06/09

Алгоритм метода конечных элементов:

1. Дискретизация;
2. Аппроксимация кусочно-непрерывными функциями;
3. Решение СЛАУ.

Дискретизация области

1. Разделение тела на конечные элементы;
2. Нумерация (N узлов, N элементов).

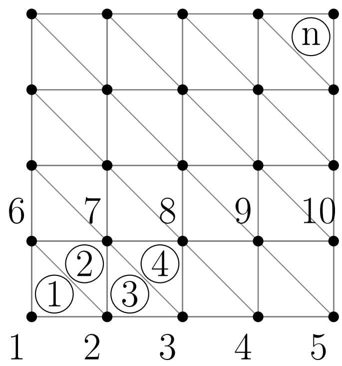


Рисунок 1 – Пример дискретизации области

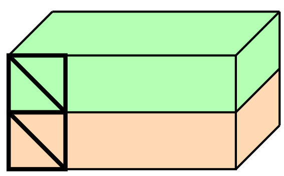


Рисунок 2 – Пример трехмерной области, состоящей из двух материалов

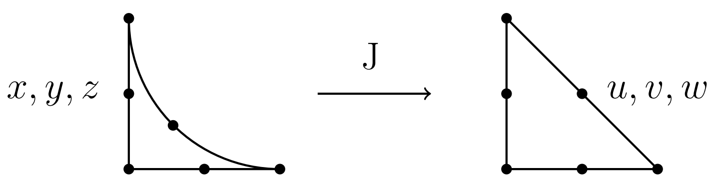


Рисунок 3 – Приведение криволинейного элемента

Замечания по разбиению:

1. Форма элемента должна быть близка к правильной;

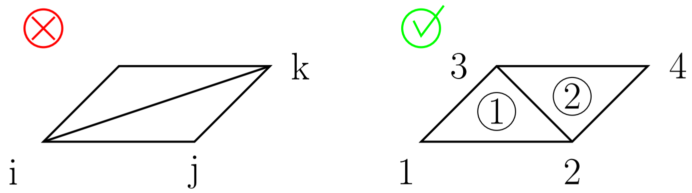


Рисунок 4 – Пример плохой и хорошей дискретизации

2. Все узлы конечного элемента должны совпадать.

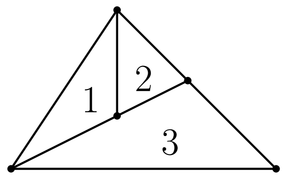


Рисунок 5 – Пример плохой дискретизации

Замечание по нумерации узлов и конечных элементов:

От нумерации узлов зависит ширина полосы ленты СЛАУ, поэтому узлы нужно нумеровать с короткой стороны для достижения наименьшей разницы между номерами узлов. Нумерация конечных элементов не важна, т.к. они привязаны к узлам.

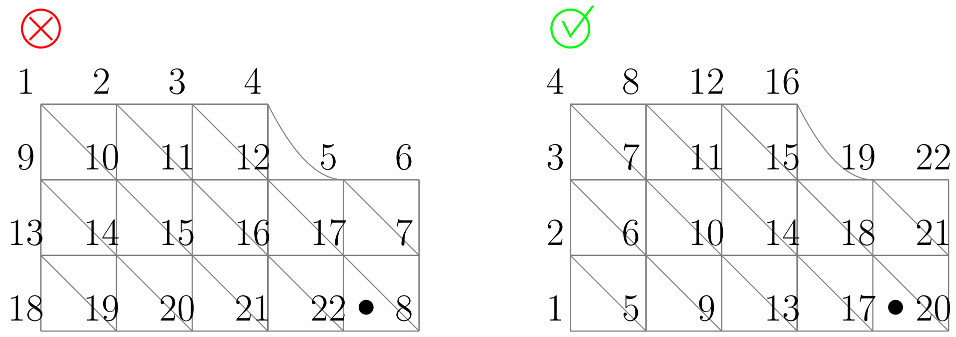
$$B = (R + 1) \cdot Q$$

где B - ширина полосы ленты;

R - максимальная по элементам величина наибольшей разности между узлами отдельного конечного элемента;

Q - кол-во степеней свободы (число неизвестных).

Нумерация треугольников против ЧС, начало с отдельных узлов.



$\bullet$ 8, 17, 22

$R_\bullet = 14$

$\bullet$ 20, 18, 17

$R_\bullet = 3$

Рисунок 6 – Пример правильной и неправильной нумерации узлов

Форма записи КЭ в файл(трехмерный случай):

$$\left.\begin{array}{cccc} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 2 & x_2 & y_2 & z_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & x_n & y_n & z_n \end{array}\right\} \text{номера узлов и их координаты}$$

$$\left.\begin{array}{cccc} ① & 1 & 2 & 3 \\ ② & 4 & 3 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \text{ⓝ} & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{номера КЭ и номера узлов, из} \\ \text{которых они состоят}\end{array}$$

Замечания о порядке узлов, составляющих КЭ:

1. Обход узлов КЭ принято делать против часовой стрелки (для того, чтобы нормали были направлены в одну сторону);

2. Нумерацию желательно делать таким образом, чтобы соответствующие узлы попали в одно и то же место СЛАУ.

Пояснение к замечанию 2:

Обратимся к Рисунку 4. Представим, что мы накладываем один КЭ на другой. Первый КЭ начнем нумеровать с узла №1 — (1-2-3), тогда второй КЭ начнем обходить с узла №4 — (4-3-2) и тд.

13/09

Одномерные пружинные системы

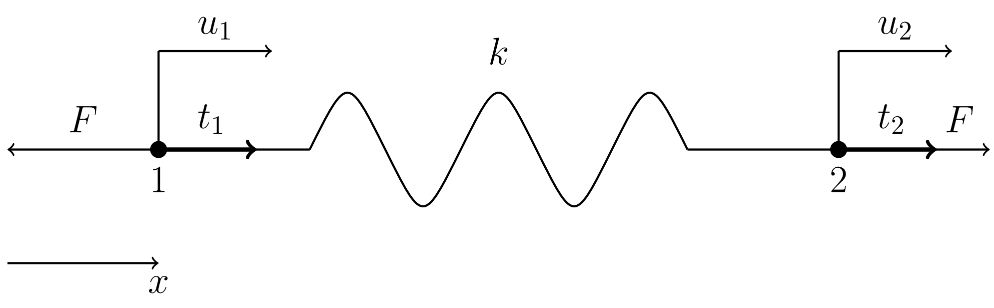


Рисунок 7 – Одномерная пружинная система из одного элемента

1. Уравнение равновесия

где k - коэффициент жесткости, u_1, u_2 - перемещения, F - приложенная сила, t_1, t_2 - реакции.

Закон Гука:

$$F = k\Delta = k(u_2 - u_1)$$

$$t_1 + t_2 = 0 \to t_1 = -t_2$$

$$F = t_2 = k(u_2 - u_1)$$

$$-F = t_1 = -k(u_2 - u_1) = k(u_1 - u_2)$$

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow Kq = t$$

где $q = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$, $t = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$, $K = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$.

2. Вариационный метод

$$\Pi = \Pi_{in} - \Pi_{ex},$$

где Π - потенциальная энергия системы.

$$\Pi_{in} = \int\limits_0^\Delta F d\Delta = \int\limits_0^\Delta k\Delta d\Delta = \frac{k(u_2-u_1)^2}{2} = \frac{1}{2} q^{\mathrm{T}} K q = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\Pi_{ex} = t_1 u_1 + t_2 u_2 = q^{\mathrm{T}} t$$

$$\Pi = \frac{1}{2} q^{\mathrm{T}} K q - q^{\mathrm{T}} t \to min$$

Условие стационарности потенциальной энергии

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial u_1} = 0, \ \frac{\partial \Pi}{\partial u_2} = 0$$

$$\Pi = \frac{k}{2}(u_2 - u_1)^2 - t_1 u_1 - t_2 u_2$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_1} = k(u_2 - u_1)(-1) - t_1 = 0 \Leftarrow k(u_1 - u_2) = t_1$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_2} = k(u_2 - u_1) - t_2 = 0 \Leftarrow k(u_2 - u_1) = t_2$$

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$$

3. Метод возможных перемещений

Работа внутренних сил на возможных деформациях равна внешней работе возможных перемещений:

$$A_{in} = A_{ex},$$

где A_{in} - работа внутренних сил на возможных деформациях,
A_{ex} - работа внешних сил на возможных перемещениях.

$$A_{in} = F\delta\Delta = F(\delta u_2 - \delta u_1)$$

$$A_{ex} = t_1 \delta u_1 + t_2 \delta u_2$$

$$F(\delta u_2 - \delta u_1) = t_1 \delta u_1 + t_2 \delta u_2$$

$$\delta u_1, \delta u_2 : \begin{cases} -F = t_1 \\ F = t_2 \end{cases}$$

Методика составления глобальной системы для МКЭ

Используемые обозначения:

(1) – начало элемента,

(2) – конец элемента.

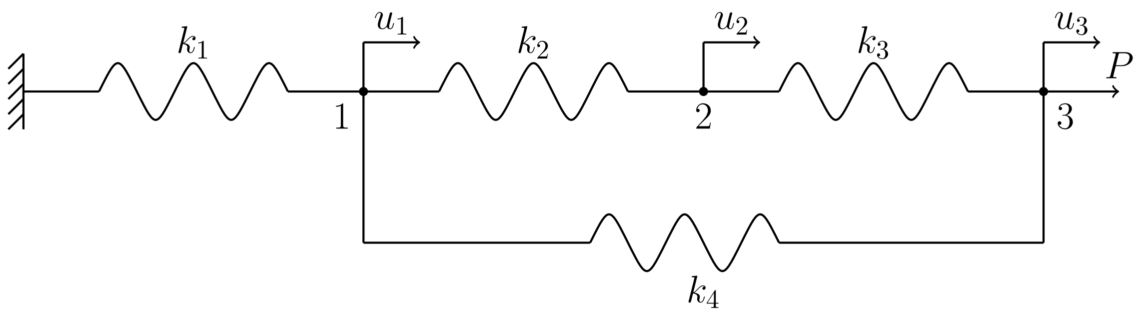


Рисунок 8 – Одномерная пружинная система из четырех элементов

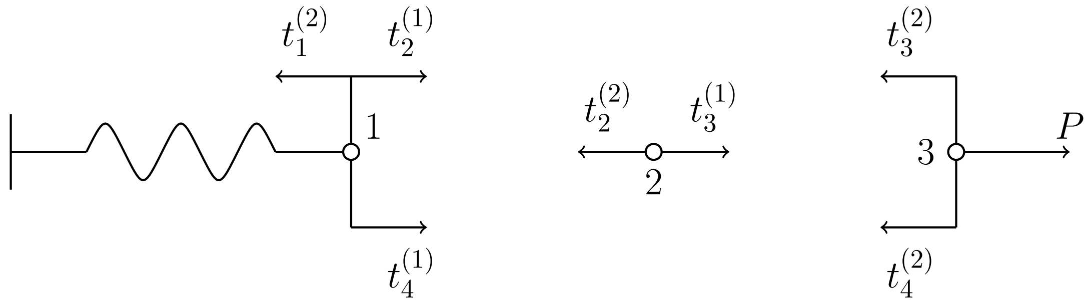


Рисунок 9 – Силы реакций в узлах системы

$$
\begin{cases}
t_1^{(2)} + t_2^{(1)} + t_4^{(1)} = 0 \\
t_2^{(2)} + t_3^{(1)} = 0 \\
t_3^{(2)} + t_4^{(2)} = P
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
t_i^{(1)} = k_i(u^{(1)} - u^{(2)}) \\
t_i^{(2)} = k_i(u^{(2)} - u^{(1)})
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
t_1^{(2)} &= k_1(u_1 - 0) \\
t_4^{(1)} &= k_4(u_1 - u_3) \\
t_3^{(1)} &= k_3(u_2 - u_3) \\
t_4^{(2)} &= k_4(u_3 - u_1) \\
t_2^{(1)} &= k_2(u_1 - u_2) \\
t_2^{(2)} &= k_2(u_2 - u_1) \\
t_3^{(2)} &= k_3(u_3 - u_2)
\end{aligned}
\Rightarrow
\begin{cases}
(k_1 + k_2 + k_4)u_1 - k_2u_2 - k_4u_3 = 0 \\
-k_2u_1 + (k_2 + k_3)u_2 - k_3u_3 = 0 \\
-k_4u_1 - k_3u_2 + (k_3 + k_4)u_3 = P
\end{cases}
\qquad (*)
$$

$$
K = \begin{bmatrix}
k_1 + k_2 + k_4 & -k_2 & -k_4 \\
-k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\
-k_4 & -k_3 & k_3 + k_4
\end{bmatrix}
$$

Принцип возможных перемещений

$$\sum_{i=1}^{4} F^{(i)}\delta\Delta^{(i)} = \sum_{i=1}^{4} k_{(i)}\Delta^{(i)}\delta\Delta^{(i)} = P\delta u_3$$

$$k_1u_1\delta u_1+k_2(u_2-u_1)(\delta u_2-\delta u_1)+k_3(u_3-u_2)(\delta u_3-\delta u_2)+k_4(u_3-u_1)(\delta u_3-\delta u_1) =$$

$$= P\delta u_3 + 0\cdot\delta u_1 + 0\cdot\delta u_2$$

$$\begin{aligned}
&\delta u_1:\ \dots\\
&\delta u_2:\ \dots \Rightarrow (*)\\
&\delta u_3:\ \dots
\end{aligned}$$

20/09

Хранение разреженных матриц

Опр. Портретом разреженной матрицы называется множество:

$$P_A = \{(i,j) : a_{ij} \neq 0\}$$

Возможны следующие случаи:

1. Матрица несимметрична и ее портрет несимметричен:

$$\exists\ (i,j) \in P_A : (j,i) \notin P_A \Leftrightarrow A \neq A^{\mathrm{T}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Матрица несимметрична но её портрет симметричен:

$$A \neq A^{\mathrm{T}},\ \text{но}\ (i,j) \in P_A, (j,i) \in P_A, a_{ij} \neq a_{ij}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix}$$

3. Если матрица симметрична ($a_{ji} = a_{ij}$), то её портрет симметричен:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix}$$

Форматы хранения разреженных матриц:
CSR - compressed sparse row
CSC - compressed sparse column
CSLR - compressed sparse low-triangle row

Рассмотрим формат CSR:

1. aelem - массив, хранящий все $a_{ij} \neq 0$ в строках

2. jptr - массив размерности aelem, указывает номер N_j элемента a_{ij}

3. iptr - массив размерности $n+1$ (n - размерность СЛАУ), хранит число элементов $a_{ij} \neq 0$ в строке

   iptr$[i+1]$ - iptr$[i]$ - число элементов в i-ой строке

   iptr$[n+1]$ - число элементов в aelem + 1

   <u>Пример:</u>

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 11 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 10 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 12 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Матрица A несимметрична, а P_A симметричен, т.к. если $a_{ij} \neq 0$, то $a_{ji} \neq 0$.

aelem: $[[9,3,1,1], [11,2,1,2], [1,10,2], [2,1,2,9,1], [1,1,12,1], [8], [2,2,3,8]]$.

jptr: $[[1,4,5,7], [2,3,4,7], [2,3,4], [1,2,3,4,5], [1,4,5,7], [6], [1,2,5,7]]$.

iptr: $[1,5,9,12,17,21,22,26]$.

Рассмотрим формат CSLR:

Обычно такой формат используется для хранения симметричных матриц, т.е. в памяти хранятся только элементы верхнего (или нижнего) треугольника. Если матрица несимметрична, то храним ещё и элементы нижнего треугольника, но уже по столбцам (для сохранения структуры).

В нашем примере:

adiag: $[9,11,10,9,12,8,8]$ – все диагональные элементы.

altr: $[1,2,1,2,1,1,2,2,3]$ – элементы нижнего треугольника.

autr: $[2,3,1,2,1,1,1,2,1]$ – элементы верхнего треугольника.

jptr: $[2,1,2,3,1,4,1,2,5]$.

iptr: $[1,1,1,2,5,7,7,10]$.

Входные данные: $\overline{x}$, aelem, jptr, iptr, n.

$$z = A\overline{x},\ A - CSR$$

Листинг 1 - алгоритм составления вектора z

```
i: 1,.., n
{
    z[i]=0;
    j: iptr[i],..,iptr[i+1]-1
    {
        z[i]=z[i]+x[jptr[j]]*aelem[j];
    }
}
```

Учет граничных условий

Граничные условия I рода

Зададим температуру в узле a_{33}:

$$A = \begin{bmatrix} \cdots & & \cdots & & \cdots \\ \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \end{bmatrix}$$

Чтобы не испортилась симметричность портрета, искусственно обнулим необходимые элементы массива aelem.

Листинг 2 - алгоритм задания граничных условий

```
i = iptr[k],..,iptr[k+1]-1
{
    if jptr[i]=k:
        aelem[jptr[k]]=1;
    else:
        aelem[jptr[k]]=0;
}
```

Метод Холецкого

$$A \approx LU$$
$$A = LU + R$$

где L - нижнетреугольная матрица;

U - верхнетреугольная матрица;

R - ошибка округления.

$$\begin{cases} Ax = b \\ LUx = b \\ Ly = b \Rightarrow Ux = y \end{cases}$$

Предобусловливание

Число обусловленности: $\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$

Если число обусловленности велико, система плохо обусловлена, и небольшие ошибки в данных могут привести к большим ошибкам в решении. Если число обусловленности близко к 1, система хорошо обусловлена, и решения будут стабильными.

Рассмотрим СЛАУ $Ax = b$, где A – плохо обусловленная матрица.

Пусть M – невырожденная матрица размерности $n \times n$. Домножим СЛАУ на матрицу, обратную M:

$$M^{-1}Ax = M^{-1}b$$

$$A^*x = b^*$$

M - матрица предобусловливания

1. M должна быть по возможности близка к A (пример: M = diag(A)).
2. M должна быть легко вычислима.
3. M должна быть легко обратима.

27/09

Одномерные краевые задачи

$$-(ku')' + cu' + bu = f, \qquad x \in (0, l), \tag{1}$$

где $u(x)$ - неизвестная функция; $k(x)$, $c(x)$, $b(x)$, $f(x)$ - известные функции.

Таблица 1 – Граничные условия

№	x = 0	x = l
1	$u(0) = U_0$	$u(l) = U_l$
2	$k(0)u'(0) = -\sigma_0$	$k(l)u'(l) = \sigma_l$
3	$k(0)u'(0) = -a_0(U_0 - u(0))$	$k(l)u'(l) = a_l(U_l - u(l))$

Интегральная формулировка

Состасим невязку:

$$r = -(ku')' + cu' + bu - f = 0 \tag{2}$$

(1) $\Leftrightarrow$ (2)

Составим следующий интеграл:

$$\int\limits_0^l r \cdot v dx = 0, \tag{3}$$

где v – некоторая пробная функция ($v = \delta u$ – возможные изменения u)

Докажем, что (3) $\Leftrightarrow$ (2):

Предположим, что (3) выполняется, а (2) – нет, то есть $r \neq 0$. Тогда:

v – любая пробная функция:

Графики $r(x)$ и $v(x)$

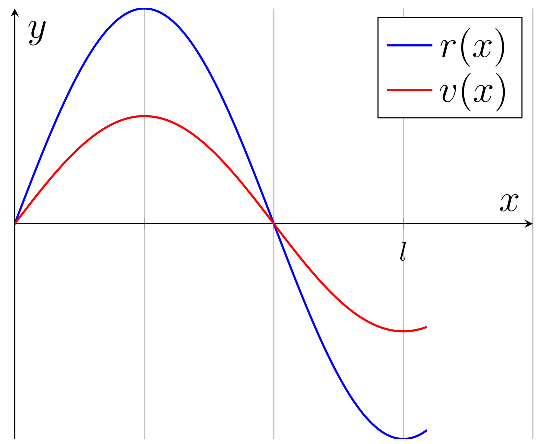
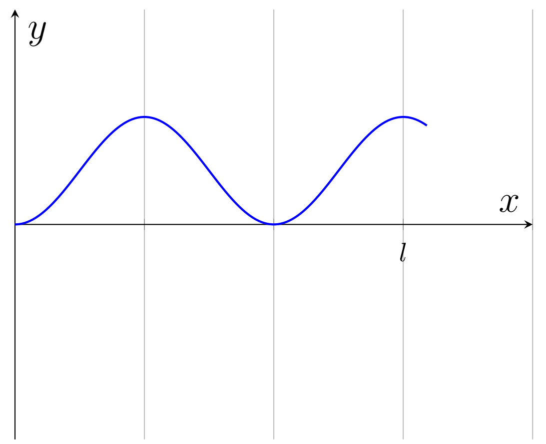


График $r(x) \cdot v(x)$



Из последнего графика видно, что

$$\int\limits_0^l r \cdot v dx \neq 0,$$

что противоречит нашему предположению о том, что (3) выполняется, ч.т.д.

Итак,

$$\int\limits_0^l r \cdot v dx = \int\limits_0^l (-(ku')'v + cu'v + buv - fv) dx = 0 \tag{4}$$

Интегрируем по частям первый интеграл:

$$\int\limits_0^l -(ku')'vdx = \left| \begin{array}{cc} \int\limits_0^l fdg = fg\Big|_0^l - \int\limits_0^l gdf & \\ dg = -(ku')'dx & g = -ku' \\ f = v & df = v'dx \end{array} \right| = \tag{5}$$

$$= -ku'v\Big|_0^l + \int\limits_0^l (ku')v'dx = \int\limits_0^l (ku')v'dx - \underbrace{(\underbrace{k(l)u'(l)v(l)}_{F_l} \underbrace{-k(0)u'(0)v(0)}_{F_0})}_{F(v)}$$

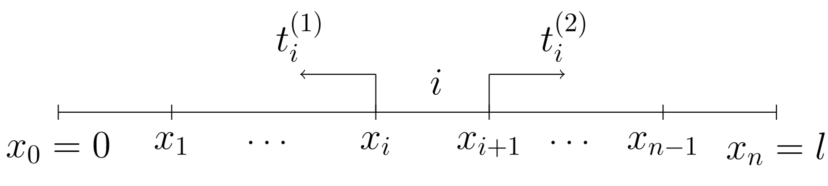
Подставим (5) в (4):

$$\int\limits_0^l ((ku')'v' + cu'v + buv - fv)dx - F(v) = 0$$

Рассмотрим граничные условия:

№	x = 0	x = l
1	$u(0) = U_0 \Rightarrow v(0) = 0,\ F_0 = 0$	$u(l) = U_l \Rightarrow v(l) = 0,\ F_l = 0$
2	$k(0)u'(0) = -\sigma_0 \Rightarrow F_0 = \sigma_0 v(0)$	$k(l)u'(l) = \sigma_l \Rightarrow F_l = \sigma_l v(l)$
3	$k(0)u'(0) = -a_0(U_0 - u(0)) \Rightarrow$ $\Rightarrow F_0 = a_0(U_0 - u(0))v(0)$	$k(l)u'(l) = a_l(U_l - u(l)) \Rightarrow$ $\Rightarrow F_l = a_l(U_l - u(l))v(l)$

Разобьем отрезок $[0, l]$ на части $[x_i, x_{i+1}]$:



$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} r \cdot vdx = 0 \Rightarrow \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} [(ku')v' + cu'v + buv - fv]dx - t_1^{(i)}v_i - t_2^{(i)}v_{i+1} = 0, \tag{6}$$

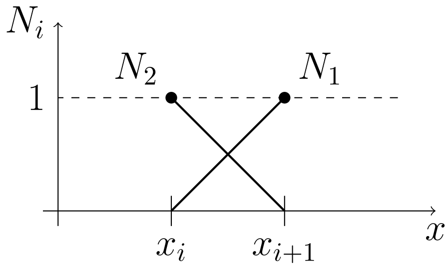
где $t_1^{(i)}, t_2^{(i)}$ – реакции отброшенных сил

$$t_1^{(i)} = -k(x_i)u'(x_i) \qquad t_2^{(i)} = -k(x_{i+1})u'(x_{i+1})$$

$$v_i = v(x_i) \qquad v_{i+1} = v(x_{i+1})$$

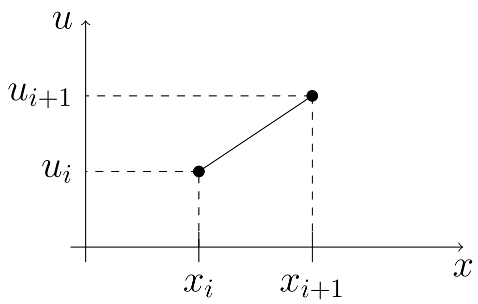
$$u = N_1^{(i)} u_i + N_2^{(i)} u_{i+1},$$

где $N_1^{(i)}, N_2^{(i)}$ – полиномы Лагранжа:



Аппроксимируем неизвестную функцию u:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x$$



$$\begin{cases} u(x_i) = \alpha_1 + \alpha_2 x_i = u_i \\ u(x_{i+1}) = \alpha_1 + \alpha_2 x_{i+1} = u_{i+1} \end{cases}$$

Поиск коэффициентов α_1, α_2:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_{i+1} \end{vmatrix} = x_{i+1} - x_i = l_i$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} u_i & x_i \\ u_{i+1} & x_{i+1} \end{vmatrix} = u_i x_{i+1} - u_{i+1} x_i$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & u_i \\ 1 & u_{i+1} \end{vmatrix} = u_{i+1} - u_i$$

$$\alpha_1 = \frac{u_i x_{i+1} - u_{i+1} x_i}{l_i}, \quad \alpha_2 = \frac{u_{i+1} - u_i}{l_i}$$

Подставляем в u:

$$u = \frac{u_i x_{i+1} - u_{i+1} x_i}{l_i} + \frac{u_{i+1} - u_i}{l_i} x = \underbrace{\left(\frac{x_{i+1} - x}{l_i}\right)}_{N_1^{(i)}} u_i + \underbrace{\left(\frac{x - x_i}{l_i}\right)}_{N_2^{(i)}} u_{i+1}$$

В матричном виде:

$$u = Nq,\ N = [\ \underbrace{N_1^{(i)},\quad N_2^{(i)}}_{\text{функции формы}}\ ],\ q = \begin{bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix}$$

$$N_1^{(i)} = \frac{x_{i+1} - x}{l_i} = 1 - \frac{x - x_i}{l_i}$$

$$N_2^{(i)} = \frac{x - x_i}{l_i}$$

Вернемся к интегралу (6):

$$u = Nq$$

$$u' = \frac{dN}{dx} q = Bq,$$

где B – матрица производных от функций форм:

$$B = \left[-\frac{1}{l_i},\quad \frac{1}{l_i}\right]$$

$$v = N\delta q,\quad \delta q = [v_i\quad v_{i+1}]$$

$$v' = B\delta q$$

Подставляем в (6):

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} [\underbrace{(B\delta q)^T}_{(v')^T} k \underbrace{Bq}_{u'} + \underbrace{(N\delta q)^T}_{v^T} c \underbrace{Bq}_{u'} + \underbrace{(N\delta q)^T}_{v^T} b \underbrace{Nq}_{u} - \underbrace{(N\delta q)^T}_{v^T} f] dx -$$

$$-t_1^{(i)} v_i - t_2^{(i)} v_{i+1} = 0$$

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \delta q^T[(B^TkB + N^TcB + N^TbN)q - N^Tf]dx - t_1^{(i)}v_i - t_2^{(i)}v_{i+1} = 0$$

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} (B^TkB + N^TcB + N^TbN)dx = K^{(i)}$$

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} N^Tfdx = P^{(i)}$$

$K^{(i)}$ и $P^{(i)}$ – матрицы 2×2.

$$t_1^{(i)}v_i + t_2^{(i)}v_{i+1} = \delta q^T t^{(i)}, \quad t^{(i)} = \begin{bmatrix} t_1^{(i)} \\ t_2^{(i)} \end{bmatrix}$$

$\delta q^T \neq 0$, поэтому можно сократить.

Получившаяся СЛАУ:

$$\boxed{K^{(i)}q = P^{(i)} + t^{(i)}}$$

04/10

Одномерные краевые элементы

1. Граничные условия Дирихле (I рода)

$$u(0) = u_0,\ u(l) = u_l$$

2. Граничные условия Неймана

$$k(0)u'(0) = -\sigma_0; \quad k(l)u'(l) = \sigma_l; \quad -(ku')' = f$$

$$u' = -\frac{1}{k}\int\limits_0^l f dx + C_1 \Rightarrow u = \int\limits_0^l (-\frac{1}{k}\int\limits_0^l f dx + C_1)dx + C_2 \Rightarrow u = u(x) + \overline{C_0}$$

$$u(x_0) = C_0$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \delta q^T \left\{ \left[B^T k B + N^T c B + \mathbf{N'}^T b N \right] q - N^T f \right\} dx$$

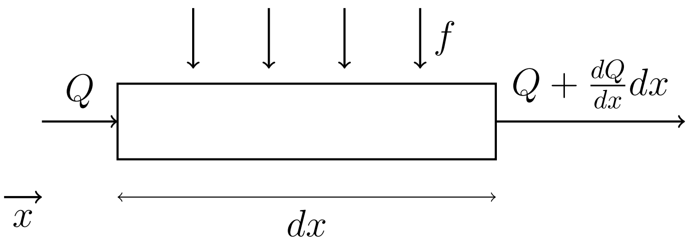
$$N = \left[N_1^{(i)}, N_2^{(i)} \right]; \quad N_1^{(i)} = 1 - \frac{x - x_i}{l_i};\ N_2^{(i)} = 1 - \frac{x - x_i}{l_i}$$

$$B = \left[B_1^{(i)}, B_2^{(i)} \right] = \left[-\tfrac{1}{l_i}, \tfrac{\lambda}{l_i} \right]; \qquad \xi = x - x_i,\ d\xi = dx$$

$$\int_0^{l_i} \left[B^T k(x) B + N^T c(x) B + N^T b(x) N \right] d\xi$$

$$\int\limits_0^{l_i} c(\xi + x_i) \begin{bmatrix} 1 - \frac{\xi}{l_i} \\ \frac{\xi}{l_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{l_i} & \frac{1}{l_i} \end{bmatrix} d\xi = \int\limits_0^{l_i} \frac{c(\xi + x_i)}{l_i} \begin{bmatrix} \frac{\xi}{l_i} - 1 & 1 - \frac{\xi}{l_i} \\ -\frac{\xi}{l_i} & \frac{\xi}{l_i} \end{bmatrix} d\xi$$

Задача теплопроводности в стержне



$$Q + f dx = Q + \frac{dQ}{dx} \cdot dx \Rightarrow f = \frac{dQ}{dx} \tag{7}$$

$$Q = -K_x \cdot \frac{dT}{dx} - \text{ закон Фурье} \tag{8}$$

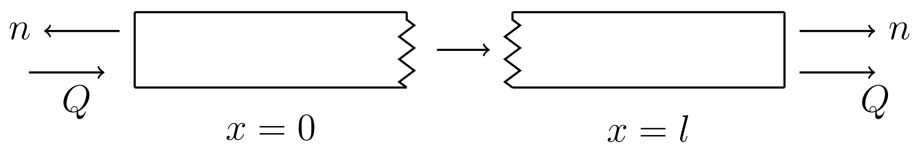
где $K_x = \lambda S$ - коэф. теплопроводности стержня, λ - коэф. теплопроводности материала, S - площадь сечения стержня.

(2) $\rightarrow$ (1):

$$-\frac{d}{dx}(K_x \cdot \frac{dT}{dx}) = f \tag{9}$$

Граничные условия:

1. $T(0) = T_0,\ T(l) = T_l$
2. $-K_x \cdot \frac{dT}{dx}|_{x=0} = q,\ -K_x \cdot \frac{dT}{dx}|_{x=l} = -q$
3. $K_x \cdot \frac{dT}{dx}|_{x=0} = -\alpha g(T_0 - T(0)),\ K_x \cdot \frac{dT}{dx}|_{x=l} = \alpha g(T_l - T(l))$



Чтобы определить знак в граничных условиях второго рода нужно смотреть на направление $Q = K_x \cdot \dfrac{dT}{dx}$.

Интегральная формулировка: $r = -\dfrac{d}{dx}(K_x \cdot \dfrac{dT}{dx}) - f = 0, \quad v = \delta T$

$$\int_0^l (-\frac{d}{dx}(K_x \cdot \frac{dT}{dx}) - f) \cdot \delta T \cdot S dx = 0 \Rightarrow \int_0^l \frac{d\delta T}{dx}(K_x \cdot \frac{dT}{dx}) \cdot S dx - F(\delta T) = 0 \tag{10}$$

$$F(\delta T) = S(K_x \cdot \frac{dT}{dx}) \cdot \delta T|_0^l = -SQ_l \cdot \delta T(l) + SQ_0 \cdot \delta T(0)$$

$$Q_0 = -K_x \cdot \frac{dT}{dx}|_{x=0}, Q_l = -K_x \cdot \frac{dT}{dx}|_{x=l}$$

$$T = Nq = N_1^{(i)} T_i + N_2^{(i)} T_{i+1}, \quad \frac{dT}{dx} = Bq$$

$$\delta T = N\delta q = N_1^{(i)} \delta T_i + N_2^{(i)} \delta T_{i+1}, \quad \frac{d\delta T}{dx} = B\delta q$$

<u>Вариационная формулировка:</u>

$$J(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^l K_x \left(\frac{dT}{dx}\right)^2 S\,dx - \int\limits_0^l SfT\,dx + SQ_l T_l - SQ_0 T_0 \to \min \quad \text{(совпадает с (4))}$$

$$\Delta J = J(T+\delta T) - J(T) = \frac{1}{2}\int\limits_0^l K_x S \left(\frac{d(T+\delta T)}{dx}\right)^2 dx - \int_0^l Sf(T+\delta T)\,dx -$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^l K_x \left(\frac{dT}{dx}\right)^2 S\,dx + \int\limits_0^l SfT\,dx + SQ_l(T_l+\delta T_l) - SQ_0(T_0-\delta T_0) - SQ_l T_l + SQ_0 T_0 =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^l SK_x \left[\left(\frac{dT}{dx}\right)^2 + 2\cdot\frac{dT}{dx}\cdot\frac{d\delta T}{dx} + \left(\frac{d\delta T}{dx}\right)^2\right] dx - \int\limits_0^l Sf\delta T\,dx -$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^l SK_x \left(\frac{dT}{dx}\right)^2 dx + SQ_l\delta T_l - SQ_0\delta T_0$$

Оставим линейную часть приращений ΔJ относительно δT:

$$\int\limits_0^l SK_x \frac{dT}{dx}\cdot\frac{d\delta T}{dx}\,dx - \int\limits_0^l Sf\delta T\,dx + SQ_l\delta T_l - SQ_0\delta T_0 \to (4)$$

11/10

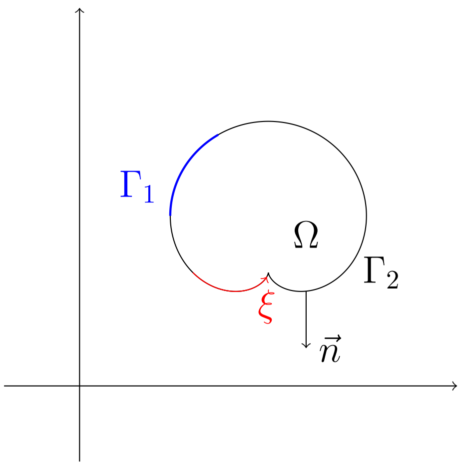
Двумерные краевые задачи

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial u}{\partial y}\right)+bu=f \tag{11}$$

$K(x,y),\ b(x,y),\ f(x,y)$ – заданные (гладкие) функции.

$u(x,y)$ – неизвестная.

Ω – область, где задано уравнение (11), Γ – граница Ω .



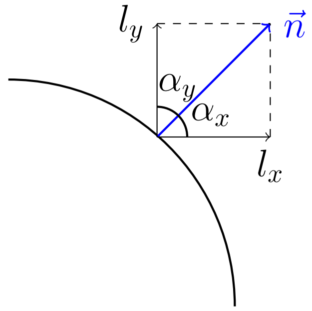
Замкнутый контур Γ – гладкий, за исключением конечного числа угловых точек, в которых внутренний угол $\alpha \in [0;\pi]$.

$$\Gamma = \underbrace{\Gamma_1}_{\text{I рода}} \cup \underbrace{\Gamma_2}_{\text{II/III рода}}$$

$$u(\xi)=\hat{u}(\xi) \text{ – на } \Gamma_1 \text{ (заданное значение).}$$

$$K(\xi)\frac{\partial u}{\partial n}=\hat{\sigma}(\xi) - \text{ на } \Gamma_2$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}l_x+\frac{\partial u}{\partial y}l_y, \quad \begin{cases} l_x=\cos(\alpha x)=\cos(\vec{x},\vec{n}), \\ l_y=\cos(\alpha y)=\cos(\vec{y},\vec{n}), \\ ||\vec{n}||=1 \end{cases}$$



Составим невязку:

$$r(x,y) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial u}{\partial y}\right) + bu - f = 0$$

$$\iint\limits_{\Omega} r(x,y)\cdot v\,dx\,dy = 0,$$

где $v(x,y)$ – пробная (гладкая) функция; на Γ_1: $v = 0$

$$\iint\limits_{\Omega}\left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial u}{\partial y}\right) + bu - f\right]\cdot v\,dx\,dy = 0 \tag{12}$$

Рассмотрим первый интеграл:

$$-\iint\limits_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot v\,dx\,dy$$

Формула Гаусса-Остроградского:

$$\iint\limits_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x}F dxdy = \int\limits_{\Gamma} F\cdot l_x d\xi$$

Представим F в виде $F = uv$:

$$\frac{\partial}{\partial x}F = \frac{\partial}{\partial x}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x}v + u\frac{\partial v}{\partial x} \;\Rightarrow\; \frac{\partial u}{\partial x}v = \frac{\partial}{\partial x}(uv) - u\frac{\partial v}{\partial x}$$

Отсюда:

$$\iint\limits_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial x}v\,dx\,dy = \iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial}{\partial x}(uv) - u\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx\,dy$$

И по формуле Гаусса-Остроградского:

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} v\, dx\, dy = \int\limits_{\Gamma} uv \cdot l_x d\xi - \iint\limits_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x} u\, dx\, dy$$

Тогда:

$$-\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial u}{\partial x}\right) \cdot v\, dx\, dy = -\int\limits_{\Gamma} K \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot v \cdot l_x d\xi + \iint\limits_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x}\left(K \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx\, dy$$

$$-\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial u}{\partial y}\right) \cdot v\, dx\, dy = -\int\limits_{\Gamma} K \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot v \cdot l_y d\xi + \iint\limits_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial y}\left(K \cdot \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\, dy$$

Подставим в (12):

$$\iint\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial v}{\partial x} \cdot K \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot K \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + bu \cdot v - f \cdot v\right] dx\, dy -$$

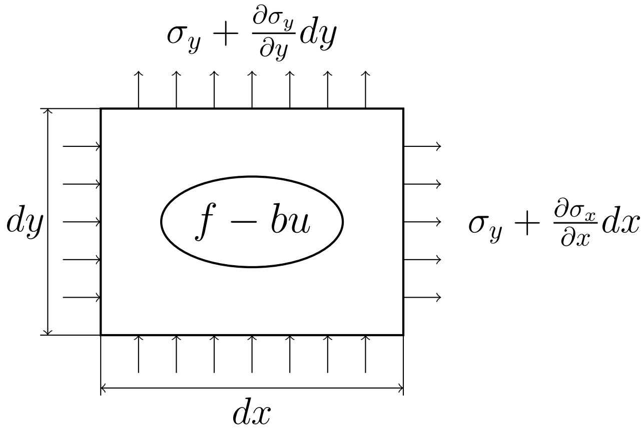
$$-\int\limits_{\Gamma_2} K \cdot v \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot l_x + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot l_y\right) = 0$$

Задача упругости $u(x, y)$ - перемещения

$$\varepsilon = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y]^T, \quad \varepsilon_x = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \varepsilon_y = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\varepsilon = Lu, \quad L = \left[-\frac{\partial}{\partial x} \quad -\frac{\partial}{\partial y}\right]^T$$

$$\sigma = k\varepsilon = kLu$$



$$d\Omega = dxdy$$

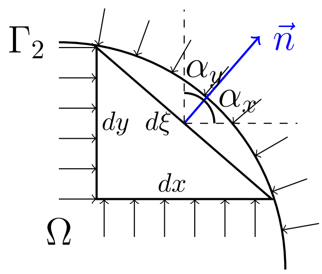
$$\sigma_x dy + \sigma_y dx + (f - bu)dxdy = \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}dx\right)dy + \left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}dy\right)dx$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = f - bu$$

$$L_* = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad L_* = -L^T, \quad L_*\sigma = L_* kLu = f - bu$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot k \cdot \begin{bmatrix} -\frac{\partial u}{\partial x} \\ -\frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = f - bu$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial u}{\partial y}\right) = f \cdot bu \Leftrightarrow (11)$$



$$\Gamma_1 : u(\xi) = \hat{u}(\xi)$$

$$dx = \cos\alpha_y d\xi = l_y d\xi, \quad dy = \cos\alpha_x d\xi = l_x d\xi$$

$$\sigma_y dx + \sigma_x dy + \hat{\sigma} d\xi = 0, \quad \sigma_x = K\varepsilon_x = -K\frac{\partial u}{\partial x}, \; \sigma_y = K\varepsilon_y = -K\frac{\partial u}{\partial y}$$

Тогда:

$$-K\frac{\partial u}{\partial y}dx - K\frac{\partial u}{\partial x}dy + \hat{\sigma} d\xi = 0, \quad -K\frac{\partial u}{\partial y}l_y d\xi - K\frac{\partial u}{\partial x}l_x d\xi + \hat{\sigma} d\xi = 0$$

$$K\frac{\partial u}{\partial n} = \hat{\sigma}$$

Отсюда:

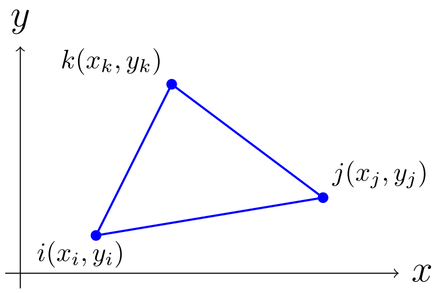
$$\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial v}{\partial x}K\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}K\frac{\partial u}{\partial y} + bu \cdot v - f \cdot v\right)dxdy - \int\limits_{\Gamma}\underbrace{\left(K\frac{\partial u}{\partial x}l_x + K\frac{\partial u}{\partial y}l_y\right)}_{K\cdot\frac{\partial u}{\partial n} = \hat{\sigma}(\xi)} \cdot v d\xi = 0 \tag{13}$$

$$\iint\limits_{\Omega}((Lu)^T K(Lu) + v^T bu - v^T f)dxdy - \int\limits_{\Gamma_2} v^T \hat{\sigma} d\xi = 0$$

18/10

Симплексный треугольный конечный элемент

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$$



$$\begin{cases} u_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \\ u_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j \\ u_k = \alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_3 y_k \end{cases} \Rightarrow \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} = 2S_\Delta$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} u_i & x_i & y_i \\ u_j & x_j & y_j \\ u_k & x_k & y_k \end{vmatrix} = u_i \underbrace{(x_j y_k - x_k y_j)}_{a_i} + u_j \underbrace{(x_k y_i - x_i y_k)}_{a_j} + u_k \underbrace{(x_i y_j - x_j y_i)}_{a_k}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & u_i & y_i \\ 1 & u_j & y_j \\ 1 & u_k & y_k \end{vmatrix} = u_i \underbrace{(y_j - y_k)}_{b_i} + u_j \underbrace{(y_k - y_i)}_{b_j} + u_k \underbrace{(y_i - y_j)}_{b_k}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & x_i & u_i \\ 1 & x_j & u_j \\ 1 & x_k & u_k \end{vmatrix} = u_i \underbrace{(x_k - x_j)}_{c_i} + u_j \underbrace{(x_i - x_k)}_{c_j} + u_k \underbrace{(x_j - x_i)}_{c_k}$$

$$\alpha_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \alpha_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \alpha_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

$$u = \frac{1}{\Delta}(a_i u_i + a_j u_j + a_k u_k + b_i u_i x + b_j u_j x + b_k u_k x + c_i u_i y + c_j u_j y + c_k u_k y) =$$

$$= \frac{1}{\Delta}\left[(a_i + b_i x + c_i y) u_i + (a_j + b_j x + c_j y) u_j + (a_k + b_k x + c_k y) u_i)\right] =$$

$$= N_i u_i + N_j u_j + N_k u_k = [N]\{\Phi\}$$

$$\{\Phi\} = [u_i,\ u_j,\ u_k]^T, \quad [N] = [N_i,\ N_j,\ N_k]$$

$$\begin{cases} N_i = \frac{1}{\Delta}(a_i + b_i x + c_i y) \\ N_j = \frac{1}{\Delta}(a_j + b_j x + c_j y) \\ N_k = \frac{1}{\Delta}(a_k + b_k x + c_k y) \end{cases} \quad - \text{ функции формы, } u = [N]\{\Phi\}$$

Свойства функций формы:

$$\begin{cases} N_i(x_i, y_i) = 1, \quad N_i(x_j, y_j) = 0, \quad N_i(x_k, y_k) = 0; \\ N_j(x_i, y_i) = 0, \quad N_j(x_j, y_j) = 1, \quad N_j(x_k, y_k) = 0; \\ N_k(x_i, y_i) = 0, \quad N_k(x_j, y_j) = 0, \quad N_k(x_k, y_k) = 1; \\ N_i + N_j + N_k = 1 \end{cases}$$

Возвращаемся к уравнению:

$$\iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cdot K_x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot K_y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + buv - fv \right) dxdy -$$

$$- \int\limits_{\Gamma} \left(K_x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot l_x + K_y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot l_y \right) v \; d\xi = 0$$

$$v = N\delta\Phi, \quad \delta\Phi = [v_i, v_j, v_k]^T$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial [N]}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial [N]}{\partial y} \end{bmatrix} \{\Phi\} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} & \dfrac{\partial N_j}{\partial x} & \dfrac{\partial N_k}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} & \dfrac{\partial N_j}{\partial y} & \dfrac{\partial N_k}{\partial y} \end{bmatrix} \{\Phi\} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \{\Phi\} = [B]\{\Phi\}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = [B]\{\delta\Phi\} \qquad D = \begin{bmatrix} K_x & 0 \\ 0 & K_y \end{bmatrix}$$

$$\int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cdot K_x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot K_y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) \; dxdy = \int\limits_{\Omega} (B\delta\Phi)^T DB\Phi \; dxdy =$$

$$= \{\delta\Phi\}^T \int\limits_{\Omega} B^T DB \; dxdy \;\; \{\Phi\}$$

$$\int\limits_{\Omega} buv\ dxdy = \int\limits_{\Omega} (N\delta\Phi)^T bN\Phi\ dxdy = \{\delta\Phi\}^T \int\limits_{\Omega} bN^T N\ dxdy\ \ \{\Phi\}$$

$$\int\limits_{\Omega} fv\ dxdy = \{\delta\Phi\}^T \int\limits_{\Omega} f \cdot N^T\ dxdy$$

$$\int\limits_{\Gamma} \hat{\sigma} \cdot v\ d\xi = \{\delta\Phi\}^T \int\limits_{\Gamma} \hat{\sigma} N^T\ d\xi$$

$$K = \int\limits_{\Omega} (B^T DB + bN^T N)\ dxdy; \quad P = \int\limits_{\Omega} fN^T\ dxdy + \int\limits_{\Gamma} \hat{\sigma} N^T\ d\xi$$

$$\{\delta\Phi\}^T K\Phi = \{\delta\Phi\}^T P \Rightarrow K\Phi = P$$

$$\int\limits_{\Omega} B^T DB\ dxdy = \int\limits_{\Omega} \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} b_i & c_i \\ b_j & c_j \\ b_k & c_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_x & 0 \\ 0 & K_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix}\ dxdy = ☺$$

Считаем, что K_x, K_y – const:

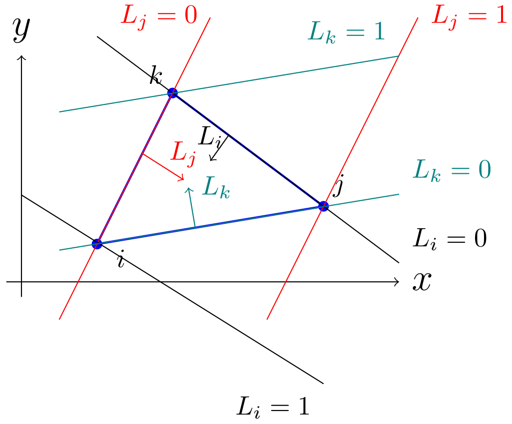
$$☺ = \frac{S_1}{(2S_1)^2} \left[K_x \begin{pmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_k \\ b_i b_j & b_j b_j & b_j b_k \\ b_i b_k & b_j b_k & b_k b_k \end{pmatrix} + K_y \begin{pmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_k \\ c_i c_j & c_j c_j & c_j c_k \\ c_i c_k & c_j c_k & c_k c_k \end{pmatrix} \right]$$

$$\int\limits_{\Omega} bN^T N\ dxdy = \int\limits_{\Omega} b \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_k \end{bmatrix}\ dxdy =$$

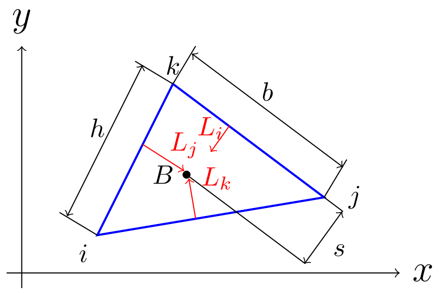
$$= \int\limits_{\Omega} b \cdot \begin{bmatrix} N_i N_i & N_i N_j & N_i N_k \\ N_i N_j & N_j N_j & N_j N_k \\ N_i N_k & N_j N_k & N_k N_k \end{bmatrix}\ dxdy$$

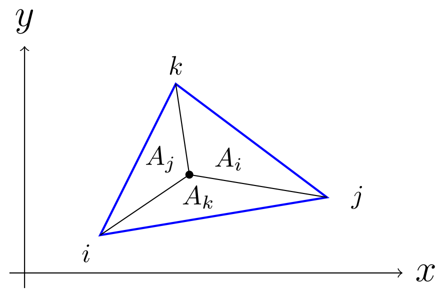
$$P_1 = \int\limits_{\Omega} fN^T\ dxdy = \int\limits_{\Omega} f \cdot \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix}\ dxdy$$

Естественная система координат



$$\begin{cases} 0 \le L_i \le 1; \\ 0 \le L_j \le 1; \\ 0 \le L_k \le 1. \end{cases}$$





$$\begin{cases} S_\triangle = \frac{1}{2}bh, \\ S_{A_i} = \frac{1}{2}bs \end{cases} \quad \Rightarrow L_i = \frac{S_{A_i}}{S_\triangle} = \frac{s}{h}$$

$$L_j = \frac{S_{A_j}}{S_\triangle}, \quad L_k = \frac{S_{A_k}}{S_\triangle}$$

$$L_i + L_j + L_k = \frac{S_{A_i} + S_{A_j} + S_{A_k}}{S_\triangle} = 1$$

$$N_i = L_i, \; N_j = L_j, \; N_k = L_k$$

25/10

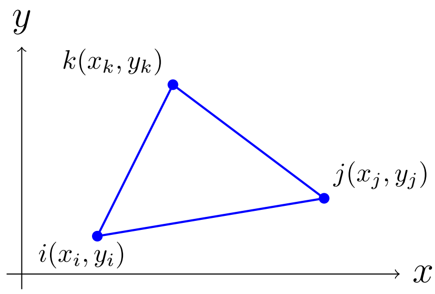
Связь между координатами:

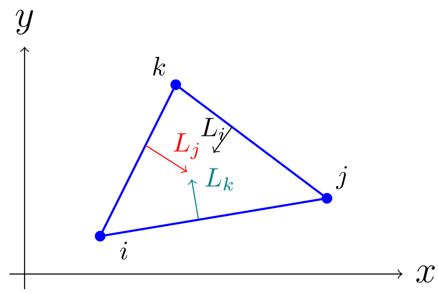
$$\begin{cases} L_i + L_j + L_k = 1 \\ x = L_i x_i + L_j x_j + L_k x_k \\ y = L_i y_i + L_j y_j + L_k y_k \end{cases}$$

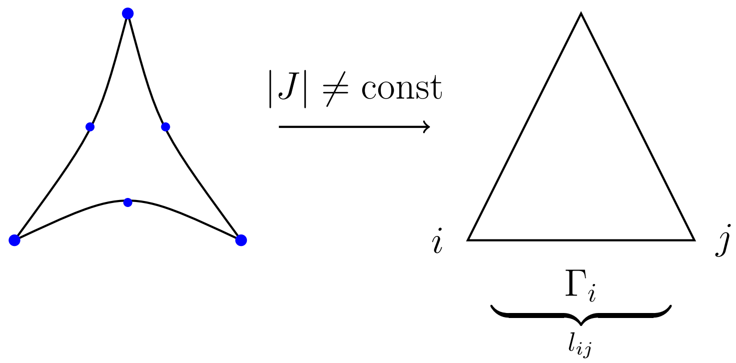
$V = hdS, h = \text{const}$ – толщина элемента

$$h \iint\limits_S f(x,y)\ dxdy = h \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-L_j} f(L_i, L_j, L_k)|J|\ dL_i L_j$$

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial L_i} & \dfrac{\partial x}{\partial L_j} \\ \dfrac{\partial y}{\partial L_i} & \dfrac{\partial y}{\partial L_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i - x_k & x_j - x_k \\ y_i - y_k & y_j - y_k \end{bmatrix} \Rightarrow |J| = \Delta$$







Интегральные формулы, упрощающие вычисления:

$$\int\limits_{\Gamma_{ij}} L_i^\alpha L_j^\beta\ d\Gamma = \frac{\alpha!\beta!}{(\alpha+\beta+1)!} \cdot l_{ij}$$

$$\int\limits_S L_i^\alpha L_j^\beta L_k^\gamma \, dS = \frac{\alpha!\beta!\gamma!}{(\alpha+\beta+\gamma+2)!} \cdot 2S \tag{1}$$

Возвращаемся к формуле из прошлой лекции:

$$\int\limits_\Omega N^T N \, dxdy = \int\limits_\Omega \begin{bmatrix} N_iN_i & N_iN_j & N_iN_k \\ N_iN_j & N_jN_j & N_jN_k \\ N_iN_k & N_jN_k & N_kN_k \end{bmatrix} \, dxdy =$$

$$= \int\limits_S \begin{bmatrix} L_iL_i & L_iL_j & L_iL_k \\ L_iL_j & L_jL_j & L_jL_k \\ L_iL_k & L_jL_k & L_kL_k \end{bmatrix} |J| \, dL_iL_j = \frac{S}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Вычисляем компоненты матрицы по формуле (1):

$$\int\limits_\Omega L_i^2 \, dS = \int\limits_\Omega L_i^2 L_j^0 L_k^0 \, dS = \frac{2!\,0!\,0!}{(2+0+0+2)!} \cdot 2S = \frac{S}{6}$$

$$\int\limits_S N^\mathrm{T} \, dS = \int\limits_S \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix} \, dxdy = \int\limits_S \begin{bmatrix} L_i \\ L_j \\ L_k \end{bmatrix} \, dS = \frac{S}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\int\limits_\Gamma \left(K_x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot l_x + K_y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot l_y \right) v \, d\Gamma$$

1. или $K_x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot l_x + K_y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot l_y = \hat{\sigma}$ или q

2. или $K_x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot l_x + K_y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot l_y = -\alpha_g(u - \hat{u})$

Рассмотрим подробнее:

1. $\int\limits_\Gamma \hat{\sigma} \, d\Gamma = \{\delta\Phi\}^T \int\limits_\Gamma \hat{\sigma} N^T \, d\Gamma \int\limits_\Gamma \begin{bmatrix} L_i \\ L_j \\ L_k \end{bmatrix} \, d\Gamma$

   (a) $\int\limits_{\Gamma_{ij}} \begin{bmatrix} L_i \\ L_j \\ 0 \end{bmatrix} \, d\Gamma = \left| \int\limits_{\Gamma_{ij}} L_i^1 L_j^0 d\Gamma = \frac{1!}{(1+1)!} l_{ij} \right| = \frac{l_{ij}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) $$\int\limits_{\Gamma_{jk}} \begin{bmatrix} 0 \\ L_j \\ L_k \end{bmatrix} \, d\Gamma = \frac{l_{jk}}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(c) $$\int\limits_{\Gamma_{ik}} \begin{bmatrix} L_i \\ 0 \\ L_k \end{bmatrix} \, d\Gamma = \frac{l_{jk}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\int\limits_{\Gamma} \alpha_g (u - \hat{u}) v d\Gamma = \int\limits_{\Gamma} \alpha_g u \cdot v d\Gamma - \int\limits_{\Gamma} \alpha_g \hat{u} \cdot v d\Gamma =$$

$$= \delta \Phi^T \left(\int\limits_{\Gamma} \alpha_g N^T N d\Gamma \cdot \Phi - \alpha_g \hat{u} \int\limits_{\Gamma} N^T d\Gamma \right)$$

$$\int\limits_{\Gamma} \alpha_g N^T N d\Gamma = \int\limits_{\Gamma} \begin{bmatrix} L_i L_i & L_i L_j & L_i L_k \\ 0 & L_j^2 & L_j L_k \\ 0 & 0 & L_k^2 \end{bmatrix} d\Gamma$$

(a)

$$\int\limits_{\Gamma_{ij}} \begin{bmatrix} L_i L_i & L_i L_j & 0 \\ 0 & L_j^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} d\Gamma = \left| \begin{array}{l} \int\limits_{\Gamma_{ij}} L_i^2 L_j^0 d\Gamma = \dfrac{2! \cdot 0!}{(2+1)!} l_{ij} = \dfrac{2}{6} l_{ij} \\ \int\limits_{\Gamma_{ij}} L_i^1 L_j^1 d\Gamma = \dfrac{1! \cdot 1!}{(1+1+1)!} l_{ij} = \dfrac{1}{6} l_{ij} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{2}{6} l_{ij} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{(b), (c) – аналогично}$$