

Réseau de Hopfield : Modèle de la mémoire associative

Imaginez que l'on vous demande de mémoriser 6 numéros de téléphone (6 images différentes, 6 phrases, etc). Après une période d'apprentissage on vous présente les premiers chiffres d'un de ces numéros (ou une partie d'un des images ou des phrases). Vous vous rappelez automatiquement le numéro ou l'image mémorisé correspondant. Quel est le mécanisme neuronal sous-tendant ce type de mémoire, appelé "mémoire associative" ?

Construction du modèle

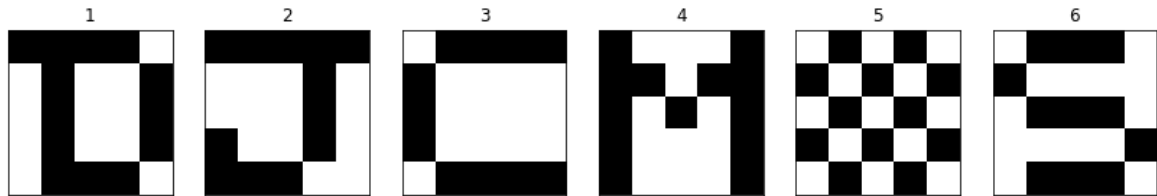
On considère le réseau de Hopfield avec $K = 25$ neurones. La dynamique du potentiel de membrane pour chaque neurone du réseau est décrite par l'équation suivante :

$$\frac{dy_k}{dt} = -y_k + g \left(\sum_{i=1}^K w_{ki} y_i \right) \quad (1)$$

avec tangente hyperbolique comme fonction d'activation (cette fonction est souvent utilisée au lieu de la fonction sigmoïde)

$$g(a) = \tanh(a) = \frac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}} \quad (2)$$

On utilisera l'ensemble des motifs suivants pour tester le modèle :



Chaque motif correspond au vecteur d'activités $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_K)$, avec $y_k = -1$ pour les pixels noirs et $y_k = +1$ pour les pixels blancs.

Afin de stocker N motifs dans la mémoire, on fixe les poids synaptiques aux valeurs hebbiennes :

$$w_{ki} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y_k^{(n)} y_i^{(n)} \quad (3)$$

Simulation et analyse du modèle Il est évident que le réseau ne peut pas stocker un nombre illimité de motifs. On cherche donc à déterminer la capacité de ce modèle de mémoire.

1. On teste d'abord la performance du réseau avec $N = 1$ motif. Pour vérifier si le réseau peut "se rappeler" du motif à partir d'un motif bruité, on crée ce dernier par inversion des valeurs de m éléments du motif (on choisit les éléments aléatoirement pour chaque simulation), $m = 1$ correspond au bruit faible, $m = K/2$ correspond au bruit fort. On utilise le motif altéré comme le vecteur des conditions initiales $\vec{y}(t = 0)$. Après la convergence du réseau à la solution, on mesure l'erreur de précision de la mémoire :

$$e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K |y_k^{\text{motif}} - y_k^{\text{mem}}| \quad (4)$$

où \bar{y}^{motif} est le motif correct et \bar{y}^{mem} est le motif rappelé par le réseau (l'indice k parcourt les composantes de ces vecteurs). Cette erreur correspond (approximativement) au nombre de pixels dont les valeurs ne sont pas égales dans les deux motifs (par ex. la différence d'un pixel correspond à $e \approx 1$). Afin d'estimer la performance moyenne du réseau pour différents niveaux de bruit on adopte la procédure suivante : pour chaque niveau de bruit ($m = 0, 1, 2, \dots, K/2$), répéter 100 fois la simulation et calculer l'erreur moyenne $\bar{e}(m)$. Représenter ensuite graphiquement cette erreur moyenne en fonction de m . Est-ce que le niveau de bruit influence la mémoire d'un seul motif ?

2. Répéter la même procédure pour $N = 2, \dots, 6$ et représenter sur le même graphique l'erreur moyenne en fonction de bruit pour différentes valeurs de N . Si l'on fixe le niveau de bruit à 6 pixels, combien de motifs le réseaux de 25 neurones est capable de sauvegarder avec l'erreur de mémoire < 1 pixel en moyenne ?
3. On définit la capacité du réseau par le nombre maximal des motifs mémorisés (sans bruit, $m = 0$, et avec l'erreur de mémoire < 1 pixel), divisé par le nombre de neurones dans le réseau : $C = \frac{N_{\text{max}}}{K}$. Quelle est la capacité C du réseau sans bruit ?

Littérature recommandée (Disponible sur la page du cours dans Moodle)

MacKay, D. (2003). Information theory, inference and learning algorithms. Chapter 42. Hopfield networks.