Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Быстрое преобразование Фурье»

Студент 315 группы
А. А. Анашкина

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2023

1 Постановка задачи

Получить аппроксимацию преобразования Фурье $F(\lambda)$ для функции $f(t)$ при помощи быстрого преобразования Фурье, выбирая различные шаги дискретизации исходной функции и различные окна, ограничивающие область определения $f(t)$. Построить графики $F(\lambda)$.

2 Теория, необходимая для решения задачи

Для решения задачи будем использовать встроенную в систему MATLAB функцию fft. Она находит дискретное проебразование Фурье на $[0, \frac{2\pi}{\Delta_t}]$ функции $f(t)$, заданной на $[0,T]$ с помощью быстрого преобразования Фурье. Здесь $T = N\Delta_t$, N — число отсчётов, Δ_t — шаг дискретизации. Полученная аппроксимация является периодической с периодом $\frac{2\pi}{\Delta_t}$. Пусть функция $f(t)$ задана на $[a,b]$. Нам необходимо получить аппроксимацию преобразования Фурье $F(\lambda)$ на $[c,d]$. Зададим прообраз оконной функции:

$$h(t) = \begin{cases} 1, & t \in [a,b], \\ 0, & t \notin [a,b]. \end{cases}$$

Теперь можем записать формулу для прямого преобразования Фурье:

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)h(t)e^{-i\lambda t}\,dt = \int_a^b f(t)e^{-i\lambda t}\,dt =$$
$$= \left\{ \begin{array}{c} s = t-a \\ ds = dt \end{array} \right\} = \int_0^{b-a} f(s+a)e^{-i\lambda(s+a)}\,ds = e^{-i\lambda a}\int_0^T g(s)e^{-i\lambda s}\,ds \approx$$
$$\approx e^{-i\lambda a}\Delta_t\,\mathrm{fft}(\mathrm{g}(\cdot)),$$

где $g(s) = f(s+a)$.

3 Алгоритм решения задачи

1. Вычисляем $G(\lambda) = \mathrm{fft}(\mathrm{g(s)}), s \in [0, b-a]$. Составим сетку λ с шагом Δ_λ.
2. Достраиваем $G(\cdot)$ с периодом $S = \frac{2\pi}{\Delta_t}$ на $[c,d]$. Для этого необходимо найти k, n: $c \in [kS, (k+1)S], d \in [nS, (n+1)S]$.
3. Строим сетку заново:
$$\lambda_i = kS + \Delta_\lambda i, \quad i = \overline{c_k, mN + c_n},$$
$$c_k = \mathrm{ceil}\,\frac{c-kS}{\Delta_\lambda},$$
$$c_n = \mathrm{floor}\,\frac{d-nS}{\Delta_\lambda}.$$
Получим, что $m = n - k$ — число периодов на отрезке $[c,d]$.
4. Пересчитываем $G(\lambda)$ с учётом c_k, c_n, m.
5. Вычисляем $e^{-i\lambda a}$.
6. Вычисляем $F(\lambda_i) = e^{-i\lambda_i a}\Delta_t G(\lambda_i) \quad i = \overline{c_k, mN + c_n}$.

4 Аналитическое решение задачи

4.1 Первая функция

Необходимо найти образ Фурье функции:

$$f(t) = \frac{\cos(2t) - \cos(t)}{t^2 + 1}.$$

Воспользуемся тем, что функция $f(t)$ — чётная. Значит $Im(F) = 0$:

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2t) - \cos(t)}{t^2 + 1} \cos(\lambda t)\ dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(t(2+\lambda))}{t^2+1}\ dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(t(2-\lambda))}{t^2+1}\ dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(t(1+\lambda))}{t^2+1}\ dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(t(1-\lambda))}{t^2+1}\ dt\right).$$

Запишем $F(\lambda)$ как сумму четырёх интегралов:

$$F(\lambda) = I_1(\lambda) + I_2(\lambda) + I_3(\lambda) + I_4(\lambda). \tag{1}$$

Вычислим $I_1(\lambda)$:

$$I_1(\lambda) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(t(2+\lambda))}{t^2+1}\ dt$$

Введём обозначение:

$$g(t) = \frac{1}{t^2+1} = \frac{1}{(t-i)(t+i)}.$$

Так же представим $\cos(t(2+\lambda))$ в виде:

$$\cos(t(2+\lambda)) \operatorname{Re}\left(e^{it(2+\lambda)}\right).$$

Тогда можно записать:

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \operatorname{Re}\left(e^{it(2+\lambda)}\right) = \pi \operatorname{Re}\left(i \sum_k \operatorname{res}\left[e^{it(2+\lambda)} g(t), t_k\right]\right) =$$

$$= -\frac{\pi}{2} \operatorname{Im}\left(\operatorname{res}\left[e^{it(2+\lambda)} g(t), i\right]\right),$$

при условии, что $2 + \lambda \geqslant 0$. Аналогично получим:

$$I_1 = \frac{\pi}{2} \operatorname{Im}\left(\operatorname{res}\left[e^{it(2+\lambda)} g(t), -i\right]\right),$$

при условии, что $2 + \lambda \leqslant 0$.
В нашем случае t_k являются полюсами первого порядка, поэтому можем посчитать вычеты по формуле:

$$\operatorname{res}\left[e^{it(2+\lambda)} g(t), i\right] = \lim_{t \to i} \frac{e^{it(2+\lambda)}}{t+i} = \frac{e^{-(2+\lambda)}}{2i},$$

$$\operatorname{res}\left[e^{it(2+\lambda)} g(t), -i\right] = \lim_{t \to -i} \frac{e^{it(2+\lambda)}}{t-i} = \frac{e^{2+\lambda}}{-2i}.$$

Получим итоговую формулу для $I_1(\lambda)$:

$$I_1(\lambda) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{4} e^{-(2+\lambda)}, & \lambda > -2, \\ -\dfrac{\pi}{4} e^{2+\lambda}, & \lambda < -2. \end{cases}$$

Перейдём к вычислению $I_2(\lambda)$:

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(t(2-\lambda))}{t^2+1}\,dt$$

Решение аналогично. Сразу рассчитаем вычеты:

$$\operatorname{res}\left[e^{it(2-\lambda)}g(t), i\right] = \lim_{t\to i}\frac{e^{it(2-\lambda)}}{t+i} = \frac{e^{-(2-\lambda)}}{2i},$$

$$\operatorname{res}\left[e^{it(2-\lambda)}g(t), -i\right] = \lim_{t\to -i}\frac{e^{it(2-\lambda)}}{t-i} = \frac{e^{2-\lambda}}{-2i}.$$

Получим итоговую формулу для $I_2(\lambda)$:

$$I_2(\lambda) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{4}e^{-(2-\lambda)}, & \lambda < 2,\\ -\dfrac{\pi}{4}e^{2-\lambda}, & \lambda \geqslant 2.\end{cases}$$

Проведём аналогичные рассчёты для I_3:

$$I_3 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(t(1+\lambda))}{t^2+1}\,dt,$$

$$\operatorname{res}\left[e^{it(1+\lambda)}g(t), i\right] = \lim_{t\to i}\frac{e^{it(1+\lambda)}}{t+i} = \frac{e^{-(1+\lambda)}}{2i},$$

$$\operatorname{res}\left[e^{it(1+\lambda)}g(t), -i\right] = \lim_{t\to -i}\frac{e^{it(1+\lambda)}}{t-i} = \frac{e^{1+\lambda}}{-2i}.$$

Получим итоговую формулу для I_3:

$$I_3(\lambda) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{4}e^{-(1+\lambda)}, & \lambda > -1,\\ -\dfrac{\pi}{4}e^{1+\lambda}, & \lambda \leqslant -1.\end{cases}$$

Аналогично для $I_4(\lambda)$:

$$I_4 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(t(1-\lambda))}{t^2+1}\,dt,$$

$$\operatorname{res}\left[e^{it(1-\lambda)}g(t), i\right] = \lim_{t\to i}\frac{e^{it(1-\lambda)}}{t+i} = \frac{e^{-(1-\lambda)}}{2i},$$

$$\operatorname{res}\left[e^{it(1-\lambda)}g(t), -i\right] = \lim_{t\to -i}\frac{e^{it(1-\lambda)}}{t-i} = \frac{e^{1-\lambda}}{-2i}.$$

Получим итоговую формулу:

$$I_3(\lambda) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{4}e^{-(1-\lambda)}, & \lambda < 1,\\ -\dfrac{\pi}{4}e^{1-\lambda}, & \lambda \geqslant -1.\end{cases}$$

Объединив полученные для I_1, I_2, I_3, I_4, получим искомое решения для $F(\lambda)$:

$$F(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4}(e^{1+\lambda} + e^{-(1-\lambda)} - e^{2+\lambda} - e^{-(2-\lambda)}), & \lambda \leqslant -2,\\ \dfrac{\pi}{4}(e^{1+\lambda} + e^{-(1-\lambda)} - e^{-(2+\lambda)} - e^{-(2-\lambda)}), & \lambda \in (-2,-1],\\ \dfrac{\pi}{4}(e^{-(1+\lambda)} + e^{-(1-\lambda)} - e^{-(2+\lambda)} - e^{-(2-\lambda)}), & \lambda \in (-1,1],\\ \dfrac{\pi}{4}(e^{-(1+\lambda)} + e^{1-\lambda} - e^{-(2+\lambda)} - e^{-(2-\lambda)}), & \lambda \in [1,2),\\ \dfrac{\pi}{4}(e^{-(1+\lambda)} + e^{1-\lambda} - e^{-(2+\lambda)} - e^{2-\lambda}), & \lambda \geqslant 2.\end{cases}$$

4.2 Вторая функция

Необходимо найти образ Фурье функции:

$$f(t) = (t^2 - t)e^{-|t|} = t^2 e^{-|t|} - te^{-|t|}.$$

Будем рассматривать $f(t)$ как разность функций $f_1(t), f_2(t)$:

$$f_1(t) = t^2 e^{-|t|}, \quad f_2(t) = te^{-|t|}.$$

Заметим, что $f_1(t)$ — чётная функция. Тогда её образ Фурье можно записать в виде:

$$F_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-|t|} \cos(\lambda t)\ dt = 2\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} \cos(\lambda t)\ dt.$$

Функция $f_2(t)$ — нечётная, тогда её образ Фурье можно представить в виде:

$$F_2(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-|t|} \sin(\lambda t)\ dt = 2\int_0^{+\infty} te^{-t} \sin(\lambda t)\ dt.$$

Тогда можем записать формулу для преобразования Фурье функции $f(t)$:

$$F(\lambda) = F_1(\lambda) - iF_2(\lambda) = 2\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} \cos(\lambda t)\ dt - 2i\int_0^{+\infty} te^{-t} \sin(\lambda t)\ dt. \tag{2}$$

Попробуем упростить получившуюся формулу. Выразим тригонометрические функции через экспоненту:

$$2\cos(\lambda t) = e^{i\lambda t} + e^{-i\lambda t},$$
$$2i\sin(\lambda t) = e^{i\lambda t} - e^{-i\lambda t}.$$

Подставим получившиеся значения в 2 :

$$F(\lambda) = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} e^{i\lambda t}\ dt + \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} e^{-i\lambda t}\ dt - \int_0^{+\infty} te^{-t} e^{i\lambda t}\ dt - \int_0^{+\infty} te^{-t} e^{-i\lambda t}\ dt =$$
$$= F_1(-\lambda) + F_1(\lambda) - F_2(-\lambda) + F_2(\lambda).$$

Посчитаем $F_1(\lambda)$ «по частям»:

$$F_1(\lambda) = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} e^{-i\lambda t}\ dt = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t(i\lambda+1)}\ dt = -\frac{1}{i\lambda+1} e^{-t(i\lambda+1)t^2}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2t}{i\lambda+1} e^{-t(i\lambda+1)}\ dt =$$
$$= \frac{2}{i\lambda+1}\int_0^{+\infty} e^{-t(i\lambda+1)} t\ dt =$$
$$= \frac{2}{i\lambda+1}\left(-t\frac{1}{i\lambda+1} e^{-t(i\lambda+1)}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{i\lambda+1} e^{-t(i\lambda+1)}\ dt\right) =$$
$$= -\frac{2}{(i\lambda+1)^3} e^{-t(i\lambda+1)}\Big|_0^{+\infty} = \frac{2}{(i\lambda+1)^3}.$$

Аналогичные рассчёты проводим для $F_2(\lambda)$:

$$F_2(\lambda) = \int_0^{+\infty} te^{-(1+\lambda i)t}\ dt = -t\frac{1}{1+\lambda i}e^{-(1+\lambda i)t}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\lambda i}e^{-(1+\lambda i)t}\ dt =$$
$$= -\frac{1}{(1+\lambda i)^2}e^{-(1+\lambda i)t}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{(1+\lambda i)^2}.$$

Подставляем получившийся результат в 2:

$$F(\lambda) = \frac{2}{(-i\lambda+1)^3} + \frac{2}{(i\lambda+1)^3} - \frac{1}{(1-\lambda i)^2} + \frac{1}{(1+\lambda i)^2}.$$

5 Иллюстрация возникающих эффектов

5.1 Эффект наложения спектра

Эффект наложения спектра возникает при использовании свёртки функции $f(t)$ с гребнёвой функцией. Рассмотрим функцию $f(t) = \frac{\cos(2t)-\cos(t)}{t^2+1}$. Продемонстрируем эффект наложения спектра при большом шаге дискретизации, а затем уменьшим действие этого эффекта посредством его уменьшения.

Рис. 1: Полученный график при $\Delta_t = 0.5, [a,b] = [-2,2], [c,d] = [-\frac{-3\pi}{\Delta_t}, \frac{-3\pi}{\Delta_t}]$.

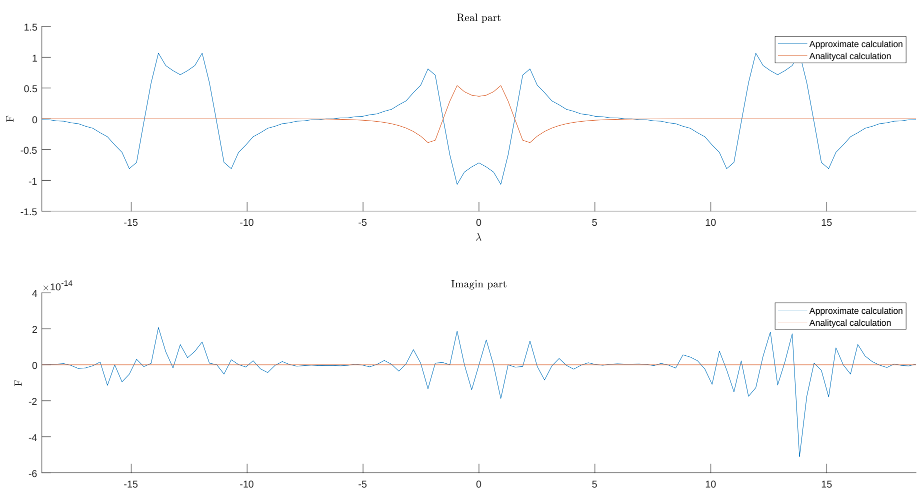
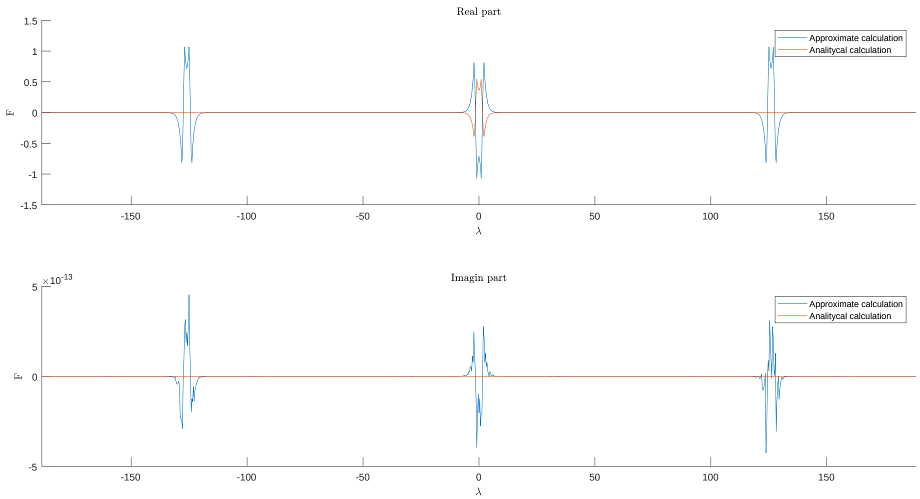


Рис. 2: Полученный график при $\Delta_t = 0.05, [a, b] = [-2, 2], [c, d] = [-\frac{-3\pi}{\Delta_t}, \frac{-3\pi}{\Delta_t}]$.



5.2 Эффект ряби

Рябь появляется при использовании в вычислениях оконной функции. В случае, если образ функции непрерывный, то рябь устранима. Рассмотрим функцию $f(t) = (t^2 - t)e^{-|t|}$. При увеличении $[c, d]$ влияние эффекта ряби уменьшится.

Рис. 3: Полученный график при $\Delta_t = 0.25, [a, b] = [-3, 3], [c, d] = [-\frac{-3\pi}{\Delta_t}, \frac{-3\pi}{\Delta_t}]$.

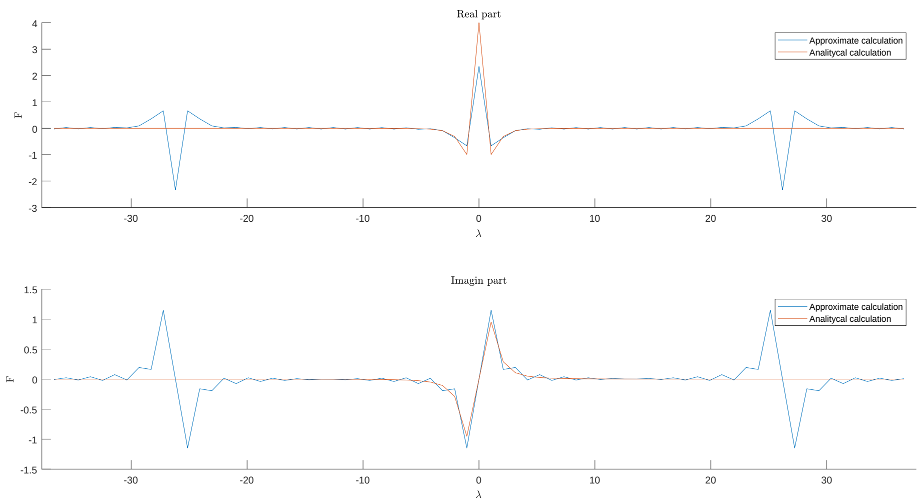
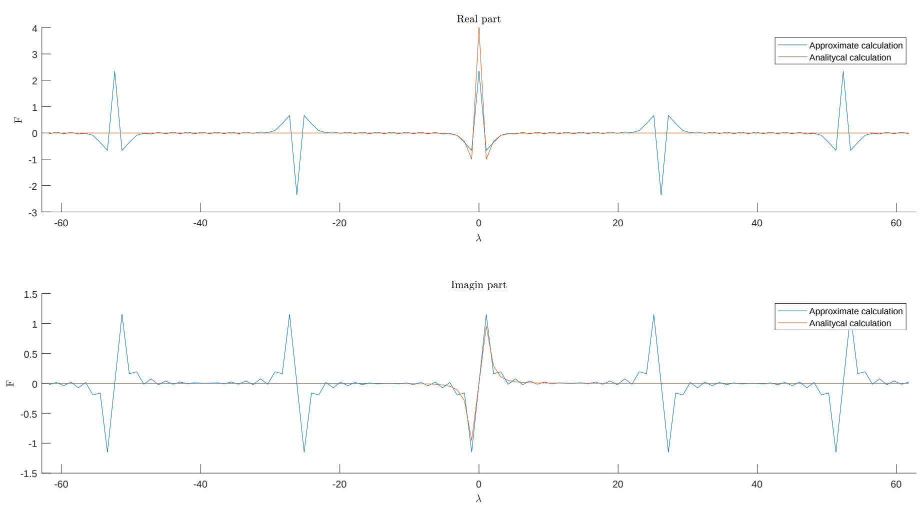


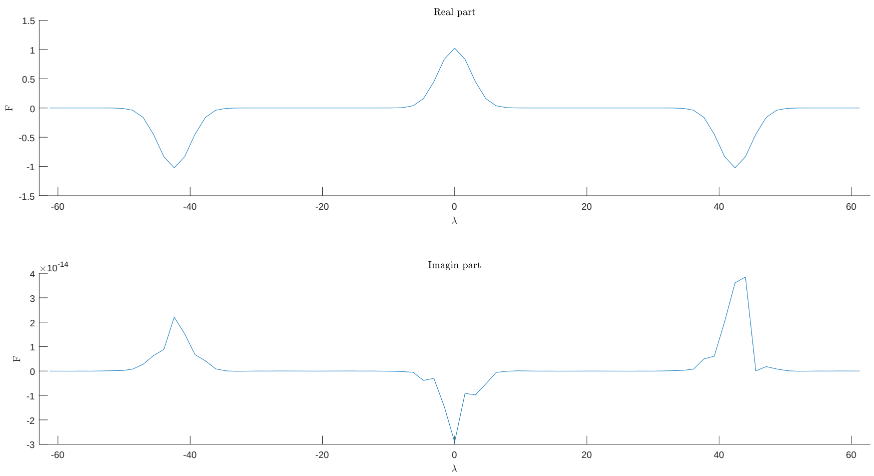
Рис. 4: Полученный график при $\Delta_t = 0.05, [a, b] = [-2, 2], [c, d] = [-\frac{-3\pi}{\Delta_t}, \frac{-3\pi}{\Delta_t}]$.



6 Другие примеры

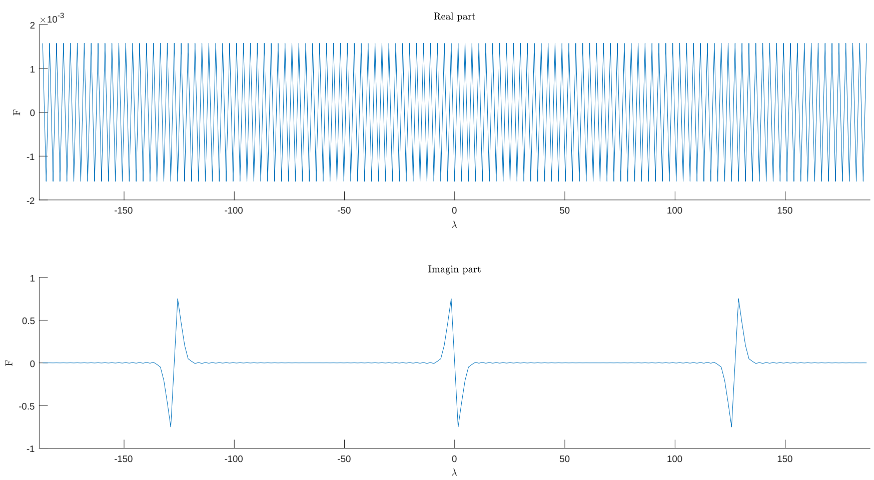
Пусть $f(t) = e^{-3t^2}$. Посмотрим на результат работы программы без использования аналитических вычислений.

Рис. 5: Полученный график при $\Delta_t = 0.25, [a, b] = [-2, 2], [c, d] = [-\frac{-3\pi}{\Delta_t}, \frac{-3\pi}{\Delta_t}]$.



Пусть теперь $f(t) = \frac{2\sin(t)}{1+2t^2+3t^4}$.

Рис. 6: Полученный график при $\Delta_t = 0.05, [a, b] = [-2, 2], [c, d] = [-\frac{-3\pi}{\Delta_t}, \frac{-3\pi}{\Delta_t}]$.



Список литературы

[1] *https://sawiki.cs.msu.ru/index.php/Многомерное преобразование Фурье.*