Лабораторная работа №3

Метод конечных элементов для одномерной задачи теплопроводности в стержне.

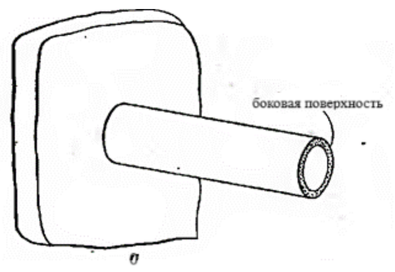
Задача. К закрепленному в стене концу стержня (x=0) подводится тепловой поток интенсивности *q*. На свободном конце стержня (x=L) происходит конвективный теплообмен тепла. Коэффициент теплообмена *h*, температура окружающей среды *Tср*. Через боковую поверхность стержня также происходит конвективный теплообмен. Площадь поперечного сечения стержня S считается постоянной.

Решить задачу методом конечных элементов с использованием одномерного линейного (симплекс) элемента. Выписать в тетради явное решение СЛАУ в случае когда стержень разбит на 3 элемента.

Разбить стержень на 5 конечных элементов и вычислить температуру в узлах МКЭ запрограммировав на языке C++.

Решить задачу при следующих данных

$k_x = 75\left[Bm/(см)\cdot{}^{\circ}C\right]$ - коэффициент теплопроводности материала, $q = -150\ \left[Bm/см^2\right]$ (считается, что положительное направление, когда тепло отводится от тела, так как по задаче тепло подводится к телу, то знак минус), $\alpha_g = 10\ \left[Bm/\left(см^2\right)\cdot{}^{\circ}C\right]$-коэффициент теплообмена, $S = \pi\ см^2$, $L = 7.5\ см$



Руководство для решения задачи.

Рассмотрим дифференциальное уравнение, описывающее распространение тепла в стержне:

$$-\frac{d}{dx}\left(k_x\frac{dT}{dx}\right) = f\ ,$$

где f – погонная интенсивность подачи тепла, если внутри стержня есть источник. В задаче внутренние источники тепла не заданы, следовательно, f=0.

Граничные условия:

$$Q_1 = k_x \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} = -q\,,\ Q_2 = k_x \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=L} = \alpha_g\left(T_{cp} - T(l)\right)$$

$$Q_2 = k_x \left.\frac{dT}{dx}\right|_{\Gamma} = \alpha_g\left(T_{cp} - T\right)$$, где Г – боковая поверхность стержня

Вариационная постановка:

Так как нам дан стержень сечения S, то для решения задачи интегрирование надо проводить по объему стержня. Однако $V = S\,dx$, где x - координата по длине стержня.

$\int_0^L -\frac{d}{dx}\left(k_x \frac{dT}{dx}\right) S\delta T dx = 0$, $\delta T = \nu$ - возможные изменения температуры (аналог невязки ν).

Интегрируя выражение по частям (проинтегрировать самостоятельно и выписать) получим вариационную постановку:

$$\int_0^L \frac{d\delta T}{dx}\left(k_x \frac{dT}{dx}\right) Sdx - F(\nu) = 0\,.$$

$$F(\nu) = S\frac{d}{dx}\left(k_x \frac{dT}{dx}\right)\delta T\Big|_0^L = SQ_2\delta T_2 - SQ_1\delta T_1$$

Далее делим стержень на нужное количество элементов

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d\delta T}{dx}\left(k_x \frac{dT}{dx}\right) Sdx - t_1^{(i)}\delta T_i - t_2^{(i)}\delta T_{i+1} = 0$$

аппроксимируем линейно неизвестные функции

$$T = N^{(i)}q^{(i)}, \delta T = N^{(i)}\delta q^{(i)},\ N^{(i)} = \left[N_1^{(i)}\ N_2^{(i)}\right],\quad N_1^{(i)} = 1 - \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}, N_2^{(i)} = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i},$$

$$q^{(i)} = \left[T_i\ \ T_{i+1}\right], \delta q^{(i)} = \left[\delta T_i\ \ \delta T_{i+1}\right]$$

Подставлем в интегральное уравнение и сводим решение к СЛАУ вида

$$t^{(i)} = K^{(i)}q^{(i)} - P^{(i)}$$

Суммируя по КЭ с учетом ГУ получаем СЛАУ $Kq = P$