Задача

К закрепленному в стене концу стержня ($x = 0$) подводится тепловой поток интенсивности q. На свободном конце стержня ($x = L$) происходит конвективный теплообмен тепла. Коэффициент теплообмена h, температура окружающей среды T_{cp}. Через боковую поверхность стержня также происходит конвективный теплообмен. Площадь поперечного сечения стержня S считается постоянной.

Решить задачу методом конечных элементов с использованием одномерного линейного (симплекс) элемента. Выписать в тетради явное решение СЛАУ в случае когда стержень разбит на 3 элемента.

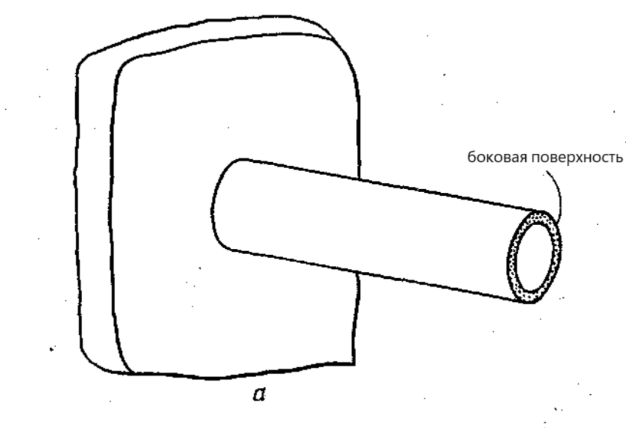
Разбить стержень на 5 конечных элементов и вычислить температуру в узлах МКЭ запрограммировав на языке C++.

Решить задачу при следующих данных:

$k_x = 75\,[\text{Вт}/(\text{см})\cdot^\circ \text{C}]$ - коэффициент теплопроводности материала,

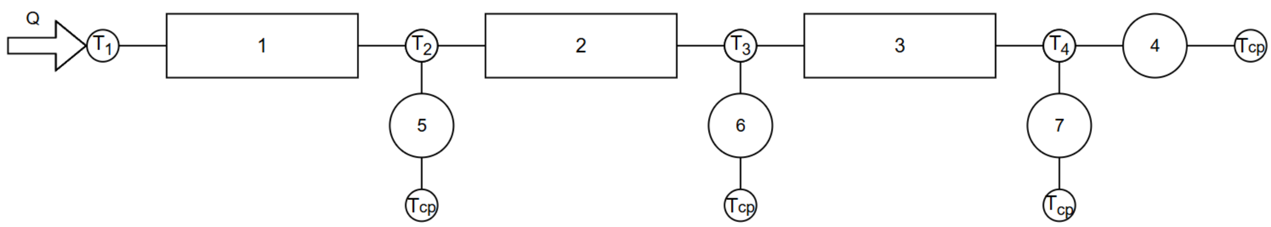
$q = -150\,[\text{Вт}/\text{см}^2]$ - считается, что положительное направление, когда тепло отводится от тела, так как по задаче тепло подводится, то знак минус

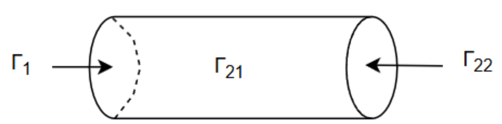
$\alpha_g = 10\left[\text{Вт}/(\text{см})^2\cdot^\circ \text{C}\right]$ - коэффициент теплообмена, $S = \pi \text{см}^2, L = 7.5$ см



Решение

1. Дискретизация области одномерными элементами и границы:





Рассмотрим дифференциальное уравнение, описывающее распространение тепла в стержне:

$$-\frac{d}{dx}(k_x\frac{dT}{dx}) = f \tag{1}$$

где f - погонная интенсивность подачи тепла, если внутри стержня есть источник. В задаче внутренние источники тепла не заданы, следовательно, $f = 0$.

Граничные условия:

$$Q_1 = k_x \frac{dT}{dx}\bigg|_{x=0} = -q; \qquad Q_2 = k_x \frac{dT}{dx}\bigg|_{x=L} = \alpha_g(T_{cp} - T(l)) \qquad Q_2 = k_x \frac{dT}{dx}\bigg|_{\Gamma} = \alpha_g(T_{cp} - T)$$

Вычисления:

$$A \cdot \Phi = P$$

$$A = \int\limits_V B^T K B\, dV + \int\limits_{\Gamma_2} \alpha_g N^T N\, dS = \underbrace{k_x \cdot S \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} B^T B\ dx}_{\Gamma_1} + \underbrace{2\pi R \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \alpha_g N^T N\ dx}_{\Gamma_{21}} + \underbrace{\alpha_g \cdot S \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\Gamma_{22}} = \odot$$

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} B^T B\ dx = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} N^T N\ dx = \frac{l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\odot = \frac{k_x S}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\pi R l \alpha_g}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \alpha_g S \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \int\limits_{\Gamma_1} N^T q\ dS + \int\limits_{\Gamma_2} \alpha_g T_g N^T\ dS = \underbrace{qS \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\Gamma_1} + \underbrace{l\pi R \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \alpha_g T_g N^T dx}_{\Gamma_{21}} + \underbrace{\alpha_g T_g S \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\Gamma_{22}}$$

СЛАУ:

$$i = 1: \begin{bmatrix} \frac{k_x S}{l} + \frac{2\pi R \alpha_g l}{3} & -\frac{k_x S}{l} + \frac{\pi R \alpha_g l}{3} \\ -\frac{k_x S}{l} + \frac{\pi R \alpha_g l}{3} & \frac{k_x S}{l} + \frac{2\pi R \alpha_g l}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} qS + \pi R \alpha_g T_g l \\ \pi R \alpha_g T_g l \end{bmatrix}$$

$$i = 2: \begin{bmatrix} \frac{k_x S}{l} + \frac{2\pi R \alpha_g l}{3} & -\frac{k_x S}{l} + \frac{\pi R \alpha_g l}{3} \\ -\frac{k_x S}{l} + \frac{\pi R \alpha_g l}{3} & \frac{k_x S}{l} + \frac{2\pi R \alpha_g l}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi R \alpha_g T_g l \\ \pi R \alpha_g T_g l \end{bmatrix}$$

$$i = 3: \begin{bmatrix} \frac{k_x S}{l} + \frac{2\pi R \alpha_g l}{3} & -\frac{k_x S}{l} + \frac{\pi R \alpha_g l}{3} \\ -\frac{k_x S}{l} + \frac{\pi R \alpha_g l}{3} & \frac{k_x S}{l} + \frac{2\pi R \alpha_g l}{3} + S\alpha_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi R \alpha_g T_g l \\ \pi R \alpha_g T_g l + \alpha_g T_g S \end{bmatrix}$$

Сделаем замену:

$$k_1 = \frac{k_x S}{l} + \frac{2\pi R \alpha_g l}{3} \qquad k_2 = -\frac{k_x S}{l} + \frac{\pi R \alpha_g l}{3} \qquad p_1 = \pi R \alpha_g T_g l$$

Тогда:

$$\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & 0 & 0 \\ k_2 & 2k_1 & k_2 & 0 \\ 0 & k_2 & 2k_1 & k_2 \\ 0 & 0 & k_2 & k_1 + S\alpha_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} qS + p_1 \\ 2p_1 \\ 2p_1 \\ p_1 + \alpha_g T_g S \end{bmatrix}$$

Конкретные значения:

$$\begin{bmatrix} 146.6 & -68 & 0 & 0 \\ -68 & 293.2 & -68 & 0 \\ 0 & -68 & 293.2 & -68 \\ 0 & 0 & -68 & 178 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2435 \\ 3926 \\ 3926 \\ 2748 \end{bmatrix} \Rightarrow \Phi = \begin{bmatrix} 28.6 \\ 25.9 \\ 25.2 \\ 25.1 \end{bmatrix}$$

Для пяти элементов построения и вычисления аналогичные, результат:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 28.8 \\ 26.7 \\ 25.8 \\ 25.4 \\ 25.2 \\ 25.1 \end{bmatrix}$$

Код для трех элементов:

```python
import math
import numpy as np
kx = 75
q = 150
alpha = 10
S = math.pi
L = 7.5
R = 1
Tg = 25
n = 3
l = L / 3
k1 = (kx * S) / l + 2 * math.pi * R * alpha * l / 3
k2 = -(kx * S) / l + math.pi * R * alpha * l / 3
p1 = math.pi * R * alpha * Tg * l
K = np.array(
        [
        [k1, k2, 0, 0],
        [k2, 2 * k1, k2, 0],
        [0, k2, 2 * k1, k2],
        [0, 0, k2, k1 + S * alpha],
        ]
)
P = np.array([q * S + p1, 2 * p1, 2 * p1, p1 + alpha * Tg * S])
L1 = np.linalg.cholesky(K)
y = np.linalg.solve(L1, P)
T = np.linalg.solve(L1.T, y)
print(T)
```

Код для пяти элементов (матрица $K_1 = const$, матрица K_2 зависит от ГУ):

```
n = 5
l = L / n
k1 = (kx * S) / l
K1 = np.zeros((n + 1, n + 1))
for i in range(n):
K1[i, i] += k1
K1[i, i + 1] = -k1
K1[i + 1, i] = -k1
K1[i + 1, i + 1] += k1
print(np.round(K1, 3))
k2 = math.pi * R * alpha * l / 3
K2 = np.zeros((n + 1, n + 1))
for i in range(n):
        K2[i, i] += k2 * 2
        K2[i, i + 1] = k2
        K2[i + 1, i] = k2
        K2[i + 1, i + 1] += k2 * 2
        K2[-1, -1] += S * alpha
print(np.round(K2, 3))
K = K1 + K2
print(np.round(K, 3))
p1 = math.pi * R * alpha * Tg * l
P = np.zeros(n + 1)
P[0] = q * S + p1
for i in range(1, n):
        P[i] = 2 + p1
P[-1] = p1 + alpha * Tg * S
print(np.round(P, 3))
L1 = np.linalg.cholesky(K)
y = np.linalg.solve(L1, P)
T = np.linalg.solve(L1.T, y)
print(T)
```