Исследование экономического поведения домашних хозяйств на основе модели рамсеевского типа

Анашкина Анастасия Алексеевна

Кафедра системного анализа

e-mail: 1303nastia@gmail.com

Научный руководитель — акад. РАН, д.ф.-м.н. проф. Шананин Александр Алексеевич

Проблемы неравенства в распределении богатства, доходов и расходов в последние десятилетия приобретают такую же актуальность, как и сто лет назад. Тома Пикетти утверждает, что такие явления, как социальные лифты, сокращение неравенства в доходах и расходах являются особенностью XX века и в современных условиях неравенство будет определяться возрастающим неравенством в распределении богатства, характерным для XVIII и XIX веков. Филипп Агийона и Джеффри Уильямсон, так же обсуждают влияние возрастания неравенства на замедление темпов экономического роста мировой экономики. Борисов и Пахнин рассматривают модели экономического роста с неоднородным дисконтированием и проводят эмпирические исследования, которые указывают на зависимость ставки дисконтирования от неравенства в распределении доходов.

Начало формирования теории экономического роста относят к 1920 годам, когда английский математик Рамсей опубликовал работу [1], в которой выдвинул гипотезу о социальном разделении общества агентов на два класса: агентов с наименьшей ставкой дисконтирования, которые увеличивают свои сбережения и в долгосрочной перспективе владеют всем капиталом, и агентов с высокой ставкой дисконтирования, которые в пределе живут на уровне заработной платы.

На данный момент существует множество работ, посвящённых анализу гипотезы Рамсея в различных экономических моделях. Например, в статье А. А. Шананина и Г. С. Парастаева [2] рассматривается модель совершенного рынка, причём доказано, что гипотеза Рамсея выполняется.

Целью представленной работы является анализ гипотезы Рамсея в условиях несовершенного рынка, когда ставка по потребительскому кредиту превышает ставку по депозиту:

$$r_L > r_D > 0.$$

Моделирование поведения экономических агентов. Будем рассматривать модель экономического поведения репрезентативного рационального домашнего хозяйства в форме задачи оптимального управления на конечном временном горизонте $t \in [0, T]$. Из рациональности поведения агента следует, что он не осуществляет займы по потребительскому кредиту и не сберегает в форме депозитов одновременно. Кроме того, предполагаем, что агент не может предсказать изменение экономической конъюнктуры и принимает решения, основываясь на том, что его зарплата w и ставки по кредиту r_L и депозиту r_D остаются неизменными.

В каждый момент времени t финансовое состояние агента описывается его капиталом $k\left(t\right)$. Полагаем, что капитал изменяется за счёт поступления заработной платы, взаимодействия с рынками потребительского кредитования и сбережений в форме депозитов, а также расходов на потребление $c\left(t\right) \geqslant 0$. Таким образом, динамика капитала агента описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{k}\left(t\right) = r_D\left(k\right)_+ - r_L\left(-k\right)_+ + w - c\left(t\right)$$

с начальным условием

$$k\left(0\right) = k_0,$$

где $\left(a\right)_+ = \max\{a, 0\}$.

Агент стремится максимизировать дисконтированное потребление с коэффициентом дисконтирования $\rho > 0$ и постоянным отвращением к риску $1-\beta$, где $\beta \in \left(0, 1\right)$, управляя потреблением $c\left(t\right)$:

$$\int_0^T e^{-\rho s}\left(c\left(s\right)\right)^\beta \mathrm{d}s \to \max_{c(\cdot)}.$$

Также важно учесть, что в конце концов агент должен расплатиться со своими кредитами, то есть

$$k\left(T\right) > 0.$$

Таким образом, задача оптимального управления на конечном временном горизонте формулируется в следующем виде

$$\int_0^T e^{-\rho s}\left(c\left(s\right)\right)^\beta \mathrm{d}s \to \max_{c(\cdot)}. \tag{1}$$

$$\dot{k}\left(t\right) = r_D\left(k\right)_+ - r_L\left(-k\right)_+ + w - c\left(t\right), \quad k\left(0\right) = k_0, \quad t \in \left[0, T\right], \tag{2}$$

$$c\left(t\right) \geqslant 0, \quad t \in \left[0, T\right]. \tag{3}$$

$$k\left(T\right) \geqslant 0. \tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть* $w + r_L k_0 > 0$, $T > \left(\dfrac{1}{r_L}\ln\left(\dfrac{w}{w + k_0 r_L}\right)\right)_+$. *Тогда задача оптимального управления* (1), (2), (3), (4) *имеет решение.*

Замечание. *Чтобы обеспечить выполнение условия* $k\left(T\right) > 0$, *необходимо выполнение ограничения*

$$k > -\frac{w}{r_L}.$$

Отметим, что данное неравенство не зависит от времени. При $T \to +\infty$ *это условие является достаточным. В случае, если неравенство нарушается, то домашнее хозяйство не может расплатиться с кредитами при сохранении текущей экономической конъюнктуры, и образуется финансовая пирамида.*

Синтез оптимального управления. Обратим внимание, что правая часть дифференциального уравнения (4) негладкая. В таких случаях применяется принцип максимума Понтрягина в форме Ф. Кларка [3].

Теорема 2. *Если* $\{c(t), k(t) \,|t \in [0,T]\}$ *— решение задачи оптимального управления* (1), (2), (3), (4), *то существует абсолютно непрерывная функция* $\{\psi(t) \,|t \in [0,T]\}$, *такая что*

$$c(t) = \left(\frac{\psi(t)}{\beta}\right)^{\dfrac{1}{\beta - 1}}.$$

1. Если $k(t) > 0$, *то*

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} = r_D k(t) + w - \left(\frac{\psi(t)}{\beta}\right)^{\dfrac{1}{\beta - 1}},$$

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = \psi(\rho - r_D).$$

2. Если $k(t) < 0$, *то*

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} = r_L k(t) + w - \left(\frac{\psi(t)}{\beta}\right)^{\dfrac{1}{\beta - 1}},$$

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = \psi(\rho - r_L).$$

Кроме того, выполняется условие трансверсальности

$$k(T) = 0.$$

Для того, чтобы проанализировать гипотезу Рамсея, необходимо найти решение задачи оптимального управления (1), (2), (3), (4) в форме синтеза. Это можно сделать, устремив T к бесконечности. Таким образом, будем рассматривать задачу оптимального управления на бесконечном временном горизонте $t \in [0, +\infty)$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\rho s} (c(s))^{\beta} \,\mathrm{d}s \to \max_{c(\cdot)}, \tag{5}$$

$$\dot{k}(t) = r_D (k)_+ - r_L (-k)_+ + w - c(t), \quad k(0) = k_0, \tag{6}$$

$$c(t) \geqslant 0, \tag{7}$$

$$k(t) \geqslant -\frac{w}{r_L}. \tag{8}$$

Теорема 3. *Решение задачи оптимального управления* (5), (6), (7), (8) *в форме синтеза определяется следующими соотношениями:*

1. Если $\rho > r_L$, то

$$c(k,\rho)=\begin{cases}\dfrac{\frac{\rho}{r_L}-\beta}{1-\beta}\left(r_Lk+w\right), & k\leqslant 0\\ w\hat{x}(k,\rho), & k>0,\end{cases}$$

где $\hat{x}(k,\rho)$ — решение уравнения

$$-\frac{k}{w}-\frac{1}{r_D}+\frac{1-\beta}{\rho-\beta r_D}x+x^{-\frac{r_D(1-\beta)}{\rho-r_D}}\left(\frac{\frac{\rho}{r_L}-\beta}{1-\beta}\right)^{\frac{r_D(1-\beta)}{\rho-r_D}}\frac{1}{r_D}\left(1-\frac{\frac{\rho}{r_L}-\beta}{\frac{\rho}{r_D}-\beta}\right)=0. \quad (9)$$

2. Если $\rho < r_D$,то

$$c(k,\rho)=\begin{cases}w\hat{x}(k,\rho), & k<0,\\ \dfrac{\frac{\rho}{r_D}-\beta}{1-\beta}\left(r_Dk+w\right), & k\geqslant 0\end{cases}$$

где $\hat{x}(k,\rho)$ — решение уравнения

$$-\frac{k}{w}-\frac{1}{r_L}+\frac{1-\beta}{\rho-\beta r_L}x+x^{\frac{r_L(1-\beta)}{r_L-\rho}}\left(\frac{\frac{\rho}{r_D}-\beta}{1-\beta}\right)^{-\frac{r_L(1-\beta)}{r_L-\rho}}\frac{1}{r_L}\left(1-\frac{\frac{\rho}{r_D}-\beta}{\frac{\rho}{r_L}-\beta}\right)=0. \quad (10)$$

3. Если $r_D \leqslant \rho \leqslant r_L$, то

$$c(k,\rho)=\begin{cases}w\hat{x}_1(k,\rho), & k<0,\\ w, & k=0,\\ w\hat{x}_2(k,\rho), & k>0,\end{cases}$$

где $\hat{x}_1(k,\rho), \hat{x}_2(k,\rho)$ — решения уравнений 10, 9 соответственно.

Замечание. *Доказано, что каждое из уравнений* (9), (10) *имеет единственный корень в рассматриваемой области.*

Модель социальной динамики. Гипотезу Рамсея можно рассматривать как утверждение о справедливости принципа естественного отбора по Фишеру в популяции из H домохозяйств.

Предполагаем, что в начальный момент времени $t_0 = 0$ известна величина сбережений каждого агента, причём

$$k_0^h \geqslant 0, \quad h \in \{1,\dots,H\}.$$

Введём обозначение общих сбережений всех домохозяйств

$$K=\sum_{h=1}^{H} r\left(k^h\right)k^h+wH,$$

где

$$r\left(k^h\right)=\begin{cases}r_L, & k^h\leqslant 0,\\ r_D, & k^h>0.\end{cases}$$

Для анализа гипотезы Рамсея важна зависимость синтеза задачи оптимального управления не только от капитала, но и от ставки дисконтирования. Чтобы понять, как изменяется ρ, обратимся к гипотезе Дьюзенберри [4]: потребление агента зависит не только от его дохода, но и от его дохода относительно других агентов. Таким образом, получим выражение:

$$\rho^h\left(k^h, K\right) = r\left(k^h\right)\varphi\left(\frac{r\left(k_0^h\right)\cdot k_0^h + w}{K}\right).$$

Определение. *Функция* $\varphi\left(\cdot\right) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *удовлетворяет следующим условиям:*

— *Непрерывна по Липшицу, монотонно убывает на* $[0, 1]$,

— $\varphi\left(x\right) = \varphi\left(1\right), \quad x \geqslant 1,$

— $\varphi\left(x\right) = \varphi\left(0\right), \quad x \leqslant 0,$

— $\beta \leqslant \varphi\left(1\right) < \varphi\left(\frac{1}{H}\right) \leqslant 1 < \varphi\left(0\right),$

— *вогнута на* $[0, 1]$.

Теперь, используя синтез, найденный в предыдущем разделе, можем описать динамику капитала каждого агента в популяции в форме задачи Коши

$$\frac{\mathrm{d}k^h}{\mathrm{d}t} = r\left(k^h\right)\cdot k^h + w - c\left(k^h, \rho^h\left(k^h, K\right)\right), \quad k^h\left(0\right) = k_0^h.$$

Для качественного анализа выполнимости гипотезы Рамсея на несовершенном рынке кредитов и депозитов было разработано численное решение. В качестве платформы, на которой разрабатывалась программа, была взята платформа MATLAB.

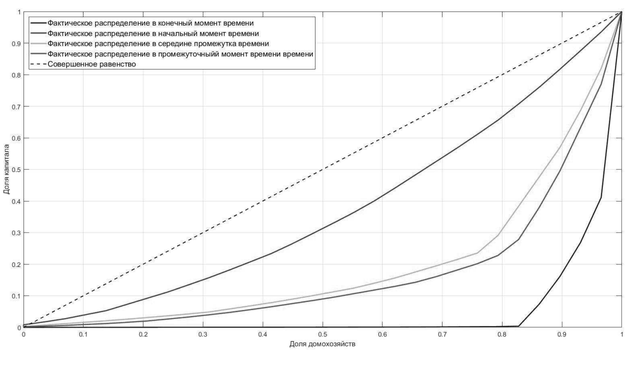

Рис. 1: Рис. 1: Грифик кривой Лоренца

Наиболее информативным является график кривой Лоренца [5], изображённый на рис. 1. Рассмотрим нижний график, соответствующий конечному моменту времени. Видно, что он разделяется на три сегмента, каждый из которых соответствует социальному классу:

1. Пологая часть графика означает, что большая доля населения владеет нулевым капиталом, и соответствует классу «бедных».

2. Следующая часть отклонена от оси Ox и соответсвует «среднему» классу.
3. Последняя часть графика практически вертикальна, то есть малая доля населения сосредотачивает в своих руках практически весь капитал, что соответствует классу «богатых».

Также был проанализирован индекс Джини. Вычисления показали, что значение индекса увеличивается со временем, то есть уровень неравенства в рассматриваемой популяции экономических агентов растёт.

Было интересно пронаблюдать, как изменяется график кривой Лоренца при увеличении значения параметра r_L. Вычисления показали, что при увеличении r_L, пологая часть графика сокращается, то есть уменьшается класс «бедных», за счёт чего увеличивается «средний» класс. Интересно, что при $r_L \to +\infty$ в модели выделяется только два социальных класса. Этот случай соответствует модели Бэккера, исследованной в статье [2], где доказана гипотеза Рамсея о бинарной стратификации.

Таким образом, численное решение помогло установить, что в рамках рассматриваемой модели гипотеза Рамсея о бинарной стратификации общества экономических агентов не подтверждается. В результате вычисления ставки дисконтирования, основанном на гипотезе Дьюзенберри, наблюдается формирование трёх устойчивых социальных классов.

Литература

[1] Ramsey F. P. A mathematical theory of savings // The Economic Journal. 1928. Vol.152, N 38, P.543–559.

[2] Parastaev G. S., Shananin A. A. Ramsey's conjecture of social stratification as Fisher's selection principle // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2024. Vol.64, N 12, P.2952–2981.

[3] Clarke F. H., Ledyaev Yu. S., Stern R. J., Wolenski P. R. Nonsmooth analysis and control theory // N. Y., Springer–Verlag. 1998. P.276.

[4] Duesemberry J. S. Income, saving and the theory of consumer behavior // Harvard University Press. 1949.

[5] Lorenz M. O. Methods of measuring the concentration of wealth // Publications of the American Statistical Association. 1905. P.209–219.