25/10

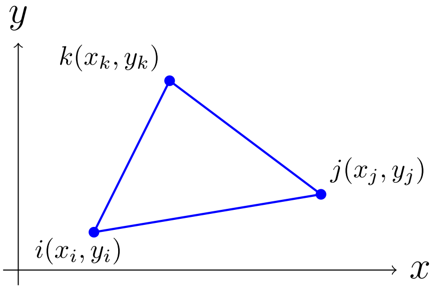
Связь между координатами:

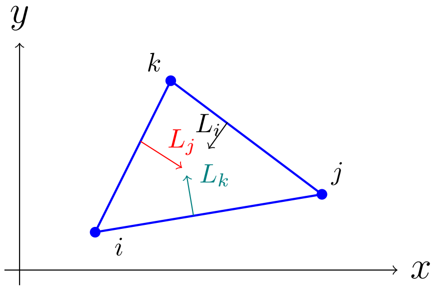
$$\begin{cases} L_i + L_j + L_k = 1 \\ x = L_i x_i + L_j x_j + L_k x_k \\ y = L_i y_i + L_j y_j + L_k y_k \end{cases}$$

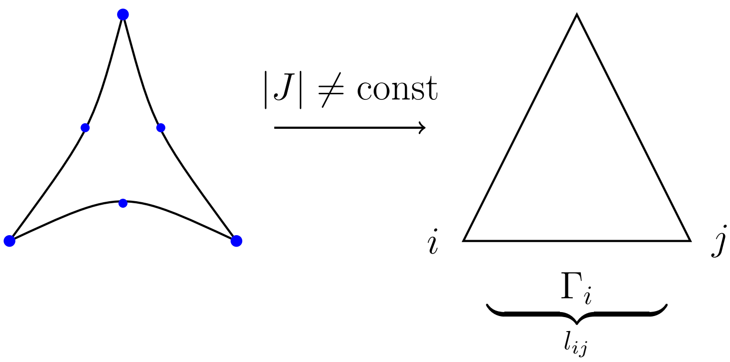
$V = hdS, h = \text{const}$ – толщина элемента

$$h \iint\limits_S f(x,y)\, dxdy = h \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-L_j} f(L_i, L_j, L_k) |J|\, dL_i L_j$$

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial L_i} & \dfrac{\partial x}{\partial L_j} \\ \dfrac{\partial y}{\partial L_i} & \dfrac{\partial y}{\partial L_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i - x_k & x_j - x_k \\ y_i - y_k & y_j - y_k \end{bmatrix} \Rightarrow |J| = \Delta$$







Интегральные формулы, упрощающие вычисления:

$$\int\limits_{\Gamma_{ij}} L_i^\alpha L_j^\beta \, d\Gamma = \frac{\alpha! \beta!}{(\alpha + \beta + 1)!} \cdot l_{ij}$$

$$\int\limits_S L_i^\alpha L_j^\beta L_k^\gamma \, dS = \frac{\alpha!\beta!\gamma!}{(\alpha+\beta+\gamma+2)!}\cdot 2S \tag{1}$$

Возвращаемся к формуле из прошлой лекции:

$$\int\limits_\Omega N^T N \, dxdy = \int\limits_\Omega \begin{bmatrix} N_iN_i & N_iN_j & N_iN_k \\ N_iN_j & N_jN_j & N_jN_k \\ N_iN_k & N_jN_k & N_kN_k \end{bmatrix} \, dxdy =$$

$$= \int\limits_S \begin{bmatrix} L_iL_i & L_iL_j & L_iL_k \\ L_iL_j & L_jL_j & L_jL_k \\ L_iL_k & L_jL_k & L_kL_k \end{bmatrix} |J| \, dL_iL_j = \frac{S}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Вычисляем компоненты матрицы по формуле (1):

$$\int\limits_\Omega L_i^2 \, dS = \int\limits_\Omega L_i^2 L_j^0 L_k^0 \, dS = \frac{2!\,0!\,0!}{(2+0+0+2)!}\cdot 2S = \frac{S}{6}$$

$$\int\limits_S N^{\mathrm{T}} \, dS = \int\limits_S \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix} \, dxdy = \int\limits_S \begin{bmatrix} L_i \\ L_j \\ L_k \end{bmatrix} \, dS = \frac{S}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\int\limits_\Gamma \left(K_x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot l_x + K_y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot l_y \right) v \, d\Gamma$$

1. или $K_x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot l_x + K_y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot l_y = \hat{\sigma}$ или q

2. или $K_x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot l_x + K_y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot l_y = -\alpha_g(u - \hat{u})$

Рассмотрим подробнее:

1. $\displaystyle\int\limits_\Gamma \hat{\sigma} \, d\Gamma = \{\delta\Phi\}^T \int\limits_\Gamma \hat{\sigma} N^T \, d\Gamma \int\limits_\Gamma \begin{bmatrix} L_i \\ L_j \\ L_k \end{bmatrix} \, d\Gamma$

   (a) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma_{ij}} \begin{bmatrix} L_i \\ L_j \\ 0 \end{bmatrix} \, d\Gamma = \left| \int\limits_{\Gamma_{ij}} L_i^1 L_j^0 d\Gamma = \frac{1!}{(1+1)!} l_{ij} \right| = \frac{l_{ij}}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) $\int\limits_{\Gamma_{jk}} \begin{bmatrix} 0 \\ L_j \\ L_k \end{bmatrix} d\Gamma = \dfrac{l_{jk}}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(c) $\int\limits_{\Gamma_{ik}} \begin{bmatrix} L_i \\ 0 \\ L_k \end{bmatrix} d\Gamma = \dfrac{l_{jk}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\int\limits_{\Gamma} \alpha_g (u - \hat{u}) v d\Gamma = \int\limits_{\Gamma} \alpha_g u \cdot v d\Gamma - \int\limits_{\Gamma} \alpha_g \hat{u} \cdot v d\Gamma =$$

$$= \delta\Phi^T \left(\int\limits_{\Gamma} \alpha_g N^T N d\Gamma \cdot \Phi - \alpha_g \hat{u} \int\limits_{\Gamma} N^T d\Gamma \right)$$

$$\int\limits_{\Gamma} \alpha_g N^T N d\Gamma = \int\limits_{\Gamma} \begin{bmatrix} L_i L_i & L_i L_j & L_i L_k \\ 0 & L_j^2 & L_j L_k \\ 0 & 0 & L_k^2 \end{bmatrix} d\Gamma$$

(a)

$$\int\limits_{\Gamma_{ij}} \begin{bmatrix} L_i L_i & L_i L_j & 0 \\ 0 & L_j^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} d\Gamma = \left| \begin{array}{l} \int\limits_{\Gamma_{ij}} L_i^2 L_j^0 d\Gamma = \dfrac{2! \cdot 0!}{(2+1)!} l_{ij} = \dfrac{2}{6} l_{ij} \\ \int\limits_{\Gamma_{ij}} L_i^1 L_j^1 d\Gamma = \dfrac{1! \cdot 1!}{(1+1+1)!} l_{ij} = \dfrac{1}{6} l_{ij} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{2}{6} l_{ij} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b), (c) – аналогично