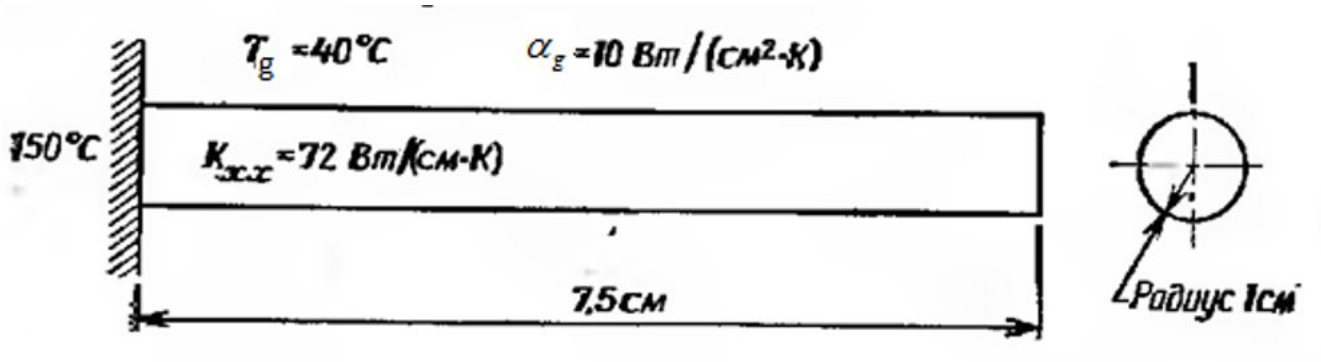
Метод конечных элементов для одномерной задачи теплопроводности с использованием комплекс элементов.

Задание

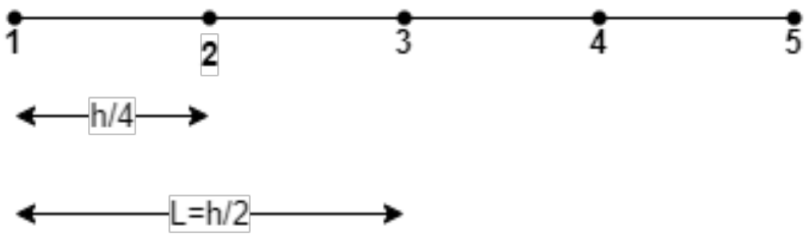
Определить распределение температуры в стержне кругового сечения с граничными условиями 1 рода на левой границе стержня и граничными условиями 3 рода на правой границе стержня и на боковой поверхности с использованием квадратичного и кубического одномерного конечного элемента. Сравнить с аналитическим решением.



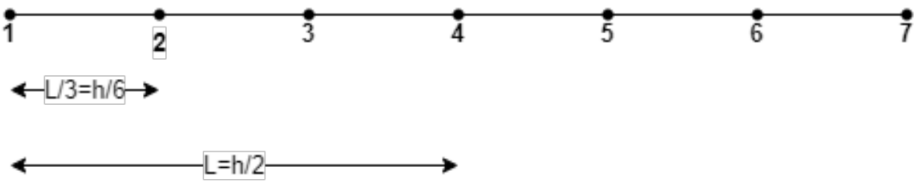
Решение

1. Проведем дискретизацию области одномерными элементами для квадратичного и кубического элементов:

   (a) Схема разбиения области для квадратичного элемента:



   (b) Схема разбиения области для кубического элемента:



2. Процедура формирования локальных и глобальной матриц теплопроводности

   Для расчёта локальных матриц используем приведённые выше формулы.

   Заметим, что бесконечно малые элементы в силу равномерного распределения температуры в поперечном сечении и равномерном действии ГУ по периметру поперечного сечения можно представить в виде $dV = \pi R^2 dx$ и $dS = 2\pi R dx$. Дальше требуется лишь вычислить две локальные матрицы жёсткости и два вектора правых частей.

   Глобальная матрица составляется следующим образом: первую локальную матрицу записываем в элементы глобальной матрицы с 1-3 столбцы и строки, вторую в 3-5 строки и столбцы соответственно, но к элементу глобальной матрицы (3,3) прибавляем элемент (1,1) второй локальной матрицы.

   При формировании глобальной матрицы учтём ГУ $T_1 = 150$ Для этого обнулим внедиагональные элементы в строках 1, а диагональные положим равными единице.

3. Код программы, реализующий вычисления:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from sympy import symbols, Matrix, integrate, pi

T_1 = 150
a_g = 10
T_g = 40
lambda_ = 72
H = 7.5
L = H / 2

T_anal = np.array([150, 80.9, 55.4, 46.2, 43.3])
X_anal = np.array([0, L/2, L, 3*L/2, 2*L])
R = 1
S = pi * R**2
P = 2 * pi * R

# First element
X = np.array([0, L])
len_X = len(X)
x = symbols('x')
N = Matrix.zeros(len_X, 3)

for i in range(len_X):
    N[i, 0] = (x - X[i] - L/2) *
        (x - X[i] - L) / ((-L/2) * (-L))
    N[i, 1] = (x - X[i]) * (x - X[i] - L) / ((L/2) * (-L/2))
    N[i, 2] = (x - X[i]) * (x - X[i] - L/2) / (L * (L/2))

B = N.diff(x)
K_e = np.zeros((3, 3, 2))
f_e = np.zeros((3, 1, 2))

for i in range(len_X):
    K_e[:, :, i] = integrate(S * B[i, :].T * lambda_ * B[i, :],
```

```
        (x, X[i], X[i] + L)) + \
        integrate(P * a_g * N[i, :].T * N[i, :], (x, X[i], X[i] + L))
    f_e[:, 0, i] = integrate(P * a_g * T_g * N[i, :],
        (x, X[i], X[i] + L))

# Global matrix formation
K = np.zeros((5, 5))
F = np.zeros((5, 1))

K[0:3, 0:3] = K_e[:, :, 0]
K[3:5, 3:5] = K_e[1:3, 1:3, 1]

F[0:3, 0] = f_e[:, 0, 0]
F[3:5, 0] = f_e[1:3, 0, 1]

F[2, 0] += f_e[0, 0, 1]

K[2, 2] += K_e[0, 0, 1]
K[2, 3] += K_e[0, 1, 1]
K[2, 4] += K_e[0, 2, 1]
K[3, 2] += K_e[1, 0, 1]
K[4, 2] += K_e[2, 0, 1]

K[0, 0] = 1
K[0, 1:5] = 0
F[0, 0] = T_1

T = np.linalg.solve(K, F)

# Second element
L = H / 2
X = np.array([0, L])
len_X = len(X)
N = Matrix.zeros(len_X, 4)

for i in range(len_X):
    N[i, 0] = (x - X[i] - L/3) * (x - X[i] - 2*L/3)
        * (x - X[i] - L) / ((-L/3) * (-2*L/3) * (-L))
    N[i, 1] = (x - X[i]) * (x - X[i] - 2*L/3) *
        (x - X[i] - L) / ((L/3) * (-L/3) * (-2*L/3))
    N[i, 2] = (x - X[i]) * (x - X[i] - L/3) *
        (x - X[i] - L) / (2*L/3 * (L/3) * (-L/3))
    N[i, 3] = (x - X[i]) * (x - X[i] - L/3) *
        (x - X[i] - 2*L/3) / (L * (2*L/3) * (L/3))

B = N.diff(x)
K_e = np.zeros((4, 4, 2))
f_e = np.zeros((4, 1, 2))

for i in range(len_X):
```

```
        K_e[:, :, i] = integrate(S * B[i, :].T * lambda_ * B[i, :],
            (x, X[i], X[i] + L)) + \
            integrate(P * a_g * N[i, :].T * N[i, :], (x, X[i], X[i] + L))
        f_e[:, 0, i] = integrate(P * a_g * T_g * N[i, :],
                (x, X[i], X[i] + L))

    # Global matrix formation
    K = np.zeros((7, 7))
    F = np.zeros((7, 1))

    K[0:4, 0:4] = K_e[:, :, 0]
    K[4:7, 4:7] = K_e[1:4, 1:4, 1]
    F[0:4, 0] = f_e[:, 0, 0]
    F[4:7, 0] = f_e[1:4, 0, 0]

    F[3, 0] += f_e[0, 0, 1]

    K[3, 3] += K_e[0, 0, 1]
    K[3, 4] += K_e[0, 1, 1]
    K[3, 5] += K_e[0, 2, 1]
    K[3, 6] += K_e[0, 3, 1]

    K[4, 3] += K_e[1, 0, 1]
    K[5, 3] += K_e[2, 0, 1]
    K[6, 3] += K_e[3, 0, 1]

    K[0, 0] = 1
    K[0, 1:5] = 0
    F[0, 0] = T_1

    T = np.linalg.solve(K, F)

    X = np.array([0, L/3, 2*L/3, L, 4*L/3, 5*L/3, 2*L])
```

4. Результаты:

   (a) Для квадратичного элемента:

$$K = \begin{bmatrix} 1,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ -145,1416 & 447,3628 & -145,1416 & 0,0000 & 0,0000 \\ 12,2522 & -145,1416 & 344,3186 & -145,1416 & 12,2522 \\ 0,0000 & 0,0000 & -145,1416 & 447,3628 & -145,1416 \\ 0,0000 & 0,0000 & 12,2522 & -145,1416 & 172,1593 \end{bmatrix}$$

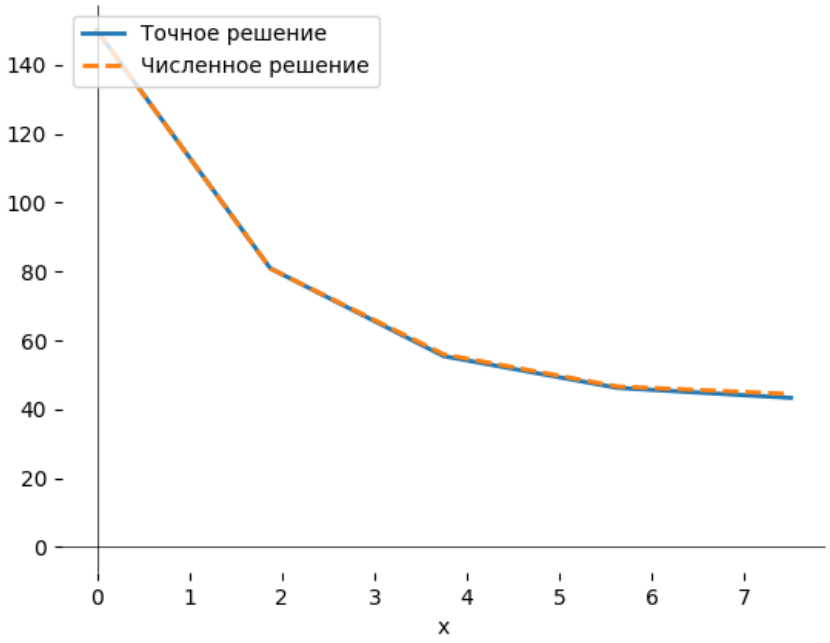
   Вектор правой части $\mathbf{f}^T$ равен:

$$\begin{bmatrix} 150,0000 & 6283,1853 & 3141,5927 & 6283,1853 & 1570,7963 \end{bmatrix}$$

Решение системы:

№ узла	Температуры, полученные МКЭ	Точные значения температуры
1	150, 00	150, 00
2	80, 86	80, 90
3	55, 94	55, 40
4	46, 61	46, 20
5	44, 44	43, 30

Сравнение численного и аналитического решения:



(b) Для кубического элемента:

$$\begin{bmatrix}
1,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\
-271,1206 & 742,3224 & -459,2257 & 76,3811 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\
76,3811 & -459,2257 & 742,3224 & -271,1206 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\
-16,9388 & 76,3811 & -271,1206 & 482,2614 & -271,1206 & 76,3811 & -16,9388 & 0,0000 \\
0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -271,1206 & 742,3224 & -459,2257 & 76,3811 & -16,9388 \\
0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 76,3811 & -459,2257 & 742,3224 & -271,1206 & 0,0000 \\
0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 76,3811 & -271,1206 & 241,1307 & 0,0000 \\
0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -16,9388 & 76,3811 & -271,1206 & 241,1307 & 0,0000
\end{bmatrix}$$

Вектор правой части $\mathbf{f}^T$ равен:

$$\begin{bmatrix} 150,0000 & 3534,2917 & 3534,2917 & 2356,1945 & 3534,2917 & 3534,2917 & 1178,0972 \end{bmatrix}$$

Решение системы:

№ узла	Температуры, полученные МКЭ	Точные значения температуры
1	150, 00	150, 00
2	96, 83	80, 90
3	69, 51	55, 40
4	55, 52	55, 40
5	48, 42	46, 20
6	45, 15	–
7	44, 22	43, 30

Сравнение численного и аналитического решения: