Задача

К закрепленному в стене концу стержня ($x = 0$) подводится тепловой поток интенсивности q. На свободном конце стержня ($x = L$) происходит конвективный теплообмен тепла. Коэффициент теплообмена h, температура окружающей среды T_{cp}. Через боковую поверхность стержня также происходит конвективный теплообмен. Площадь поперечного сечения стержня S считается постоянной.

Решить задачу методом конечных элементов с использованием одномерного линейного (симплекс) элемента. Выписать в тетради явное решение СЛАУ в случае когда стержень разбит на 3 элемента.

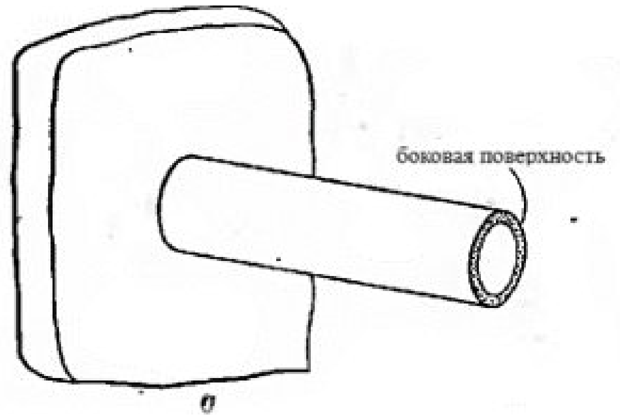
Разбить стержень на 5 конечных элементов и вычислить температуру в узлах МКЭ запрограммировав на языке С++.

Решить задачу при следующих данных:

$k_x = 75\,[\text{Вт}/(\text{см})\cdot^{\circ}\text{C}]$ - коэффициент теплопроводности материала,

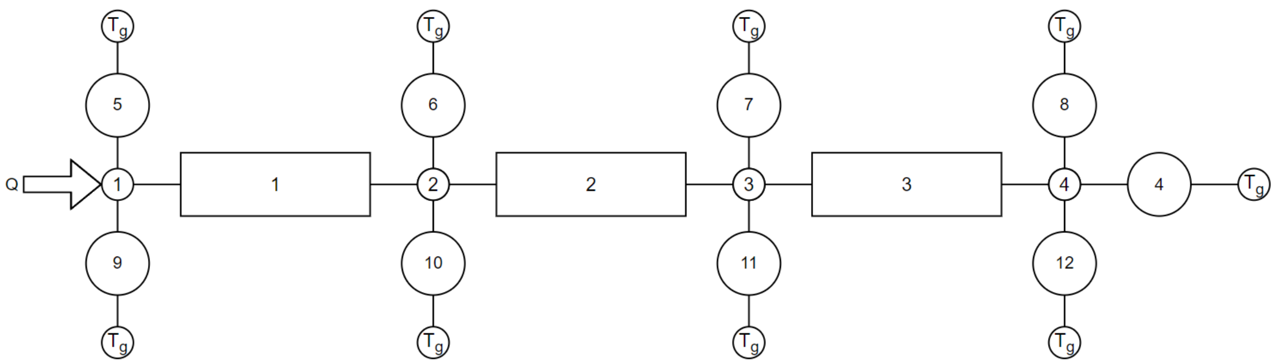
$q = -150\,[\text{Вт}/\text{см}^2]$ - считается, что положительное направление, когда тепло отводится от тела, так как по задаче тепло подводится, то знак минус

$\alpha_g = 10\left[\text{Вт}/(\text{см})^2\cdot^{\circ}\text{C}\right]$ - коэффициент теплообмена, $S = \pi\text{см}^2, L = 7.5$ см



Решение

1. Дискретизация области одномерными элементами



Рассмотрим дифференциальное уравнение, описывающее распространение тепла в стержне:

$$-\frac{d}{dx}(k_x\frac{dT}{dx}) = f \tag{1}$$

где f - погонная интенсивность подачи тепла, если внутри стержня есть источник. В задаче внутренние источники тепла не заданы, следовательно, $f = 0$.

Граничные условия:

$$Q_1 = k_x \frac{dT}{dx}\bigg|_{x=0} = -q; \qquad Q_2 = k_x \frac{dT}{dx}\bigg|_{x=L} = \alpha_g(T_{cp} - T(l)) \qquad Q_2 = k_x \frac{dT}{dx}\bigg|_{\Gamma} = \alpha_g(T_{cp} - T)$$

Вариационная постановка:
Так как нам дан стержень сечения S, то для решения задачи интегрирование надо проводить по объему стержня. Однако $V = Sdx$, где x — координата по длине стержня.

$$\int\limits_0^L -\frac{d}{dx}\left(k_x \frac{dT}{dx}\right) S\delta T dx = 0,\ \delta T = \nu - \text{возможные изменения температуры (аналог невязки } \nu).$$

Интегрируя выражение по частям, получим вариационную постановку:

$$\int\limits_0^L -\frac{d}{dx}\left(k_x \frac{dT}{dx}\right) S\delta T dx = \left| \begin{matrix} u = -k_x S\delta T & du = -\frac{d\delta T}{dx}dx \\ dv = \frac{d}{dx}\left(\frac{dT}{dx}\right)dx & v = \frac{dT}{dx} \end{matrix} \right| =$$

$$= -S\frac{d}{dx}\left(k_x \frac{dT}{dx}\right)\delta T\Big|_0^L + \int_0^L \left(k_x \frac{dT}{dx}\right) S \frac{d\delta T}{dx} dx = -F(\nu) + \int_0^L \left(k_x \frac{dT}{dx}\right) S \frac{d\delta T}{dx} dx.$$

$$\int\limits_0^L -\frac{d}{dx}\left(k_x \frac{dT}{dx}\right) S dx - F(\nu) = 0.$$

$$F(\nu) = S\frac{d}{dx}\left(k_x \frac{dT}{dx}\right)\delta T\Big|_0^L = SQ_2\delta T_2 - SQ_1\delta T_1$$

Делим стержень на 3 элемента:

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d\delta T}{dx}\left(k_x \frac{dT}{dx}\right) S dx - t_1^{(i)}\delta T_i - t_2^{(i)}\delta T_{i+1} = 0,\ \ i = 1, 2, 3$$

Далее делим стержень на нужное количество элементов

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d\delta T}{dx}\left(k_x \frac{dT}{dx}\right) S dx - t_1^{(i)}\delta T_i - t_2^{(i)}\delta T_{i+1} = 0$$

Аппроксимируем линейно неизвестные функции

$$T = N^{(i)}q^{(i)},\ \delta T = N^{(i)}\delta q^{(i)},\ N^{(i)} = \begin{bmatrix} N_1^{(i)} & N_2^{(i)} \end{bmatrix},\ N_1^{(i)} = 1 - \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i},\ N_2^{(i)} = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

$$q^{(i)} = \begin{bmatrix} T_i & T_{i+1} \end{bmatrix},\ \delta q^{(i)} = \begin{bmatrix} \delta T_i & \delta T_{i+1} \end{bmatrix}$$

Подставляем в интегральное уравнение и сводим решение к СЛАУ вида

$$t^{(i)} = K^{(i)}q^{(i)} - P^{(i)}$$

Суммируя по КЭ с учетом ГУ, получаем СЛАУ $Kq = P$.