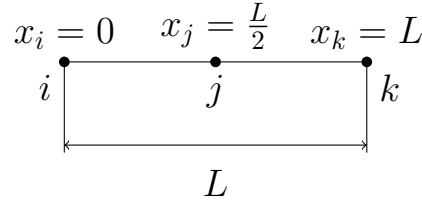


Конечные элементы более высокого порядка
Одномерные квадратичные и кубические функции

$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x$, $\dim L = 1, n = 2$ – симплекс элементы.

Комплекс элементы – количество узлов $n > 2$.



$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 = N\Phi$$

В общем виде: $\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \dots + \alpha_n x^{n-1}$

$$\begin{cases} \Phi_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 x_i^2 \\ \Phi_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 x_j^2 \\ \Phi_k = \alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_3 x_k^2 \end{cases} \rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$$

$$\alpha_1 = \Phi_i, \quad \alpha_2 = \frac{-3\Phi_i + 4\Phi_j - \Phi_k}{L}, \quad \alpha_3 = \frac{2(\Phi_i - 2\Phi_j + \Phi_k)}{L^2}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 = \\ &= \underbrace{\Phi_i \left(1 - \frac{3x}{L} + \frac{2x^2}{L^2}\right)}_{N_i} + \underbrace{\Phi_j \left(\frac{4x}{L} - \frac{4x^2}{L^2}\right)}_{N_j} + \underbrace{\Phi_k \left(-\frac{x}{L} + \frac{2x^2}{L^2}\right)}_{N_k} = \\ &= N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k = [N]\{\Phi\} \\ N_i &= 1 - \frac{3x}{L} + \frac{2x^2}{L^2}, \quad N_j = \frac{4x}{L} - \frac{4x^2}{L^2}, \quad N_k = -\frac{x}{L} + \frac{2x^2}{L^2} \end{aligned}$$

Этот же результат можно получить без использования системы уравнений. Зададим в узлах пробные функции f_α , $\alpha \in \{i, j, k\}$, такие, что $f_\alpha(x_\alpha) = 0$:

$$\begin{array}{ccccc} x_i = 0 & & x_j = \frac{L}{2} & & x_k = L \\ \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \bullet \\ f_i = \frac{x}{L} & & f_j = 1 - \frac{2x}{L} & & f_k = 1 - \frac{x}{L} \end{array}$$

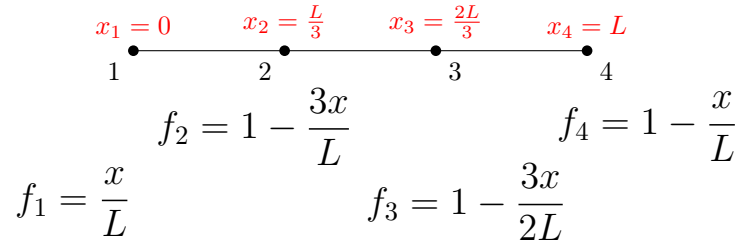
Формулы для нахождения функций форм:

$$N_i = \frac{f_j f_k}{f_j f_k|_{x=x_i=0}}, \quad N_j = \frac{f_i f_k}{f_i f_k|_{x=x_j=\frac{L}{2}}}, \quad N_k = \frac{f_i f_j}{f_i f_j|_{x=x_k=L}}$$

$$N_i = \left(1 - \frac{2x}{L}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right), \quad N_j = \frac{4x}{L} \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right), \quad N_k = -\frac{x}{L} \cdot \left(1 - \frac{2x}{L}\right)$$

Аналогично можно найти функции формы для конечных элементов более высокого порядка:

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 = N_i \Phi_i, \quad i = 1, \dots, 4$$



The diagram shows a horizontal line segment representing an element of length L . Four nodes are marked along the segment at positions $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{L}{3}$, $x_3 = \frac{2L}{3}$, and $x_4 = L$. Below the segment, the shape functions for each node are given: $f_1 = \frac{x}{L}$ for node 1, $f_2 = 1 - \frac{3x}{L}$ for node 2, $f_3 = 1 - \frac{3x}{2L}$ for node 3, and $f_4 = 1 - \frac{x}{L}$ for node 4.

Постановка задачи

$$K^{(e)} q = P^{(e)}$$

$$K^{(e)} = \int_V B^T D B dV + \int_S \alpha_g N^T N dS$$

$$P^{(e)} = \int_V f N^T dV - \int_S q N^T dS + \int_S \alpha_g T_g N^T dS$$

$$dV = S dx, \quad dS = P dx, \quad \text{где } P - \text{периметр}$$

$$B = \frac{d[N]}{dx} = \left[\frac{dN_i}{dx}, \quad \frac{dN_j}{dx}, \quad \frac{dN_k}{dx} \right] = \left[-\frac{3}{L} + \frac{4x}{L^2}, \quad \frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2}, \quad -\frac{1}{L} + \frac{4x}{L^2} \right]$$

$$D = k_x, \quad \text{так как задача одномерная}$$

Получаем:

$$\begin{aligned} \int_V B^T D B dV &= S k_x \cdot \int_0^L B^T B dx = \\ &= S k_x \cdot \int_0^L \begin{bmatrix} \left(-\frac{3}{L} + \frac{4x}{L^2}\right)^2 & \left(-\frac{3}{L} + \frac{4x}{L^2}\right) \left(\frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2}\right) & \left(-\frac{3}{L} + \frac{4x}{L^2}\right) \left(-\frac{1}{L} + \frac{4x}{L^2}\right) \\ \left(-\frac{3}{L} + \frac{4x}{L^2}\right) \left(\frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2}\right) & \left(\frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2}\right)^2 & \left(\frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2}\right) \left(-\frac{1}{L} + \frac{4x}{L^2}\right) \\ \left(-\frac{3}{L} + \frac{4x}{L^2}\right) \left(-\frac{1}{L} + \frac{4x}{L^2}\right) & \left(\frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2}\right) \left(-\frac{1}{L} + \frac{4x}{L^2}\right) & \left(-\frac{1}{L} + \frac{4x}{L^2}\right)^2 \end{bmatrix} dx = \end{aligned}$$

$$= \frac{Sk_x}{6L} \cdot \begin{bmatrix} 14 & -16 & 2 \\ -16 & 32 & -16 \\ 2 & -16 & 14 \end{bmatrix}$$

Рассмотрим следующий интеграл:

$$\int_S \alpha_g N^T N dS = P \alpha_g \cdot \int_0^L N^T N dx = P \alpha_g \cdot \int_0^L \begin{bmatrix} N_i^2 & N_i N_j & N_i N_k \\ N_i N_j & N_j^2 & N_j N_k \\ N_i N_k & N_j N_k & N_k^2 \end{bmatrix} dx =$$

$$= \frac{\alpha_g L}{30} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

