04/10

Одномерные краевые элементы

1. Граничные условия Дирихле (I рода)

$$u(0) = u_0,\ u(l) = u_l$$

2. Граничные условия Неймана

$$k(0)u'(0) = -\sigma_0; \quad k(l)u'(l) = \sigma_l; \quad -(ku')' = f$$

$$u' = -\frac{1}{k}\int\limits_0^l f dx + C_1 \Rightarrow u = \int\limits_0^l (-\frac{1}{k}\int\limits_0^l f dx + C_1)dx + C_2 \Rightarrow u = u(x) + \overline{C_0}$$

$$u(x_0) = C_0$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \delta q^T \left\{ \left[B^T k B + N^T c B + \mathbf{N'}^T b N \right] q - N^T f \right\} dx$$

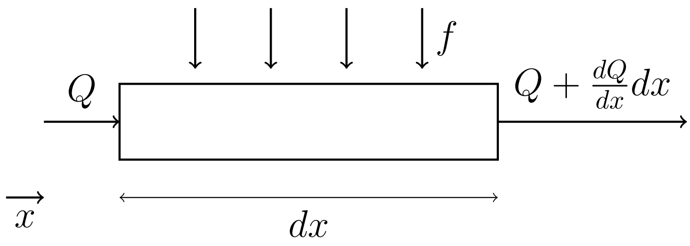
$$N = \left[N_1^{(i)}, N_2^{(i)} \right]; \quad N_1^{(i)} = 1 - \frac{x - x_i}{l_i};\ N_2^{(i)} = 1 - \frac{x - x_i}{l_i}$$

$$B = \left[B_1^{(i)}, B_2^{(i)} \right] = \left[-\tfrac{1}{l_i}, \tfrac{\lambda}{l_i} \right]; \qquad \xi = x - x_i,\ d\xi = dx$$

$$\int_0^{l_i} \left[B^T k(x) B + N^T c(x) B + N^T b(x) N \right] d\xi$$

$$\int\limits_0^{l_i} c(\xi + x_i) \begin{bmatrix} 1 - \frac{\xi}{l_i} \\ \frac{\xi}{l_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{l_i} & \frac{1}{l_i} \end{bmatrix} d\xi = \int\limits_0^{l_i} \frac{c(\xi + x_i)}{l_i} \begin{bmatrix} \frac{\xi}{l_i} - 1 & 1 - \frac{\xi}{l_i} \\ -\frac{\xi}{l_i} & \frac{\xi}{l_i} \end{bmatrix} d\xi$$

Задача теплопроводности в стержне



$$Q + f dx = Q + \frac{dQ}{dx} \cdot dx \Rightarrow f = \frac{dQ}{dx} \tag{1}$$

$$Q = -K_x \cdot \frac{dT}{dx} - \text{ закон Фурье} \tag{2}$$

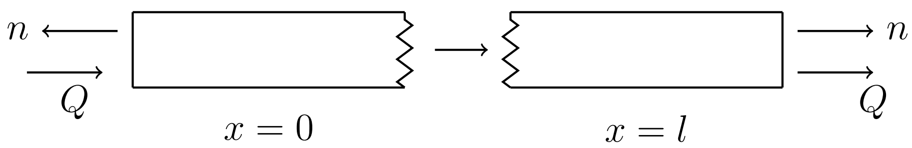
где $K_x = \lambda S$ - коэф. теплопроводности стержня, λ - коэф. теплопроводности материала, S - площадь сечения стержня.

(2) $\rightarrow$ (1):

$$-\frac{d}{dx}(K_x \cdot \frac{dT}{dx}) = f \tag{3}$$

Граничные условия:

1. $T(0) = T_0,\ T(l) = T_l$
2. $-K_x \cdot \frac{dT}{dx}|_{x=0} = q,\ -K_x \cdot \frac{dT}{dx}|_{x=l} = -q$
3. $K_x \cdot \frac{dT}{dx}|_{x=0} = -\alpha g(T_0 - T(0)),\ K_x \cdot \frac{dT}{dx}|_{x=l} = \alpha g(T_l - T(l))$



Чтобы определить знак в граничных условиях второго рода нужно смотреть на направление $Q = K_x \cdot \frac{dT}{dx}$.

Интегральная формулировка: $r = -\frac{d}{dx}(K_x \cdot \frac{dT}{dx}) - f = 0, \quad v = \delta T$

$$\int_0^l (-\frac{d}{dx}(K_x \cdot \frac{dT}{dx}) - f) \cdot \delta T \cdot S dx = 0 \Rightarrow \int_0^l \frac{d\delta T}{dx}(K_x \cdot \frac{dT}{dx}) \cdot S dx - F(\delta T) = 0 \tag{4}$$

$$F(\delta T) = S(K_x \cdot \frac{dT}{dx}) \cdot \delta T|_0^l = -SQ_l \cdot \delta T(l) + SQ_0 \cdot \delta T(0)$$

$$Q_0 = -K_x \cdot \frac{dT}{dx}|_{x=0}, Q_l = -K_x \cdot \frac{dT}{dx}|_{x=l}$$

$$T = Nq = N_1^{(i)} T_i + N_2^{(i)} T_{i+1}, \quad \frac{dT}{dx} = Bq$$

$$\delta T = N\delta q = N_1^{(i)} \delta T_i + N_2^{(i)} \delta T_{i+1}, \quad \frac{d\delta T}{dx} = B\delta q$$

Вариационная формулировка:

$$J(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^l K_x \left(\frac{dT}{dx}\right)^2 S\,dx - \int\limits_0^l SfT\,dx + SQ_lT_l - SQ_0T_0 \to \min \quad \text{(совпадает с (4))}$$

$$\Delta J = J(T+\delta T) - J(T) = \frac{1}{2}\int\limits_0^l K_x S \left(\frac{d(T+\delta T)}{dx}\right)^2 dx - \int_0^l Sf(T+\delta T)\,dx -$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^l K_x \left(\frac{dT}{dx}\right)^2 S\,dx + \int\limits_0^l SfT\,dx + SQ_l(T_l+\delta T_l) - SQ_0(T_0-\delta T_0) - SQ_lT_l + SQ_0T_0 =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^l SK_x \left[\left(\frac{dT}{dx}\right)^2 + 2\cdot\frac{dT}{dx}\cdot\frac{d\delta T}{dx} + \left(\frac{d\delta T}{dx}\right)^2\right] dx - \int\limits_0^l Sf\delta T\,dx -$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^l SK_x \left(\frac{dT}{dx}\right)^2 dx + SQ_l\delta T_l - SQ_0\delta T_0$$

Оставим линейную часть приращений ΔJ относительно δT:

$$\int\limits_0^l SK_x \frac{dT}{dx}\cdot\frac{d\delta T}{dx}\,dx - \int\limits_0^l Sf\delta T\,dx + SQ_l\delta T_l - SQ_0\delta T_0 \to (4)$$