Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Задача о поиске места для офиса»

Студент 415 группы
А. А. Анашкина

Руководитель практикума
асп. М. В. Паршиков

Москва, 2024

Содержание

1 Постановка задачи

Имеется фирма, которая занимается ремонтом оборудования. Клиенты этой фирмы располагаются в разных частях г.Москвы, и, возможно, в других городах России. Каждое взаимодействие фирмы с клиентом заключается в выезде бригады на адрес клиента, что приводит к затратам фирмы, пропорциональным расстоянию от офиса этой фирмы до местоположения клиента. В один прекрасный день Вы, как потенциальный директор фирмы, решаете поменять положение Вашего офиса с целью минимизации издержек. При этом предполагается, что стоимость аренды офиса, его содержания и т.п. почти постоянна, а издержкисвязаны исключительно с необходимостью выезжать к клиентам.

В качестве исходных данных необходимо использовать некоторый текстовый файл с координатами клиентов (для каждого клиента в отдельной строке указаны широта и долгота его положения, через запятую). Широта и долгота задаются как вещественные числа, в градусах, символ-разделитель - «точка».

Основная задача состоит в разработке алгоритма поиска оптимального положения офиса. При этом необходимо рассмотреть несколько разных постановок задачи:

1. Все клиенты равнозначны и могут затребовать услуги фирмы с одинаковой вероятностью. Можно считать, что Земмля является «плоской», так как расстояния между разными клиентами невелики. В качестве расстояния от офиса до клиента можно использовать расстояние по прямой.

2. Все клиенты равнозначны и могут затребовать услуги фирмы с одинаковой вероятностью. Поскольку расстояния до клиентов большие, то при рассчётах необходимо учитывать эллиптическую модель Земли. В качестве расстояния от офиса до клиента необходимо учитвыть длину кратчайшего пути по поверхности эллипсоида.

3. Клиенты неравнозначны и могут затребовать услуги фирмы с разными вероятностями. В файле с информацией о клиентах для каждой строки кроме широты и долготы указывается приоритет - некоторое положительное число (чем больше число, тем чаще этому клиенту требуются услуги Вашей фирмы). Как и в первом пункте, можно считать, что Земля «плоская». В качестве расстояние от офиса до клиента можно использовать расстояние по прямой.

Для каждого варианта задачи необходимо придумать постановку соответствующей математической задачи оптимизации и алгоритм численного решения этой задачи. Результатом выполнения работы является программа и краткий отчёт. Программа должна выдавать оптимальные координаты положения офиса.

2 Задача 1

Условие. *Все клиенты равнозначны и могут затребовать услуги фирмы с одинаковой вероятностью. Можно считать, что Земмля является «плоской», так как расстояния между разными клиентами невелики. В качестве расстояния от офиса до клиента можно использовать расстояние по прямой.*

Обозначим предполагаемые координаты точки нахождения офиса за $\overline{x} = (x, y)$, а координаты точки спроса за $\overline{x}_j = (x_j, y_j)$. По условию затраты фирмф пропорциональны расстоянию от офиса до клиента, тогда задачу минимизации издержек можно сформулировать в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^{n} ||\overline{x} - \overline{x}_j|| \to \min_{\overline{x}}.$$

Данная задача размещения производства также носит название задачи Вебера. Она обобщает задачу нахождения геометрической медианы трёх точек, точное геометрическое решение которой предлагали многие известные математики. Однако, если число точек больше трёх, решить задачу Вебера геометрически невозможно. В представленном случае используются итеративные оптимизационные методы. Кун и Куэн предложили алгоритм, основанный на итерационном взвешенном методе наименьших квадратов, изложим его далее.

В качестве начального приближения $\overline{x}^0$ возьмём среднее всех точек. В нашеё задаче все клиенты равнозначны, тогда на каждом шаге алгоритм приближается к оптимальному решению путём выбора $\overline{x}^{j+1}$, минимизирующего сумму расстояний:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{||\overline{x}_i - \overline{x}^j||} ||\overline{x}_i - \overline{x}||.$$

Каждая следующая аппроксимация может быть получена из выражения:

$$\overline{x}^{j+1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{x}_i}{||\overline{x}_i - \overline{x}^j||}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{||\overline{x}_i - \overline{x}^j||}}.$$

Алгоритм завершает работу, когда норма разности значений функционала на соседних шагах достигает установленного значения, либо при достижении заданного числа итераций.

Далее рассмотрим пример, с результатами работы программы:

- Координаты офиса: $(2.000742021031452, 1.6877066317403757)$,
- Значение функционала: 150.54511925609958.

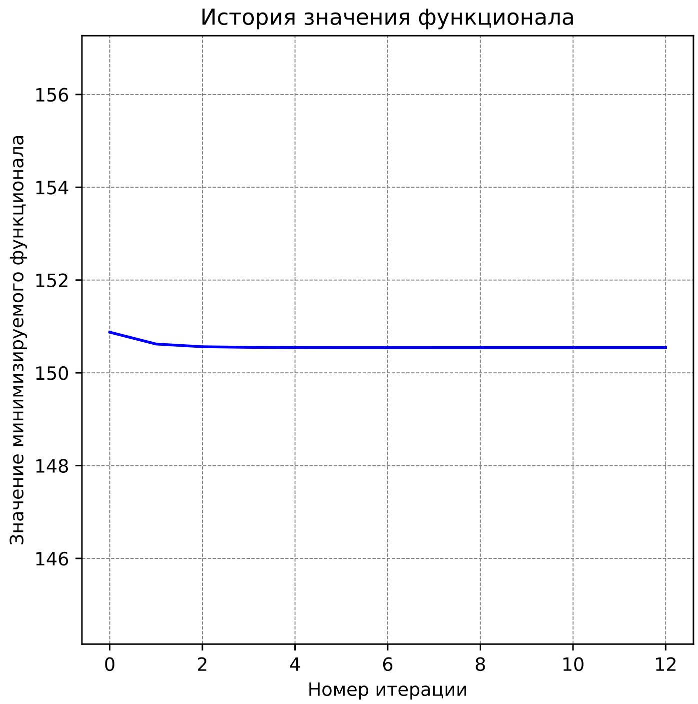

Рис. 1: Результат работы программы для задачи 1.
График значений функционала при $\varepsilon = 10^{-7}$, число клиентов $= 100$, максимальном числе итераций $= 1000$

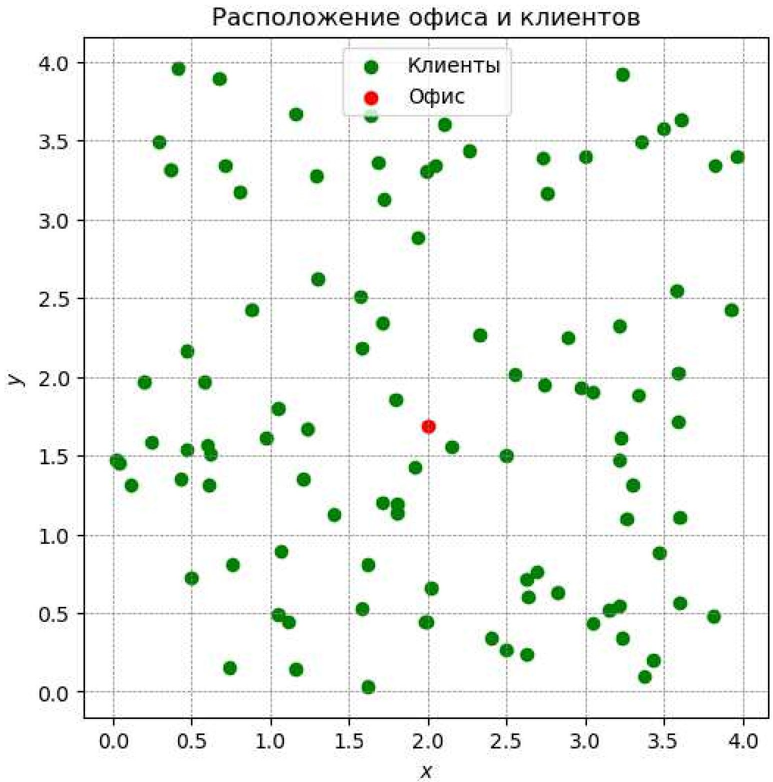

Рис. 2: Результат работы программыдля задачи 1.
Конфигурация системы $\varepsilon = 10^{-7}$, число клиентов $= 100$, максимальном числе итераций $= 1000$

3 Задача 2

Условие. *Клиенты неравнозначны и могут затребовать услуги фирмы с разными вероятностями. В файле с информацией о клиентах для каждой строки кроме широты и долготы указывается приоритет - некоторое положительное число (чем больше число, тем чаще этому клиенту требуются услуги Вашей фирмы). Как и в первом пункте, можно считать, что Земля «плоская». В качестве расстояние от офиса до клиента можно использовать расстояние по прямой.*

Эта задача отличается от предыдущей лишь тем, что расстояние рассчитывается по поверхности эллипсоида. Итеративный метод, указанный ранее будет применим к нашей задаче. Воспользуемся библиотекой geopy, которая предоставляет возможность вычисления расстояния по поверхности эллипсоида Земли.

Далее рассмотрим пример, с результатами работы программы:

- Координаты офиса: $(5.909154174463327, 166.14441019422617)$,
- Значение функционала: 979885.687676593.

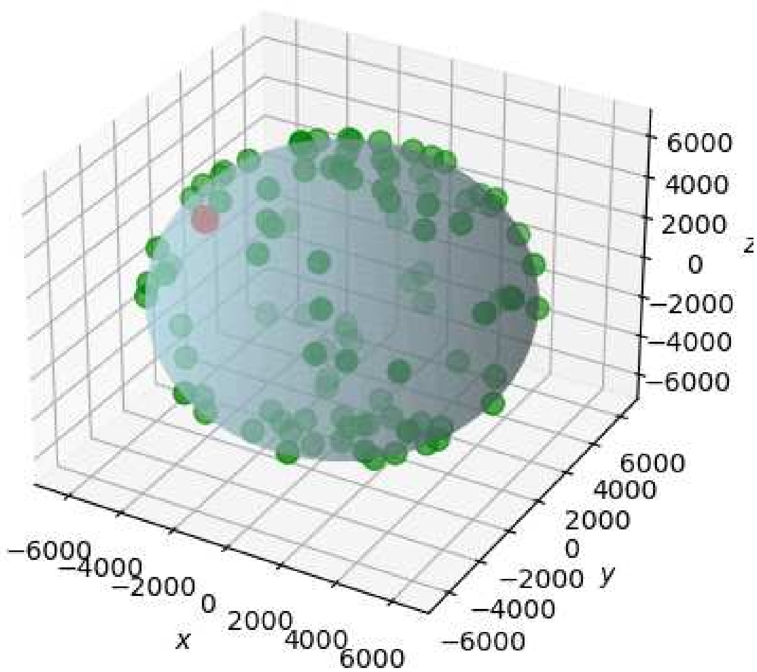

Рис. 3: Результат работы программы для задачи 2.
Конфигурация системы при $\varepsilon = 10^{-5}$, число клиентов $= 100$, максимальном числе итераций $= 1000$

4 Задача 3

Условие. *Клиенты неравнозначны и могут затребовать услуги фирмы с разными вероятностями. В файле с информацией о клиентах для каждой строки кроме широты и долготы указывается приоритет - некоторое положительное число (чем больше число, тем чаще этому клиенту требуются услуги Вашей фирмы). Как и в первом пункте, можно считать, что Земля «плоская». В качестве расстояние от офиса до клиента можно использовать расстояние по прямой.*

Эта задача отличается от первой наличием весов у каждого клиента. По условию каждому клиенту соответствует число, причём чем больше это число, тем чаще этому клиенту требуются услуги фирмы. Поэтому для каждого клиента можем генерировать вероятность того, что ему понадобятся наши услуги. Тогда веса вычисляются до следующей формуле:

$$w_j = \frac{p_j}{\sum_{i=1}^{n} p_i}.$$

Тогда задача минимизации издержек может быть переформулирована:

$$\sum_{j=1}^{n} w_j ||\overline{x} - \overline{x}_j|| \to \min_{\overline{x}}.$$

Каждая следующая аппроксимация может быть получена из выражения:

$$\overline{x}^{j+1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i \overline{x}_i}{||\overline{x}_i - \overline{x}^j||}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{||\overline{x}_i - \overline{x}^j||}}.$$

Далее рассмотрим пример, с результатами работы программы:

- Координаты офиса: $(-0.08573011638516292, 0.21725910327983097)$,
- Значение функционала: 1.3324814197494752.

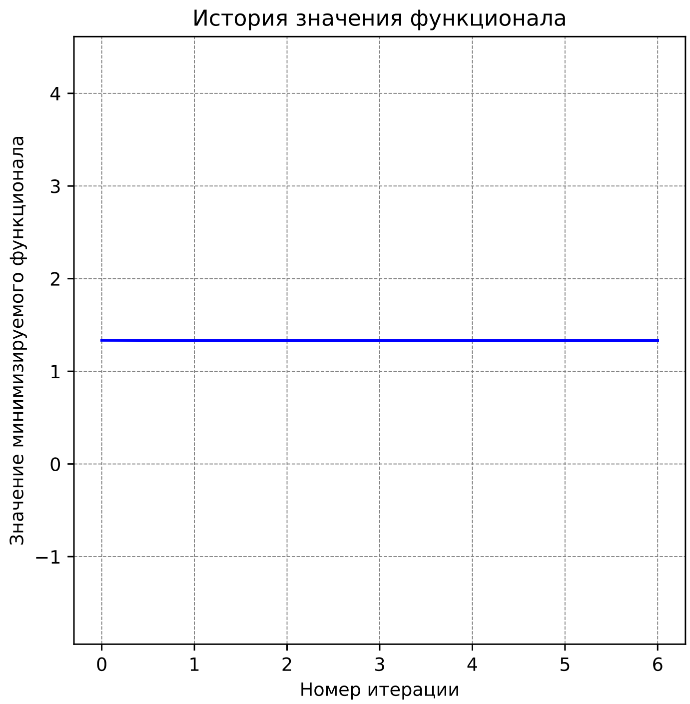

Рис. 4: Результат работы программы для задачи 3.
График значений функционала при $\varepsilon = 10^{-6}$, число клиентов $= 100$, максимальном числе итераций $= 1000$

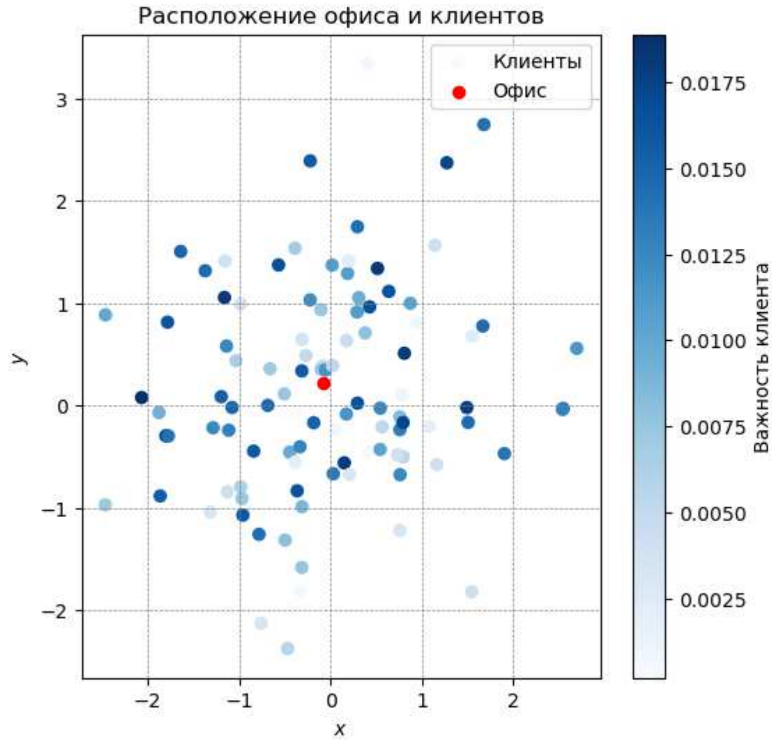

Рис. 5: Результат работы программы для задачи 3.
Конфигурация системы при $\varepsilon = 10^{-6}$, число клиентов $= 100$, максимальном числе итераций $= 1000$

Список литературы

[1] *https://ru.ruwiki.ru/wiki/Задача Вебера Определение и история задач Ферма,Вебера и притяжения – отталкивания.*

[2] Khurrum Aftab, Richard Hartley, Jochen Trumpf *Generalized Weiszfeld Algorithms for Lq Optimization*. 1962.