27/09

Одномерные краевые задачи

$$-(ku')' + cu' + bu = f, \qquad x \in (0, l), \tag{1}$$

где $u(x)$ - неизвестная функция; $k(x)$, $c(x)$, $b(x)$, $f(x)$ - известные функции.

Таблица 1 – Граничные условия

№	x = 0	x = l
1	$u(0) = U_0$	$u(l) = U_l$
2	$k(0)u'(0) = -\sigma_0$	$k(l)u'(l) = \sigma_l$
3	$k(0)u'(0) = -a_0(U_0 - u(0))$	$k(l)u'(l) = a_l(U_l - u(l))$

Интегральная формулировка

Состасим невязку:

$$r = -(ku')' + cu' + bu - f = 0 \tag{2}$$

(1) $\Leftrightarrow$ (2)

Составим следующий интеграл:

$$\int_0^l r \cdot v dx = 0, \tag{3}$$

где v – некоторая пробная функция ($v = \delta u$ – возможные изменения u)

Докажем, что (3) $\Leftrightarrow$ (2):

Предположим, что (3) выполняется, а (2) – нет, то есть $r \neq 0$. Тогда:

v – любая пробная функция:

Графики $r(x)$ и $v(x)$

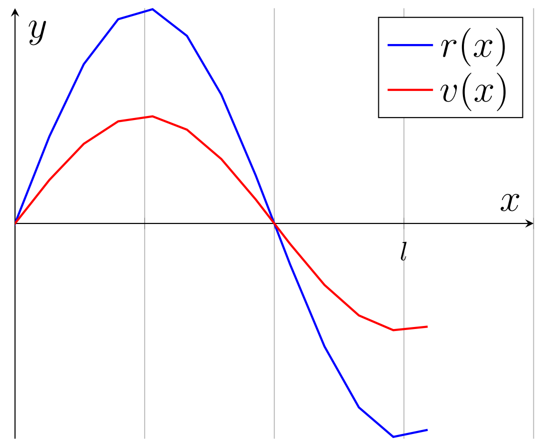
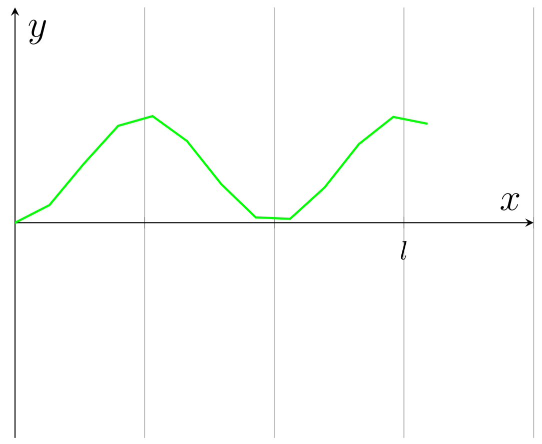


График $r(x) \cdot v(x)$



Из последнего графика видно, что

$$\int\limits_0^l r \cdot v dx \neq 0,$$

что противоречит нашему предположению о том, что (3) выполняется, ч.т.д.

Итак,

$$\int\limits_0^l r \cdot v dx = \int\limits_0^l (-(ku')'v + cu'v + buv - fv) dx = 0 \tag{4}$$

Интегрируем по частям первый интеграл:

$$\int\limits_0^l -(ku')'vdx = \left| \begin{array}{cc} \int\limits_0^l fdg = fg\Big|_0^l - \int\limits_0^l gdf & \\ dg = -(ku')'dx & g = -ku' \\ f = v & df = v'dx \end{array} \right| = \tag{5}$$

$$= -ku'v\Big|_0^l + \int\limits_0^l (ku')v'dx = \int\limits_0^l (ku')v'dx - \underbrace{(\underbrace{k(l)u'(l)v(l)}_{F_l} \underbrace{-k(0)u'(0)v(0)}_{F_0})}_{F(v)}$$

Подставим (5) в (4):

$$\int\limits_0^l ((ku')'v' + cu'v + buv - fv)dx - F(v) = 0$$

Рассмотрим граничные условия:

№	x = 0	x = l
1	$u(0) = U_0 \Rightarrow v(0) = 0,\ F_0 = 0$	$u(l) = U_l \Rightarrow v(l) = 0,\ F_l = 0$
2	$k(0)u'(0) = -\sigma_0 \Rightarrow F_0 = \sigma_0 v(0)$	$k(l)u'(l) = \sigma_l \Rightarrow F_l = \sigma_l v(l)$
3	$k(0)u'(0) = -a_0(U_0 - u(0)) \Rightarrow$ $\Rightarrow F_0 = a_0(U_0 - u(0))v(0)$	$k(l)u'(l) = a_l(U_l - u(l)) \Rightarrow$ $\Rightarrow F_l = a_l(U_l - u(l))v(l)$

Разобьем отрезок $[0, l]$ на части $[x_i, x_{i+1}]$: