Треугольные конечные элементы высшего порядка.

Задание

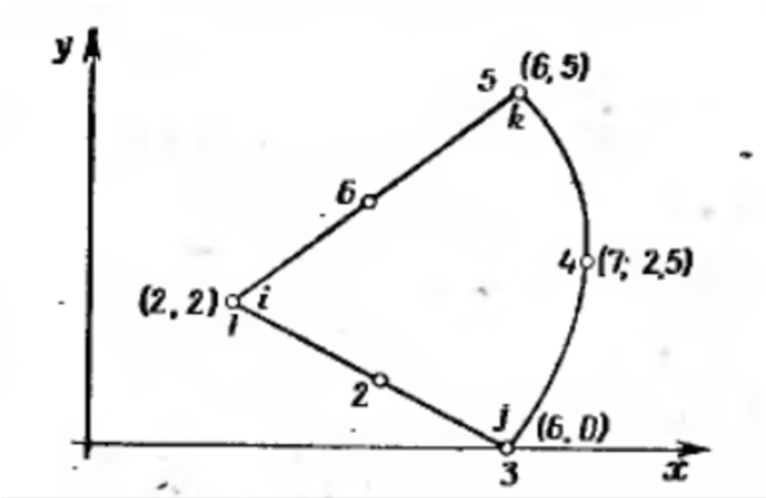
1. Определить функции формы для квадратичного треугольного элемента. Записать общую процедуру вывода и объяснить.

2. Вычислить $\dfrac{\partial N_i}{\partial x}, \dfrac{\partial N_i}{\partial y}$ в произвольной точке $k = 1 \ldots 6 \neq i$ для квадратичного изопараметрического треугольного элемента (см. рисунок), где $i = 1 \ldots 6$ – номер варианта по журналу.

3. Вычислить численно интеграл $\iint\limits_S \left(\dfrac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \right) dS$ по площади треугольного элемента (см. рисунок). Проверить ответ, применив формулу

$$\int\limits_{S^{(e)}} L_1^\alpha L_2^\beta L_3^\gamma dS = \frac{\alpha!\beta!\gamma!}{(\alpha+\beta+\gamma+2)!} \cdot 2S^{(e)}$$

.

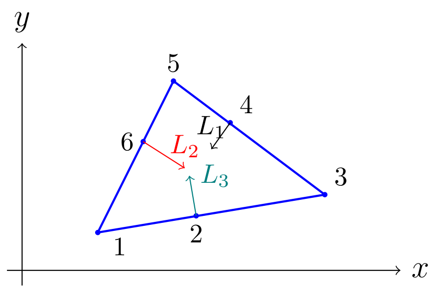


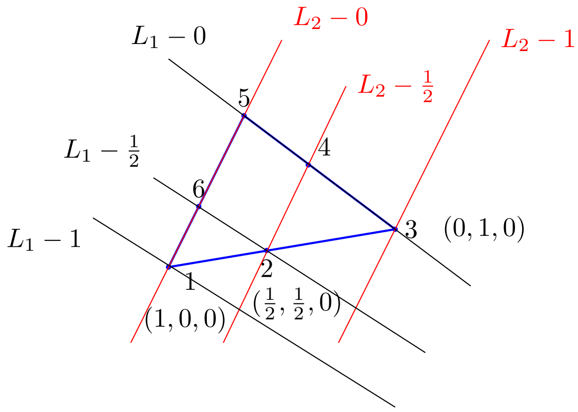
Решение

1. Функции формы определяются через L координаты. Так как функция формы N_i в узле i должна равняться 1, а в остальных 0, то её можно определить как произведение функций прямых, проходящих через все узлы, кроме i-го:

$$N_\beta = \prod_{\delta=1}^{n} \frac{F_\delta}{F_\delta|_{L_1,L_2,L_3}}, \;\; F_\delta - \text{ пробные функции,}$$

где n – степень конечного элемента.





Функции формы:

$$N_1 = \frac{L_1\left(L_1 - \frac{1}{2}\right)}{1\left(1 - \frac{1}{2}\right)} = L_1(2L_1 - 1)$$

$$N_2 = \frac{L_2 L_1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 4L_1L_2$$

$$N_3 = \frac{L_2\left(L_2 - \frac{1}{2}\right)}{1\left(1 - \frac{1}{2}\right)} = L_2(2L_2 - 1)$$

$$N_4 = 4L_2L_3$$

$$N_5 = L_3(2L_3 - 1)$$

$$N_6 = 4L_1L_3$$

2. Вычислим производные от функций форм

Точка	Координаты точки	
1	2	2
2	4	1
3	6	0
4	7	2.5
5	6	5
6	4	3.5

$$\begin{cases} x = \sum\limits_{k=1}^{6} x_k N_k = 2L_1(2L_1 - 1) + 4 \cdot 4L_1L_2 + 6L_2(2L_2 - 1) + 7 \cdot 4L_2L_3 + 6 \cdot L_3(2L_3 - 1) + 4 \cdot 4L_1L_3 \\ y = \sum\limits_{k=1}^{6} y_k N_k = 2L_1(2L_1 - 1) + 1 \cdot 4L_1L_2 + 2.5 \cdot 4L_2L_3 + 5 \cdot L_3(2L_3 - 1) + 3.5 \cdot 4L_1L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2L_1(2L_1 - 1) + 16L_1L_2 + 6L_2(2L_2 - 1) + 28L_2L_3 + 6 \cdot L_3(2L_3 - 1) + 16L_1L_3 \\ y = 2L_1(2L_1 - 1) + 4L_1L_2 + 10L_2L_3 + 5L_3(2L_3 - 1) + 14L_1L_3 \end{cases}$$

$$L_3 = 1 - L_1 - L_2$$

Якобиан:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial L_1} & \frac{\partial y}{\partial L_1} \\ \frac{\partial x}{\partial L_2} & \frac{\partial y}{\partial L_2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \\ \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \end{bmatrix} = J^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial N_\beta}{\partial L_1} \\ \frac{\partial N_\beta}{\partial L_2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial L_1} = -4L_2 + 4, \\ \frac{\partial y}{\partial L_1} = -3, \\ \frac{\partial x}{\partial L_2} = -4L_1 - 8L_2 + 4, \\ \frac{\partial y}{\partial L_2} = -5 \end{cases}$$

$$J = \begin{bmatrix} -4L_2-4 & -3 \\ -4L_1-8L_2+4 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow J^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{12L_1+4L_2-32} & -\frac{3}{12L_1+4L_2-32} \\ \frac{-L_1-2L_2+1}{3L_1+L_2-8} & \frac{L_2+1}{3L_1+L_2-8} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_3}{\partial L_1} \\ \frac{\partial N_3}{\partial L_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4L_2-1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_3}{\partial x} \\ \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{12L_1+4L_2-32} & -\frac{3}{12L_1+4L_2-32} \\ \frac{-L_1-2L_2+1}{3L_1+L_2-8} & \frac{L_2+1}{3L_1+L_2-8} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 4L_2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-12L_2+3}{12L_1+4L_2-32} \\ \frac{(L_2+1)(4L_2-1)}{3L_1+L_2-8} \end{bmatrix}$$

Выберем узел $i = 3$:

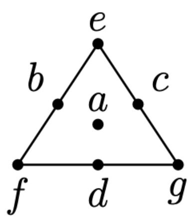
$$L_1 = 0,\ L_2 = 1$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_3}{\partial x} \\ \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{28} \\ -\frac{6}{7} \end{bmatrix}$$

3. $$\iint\limits_S \left(\frac{\partial N_3}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_3}{\partial y}\right) dS = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-L_1} \left(\frac{\partial N_3}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_3}{\partial y}\right) \cdot |J| dL_2 dL_1$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_3}{\partial y} = \frac{-12L_2+3}{12L_1+4L_2-32} \cdot \frac{(L_2+1)(4L_2-1)}{3L_1+L_2-8}$$

Для численного интегрирования будем использовать схему третьего порядка точности:

	$R = o(h^4)$	a	$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$	$\frac{27}{120}$
		b	$\frac{1}{2}$ 0 $\frac{1}{2}$	$\frac{8}{120}$
		c	0 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{8}{120}$
		d	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ 0	$\frac{8}{120}$
		e	0 0 1	$\frac{3}{120}$
		f	1 0 0	$\frac{3}{120}$
		g	0 1 0	$\frac{3}{120}$

$$Z = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-L_1} \left(\frac{\partial N_3}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_3}{\partial y}\right) \cdot |J| dL_2 dL_1 = \sum_{i=1}^{3} W_i g_i(L_1, L_2, L_3)$$

$$g_i(L_1, L_2, L_3) = \frac{\partial N_3}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_3}{\partial y} \cdot |J| = \frac{(12L_2-3)(-16L_2^2+20L_2-4)}{4L_2+8+12L_1}$$

$$\begin{cases} g_1 = \frac{(4-3)(-16/9+20/3-4)}{4/3+8+4} = \frac{1}{15}, \\ g_2 = \frac{(-3)(-4)}{8+6} = \frac{6}{7}, \\ g_3 = \frac{(6-3)(-4+10-4)}{2+8} = \frac{3}{5}, \\ g_4 = \frac{(6-3)(-4+10-4)}{2+8+6} = \frac{3}{8}, \\ g_5 = \frac{(-3)(-4)}{8} = \frac{3}{2}, \\ g_6 = \frac{(-3)(-4)}{8+12} = \frac{3}{5}, \\ g_7 = \frac{(12-3)(-16+20-4)}{4+8} = 0 \end{cases}$$

$$Z = \frac{27}{120} \cdot \frac{1}{15} + \frac{8}{120} \cdot \left(\frac{6}{7} + \frac{3}{5} + \frac{3}{8}\right) + \frac{3}{120} \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{5} + 0\right) = \frac{171}{560} \approx 0.1896$$