный момент времени. Также известны множества, для которых необходимо вычислить опорные функции и опорные множества:

$$\mathcal{X}_0 = \{x_0\},$$

$$\mathcal{P} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + \sigma x_2^2 \leq \zeta, \sigma x_1^2 + x_2^2 \leq \zeta\}, \quad \sigma, \zeta > 0,$$

$$\mathcal{X}_1 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1 - \alpha| + |x_2 - \beta| \leq \gamma\}, \quad \alpha, \beta, \gamma > 0.$$

Также необходимо написать программу в среде MatLab, обладающую минимальным пользовательским интерфейсом, позволяющим ввести все параметры системы ОДУ, а также параметры численного метода. Она должна корректно определять, разрешима ли задача быстродействия, и если разрешима, то должно быть выведено приближённое время быстродействия:

$$T = t_1 - t_0 > 0.$$

Программа должна иметь возможность отображать все необходимые пользователю графики.

2 Теория, необходимая для решения задачи

2.1 Принцип максимума Понтрягина

Рассмотрим линейную задачу быстродействия 1.

Определение 1. *Оптимальной парой будем называть $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$, удовлетворяющую всем условиям линейной задачи быстродействия.*

Теорема 1. *Пусть $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ — оптимальная пара на $[t_0, t_1]$, являющаяся решением задачи быстродействия. Тогда существует функция $\psi(t)$ такая, что $\psi(t) \not\equiv 0$, $\dot{\psi} = -A^T \psi$, $\psi \in \mathbb{R}^2$. Выполняются условия:*

Условие максимума:

$$\langle \psi(t), Bu^*(t) \rangle = \rho(\psi(t) | B\mathcal{P}) \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (2)$$

Условие трансверсальности на левом конце:

$$\langle \psi(t_0), x^*(t_0) \rangle = \rho(\psi(t_0) | \mathcal{X}_0). \quad (3)$$

Условие трансверсальности на правом конце:

$$\langle -\psi(t_1), x^*(t_1) \rangle = \rho(-\psi(t_1) | \mathcal{X}_1). \quad (4)$$

2.2 Опорные функции

Определение 2. Введём скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ векторов $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ в \mathbb{R}^n :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Определение 3. Пусть $Z \subseteq \mathbb{R}^n$, тогда опорной функцией множества Z будем называть функцию $\rho(l \mid Z): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, такую что:

$$\rho(l \mid Z) = \begin{cases} \sup\{\langle l, z \rangle \mid z \in Z\}, & Z \neq \emptyset, \\ -\infty, & Z = \emptyset. \end{cases}$$

Свойство 1 (Положительная однородность).

$$\rho(\alpha l \mid Z) = \alpha \rho(l \mid Z), \quad \forall \alpha > 0, \quad \forall l \in \mathbb{R}^n.$$

Свойство 2 (Аддитивность).

$$\rho(l \mid Z_1 + Z_2) = \rho(l \mid Z_1) + \rho(l \mid Z_2), \quad \forall Z_1, Z_2 \neq \emptyset,$$

где сумма понимается в смысле Минковского. В частности, если $Z_2 = \{z_2\}$ — множество из одной точки, то $\rho(l \mid Z_1 + Z_2) = \rho(l \mid Z_1) + \langle l, z_2 \rangle$.

Данные для анализа множества являются компактами, поэтому будем рассматривать следующую задачу оптимизации:

$f(x, y)$ — функция двух переменных,

$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \psi(x, y) \leq 0\} \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} f(x_0, y_0) \rightarrow \max, \\ \psi(x_0, y_0) \leq 0. \end{cases}$$

Метод множителей Лагранжа Метод множителей Лагранжа состоит в том, что для отыскания условного экстремума составляют функцию Лагранжа: $F(x, y) = f(x, y) + \lambda \psi(x, y)$. Необходимые условия экстремума задаются системой уравнений, из которых определяются стационарные точки:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \\ \psi(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

Достаточным условием, из которого можно выяснить характер экстремума, служит знак d^2F . Если в стационарной точке $d^2F < 0$, то $f(x, y)$ имеет в точке (x_0, y_0) условный максимум.

2.3 Вычисления для начального множества значений

Рассмотрим $\mathcal{X}_0 = \{x_0\}$ — одноточечное множество. По определению можем найти его опорную функцию:

$$\rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) = \langle \ell, x_0 \rangle. \quad (5)$$

2.4 Вычисления для целевого множества значений

Рассмотрим $\mathcal{X}_1 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1 - \alpha| + |x_2 - \beta| \leq \gamma\}$, $\alpha, \beta, \gamma > 0$. Это ромб с центром в точке (α, β) и длиной полудиагонали γ . Рассмотрим $K_0^{2,2}$ — ромб с центром в нуле и диагоналями длины 2. По определению можно сказать, что:

$$\rho(l \mid K_0^{2,2}) = \max\{l_1, l_2, -l_1, -l_2\} = \max\{|l_1|, |l_2|\}.$$

Положим $c = (\alpha, \beta)$. Тогда используя свойство 1 и свойство 2 получим:

$$\rho(l \mid \mathcal{X}_1) = \langle l, c \rangle + \gamma \max\{|l_1|, |l_2|\}. \quad (6)$$

Таким образом, из геометрической интерпретации опорного множества можно сделать вывод, что оно содержит точки, являющиеся вершинами ромба, то есть $(\alpha, \beta - \gamma), (\alpha + \gamma, \beta), (\alpha, \beta + \gamma), (\alpha - \gamma, \beta)$.

2.5 Вычисления для множества ограничений на управление

Рассмотрим $\mathcal{P} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + \sigma x_2^2 \leq \zeta, \sigma x_1^2 + x_2^2 \leq \zeta\}$, $\sigma, \zeta > 0$. Это множество представляет собой пересечение двух эллипсов с центром в точке $(0, 0)$. Заметим, что множество \mathcal{P} симметрично относительно осей Ox_1 и Ox_2 . Поэтому далее будем рассматривать множество при $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$. Рассчитаем опорную функцию для множества $\{(x_1, x_2) : x_1^2 + \sigma x_2^2 = \zeta\}$ с помощью метода Лагранжа.

$$\mathcal{L} = \ell_1 x_1 + \ell_2 x_2 + \lambda (x_1^2 + \sigma x_2^2 - \zeta),$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \ell_1 + 2\lambda x_1 = 0.$$

Отсюда получаем:

$$x_1 = -\frac{\ell_1}{2\lambda}. \quad (7)$$

Аналогично дифференцируем \mathcal{L} по переменной x_2 и выражаем x_2 :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = \ell_2 + 2\sigma\lambda x_2 = 0.$$

$$x_2 = -\frac{\ell_2}{2\sigma\lambda} \quad (8)$$

Так же дифференцируем \mathcal{L} по переменной λ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x_1^2 + \sigma x_2^2 - \zeta = 0. \quad (9)$$

Подставим в 9 выражения 7 и 8:

$$\frac{\ell_1^2}{4\lambda^2} + \frac{\sigma\ell_2^2}{4\sigma^2\lambda^2} - \zeta = 0,$$

$$-4\sigma\lambda^2\zeta + \sigma\ell_1^2 + \ell_2^2 = 0.$$

Отсюда выражаем λ . Выбираем решение $\lambda < 0$, так как $x_1 > 0, x_2 > 0$:

$$\lambda = -\sqrt{\frac{\sigma\ell_1^2 + \ell_2^2}{4\sigma\zeta}} = -\sqrt{\frac{\ell_1^2}{4\zeta} + \frac{\ell_2^2}{4\sigma\zeta}}.$$

Подставим полученное значение в 7, 8:

$$\begin{cases} x_1 = \ell_1 \sqrt{\frac{\sigma\zeta}{\sigma\ell_1^2 + \ell_2^2}}, \\ x_2 = \frac{\ell_2}{\sigma} \sqrt{\frac{\sigma\zeta}{\sigma\ell_1^2 + \ell_2^2}}. \end{cases} \quad (10)$$

Теперь по определению можем найти опорную функцию множества:

$$\rho_1 = \ell_1 x_1 + \ell_2 x_2 = \sqrt{\zeta\ell_1^2 + \frac{\zeta}{\sigma}\ell_2^2}. \quad (11)$$

Аналогично находим опорную функцию для второго эллипса $\{(x_1, x_2) : \sigma x_1^2 + x_2^2 = \zeta\}$:

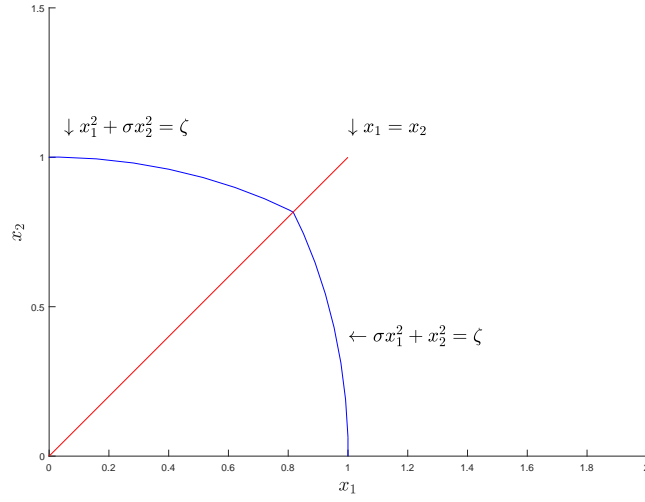
$$\rho_2 = \ell_1 x_1 + \ell_2 x_2 = \sqrt{\frac{\zeta}{\sigma}\ell_1^2 + \zeta\ell_2^2}. \quad (12)$$

Рассмотрев Рис.1а, понимаем, что точка пересечения эллипсов играет важную роль при вычислении опорной функции множества. Определим её координаты, решив следующую систему:

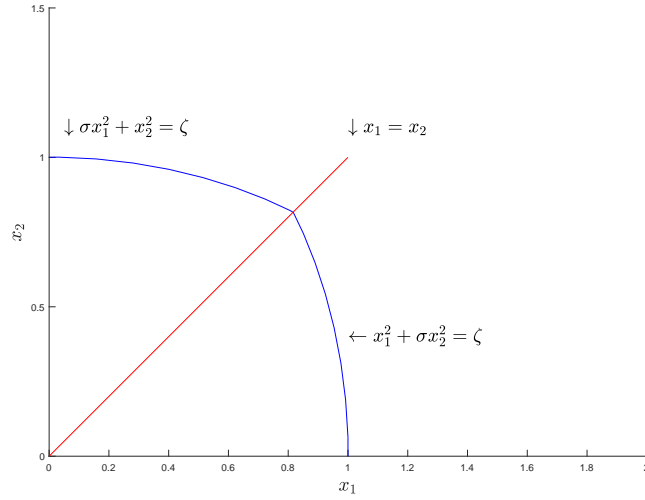
$$\begin{cases} x_1^2 + \sigma x_2^2 = \zeta, \\ x_2^2 + \sigma x_1^2 = \zeta. \end{cases} \quad (13)$$

Отсюда получаем, что:

$$\begin{cases} x_1^0 = \pm \sqrt{\frac{\zeta}{1+\sigma}}, \\ x_2^0 = \pm \sqrt{\frac{\zeta}{1+\sigma}}. \end{cases} \quad (14)$$



(a) $\sigma > 1$



(b) $0 < \sigma < 1$

Рис. 1: Графическое представление множества \mathcal{P}

Рассмотрим случай $\sigma > 1$. Заметим, что значение опорной функции зависит от расположения рассматриваемой точки относительно прямой $x_1 = x_2$. Тогда выше прямой $x_1 = x_2$ граница множества представляет собой дугу эллипса $x_1^2 + \sigma x_2^2 = \zeta$, а ниже прямой $x_1^2 + \sigma x_2^2 = \zeta$. Пояснением к этому служит Рис1а. Тогда:

$$x_1 > x_2 \Rightarrow \frac{l_2}{l_1} < \frac{1}{\sigma} \Rightarrow \rho = \rho_2,$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{l_2}{l_1} > \sigma \Rightarrow \rho = \rho_1.$$

Итак, при $\sigma > 1$ получим:

$$\rho(\ell, \mathcal{P}) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\zeta}{\sigma} \ell_1^2 + \zeta \ell_2^2}, & \frac{|\ell_2|}{|\ell_1|} < \frac{1}{\sigma}, \\ \sqrt{\zeta \ell_1^2 + \frac{\zeta}{\sigma} \ell_2^2}, & \frac{|\ell_2|}{|\ell_1|} > \sigma, \\ \sqrt{\frac{\zeta}{1+\sigma}} (|\ell_1| + |\ell_2|), & \frac{1}{\sigma} \leq \frac{|\ell_2|}{|\ell_1|} \leq \sigma. \end{cases} \quad (15)$$

Запишем также соответствующее значение опорного вектора:

$$\begin{cases} x_1^* = \frac{\ell_1}{\sigma} \sqrt{\frac{\sigma \zeta}{\ell_1^2 + \sigma \ell_2^2}}, \\ x_2^* = \ell_2 \sqrt{\frac{\sigma \zeta}{\ell_1^2 + \sigma \ell_2^2}}, \end{cases} \quad \frac{|\ell_2|}{|\ell_1|} < \frac{1}{\sigma}; \quad (16)$$

$$\begin{cases} x_1^* = \ell_1 \sqrt{\frac{\sigma \zeta}{\sigma \ell_1^2 + \ell_2^2}}, \\ x_2^* = \frac{\ell_2}{\sigma} \sqrt{\frac{\sigma \zeta}{\sigma \ell_1^2 + \ell_2^2}}, \end{cases} \quad \frac{|\ell_2|}{|\ell_1|} > \sigma; \quad (17)$$

$$\begin{cases} x_1^* = \sqrt{\frac{\zeta}{1+\sigma}} \frac{|\ell_1|}{\ell_1}, \\ x_2^* = \sqrt{\frac{\zeta}{1+\sigma}} \frac{|\ell_2|}{\ell_2}. \end{cases} \quad \frac{1}{\sigma} \leq \frac{|\ell_2|}{|\ell_1|} \leq \sigma. \quad (18)$$

Рассмотрим случай $\sigma < 1$. Теперь выше прямой $x_1 = x_2$ располагается граница эллипса $\sigma x_1^2 + x_2^2 = \zeta$. Пояснением к этому служит 1b. Аналогично рассуждениям выше получим следующую опорную функцию:

$$\rho(\ell, \mathcal{P}) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\zeta}{\sigma} \ell_1^2 + \zeta \ell_2^2}, & \frac{|\ell_2|}{|\ell_1|} > \frac{1}{\sigma}, \\ \sqrt{\zeta \ell_1^2 + \frac{\zeta}{\sigma} \ell_2^2}, & \frac{|\ell_2|}{|\ell_1|} < \sigma, \\ \sqrt{\frac{\zeta}{1+\sigma}} (|\ell_1| + |\ell_2|), & \sigma \leq \frac{|\ell_2|}{|\ell_1|} \leq \frac{1}{\sigma}. \end{cases} \quad (19)$$

Опорные векторы выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} x_1^* = \frac{\ell_1}{\sigma} \sqrt{\frac{\sigma \zeta}{\ell_1^2 + \sigma \ell_2^2}}, \\ x_2^* = \ell_2 \sqrt{\frac{\sigma \zeta}{\ell_1^2 + \sigma \ell_2^2}}, \end{cases} \quad \frac{|\ell_2|}{|\ell_1|} > \frac{1}{\sigma}; \quad (20)$$

$$\begin{cases} x_1^* = \ell_1 \sqrt{\frac{\sigma \zeta}{\sigma \ell_1^2 + \ell_2^2}}, \\ x_2^* = \frac{\ell_2}{\sigma} \sqrt{\frac{\sigma \zeta}{\sigma \ell_1^2 + \ell_2^2}}. \end{cases} \quad \frac{|\ell_2|}{|\ell_1|} < \sigma; \quad (21)$$

$$\begin{cases} x_1^* = \sqrt{\frac{\zeta}{1 + \sigma}} \frac{|\ell_1|}{\ell_1}, \\ x_2^* = \sqrt{\frac{\zeta}{1 + \sigma}} \frac{|\ell_2|}{\ell_2}. \end{cases} \quad \sigma \leq \frac{|\ell_2|}{|\ell_1|} \leq \frac{1}{\sigma}. \quad (22)$$

3 Описание численного алгоритма

3.1 Алгоритм решения

1. Осуществляем перебор начального условия сопряжённой системы $\psi(t_0)$ по единичной окружности.
2. Решаем сопряжённую систему $\dot{\psi} = -A^T \psi$ с найденным начальным значением $\psi(t_0)$.
3. Используя условие максимума 2, находим $u(t)$ как опорный вектор множества \mathcal{P} в направлении $B^T \psi(t)$.
4. Находим $x(t)$, решив дифференциальное уравнение $\dot{x} = Ax + Bu + f$ с начальным условием $x(t_0)$.
5. С помощью перебора по $\psi(t_0)$ находим минимальное время t^* перехода от множества \mathcal{X}_0 ко множеству \mathcal{X}_1 . Таким образом, находим оптимальную пару $(x^*(t), u^*(t))$.

3.2 Замечания к решению

1. В случае, когда матрица B является вырожденной или нулевой, используем сингулярное разложение матрицы и заменяем нулевые собственные значения малой величиной, заданной как параметр.
2. Ошибку решения вычисляем, используя условие трансверсальности на правом конце 4, по формуле $\delta = |\rho(-\psi(t_1) | \mathcal{X}_1) - \langle -\psi(t_1), x^*(t_1) \rangle|$.
3. После первого запуска программы с фиксированными параметрами получаем минимальное значение времени t^* . Далее пользователь может нажать на кнопку улучшения результатов. Тогда за верхнюю оценку времени быстрогодействия принимается t^* , между каждыми двумя уже известными $\psi(t_0)$ добавляются новые значения, и для них производится расчет по уже известному алгоритму. Таким образом, пересчёт использует и не изменяет ранее полученные результаты.

4 Примеры работы алгоритма

4.1 Пример 1

Ниже представлены значения параметров и матриц, необходимые для решения задачи.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$t_0 = 0, \quad t_1 = 0.5, \quad X_0 = (1, 0), \quad \alpha = 2, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 1, \quad \eta = 1, \quad \sigma = 1.$$

Число итераций равно 100.

При данных значениях параметров получили $t^* = 0.4370$, $\delta = 0.0052$.

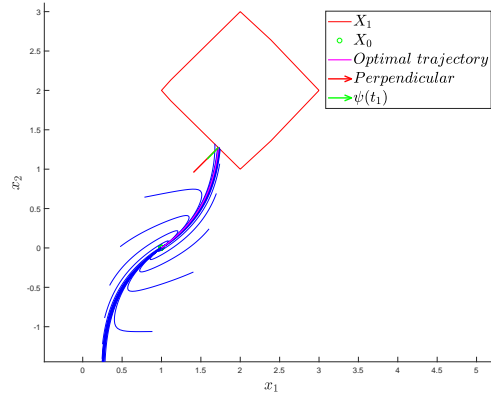


Рис. 2: $x_2(x_1)$

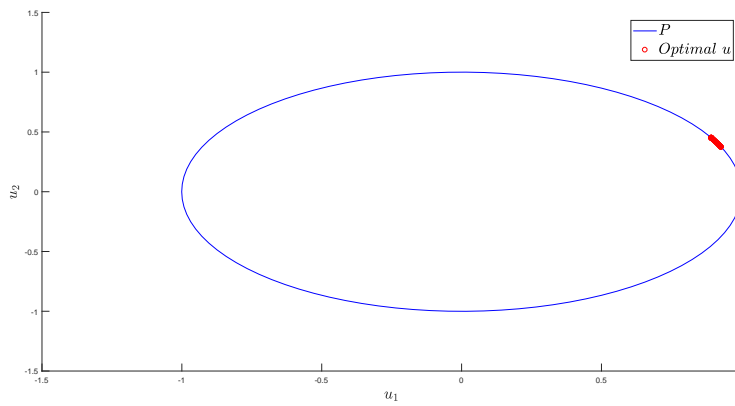
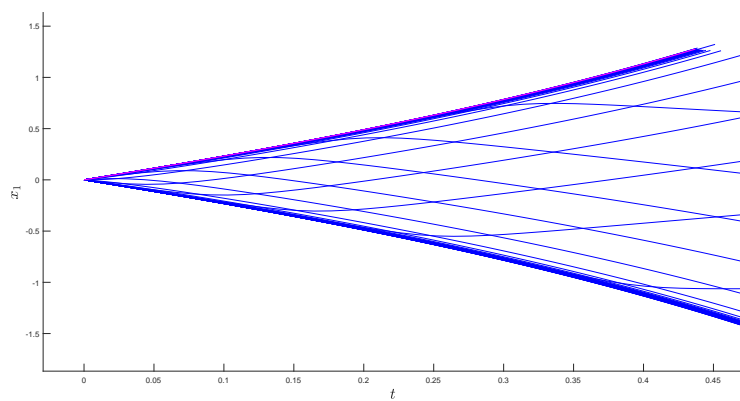
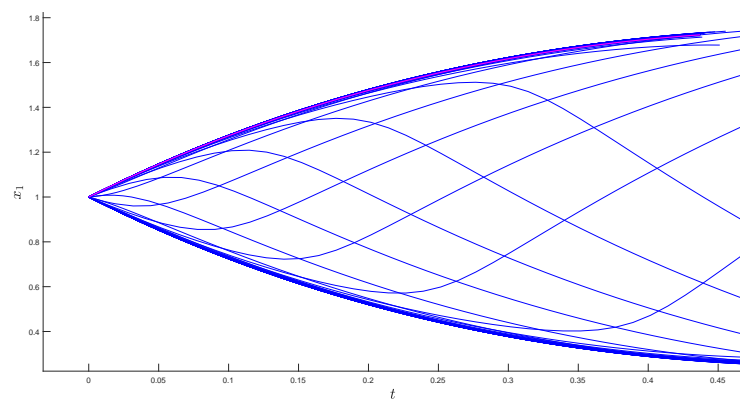


Рис. 3: $u_2(u_1)$

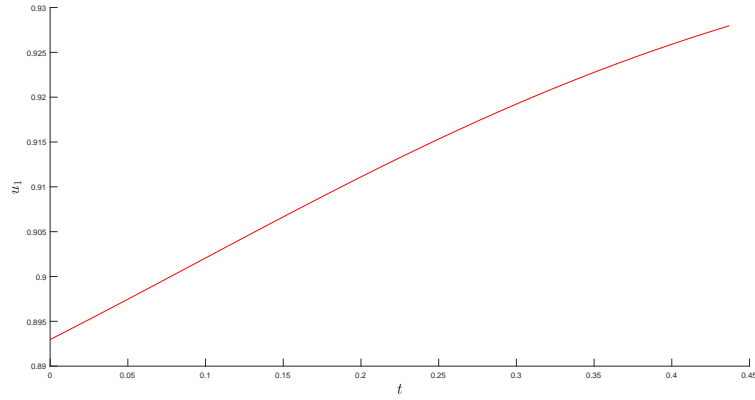


(a) $x_1(t)$

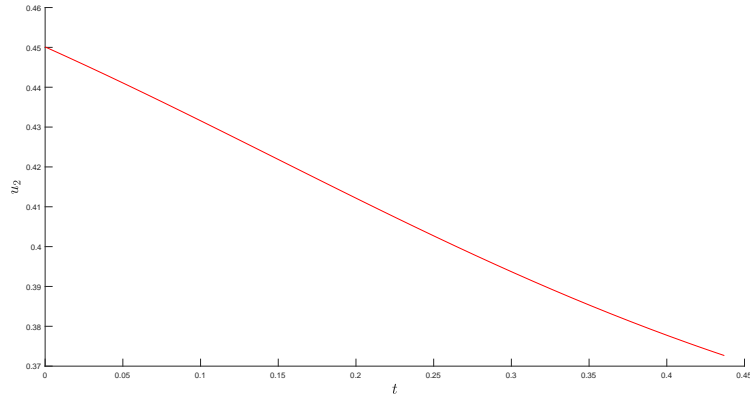


(b) $x_2(t)$

Рис. 4: Графики $x(t)$



(a) $u_1(t)$



(b) $u_2(t)$

Рис. 5: Графики $u(t)$

4.2 Пример 2

Рассмотрим пример, в котором множество \mathcal{X}_0 находится очень близко к границе множества \mathcal{X}_1 . Ниже представлены значения параметров и матриц, необходимые для решения задачи.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$t_0 = 0, \quad t_1 = 0.5, \quad \mathcal{X}_0 = (3, 1.9), \quad \alpha = 2, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 1, \quad \eta = 0.5, \quad \sigma = 4.$$

Число итераций равно 100.

При данных значениях параметров получили $t^* = 0.0125$, $\delta = 0.0020$. Для удобства график увеличен.

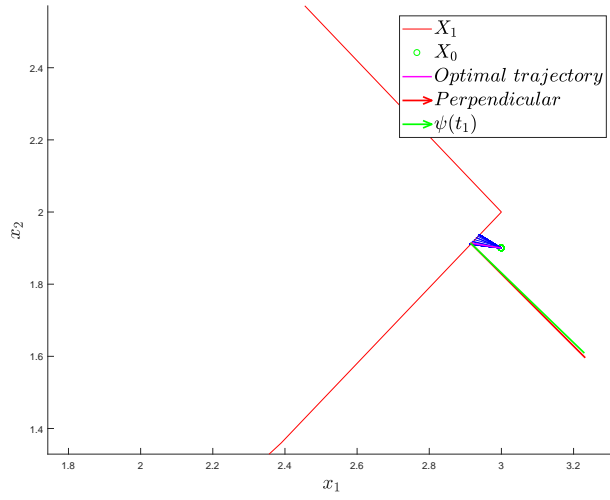


Рис. 6: $x_2(x_1)$

4.3 Пример 3

Рассмотрим пример, иллюстрирующий разрывную зависимость t^* от параметров системы.

$$A = \begin{pmatrix} -10 & -1 \\ 0.5 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$t_0 = 0, \quad t_1 = 0.7, \quad \mathcal{X}_0 = (4.5, 2.3), \quad \alpha = 2, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 1, \quad \eta = 1, \quad \sigma = 3.$$

Число итераций равно 100.

При данных значениях параметров получили $t^* = 0.2107$, $\delta = 0.2749$.

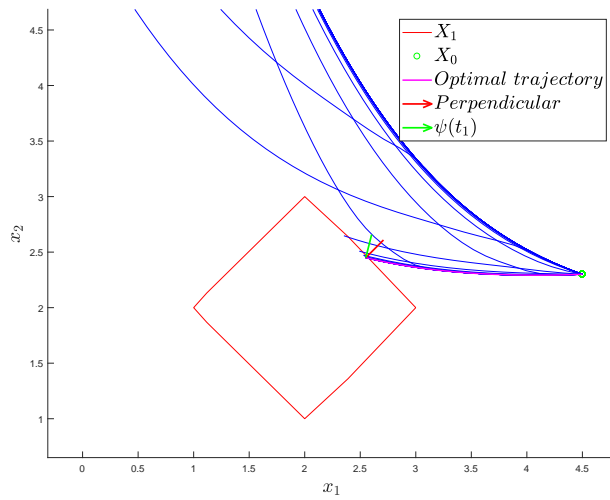


Рис. 7: $x_2(x_1)$, $\mathcal{X}_0 = (4.5, 2.3)$

Далее пусть $\mathcal{X}_0 = (4.5, 2.2)$. Теперь получим $t^* = 0.1892$, $\delta = 0.2798$.

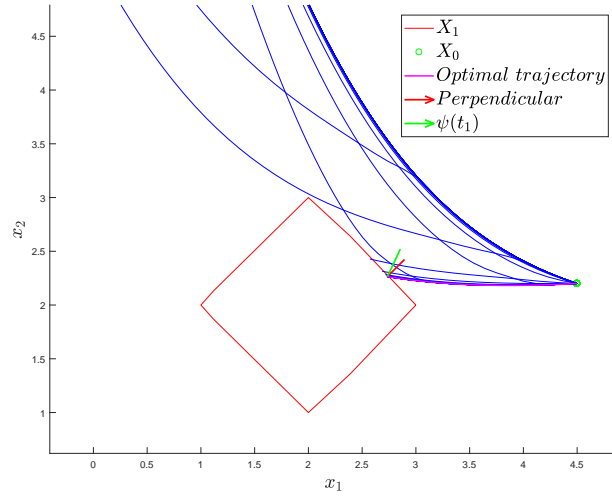


Рис. 8: $x_2(x_1)$, $\mathcal{X}_0 = (4.5, 2.2)$

Таким образом, убедились в том, что t^* не зависит непрерывно от параметров системы.

4.4 Пример 4

Теперь рассмотрим, как присходит улучшение решения. Ниже представлены значения параметров и матриц, необходимые для решения задачи.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

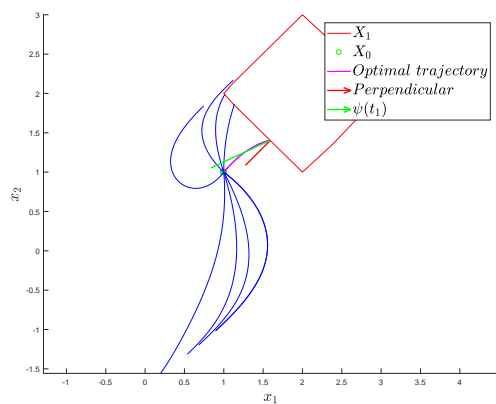
$$t_0 = 0, \quad t_1 = 0.15, \quad \mathcal{X}_0 = (3, 0.5), \quad \alpha = 2, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 1, \quad \eta = 2, \quad \sigma = 1.$$

Число итераций равно 20.

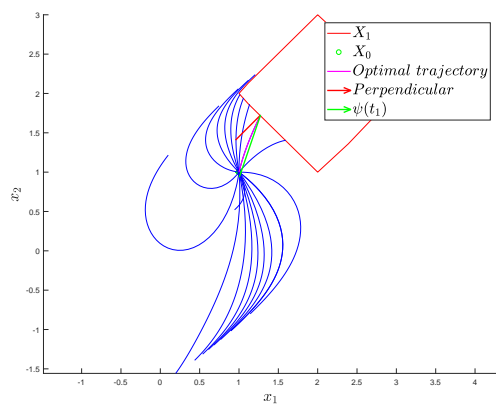
При первом запуске программы получили $t^* = 0.3587$, $\delta = 0.2031$.

После локального улучшения получили $t^* = 0.3551$, $\delta = 0.3156$.

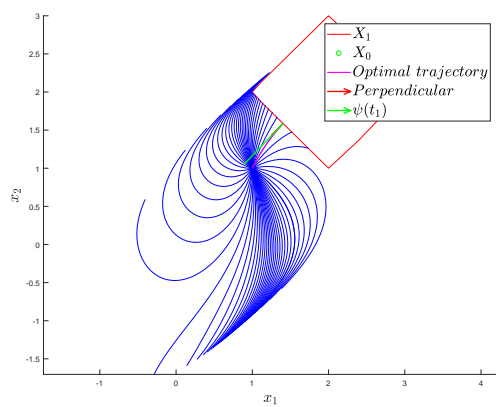
Далее увеличим число итераций до 100 и запустим программу. Получим $t^* = 0.3325$, $\delta = 0.0249$.



(a) Результаты до улучшения.



(b) Локальное улучшение.



(c) Глобальное улучшение.

Рис. 9: Результаты улучшения решения.

Результаты доказывают, что время быстродействия и ошибка уменьшились. Таким образом, проиллюстрировали глобальное и локальное улучшение решения.

Список литературы

- [1] [https://sawiki.cs.msu.ru/index.php/Опорная функция множества](https://sawiki.cs.msu.ru/index.php/Опорная_функция_множества).
- [2] Арутюнов А. В. *Лекции по выпуклому и многозначному анализу*. ФИЗМАТ-ЛИТ, 2014.