

## Rapport de projet

### Réseau de Hopfield : Modèle de la mémoire associative

Fait par : Amina Alioua, Anastasia Azmoudeh et Isabelle Wu

Il existe plusieurs modèles de réseau neurones et celui dont on va parler est le modèle de la mémoire associative. C'est un modèle qui utilise un réseau de Hopfield, c'est-à-dire un réseau récurrent à  $N$  neurones qui suit la règle de Hebb. Les réseaux récurrents sont souvent utilisés dans le cadre de l'apprentissage profond et dans le développement de modèles qui simulent l'activité du système cérébral humain. Notre modèle se base sur un apprentissage non supervisé qui désigne dans le domaine informatique de l'intelligence artificielle un apprentissage automatique où les données ne sont pas étiquetées, mais classe selon des ressemblances.

L'usage de ce réseau est tout à fait adapté à la mémoire associative car on cherche à reconnaître des motifs qui seront bruités, c'est-à-dire avec des pixels altérés et on veut que notre modèle reconnaisse les motifs de départ. Comme l'exemple des numéros de téléphone à retenir et dont on nous présente les premiers chiffres (le reste étant bruités), on doit se rappeler du numéro téléphone entier.

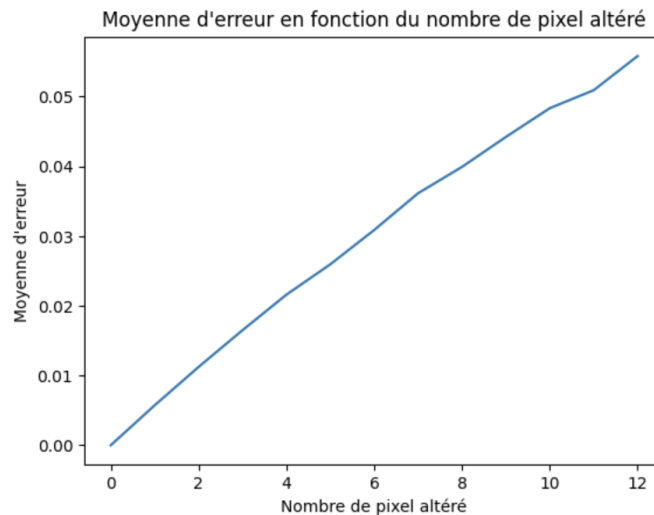
Selon le modèle de Hopfield, le réseau de neurones dans une aire du cerveau responsable pour la mémoire (par ex. hippocampe) a une fonction-énergie associée (hypersurface dans  $N$  dimensions où  $N$  est le nombre de neurones dans le réseau). Pendant la période d'apprentissage, les efficacités synaptiques (qui déterminent la forme de la surface d'énergie) sont modifiées de sorte que les minima locaux sont créés pour chacun des numéros à apprendre. Lorsque les 4 premiers chiffres d'un numéro sont donnés, le réseau est initialisé dans le bassin d'attraction d'un état stable. Après une période transitoire (dynamique du système), le réseau arrive au minimum local : le numéro est rappelé !

### Objectif :

Il est évident que le réseau ne peut pas stocker un nombre illimité de motifs. On cherche à modéliser un réseau de neurone récurrent et de connaître la capacité de ce modèle de mémoire.

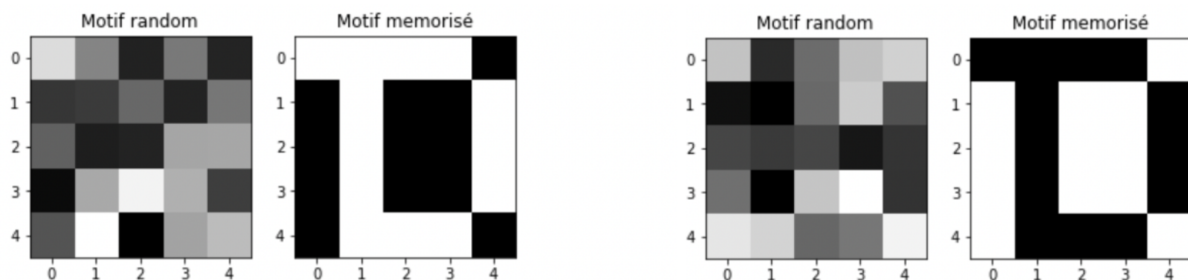
## Question 1 : Est-ce que le niveau de bruit influence la mémoire d'un seul motif ?

On fait apprendre à notre modèle un seul motif et on fait varier le bruit  $m$ , c'est-à-dire le nombre de pixel altéré. Pour chaque  $m$ , on itère 100 fois avec des motifs différents, pour avoir une moyenne d'erreur en fonction du nombre de pixel altéré.



En observant le graphique ci dessus, le nombre d'erreurs augmente selon le nombre de pixels altérés mais cela reste très faible même avec beaucoup de bruit. Si le calcul d'erreur est égal à 1 environ, cela correspond à une différence de 1 pixel entre le motif appris et le motif qu'on essaye de se rappeler. Dans notre cas, l'erreur égale à 0.6 en moyenne quand on altère 12 pixels de notre motif 1, on arrive tout le temps à converger vers le motif mémorisé. L'erreur n'est pas égale à 0 car on a des résultats qui n'ont pas finis de converger totalement mais qui se rapproche grandement de 1 ou de -1 (qui correspondent respectivement au pixel blanc et pixel noir).

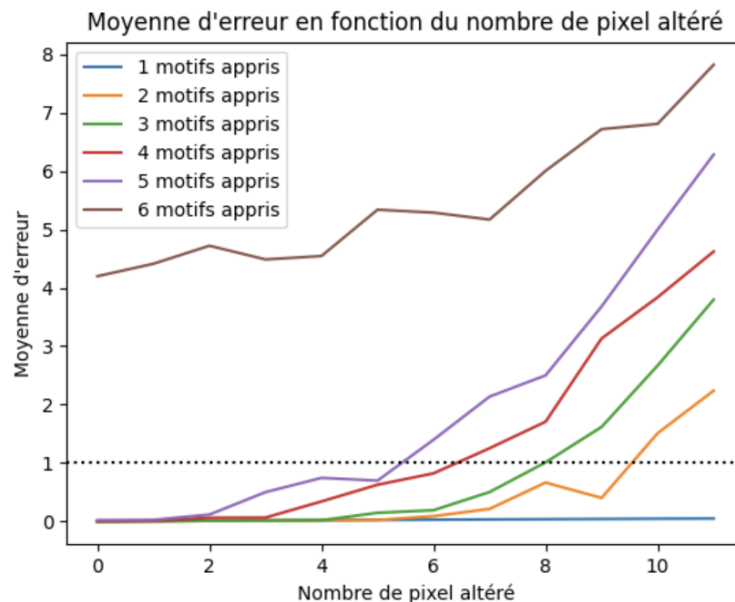
Dans un cas, où l'on ne connaît qu'un seul motif, il est facile de se rappeler à nouveau de ce dernier car c'est le seul qu'on connaît. On a aussi essayé de partir d'un motif totalement au hasard qu'on a généré de manière random et on converge également vers notre motif. Cependant, les couleurs peuvent parfois être inversées lorsqu'on fait cela mais la lettre reste toutefois lisible.



Donc pour répondre à la question, le niveau de bruit n'influence pas la mémoire d'un seul motif et on le voit à travers nos différents tests.

**Question 2 : Si l'on fixe le niveau de bruit à 6 pixels, combien de motifs le réseau de 25 neurones est capable de sauvegarder avec l'erreur de mémoire <1 pixel en moyenne ?**

On répète la même procédure qu'à l'exercice 1 mais en faisant apprendre cette fois ci N = 2, ..., 6 motifs à apprendre à notre modèle.



Plus on apprend des motifs, plus dure sera la convergence. On voit que même sans altérer de pixel, lorsqu'on apprend les 6 motifs, notre modèle fait beaucoup d'erreurs (environ 4-5) lors de la mémorisation. Pour un niveau de bruit à 6, avec notre modèle contenant 25 neurones, on voit qu'on a une erreur supérieure à 1 dès l'apprentissage de 5 motifs donc au delà de 5 motifs on fait de plus en plus d'erreurs. On peut même dire que pour 4 motifs, selon les simulations, l'erreur pour un niveau de bruit 6 se rapproche de 1 aussi. Mais une seule erreur est négligeable pour qu'on reconnaisse le motif.

Nous avons fait varier le dt, c'est-à-dire le pas de temps et on l'a mis à 0.05 au lieu de 0.1. Il fait donc 2 fois plus d'itération, cela prend évidemment plus de temps mais pour peu d'amélioration.

On a également fait d'autres tests. En augmentant le nombre de neurones dans le réseau (par exemple 64 neurones), sur l'apprentissage de 6 motifs par ce réseau il y a moins d'erreurs pour le même nombre de pixels altérés. Cette moyenne d'erreur augmente pour un nombre de pixels altérés plus conséquent (dans notre cas cela commençait à 25 pixels altérés). Donc, en augmentant la taille du réseau, on peut faire apprendre plus de motifs à notre modèle.

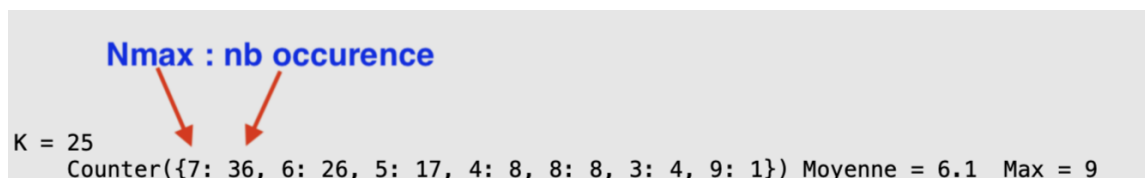
### Question 3 : Quelle est la capacité C du réseau sans bruit ?

Précédemment, on a pu voir que sans bruit, notre réseau avait déjà une erreur supérieure à 1 quand on lui faisait apprendre nos 6 motifs. Sa capacité est donc  $5/25 = 0.20$ . On va vérifier cela sur d'autres motifs et on va cette fois ci se focaliser uniquement sur des simulations sans bruits pour pouvoir calculer correctement la capacité du réseau. Et on va également calculer la capacité de différents réseaux pour voir comment celui-ci évolue.

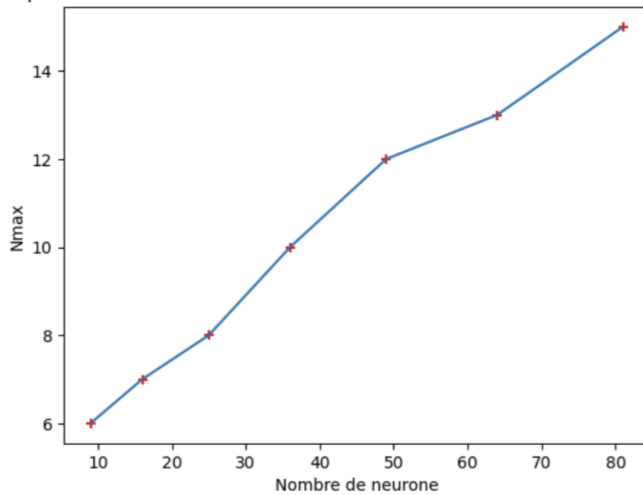
Pour répondre à cette problématique, on va créer différents réseaux de taille  $K = [9, 16, 25, 36, 49, 64, 81]$ , on travaille sur des réseaux carrés d'où ces valeurs et on ne prend pas en compte  $K = 4$  car cela serait un réseau trop petit. Pour chaque réseau, on part de  $N = 1$  motif à apprendre et on ajoute un motif random à chaque itération tant que l'erreur est inférieure à 1. Pour avoir cette erreur, on a fait une moyenne sur les calculs de mémorisation de tous les motifs de la liste de motifs random dont on ajoute pas de bruit.

Etant donné qu'on génère nos motifs de manière random, on obtient parfois des motifs qui peuvent être assez semblables, et comme notre modèle de neurone consiste à classer grâce aux similarités, notre algorithme ne converge pas correctement pour certain exemple même sans bruit et donne des erreurs supérieur à 1. Cela veut dire que selon les motifs créés, le  $N_{max}$  peut changer. Pour régler ce problème, nous avons ajouté une boucle de plus pour calculer 100  $N_{max}$  pour chaque  $K$  et  $N$ .

On prend un exemple pour un réseau de 25 neurones, on fait 100 itérations pour trouver les  $N_{max}$  en partant de motifs random différent. On obtient donc 100  $N_{max}$  et on compte le nombre d'occurrence pour chaque. On voit ci-dessous que le plus grand  $N_{max}$  est égal 9, dont il n'y a qu'une seule occurrence et on va le considérer comme un cas à part car sur 100 itérations, n'obtenir qu'une seule fois ce  $N_{max}$  n'est pas objectif pour calculer la capacité de ce réseau. On pourrait prendre la moyenne de ces  $N_{max}$  pour calculer la capacité mais comme expliqué plus tôt, selon les motifs générés, on peut avoir du mal à converger, on voit des  $N_{max} = [3, 4]$  par exemple, ce qui fausse le choix de prendre la moyenne. Finalement, on a décidé de prendre le plus grand  $N_{max}$  ayant au minimum 3 occurrences sur les 100 itérations.



Graph de Nmax avec une erreur <1 en fonction de du nombre de neurone



	K	Nmax	Capacité
0	9	6	0.666667
1	16	7	0.437500
2	25	8	0.320000
3	36	10	0.277778
4	49	12	0.244898
5	64	13	0.203125
6	81	15	0.185185

On obtient un graphique avec une courbe croissante et assez droite, on peut en déduire que le nombre max de motifs mémorisés augmente bien en fonction du nombre de neurones K. Donc, pour un réseau de 25 neurones sans bruit, on a  $N_{\max} = 8$  et on calcule une capacité de 0.32. Cette différence par rapport au  $N_{\max}$  vu à la question 2 doit être dû au fait que les motifs donnés sont trop similaires du point de vue de l'algorithme.

## Conclusion :

La capacité diminue avec l'augmentation du nombre de neurones, cela semble étrange car dans la réalité, on pourrait penser que plus on a de neurones plus la capacité devrait être grande. Rappelons qu'on travaille sur un réseau d'apprentissage non supervisé qui classe selon les ressemblances, que donc les motifs que l'on fait apprendre font varier la capacité du réseau. Même si les motifs sont tous très différents, on peut affirmer grâce à nos résultats qu'il y a une limite de motifs que le réseau peut stocker puisque notre capacité diminue en fonction du nombre de neurones.