Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Построение множества достижимости нелинейной системы»

Студент 315 группы
А. А. Анашкина

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2024

Содержание

1 Постановка задачи

Задано обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x} + \beta x - 2\sin\left(3x^3\right) + x\dot{x} = u, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}$. На возможные значения управляющего параметра u наложено ограничение: $u \in [-\alpha, \alpha], \alpha > 0$. Задан начальный момент времени $t_0 = 0$ и начальная позиция $x(t_0) = 0, \dot{x}(t_0) = 0$. Необходимо построить множество достижимости $\mathcal{X}(t, t_0, x(t_0), \dot{x}(t_0))$ в классе программных управлений в заданный момент времени $T \geqslant t_0$, а также исследовать его свойства. В ходе решения задачи необходимо:

1. Написать в среде MatLab функцию `[X, Y, X1, Y1, X2, T2] = reachset(alpha, beta, t)`, которая по заданным параметрам $\alpha > 0, \beta, t >= t_0$ рассчитывает приближённо множество достижимости управляемой системы $\mathcal{X}(t, t_0, x(t_0), \dot{x}(t_0))$. Массивы `X, Y` содержат упорядоченные координаты точек многоугольника, образующего границу искомого множества. Вторая пара массивов `X1, Y1` содержит координаты линий переключения оптимального управления. Массив `X2` содержит координаты x стационарных точек замкнутой системы. При этом в массиве `T2` должны запоминаться номера подсистем, для которых были найдены эти точки.

2. Реализовать визуализацию результатов вычислений, полученных при помощи функции `reachset` при заданных параметрах α, β, t.

3. Реализовать функцию `reachsetdyn(alpha, beta, t1, t2, N, filename)`, которая, используя функцию `reachset(alpha, beta, t)`, строит множества достижимости для моментов времени $\tau_i = t_1 + \dfrac{(t_2 - t_1)\, i}{N}, i = -, 1, ..., N$. Здесь $t_2 \geqslant t_1 \geqslant t_0$, N — натуральное число.

2 Решение задачи

2.1 Применение принципа максимума Л. С. Понтрягина

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\dot{x}(t) = f(x, u)\,. \tag{2}$$

Здесь $x = (x_1, ..., x_n)^T, f = (f_1, ..., f_n)^T$. Функция f является непрерывной по обеим переменным и непрерыно дифференцируемой по x.

$$u = (u_1, ..., u_m)^T, \quad u(t) \in \mathcal{P},$$

где $\mathcal{P}$ — замкнутое множество.

$$x(t_0) = x^0, \quad x(t_1) = x^1 \in \mathcal{X}.$$

Здесь $\mathcal{X} = \mathcal{X}(t, t_0, x(t_0), \dot{x}(t_0))$ — множество достижимости.
В нашей задаче t_0, t_1, x^0 — фиксированы.
Введём дополнительную координату $x_{n+1} = t$. Тогда нетрудно заметить, что

$$\begin{cases} \dot{x}_{n+1} = 1, \\ x_{n+1} = t_0. \end{cases} \tag{3}$$

Теперь будем рассматривать расширенную систему:

$$\dot{\widetilde{x}}(t) = \widetilde{f}(x, u),$$

где $\widetilde{x} = (x_1, ..., x_n, x_{n+1})^T$, $\widetilde{f} = (f_1, ..., f_n, 1)^T$.
Введём векторы сопряжённых переменных:

$$\psi = (\psi_1, ..., \psi_n)^T,$$

$$\widetilde{\psi} = (\psi_1, ..., \psi_n, \psi_{n+1})^T.$$

Рассмотрим функции Гамильтона—Понтрягина:

$$\widetilde{\mathcal{H}} = \langle \psi, f \rangle + \psi_{n+1},$$

Заметим, что для $\widetilde{\mathcal{H}}$ справедлива гамильтонова система:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial \widetilde{\mathcal{H}}}{\partial \psi} = f(x, u), \\ \dot{\psi} = -\dfrac{\partial \widetilde{\mathcal{H}}}{\partial x}. \end{cases} \tag{4}$$

Также введём обозначение:

$$\widetilde{\mathcal{M}} = \sup_{u \in \mathcal{P}} \widetilde{\mathcal{H}}\left(t, \widetilde{x}, \widetilde{\psi}, u\right),$$

$$\mathcal{M} = \sup_{u \in \mathcal{P}} \mathcal{H}(t, x, \psi, u).$$

Теперь можем сформулировать основную теорему.

Теорема 1 (ПМП для задачи достижимости)**.** *Пусть u^* — некоторое управление в задаче 2, $\widetilde{x}$ — траектория, заданная уравнением $\dot{\widetilde{x}} = \widetilde{f}(\widetilde{x}, u^*)$, причём $\widetilde{x}(t_1)$ лежит на границе множества достижимости $\mathcal{X}$. Тогда существует вектор сопряжённых переменных $\widetilde{\psi}$: $[t_0, t_1] \to \mathbb{R}^{n+1}$ такой, что $\widetilde{\psi} \not\equiv 0$ $\left(\widetilde{\psi} \neq 0\right)$, и выполняются следующие условия:*
Сопряжённая система:

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi^*}{dt} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}\Bigg|_{\substack{x(\cdot) = \widetilde{x}(\cdot), \\ u(\cdot) = u^*(\cdot), \\ \psi(\cdot) = \psi^*(\cdot).}}, \\ \dfrac{d\psi^*_{n+1}}{dt} = -\dfrac{\partial \widetilde{\mathcal{H}}}{\partial t}\Bigg|_{\substack{x(\cdot) = \widetilde{x}(\cdot), \\ u(\cdot) = u^*(\cdot), \\ \psi(\cdot) = \psi^*(\cdot).}}. \end{cases} \tag{5}$$

Условие максимума:

$$\widetilde{\mathcal{H}}\left(t, \widetilde{\psi}^*(t), \widetilde{x}(t), u^*(t)\right) = \sup_{u \in \mathcal{P}} \widetilde{\mathcal{H}}\left(t, \widetilde{\psi}^*(t), \widetilde{x}(t), u(t)\right) = \widetilde{\mathcal{M}}\left(t, \widetilde{\psi}^*(t), \widetilde{x}(t)\right). \tag{6}$$

Условие на гамильтониан:

$$\mathcal{M} \equiv const. \tag{7}$$

Рассмотрим ОДУ
$$\ddot{x} + \beta x - 2\sin\left(3x^3\right) + x\dot{x} = u. \tag{8}$$
Проведём замену $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$. Тогда уравнение 8 преобразуется к системе:
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u + 2\sin\left(3x_1^3\right) - \beta x_1 - x_1 x_2. \end{cases} \tag{9}$$
Запишем функцию Гамильтона—Понтрягина:
$$\mathcal{H} = \psi_1 x_2 + \psi_2\left(2\sin\left(3x_1^3\right) - \beta x_1 - x_1 x_2\right) + u\psi_2. \tag{10}$$
Тогда сопряжённая система выглядит следующим образом:
$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_1} = \psi_2\left(\beta + x_2 - 18x_1^2\cos\left(3x_1^3\right)\right), \\ \dot{\psi}_2 = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_2} = -\psi_1 + x_1\psi_2. \end{cases} \tag{11}$$
Для решения задачи необходимо максимизировать значение функции $\mathcal{H}$. Заметим, что в выражении 10 только последнее слагаемое зависит от управления, значит необходимо рассматривать следующие значения управления:
$$u^* = \begin{cases} \alpha \operatorname{sgn}\psi_2(t), & \psi_2 \neq 0, \\ [-\alpha, \alpha], & \psi_2 = 0. \end{cases} \tag{12}$$
Далее рассмотрим возможен ли особый режим. Если, действительно, $\psi_2 = 0$, то из сопряжённой системы 11 получим, что
$$\dot{\psi}_1 = 0, \quad \dot{\psi}_2 = -\psi_1 = 0$$
Значит $\psi = 0$, что противоречит условию *Теоремы* 1.
Таким образом, особый режим невозможен, значит
$$u^* = \alpha \operatorname{sgn}\psi_2(t).$$
Причём переключения будут происходить в момент, когда $\psi_2(t) = 0$. При данных значениях управления получим:
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = 2\sin\left(3x_1^3\right) - \beta x_1 - x_1 x_2 + \alpha \operatorname{sgn}\psi_2, \\ \dot{\psi}_1 = \psi_2\left(\beta + x_2 - 18x_1^2\cos\left(3x_1^3\right)\right), \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + x_1\psi_2. \end{cases} \tag{13}$$
При подстановке полученного управления в выражение 10 получим гамильтониан:
$$\mathcal{M} = \psi_1 x_2 + \psi_2\left(2\sin\left(3x_1^3\right) - \beta x_1 - x_1 x_2\right) + |\psi_2|.$$
Можем значительно упростить решение задачи, обратив внимание на поведение x_2, ψ_2.

2.2 Применение теоремы о чередовании нулей переменных

Если рассмотреть графики зависимости функций $x_2(t), \psi_2(t)$ от времени, можно заметить, что возможны два варианта:

1. Нули функций совпадают.

2. Нули функций чередуются.

Сформулируем это наблюдение более точно в виде теоремы.

Теорема 2 (О чередовании нулей переменных)**.** *Если существует момент времени* $\tau_1 < \tau_2, \quad [\tau_1, \tau_2] \subseteq [0, t_1]$*, то:*

1. *Если выполнено*
$$\begin{cases} \psi_2(\tau_1) = \psi_2(\tau_2) = 0, \\ x_2(\tau_1) = 0, \end{cases} \tag{14}$$
то $x_2(\tau_2) = 0$.

2. *Если выполнено*
$$\begin{cases} \psi_2(\tau_1) = \psi_2(\tau_2) = 0, \\ x_2(\tau_1) \neq 0, \end{cases} \tag{15}$$
то $x_2(\tau_2) \neq 0$ *и* $\exists \tau \in (\tau_1, \tau_2) : \ x_2(\tau) = 0$.

3. *Если выполнено*
$$\begin{cases} x_2(\tau_1) = x_2(\tau_2) = 0, \\ \psi_2(\tau_1) = 0, \end{cases} \tag{16}$$
то $\psi_2(\tau_2) = 0$.

4. *Если выполнено*
$$\begin{cases} x_2(\tau_1) = x_2(\tau_2) = 0, \\ \psi_2(\tau_1) \neq 0, \end{cases} \tag{17}$$
то $\psi_2(\tau_2) \neq 0$ *и* $\exists \tau \in (\tau_1, \tau_2) : \ \psi_2(\tau) = 0$.

Доказательство. Запишем гамильтониан в виде

$$\mathcal{M} = \psi_1 x_2 - \psi_2 f(x_1, x_2) + |\psi_2|.$$

Ввиду выполнения условий *Теоремы* 1:$\mathcal{M} = const$.

1. Запишем гамильтониан в момент времени τ_1:
$$\mathcal{M} = \psi_1(\tau_1) x_2(\tau_1) - \psi_2(\tau_1) f + |\psi_2(\tau_1)| = \{14\} = 0. \tag{18}$$
Теперь рассмотрим значение гамильтониана в момент времени τ_2:
$$\mathcal{M} = \psi_1(\tau_2) x_2(\tau_2) - \psi_2(\tau_2) f + |\psi_2(\tau_2)| = \{14\} = \psi_1(\tau_2) x_2(\tau_2). \tag{19}$$
Ввиду того, что $\mathcal{M} = const$, можем приравнять значения выражений 18 и 19. Тогда получим
$$\psi_1(\tau_2) x_2(\tau_2) = 0.$$
Из условия *Теоремы* 1 $\psi(\tau_2) \neq 0$, то есть $\psi_1(\tau_2) \neq 0$. Значит
$$x_2(\tau_2) = 0.$$

2. Запишем гамильтониан в момент времени τ_1:

$$\mathcal{M} = \psi_1(\tau_1)\, x_2(\tau_1) - \psi_2(\tau_1)\, f + |\psi_2(\tau_1)| = \{14\} = \psi_1(\tau_1)\, x_2(\tau_1)\,. \tag{20}$$

Теперь рассмотрим значение гамильтониана в момент времени τ_2:

$$\mathcal{M} = \psi_1(\tau_2)\, x_2(\tau_2) - \psi_2(\tau_2)\, f + |\psi_2(\tau_2)| = \{14\} = \psi_1(\tau_2)\, x_2(\tau_2)\,. \tag{21}$$

Ввиду условия *Теоремы* 1: $\psi \neq 0$, значит $\psi_1(\tau_1) \neq 0, \psi_1(\tau_2) \neq 0$. По условию 15 $x_2(\tau_1) \neq 0$. Значит, приравняв значения выраженй 20 и 21, получим, что

$$x_2(\tau_2) \neq 0.$$

Далее без ограничения общности полагаем $\psi_2(\tau) \neq 0\, \forall \tau \in (\tau_1, \tau_2)$. Ввиду того, что ψ_2 — непрерывная функция, получим

$$\dot{\psi}_2(\tau_1)\, \dot{\psi}_2(\tau_2) < 0. \tag{22}$$

Теперь из сопряжённой системы запишем:

$$\dot{\psi}_2(\tau_1) = -\psi_2(\tau_1) + \psi_2(\tau_1)\, \frac{\partial f}{\partial x_2} = \{15\} = -\psi_1(\tau_1)\,,$$

$$\dot{\psi}_2(\tau_2) = -\psi_2(\tau_2) + \psi_2(\tau_2)\, \frac{\partial f}{\partial x_2} = \{15\} = -\psi_1(\tau_2)$$

Значит, с учётом 22 получим

$$\psi_1(\tau_1)\, \psi_1(\tau_2) < 0. \tag{23}$$

Из равенства гамильтонианов

$$\psi_1(\tau_1)\, x_2(\tau_1) = \psi_1(\tau_2)\, x_2(\tau_2) \neq 0.$$

Значит с учётом неравенства 23 $x_2(\tau_1)\, x_2(\tau_2) < 0$. Знаем, что $x_2(t)$ — непрерывная функция, принимающая разные по знаку значения на концах отрезка $[\tau_1, \tau_2]$. Значит по теореме Вейерштрасса $\exists\, \tau \in (\tau_1, \tau_2) :\ x_2(\tau) = 0$.

3. Введём вспомогательную функцию

$$z(t) = \psi_1(t)\, x_2(t) + \psi_2(t)\, \dot{x_2}(t) = \psi_1(t)\, x_2(t) + \psi_2(t)\, (-f + u)\,.$$

Заметим, что функция $z(t)$ является кусочно-непрерывной, так как разрывы могут происходить в моменты переключений. Пусть t_0 — точка непрерывности. Рассмотрим производную $z(t)$ по времени в окрестности точки непрерывности:

$$\frac{dz}{dt} = \psi_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} x_2 + \psi_1(-f+u) + \left(-\psi_1 + \psi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}\right)(-f+u) + \psi_2\left(-\frac{\partial f}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial f}{\partial x_2}(-f+u)\right) = 0.$$

Таким образом, получили, что $z(t)$ — кусочно-постоянная функция.
Так как $u^* = \alpha \operatorname{sgn} \psi_2$, то разрывы могут происходить при $\psi_2 = 0$. Значит если t_0 — момент переключения, то при подстановке в выражение для $z(t)$ получим $z(t_0 - 0) = z(t_0 + 0)$. Значит

$$z(t) = const.$$

Рассмотрим значение функции $z(t)$ в моменты времени τ_1 и τ_2:

$$z(\tau_1) = \psi_1(\tau_1)\, x_2(\tau_1) + \psi_2(\tau_1)\, \dot{x}_2(\tau_1) = \{16\} = 0, \tag{24}$$

$$z(\tau_2) = \psi_1(\tau_2)\, x_2(\tau_2) + \psi_2(\tau_2)\, \dot{x}_2(\tau_2) = \psi_2(\tau_2)\, \dot{x}_2(\tau_2)\,. \tag{25}$$

Ввиду того, что $z(t) = const$, можем приравнять выражения 24 и 25:

$$\psi_2(\tau_2)\, \dot{x}_2(\tau_2) = 0.$$

Так как нули x_2 изолированы, то есть $x_2(\tau) \neq 0$ при $\tau \in (\tau_1, \tau_2)$, то $\dot{x}_2(\tau_2) \neq 0$. Тогда получим

$$\psi_2(\tau_2) = 0.$$

4. Рассмотрим значение функции $z(t)$ в моменты времени τ_1 и τ_2:

$$z(\tau_1) = \psi_1(\tau_1)\, x_2(\tau_1) + \psi_2(\tau_1)\, \dot{x}_2(\tau_1) = \{17\} = \psi_2(\tau_1)\, \dot{x}_2(\tau_1), \tag{26}$$

$$z(\tau_2) = \psi_1(\tau_2)\, x_2(\tau_2) + \psi_2(\tau_2)\, \dot{x}_2(\tau_2) = \{17\} = \psi_2(\tau_2)\, \dot{x}_2(\tau_2). \tag{27}$$

Так как нули функции $x_2(t)$ изолированы, $\dot{x}_2(\tau_1) \neq 0, \dot{x}_2(\tau_2) \neq 0$. По условию 17 $\psi_2(\tau_1) \neq 0$. Значит

$$\psi_2(\tau_1)\, \dot{x}_2(\tau_1) = \psi_2(\tau_2)\, \dot{x}_2(\tau_2) \neq 0.$$

Далее аналогично доказательсту пункта 2 доказывается, что

$$\dot{x}_2(\tau_1)\, \dot{x}_2(\tau_2) < 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_2(\tau_1)\, \psi_2(\tau_2) < 0.$$

Знаем, что функция $\psi_2(t)$ — непрерывная, принимающая разные по знаку значения на концах отрезка $[\tau_1, \tau_2]$. Значит по теореме Вейерштрасса $\exists\, \tau \in (\tau_1, \tau_2) : \ \psi_2(\tau) = 0$.

$\square$

Утверждение 1. *Функция $\psi(t)$ является положительно однородной.*

Доказательство. Рассмотрим систему для сопряжённых переменных:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = \psi_2 \left(\beta + x_2 - 18x_1^2 \cos\left(3x_1^3\right)\right), \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + x_1\psi_2. \end{cases} \tag{28}$$

Подставим в систему 28 вместо $\psi_i(t)$ функцию $\gamma\psi_i(t)$ $\forall i = 1, 2$, где $\gamma > 0$. Тогда сопряженная система принимает вид:

$$\begin{cases} \gamma\dot{\psi}_1 = \gamma\psi_2 \left(\beta + x_2 - 18x_1^2 \cos\left(3x_1^3\right)\right), \\ \gamma\dot{\psi}_2 = -\gamma\psi_1 + x_1\gamma\psi_2. \end{cases}$$

Заметим, что γ сокращается, и мы получаем исходную систему 28. Таким образом, доказали положительную однородность. $\square$

Утверждение 2. *Множество достижимости $\mathcal{X}(t_1) \subseteq \mathcal{X}(t_2)$, $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2$.*

Доказательство. Рассмотрим систему 9 в точке $(0, 0)$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0, \\ \dot{x}_2 = u. \end{cases}$$

Тогда при нулевом значении управления точка $(0, 0)$ является точкой покоя. Далее рассмотрим точку из множества $\mathcal{X}(t_1)$ с управлением $u_1(t)$. Составим управление для некоторых точек из множества $\mathcal{X}(t_2)$ следующим образом:

$$u_2(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, t_2 - t_2], \\ u_1(t - t_2 + t_1), & t \in [t_2 - t_1, t_2]. \end{cases}$$

Теперь нетрудно заметить, что исходная точка из множества $\mathcal{X}(t_1)$ будет также содержаться во множестве $\mathcal{X}(t_2)$. $\square$

Таким образом, по *Утверждению* 2 множество достижимости монотонно растёт со временем. Этот факт значительно поможет нам при дальнейшем исследовании множества достижимости.

Вернёмся к рассмотрению системы 13. По условию задана начальная точка $x_1(0) = 0, x_2(0)$. Разобъём решение задачи на случаи.

1. Пусть $\psi_2(0) = 0$. Тогда по условию *Теоремы* 1 $\psi_1(0) \neq 0$. Ввиду *Утверждения* 1 можем нормировать $\psi_1(0)$:

   (a) Пусть $\psi_1(0) = 1$. Рассмотрим $\tau \in (0, \delta)$, $\delta > 0$. Из сопряженной системы 11:

   $$\dot{\psi}_2 = -\psi_1 + \psi_2 x_1.$$

   Здесь $\psi_1 \approx 1, \psi_2 x_1 \approx 0$. Значит $\dot{\psi}_2 < 0$. Так как $\psi_2(0) = 0$, можно сказать, что $\psi_2(\tau) < 0$. Значит $u^* = -1$ при $\tau \in (0, \delta)$. Этому случаю будет удовлетворять система S_-:

   $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \quad x_1(0) = 0 \\ \dot{x}_2 = 2\sin\left(3x_1^3\right) - \beta x_1 - x_1 x_2 - \alpha, \quad x_2(0) = 0, \\ \dot{\psi}_1 = \psi_2\left(\beta + x_2 - 18x_1^2\cos\left(3x_1^3\right)\right), \quad \psi_1(0) = 1, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + x_1\psi_2, \quad \psi_2(0) = 0. \end{cases} \tag{29}$$

   Проинтегрировав эту систему, можно найти одну из траекторий системы 9. Обозначим участок полученной траектории до пересечения с осью x_2 как W_-.

   (b) Пусть теперь $\psi_1(0) = -1$. Тогда

   $$\dot{\psi}_2 = -\psi_1 + \psi_2 x_1 > 0,$$

   так как $\psi_1 \approx -1, \psi_2 x_1 \approx 0$.

   $$\begin{cases} \dot{\psi}_2 > 0, \\ \psi_2(0) = 0. \end{cases}$$

   Значит $\psi_2(\tau) > 0$ и $u^* = 1$ при $\tau \in (0, \delta)$. Этому случаю удовлетворяет система S_+:

   $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \quad x_1(0) = 0 \\ \dot{x}_2 = 2\sin\left(3x_1^3\right) - \beta x_1 - x_1 x_2 + \alpha, \quad x_2(0) = 0, \\ \dot{\psi}_1 = \psi_2\left(\beta + x_2 - 18x_1^2\cos\left(3x_1^3\right)\right), \quad \psi_1(0) = -1, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + x_1\psi_2, \quad \psi_2(0) = 0. \end{cases} \tag{30}$$

   Интегрируя эту систему, найдём одну из траекторий 9. Обозначим участок трактории до пересечения с осью x_2 как W_+.

   Вспомним, что переключения происходят, когда $\psi_2(\tau) = 0 \, \forall \tau \in [0, t_1]$. Тогда в нашем случае в момент переключения

   $$\begin{cases} \psi_2(0) = \psi_2(\tau) = 0, \\ x_2(0) = 0. \end{cases}$$

   Тогда по *Теореме* 2 $x_2(\tau) = 0$. Таким образом, можем отслеживать моменты переключений управления τ_i за счёт условия:

   $$x_2(\tau_i) = 0.$$

2. Теперь рассмотрим случай, когда $\psi_2(0) \neq 0$. Заметим, что полученная ранее непрерывня кривая $W_+ \cup W_-$ сохранится. В предыдущих пунктах было показано, что кривая пересекает ось x_2 в какой-то момент времени τ. Значит из условий

   $$\begin{cases} x_2(0) = x_2(\tau) = 0, \\ \psi_2(0) \neq 0 \end{cases}$$

по *Теореме* 2 следует, что $\exists\, \tau^1 \in [0, \tau] : \psi_2\left(\tau^1\right) = 0$. Таким образом, существует момент переключения $\tau^1 : x\left(\tau^1\right) \in W_+ \cup W_-$. Дойдя до этой точки, траектория меняется в соотвествии с системами S_+ или S_-. Обозначим полученную кривую как W_+^1 или W_-^1 соотвественно. Так как мы не можем вычислить в какой именно момент произойдёт переключение, необходимо осуществить перебор моментов переключения. В итоге получим $\left(W_+^1 \cup W_+^2 \cup ...\right) \cup \left(W_-^1 \cup W_-^2 \cup ...\right)$. Таким образом, построили картину синтеза.

2.3 Вычисление особых точек

Решив следующую систему, найдём особые точки системы 9:

$$\begin{cases} x_2 = 0, \\ 2\sin\left(3x_1^3\right) - \beta x_1 - x_1 x_2 + u = 0. \end{cases} \tag{31}$$

Решение системы сводится к нахождению корней уравнения

$$\sin\left(3x_1^3\right) - \beta x_1 + u = 0.$$

Заметим, что в нём присутствует параметр, поэтому аналитически найти решения невозможно. Подставив в уравнение значения управления, получим:

$$\sin\left(3x_1^3\right) - \beta x_1 + \alpha = 0.$$

$$\sin\left(3x_1^3\right) - \beta x_1 - \alpha = 0.$$

Рассмотрим подробнее второе уравнение:

$$2\sin\left(3x_1^3\right) = \beta x_1 + \alpha,$$

$$-2 \leqslant 2\sin\left(3x_1^3\right) \leqslant 2.$$

Тогда можем оценить правую часть:

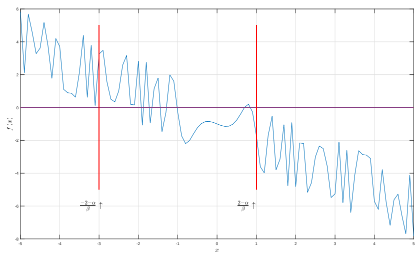
$$-2 \leqslant \beta x_1 + \alpha \leqslant 2,$$

$$\frac{-2-\alpha}{\beta} \leqslant x_1 \leqslant \frac{2-\alpha}{\beta}. \tag{32}$$

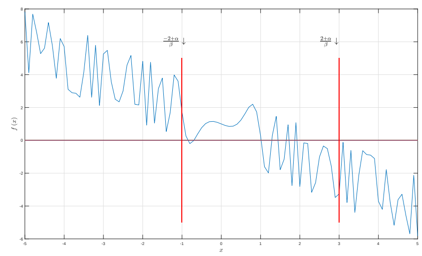
Таким образом,если точка $(x_1^*, 0)$ является особой и $u^* = -\alpha$, то x_1^* удовлетворяет 32. Аналогично можем локализовать корни первого уравнения с управлением $u^* = \alpha$:

$$\frac{-2+\alpha}{\beta} \leqslant x_1 \leqslant \frac{2+\alpha}{\beta}. \tag{33}$$

Ниже приведём графики полученных функций при различных значениях параметра.



(a) $\alpha = -1$



(b) $\alpha = 1$

Рис. 1: Графики функции при $\beta = 1$

Перейдём к исследованию устойчивости особых точек. Запишем Якобиан системы и подставим особую точку $(x_1, 0)$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 18x_1 \cos\left(3x_1^3\right) - \beta & -x_1 \end{pmatrix}$$

Тогда особая точка является устойчивой, если $\operatorname{Tr} A < 0, |A| > 0$. В нашем случае

$$\begin{cases} |A| = \beta - 18x_1^2 \cos\left(3x_1^3\right), \\ \operatorname{Tr} A = -x_1. \end{cases}$$

Значит определить характер устойчивости особой точки можно только при подстановке конкретных значений x_1, β.

3 Алгоритм решения задачи

1. Из точки $(0, 0)$ выпускаем две траектории, соответствующие системам S_+ и S_-.

2. По *Теореме* 2 существуют моменты $\tau_+, \tau_- : x_2(\tau_+) = x_2(\tau_-) = 0$. Строим полученные в предыдущем пункте траектории до этих моментов соотвественно, то есть до обнуления x_2.

3. Осуществляем перебор $\tau^1 \in [0, \tau_+]$ и $\tau^2 \in [0, \tau_-]$. Эти моменты соотвествтуют моментам переключений, то есть $\psi_2\left(\tau^1\right) = \psi_2\left(\tau^2\right) = 0$.

4. Из точки траектории в момент времени τ^1 выпускаем траекторию, удовлетворяющую S_-. Продолжаем её до следующего момента переключения и опять меняем её на S_+ и так далее, пока не закончится время.

5. Аналогичную процедуру проводим для начально й траектории S_+ и момента переключения τ^2.

6. В массивах `X,Y` будем хранить конечные точки всех траекторий, а в массивах `X1, Y1` точки кривой переключений $W_+ \cup W_-$.

7. В конце необходимо удалить самопересечения границы полученного множества путём перебора отрезков из массивов `X, Y`, а также удалить особые точки.

Список литературы

[1] *https://sawiki.cs.msu.ru/index.php/Опорная функция множества.*

[2] Арутюнов А. В. *Лекции по выпуклому и многозначному анализу.* ФИЗМАТ-ЛИТ, 2014.

[3] Артемьева Л. А. *Лекции по методам оптимизации*, 2024.

[4] Чистяков И. А. *Лекции по оптимальному управлению*, 2024.