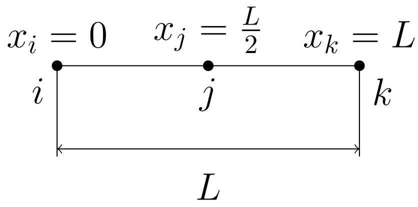
01/11

Конечные элементы более высокого порядка

Одномерные квадратичные и кубические функции

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x,\ \dim L = 1, n = 2 \text{ – симплекс элементы.}$$

Комплекс элементы – количество узлов n > 2.



$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 = N\Phi$

В общем виде: $\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \dots + \alpha_n x^{n-1}$

$$\begin{cases} \Phi_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_2 x_i^2 \\ \Phi_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_2 x_j^2 \\ \Phi_k = \alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_2 x_k^2 \end{cases} \to \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$$

$$\alpha_1 = \Phi_i,\ \alpha_2 = \frac{-3\Phi_i + 4\Phi_j - \Phi_k}{L},\ \alpha_3 = \frac{2(\Phi_i - 2\Phi_j + \Phi_k)}{L^2}$$

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 =$$

$$= \Phi_i \underbrace{\left(1 - \frac{3x}{L} + \frac{2x^2}{L^2}\right)}_{N_i} + \Phi_j \underbrace{\left(\frac{4x}{L} - \frac{4x^2}{L^2}\right)}_{N_j} + \Phi_k \underbrace{\left(-\frac{x}{L} + \frac{2x^2}{L^2}\right)}_{N_k} =$$

$$= N_i\Phi_i + N_j\Phi_j + N_k\Phi_k = [N]\{\Phi\}$$

$$N_i = 1 - \frac{3x}{L} + \frac{2x^2}{L^2},\ N_j = \frac{4x}{L} - \frac{4x^2}{L^2},\ N_k = -\frac{x}{L} + \frac{2x^2}{L^2}$$

Этот же результат можно получить без использования системы уравнений. Зададим в узлах пробные функции $f_\alpha,\ \alpha \in \{i, j, k\}$, такие, что $f_\alpha(x_\alpha) = 0$:

Формулы для нахождения функций форм без использования системы уравнений:

$$N_i = \frac{f_j f_k}{f_j f_k|_{x=x_i}},\ N_j = \frac{f_i f_k}{f_i f_k|_{x=x_j}},\ N_k = \frac{f_i f_j}{f_i f_j|_{x=x_k}}$$