27/09

Одномерные краевые задачи

$$-(ku')' + cu' + bu = f, \qquad x \in (0, l), \tag{1}$$

где $u(x)$ - неизвестная функция; $k(x)$, $c(x)$, $b(x)$, $f(x)$ - известные функции.

Таблица 1 – Граничные условия

№	x = 0	x = l
1	$u(0) = U_0$	$u(l) = U_l$
2	$k(0)u'(0) = -\sigma_0$	$k(l)u'(l) = \sigma_l$
3	$k(0)u'(0) = -a_0(U_0 - u(0))$	$k(l)u'(l) = a_l(U_l - u(l))$

Интегральная формулировка

Состасим невязку:

$$r = -(ku')' + cu' + bu - f = 0 \tag{2}$$

(1) $\Leftrightarrow$ (2)

Составим следующий интеграл:

$$\int_0^l r \cdot v dx = 0, \tag{3}$$

где v – некоторая пробная функция ($v = \delta u$ – возможные изменения u)

Докажем, что (3) $\Leftrightarrow$ (2):

Предположим, что (3) выполняется, а (2) – нет, то есть $r \neq 0$. Тогда:

v – любая пробная функция:

Графики $r(x)$ и $v(x)$

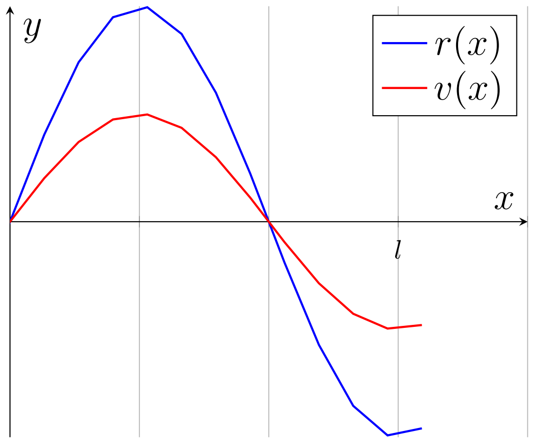
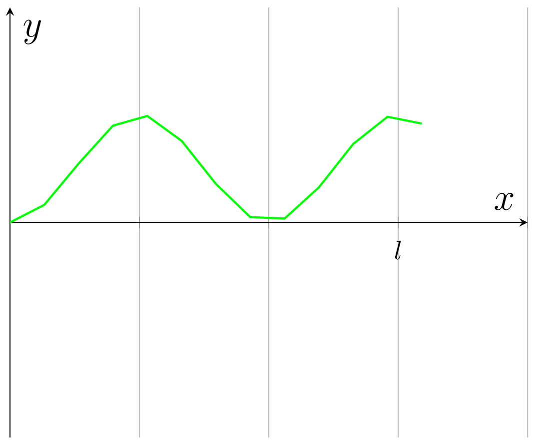


График $r(x) \cdot v(x)$



Из последнего графика видно, что

$$\int\limits_0^l r \cdot v dx \neq 0,$$

что противоречит нашему предположению о том, что (3) выполняется, ч.т.д.

Итак,

$$\int\limits_0^l r \cdot v dx = \int\limits_0^l (-(ku')'v + cu'v + buv - fv) dx = 0 \tag{4}$$

Интегрируем по частям первый интеграл:

$$\int_0^l -(ku')'v dx = \left| \begin{matrix} \int_0^l f dg = fg\Big|_0^l - \int_0^l g df & \\ dg = -(ku')'dx & g = -ku' \\ f = v & df = v'dx \end{matrix} \right| = \qquad (5)$$

$$= -ku'v\Big|_0^l + \int_0^l (ku')v'dx = \int_0^l (ku')v'dx - \underbrace{(\underbrace{k(l)u'(l)v(l)}_{F_l} \underbrace{-k(0)u'(0)v(0)}_{F_0})}_{F(v)}$$

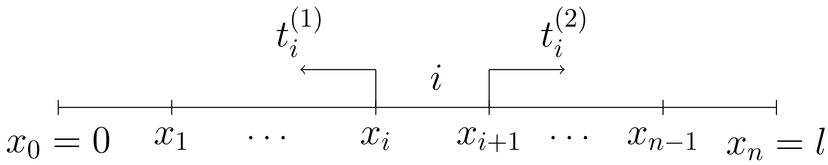
Подставим (5) в (4):

$$\int_0^l ((ku')'v' + cu'v + buv - fv)dx - F(v) = 0$$

Рассмотрим граничные условия:

№	x = 0	x = l
1	$u(0) = U_0 \Rightarrow v(0) = 0,\ F_0 = 0$	$u(l) = U_l \Rightarrow v(l) = 0,\ F_l = 0$
2	$k(0)u'(0) = -\sigma_0 \Rightarrow F_0 = \sigma_0 v(0)$	$k(l)u'(l) = \sigma_l \Rightarrow F_l = \sigma_l v(l)$
3	$k(0)u'(0) = -a_0(U_0 - u(0)) \Rightarrow$ $\Rightarrow F_0 = a_0(U_0 - u(0))v(0)$	$k(l)u'(l) = a_l(U_l - u(l)) \Rightarrow$ $\Rightarrow F_l = a_l(U_l - u(l))v(l)$

Разобьем отрезок $[0, l]$ на части $[x_i, x_{i+1}]$:



$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} r \cdot v dx = 0 \Rightarrow \int_{x_i}^{x_{i+1}} [(ku')v' + cu'v + buv - fv]dx - t_1^{(i)} v_i - t_2^{(i)} v_{i+1} = 0, \qquad (6)$$

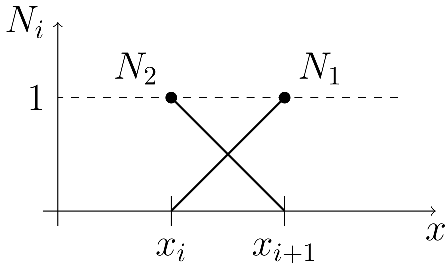
где $t_1^{(i)}, t_2^{(i)}$ – реакции отброшенных сил

$$t_1^{(i)} = -k(x_i)u'(x_i) \qquad t_2^{(i)} = -k(x_{i+1})u'(x_{i+1})$$

$$v_i = v(x_i) \qquad v_{i+1} = v(x_{i+1})$$

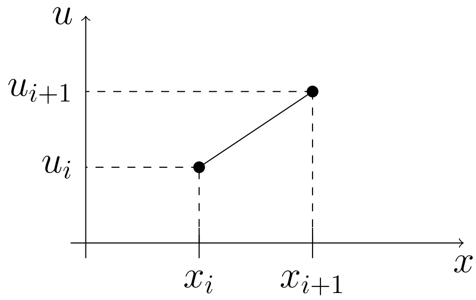
$$u = N_1^{(i)} u_i + N_2^{(i)} u_{i+1},$$

где $N_1^{(i)}, N_2^{(i)}$ – полиномы Лагранжа:



Аппроксимируем неизвестную функцию u:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x$$



$$\begin{cases} u(x_i) = \alpha_1 + \alpha_2 x_i = u_i \\ u(x_{i+1}) = \alpha_1 + \alpha_2 x_{i+1} = u_{i+1} \end{cases}$$

Поиск коэффициентов α_1, α_2:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_{i+1} \end{vmatrix} = x_{i+1} - x_i = l_i$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} u_i & x_i \\ u_{i+1} & x_{i+1} \end{vmatrix} = u_i x_{i+1} - u_{i+1} x_i$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & u_i \\ 1 & u_{i+1} \end{vmatrix} = u_{i+1} - u_i$$

$$\alpha_1 = \frac{u_i x_{i+1} - u_{i+1} x_i}{l_i}, \quad \alpha_2 = \frac{u_{i+1} - u_i}{l_i}$$

Подставляем в u:

$$u = \frac{u_i x_{i+1} - u_{i+1} x_i}{l_i} + \frac{u_{i+1} - u_i}{l_i} x = \underbrace{\left(\frac{x_{i+1} - x}{l_i}\right)}_{N_1^{(i)}} u_i + \underbrace{\left(\frac{x - x_i}{l_i}\right)}_{N_2^{(i)}} u_{i+1}$$

В матричном виде:

$$u = Nq,\ \ N = [\ \underbrace{N_1^{(i)},\quad N_2^{(i)}}_{\text{функции формы}}\ ],\ \ q = \begin{bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix}$$

$$N_1^{(i)} = \frac{x_{i+1} - x}{l_i} = 1 - \frac{x - x_i}{l_i}$$

$$N_2^{(i)} = \frac{x - x_i}{l_i}$$

Вернемся к интегралу (6):

$$u = Nq$$

$$u' = \frac{dN}{dx} q = Bq,$$

где B – матрица производных от функций форм:

$$B = \left[-\frac{1}{l_i},\quad \frac{1}{l_i}\right]$$

$$v = N\delta q, \quad \delta q = [v_i \quad v_{i+1}]$$

$$v' = B\delta q$$

Подставляем в (6):

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} [\underbrace{(B\delta q)^T}_{(v')^T} k \underbrace{Bq}_{u'} + \underbrace{(N\delta q)^T}_{v^T} c \underbrace{Bq}_{u'} + \underbrace{(N\delta q)^T}_{v^T} b \underbrace{Nq}_{u} - \underbrace{(N\delta q)^T}_{v^T} f] dx -$$

$$-t_1^{(i)} v_i - t_2^{(i)} v_{i+1} = 0$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \delta q^T[(B^T kB + N^T cB + N^T bN)q - N^T f]dx - t_1^{(i)} v_i - t_2^{(i)} v_{i+1} = 0$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (B^T kB + N^T cB + N^T bN)dx = K^{(i)}$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} N^T f dx = P^{(i)}$$

$K^{(i)}$ и $P^{(i)}$ – матрицы 2×2.

$$t_1^{(i)} v_i + t_2^{(i)} v_{i+1} = \delta q^T t^{(i)}, \quad t^{(i)} = \begin{bmatrix} t_1^{(i)} \\ t_2^{(i)} \end{bmatrix}$$

$\delta q^T \neq 0$, поэтому можно сократить.

Получившаяся СЛАУ:

$$\boxed{K^{(i)} q = P^{(i)} + t^{(i)}}$$