29/11

Четырехугольные конечные элементы
Мультиплекс-элементы

1. φ - аппроксимирующая функция должна быть непрерывной между элементами.

   Предположим, что вдоль верхней и нижней сторон функция меняется по линейному закону, а вдоль вертикальных сторон, например, по кубическому.

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy + \alpha_5 y^2 + \alpha_6 xy^2 + \alpha_7 y^3 + \alpha_8 xy^3$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1y_1^2 & y_1^3 & x_1y_1^3 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2y_2^2 & y_2^3 & x_2y_2^3 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3y_3^2 & y_3^3 & x_3y_3^3 \\ & & & & \dots & & & \\ 1 & x_8 & y_8 & x_8y_8 & y_8^2 & x_8y_8^2 & y_8^3 & x_8y_8^3 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \dots \\ \alpha_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \dots \\ \Phi_8 \end{bmatrix}$$

$$C \cdot \alpha = \Phi \Rightarrow \alpha = C^{-1} \cdot \Phi$$

$$\varphi = P\alpha = P \cdot C^{-1} \cdot \Phi = N\Phi$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & y^2 & xy^2 & y^3 & xy^3 \end{bmatrix}, \quad \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_8 \end{bmatrix}$$

<u>Самая большая сложность - в составлении C^{-1}.</u>

Серендипово семейство

Линейная аппроксимация:

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -b & -a & ab \\ 1 & b & -a & -ab \\ 1 & b & a & ab \\ 1 & -b & a & -ab \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{bmatrix}; \qquad C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{4b} & -\frac{1}{4b} \\ -\frac{1}{4a} & -\frac{1}{4a} & \frac{1}{4a} & \frac{1}{4a} \\ \frac{1}{4ab} & -\frac{1}{4ab} & \frac{1}{4ab} & -\frac{1}{4ab} \end{bmatrix}$$

$$N = P{\cdot}C^{-1} = \frac{1}{4ab}\begin{bmatrix}1 & x & y & xy\end{bmatrix}\begin{bmatrix}ab & ab & ab & ab\\ -a & a & a & -a\\ -b & -b & b & b\\ 1 & -1 & 1 & -1\end{bmatrix} = \frac{1}{4ab}\begin{bmatrix}(b-x)(a-y)\\ (b+x)(a-y)\\ (b+x)(a+y)\\ (b-x)(a+y)\end{bmatrix}$$

Этот метод не рационален. Поэтому функции формы будем искать так: