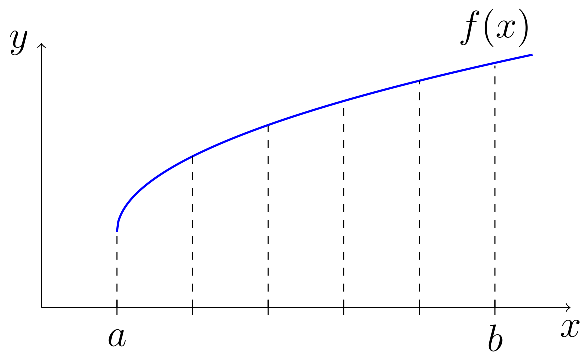
8/11

Численное интегрирование

$$\frac{\partial N_\beta}{\partial x} = J^{-1}\frac{\partial N_\beta}{\partial \xi}$$

1. Формулы Ньютона-Котса

n точек, интерполяционный полином $(n+1)$-ого порядка, совпадающий в узлах с функцией $f(x)$



$n = 6$ $\Delta x = \frac{b-a}{5}$

$$\int\limits_a^b f(x)dx = (b-a)\sum_{i=1}^{n} H_i \cdot f(x_i),$$

где H_i – весовые коэффициенты

$n=2$ формула трапеции	$H_1 = \frac{1}{2},\ H_2 = \frac{1}{2}$
$n=3$ формула Симпсона	$H_1 = \frac{1}{6},\ H_2 = \frac{2}{3},\ H_3 = \frac{1}{6}$
$n=4$	$H_1 = \frac{1}{8},\ H_2 = \frac{3}{8},\ H_3 = \frac{3}{8},\ H_4 = \frac{1}{8}$
$n=5$	$H_1 = \frac{7}{90},\ H_2 = \frac{32}{90},\ H_3 = \frac{12}{90},\ H_4 = \frac{32}{90},\ H_5 = \frac{7}{90}$

$N_2(X)$ (2 – порядок), $N^T N -$ 4 порядок, $B^T B -$ 2 порядок

2. Квадратурные формулы Гаусса-Лежандра

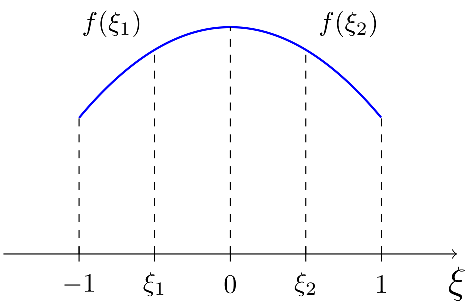
n точек, рассматриваем $2n$ неизвестных функций f и x, $(2n-1)$ – порядок интерполяционного многочлена.

$$N^T N \Rightarrow 4 = 2n - 1,\ n = \frac{5}{2} = 2.5 \approx 3$$

(для многочлена 4 порядка достаточно трех точек интегрирования)

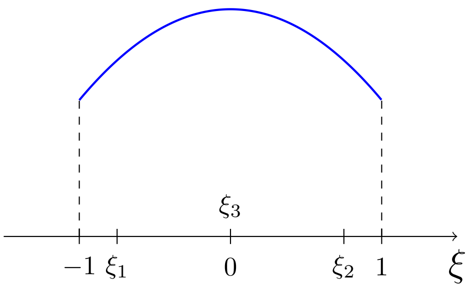
$$\int\limits_{-1}^{1} f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) H_i$$

$n = 2:$



$$\xi_1 = -0.57735,\ H_1 = 1,\ \xi_2 = 0.57735,\ H_2 = 2$$

$n = 3:$



$$\xi_1, \xi_2 = \pm 0.774597,\ H_1 = H_2 = \frac{8}{9},\ \xi_3 = 0,\ H_3 = \frac{5}{9}$$

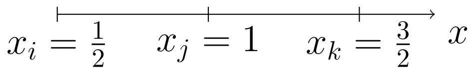
На этом рисунке ξ_1, ξ_2 ближе к ± 1.

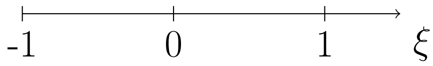
$n = 4:$

$$\xi_1, \xi_2 = \pm 0.861136,\ H_1 = H_2 = 0.347855$$

$$\xi_3, \xi_4 = \pm 0.339981,\ H_3 = H_4 = 0.652145$$

$$\int_{-1}^{1} N^T N |J| d\xi$$





$$x = N_i x_i + N_j x_j + N_k x_k$$

$$N_i = \frac{\xi}{2}(1-\xi),\ N_j = (1-\xi)(1+\xi),\ N_k = \frac{\xi}{2}(1+\xi)$$

$$J = \frac{dx}{d\xi} = \frac{dN_i}{d\xi}x_i + \frac{dN_j}{d\xi}x_j + \frac{dN_k}{d\xi}x_k = \left(-\frac{1}{2}+\xi\right)x_i - 2\xi x_j + \left(\frac{1}{2}+\xi\right)x_k =$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{\xi}{2} - 2\xi + \frac{3}{4} + \frac{3\xi}{2} = \frac{1}{2}$$

$$J^{-1} = 2$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} \left(-\frac{\xi}{2}(1-\xi)\right)^2 & -\frac{\xi}{2}(1-\xi)(1-\xi^2) & -\frac{\xi^2}{4}(1-\xi^2) \\ -\frac{\xi}{2}(1-\xi)(1-\xi^2) & (1-\xi^2)^2 & \frac{\xi}{2}(1-\xi)(1+\xi)^2 \\ -\frac{\xi^2}{4}(1-\xi^2) & \frac{\xi}{2}(1-\xi)(1+\xi)^2 & \frac{\xi^2}{4}(1+\xi)^2 \end{bmatrix} d\xi =$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_s N_i(\xi_s)N_i(\xi_s)H_s & \sum_s N_i(\xi_s)N_j(\xi_s)H_s & \sum_s N_i(\xi_s)N_k(\xi_s)H_s \\ \sum_s N_i(\xi_s)N_j(\xi_s)H_s & \sum_s N_j(\xi_s)N_j(\xi_s)H_s & \sum_s N_j(\xi_s)N_k(\xi_s)H_s \\ \sum_s N_i(\xi_s)N_k(\xi_s)H_s & \sum_s N_k(\xi_s)N_j(\xi_s)H_s & \sum_s N_k(\xi_s)N_k(\xi_s)H_s \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$\begin{cases} N_i(\xi_1) = \frac{\xi_1}{2}(1-\xi_1) \\ N_j(\xi_1) = (1-\xi_1)(1+\xi_1) \\ N_k(\xi_1) = \frac{\xi_1}{2}(1+\xi_1) \end{cases} \quad \begin{cases} N_i(\xi_2) = \frac{\xi_2}{2}(1-\xi_2) \\ N_j(\xi_2) = (1-\xi_2)(1+\xi_2) \\ N_k(\xi_2) = \frac{\xi_2}{2}(1+\xi_2) \end{cases}$$

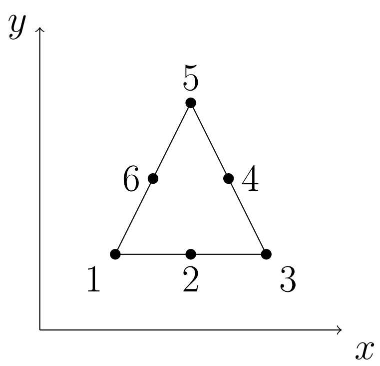
$$\begin{cases} N_i(\xi_3) = \frac{\xi_3}{2}(1-\xi_3) \\ N_j(\xi_3) = (1-\xi_3)(1+\xi_3) \\ N_k(\xi_3) = \frac{\xi_3}{2}(1+\xi_3) \end{cases}$$

Для первого элемента матрицы (1):

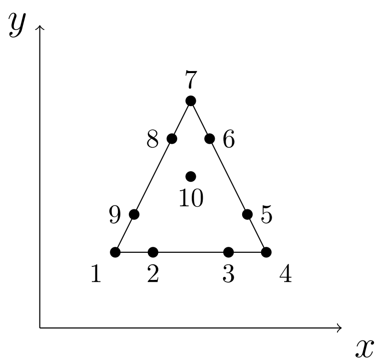
$$\int\limits_{-1}^{1} f(\xi)d\xi = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{Якобиан}} \sum_{s=1}^{3} \underbrace{f(\xi_s)}_{N_i N_i} H_s =$$

$$= \frac{1}{2}[H_1 N_i(\xi_1) N_i(\xi_1) + H_2 N_i(\xi_2) N_i(\xi_2) + H_3 N_i(\xi_3) N_i(\xi_3)]$$

Квадратичные и кубические треугольные элементы

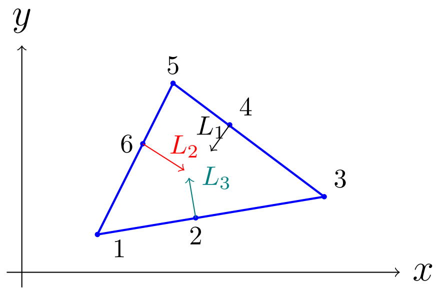


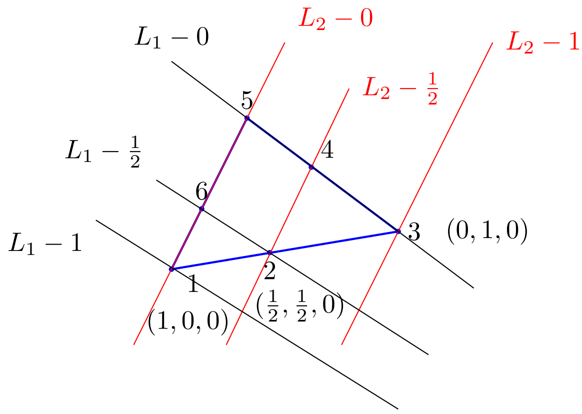
Аппроксимирующая функция: $\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 = N_1 \Phi_1 + \cdots + N_6 \Phi_6 = [N]\{\Phi\}$.



$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} xy^2 = N_i \Phi_i = [N]\{\Phi\},\ i = 1, \ldots, 10.$

Функции формы для квадратичных треугольных конечных элементов в L-координатах:





$$N_1 = L_1\left(L_1 - \frac{1}{2}\right)$$

(нужно взять такие линии, которые захватывают все узлы, кроме первого)

Нормируем:

$$N_1 = \frac{L_1\left(L_1 - \frac{1}{2}\right)}{1\left(1 - \frac{1}{2}\right)} = L_1(2L_1 - 1)$$

$$N_2 = \frac{L_2 L_1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 4L_1L_2$$

$$N_3 = \frac{L_2\left(L_2 - \frac{1}{2}\right)}{1\left(1 - \frac{1}{2}\right)} = L_2(2L_2 - 1)$$

$$N_4 = 4L_2L_3$$

$$N_5 = L_3(2L_3 - 1)$$

$$N_6 = 4L_1L_3$$

$$N_\beta = \prod_{\delta=1}^{n} \frac{F_\delta}{F_\delta|_{L_1,L_2,L_3}},\ F_\delta - \text{ пробные функции}$$