## 06/09

Алгоритм метода конечных элементов:

1. Дискретизация;
2. Аппроксимация кусочно-непрерывными функциями;
3. Решение СЛАУ.

### Дискретизация области

1. Разделение тела на конечные элементы;
2. Нумерация ($N$ узлов, $N$ элементов).

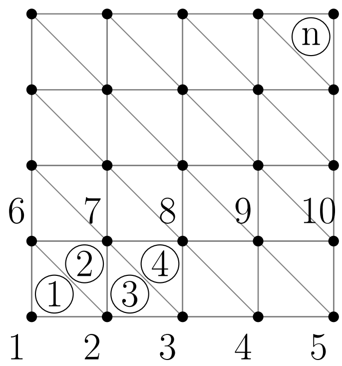



Рисунок 1 – Пример дискретизации области

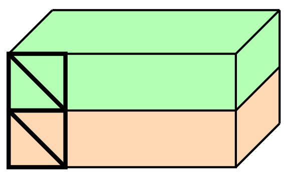


Рисунок 2 – Пример трехмерной области, состоящей из двух материалов

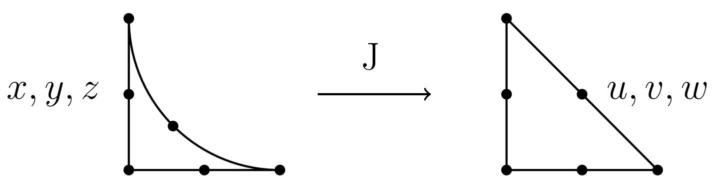



Рисунок 3 – Приведение криволинейного элемента

Замечания по разбиению:

1. Форма элемента должна быть близка к правильной;

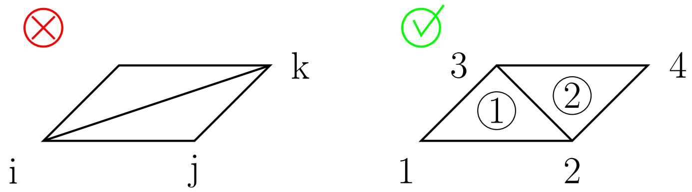



Рисунок 4 – Пример плохой и хорошей дискретизации

2. Все узлы конечного элемента должны совпадать.

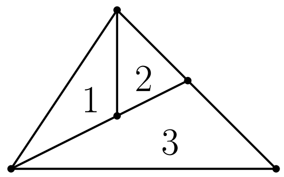



Рисунок 5 – Пример плохой дискретизации

Замечание по нумерации узлов и конечных элементов:

От нумерации узлов зависит ширина полосы ленты СЛАУ, поэтому узлы нужно нумеровать с короткой стороны для достижения наименьшей разницы между номерами узлов. Нумерация конечных элементов не важна, т.к. они привязаны к узлам.

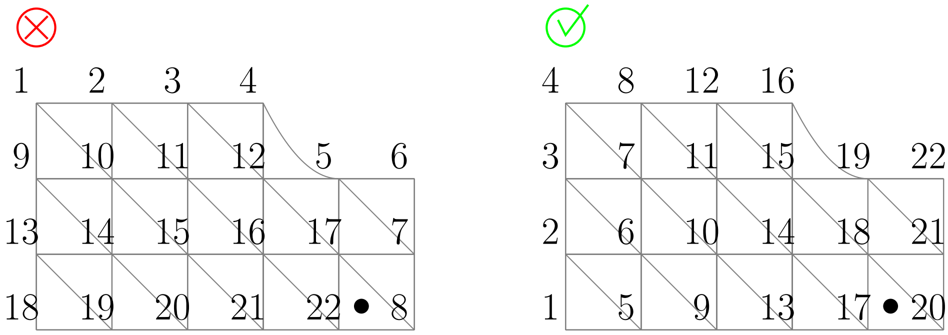
$$B = (R + 1) \cdot Q$$

где $B$ - ширина полосы ленты;

$R$ - максимальная по элементам величина наибольшей разности между узлами отдельного конечного элемента;

$Q$ - кол-во степеней свободы (число неизвестных).

Нумерация треугольников против ЧС, начало с отдельных узлов.




$\bullet$ 8, 17, 22 $\qquad\qquad$ $\bullet$ 20, 18, 17

$R_\bullet = 14$ $\qquad\qquad$ $R_\bullet = 3$

Рисунок 6 – Пример правильной и неправильной нумерации узлов

Форма записи КЭ в файл(трехмерный случай):

$$\left.\begin{array}{cccc} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 2 & x_2 & y_2 & z_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & x_n & y_n & z_n \end{array}\right\} \text{номера узлов и их координаты}$$

$$\left.\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \text{n} & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{номера КЭ и номера узлов, из} \\ \text{которых они состоят}\end{array}$$

Замечания о порядке узлов, составляющих КЭ:

1. Обход узлов КЭ принято делать против часовой стрелки (для того, чтобы нормали были направлены в одну сторону);

2. Нумерацию желательно делать таким образом, чтобы соответствующие узлы попали в одно и то же место СЛАУ.

Пояснение к замечанию 2:

Обратимся к Рисунку 4. Представим, что мы накладываем один КЭ на другой. Первый КЭ начнем нумеровать с узла №1 — (1-2-3), тогда второй КЭ начнем обходить с узла №4 — (4-3-2) и тд.

## 13/09

### Одномерные пружинные системы

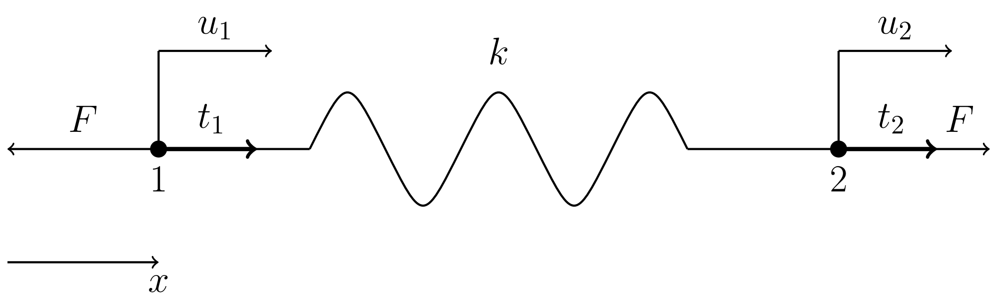



Рисунок 7 – Одномерная пружинная система из одного элемента

**1.** Уравнение равновесия

где $k$ - коэффициент жесткости, $u_1, u_2$ - перемещения, $F$ - приложенная сила, $t_1, t_2$ - реакции.

Закон Гука:

$$F = k\Delta = k(u_2 - u_1)$$

$$t_1 + t_2 = 0 \rightarrow t_1 = -t_2$$

$$F = t_2 = k(u_2 - u_1)$$

$$-F = t_1 = -k(u_2 - u_1) = k(u_1 - u_2)$$

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow Kq = t$$

где $q = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$, $t = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$, $K = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$.

**2.** Вариационный метод

$$\Pi = \Pi_{in} - \Pi_{ex},$$

где $\Pi$ - потенциальная энергия системы.

$$\Pi_{in} = \int\limits_0^\Delta F d\Delta = \int\limits_0^\Delta k\Delta d\Delta = \frac{k(u_2 - u_1)^2}{2} = \frac{1}{2} q^{\mathrm{T}} K q = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\Pi_{ex} = t_1 u_1 + t_2 u_2 = q^{\mathrm{T}} t$$

$$\Pi = \frac{1}{2} q^{\mathrm{T}} K q - q^{\mathrm{T}} t \to min$$

Условие стационарности потенциальной энергии

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial u_1} = 0,\ \frac{\partial \Pi}{\partial u_2} = 0$$

$$\Pi = \frac{k}{2}(u_2 - u_1)^2 - t_1 u_1 - t_2 u_2$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_1} = k(u_2 - u_1)(-1) - t_1 = 0 \Leftarrow k(u_1 - u_2) = t_1$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_2} = k(u_2 - u_1) - t_2 = 0 \Leftarrow k(u_2 - u_1) = t_2$$

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$$

**3.** Метод возможных перемещений

Работа внутренних сил на возможных деформациях равна внешней работе возможных перемещений:

$$A_{in} = A_{ex},$$

где $A_{in}$ - работа внутренних сил на возможных деформациях,
$A_{ex}$ - работа внешних сил на возможных перемещениях.

$$A_{in} = F \delta \Delta = F(\delta u_2 - \delta u_1)$$

$$A_{ex} = t_1 \delta u_1 + t_2 \delta u_2$$

$$F(\delta u_2 - \delta u_1) = t_1 \delta u_1 + t_2 \delta u_2$$

$$\delta u_1, \delta u_2 : \begin{cases} -F = t_1 \\ F = t_2 \end{cases}$$

## Методика составления глобальной системы для МКЭ

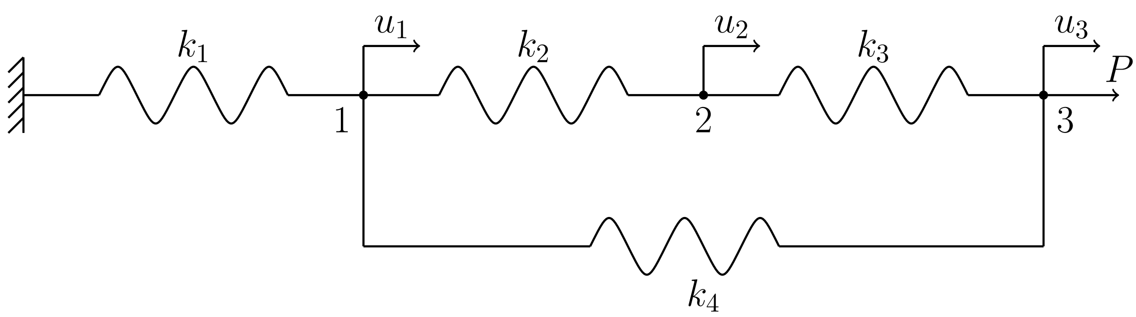



Рисунок 8 – Одномерная пружинная система из четырех элементов

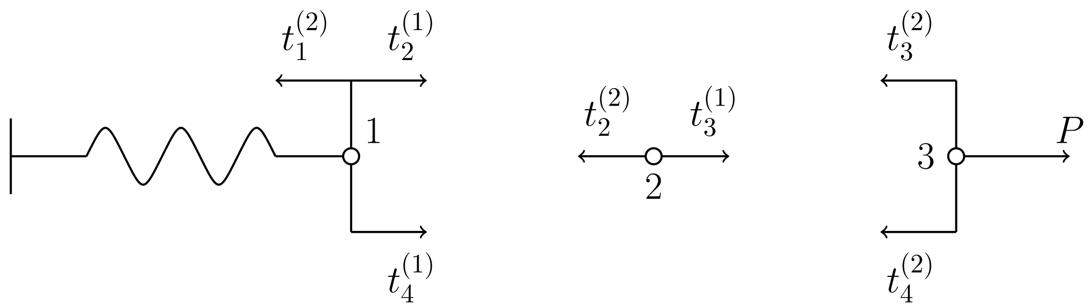



Рисунок 9 – Силы реакций в узлах системы

Используемые обозначения:

(1) – начало элемента,

(2) – конец элемента.

$$\begin{cases} t_1^{(2)} + t_2^{(1)} + t_4^{(1)} = 0 \\ t_2^{(2)} + t_3^{(1)} = 0 \\ t_3^{(2)} + t_4^{(2)} = P \end{cases} \qquad \begin{cases} t_i^{(1)} = k_i(u^{(1)} - u^{(2)}) \\ t_i^{(2)} = k_i(u^{(2)} - u^{(1)}) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} t_1^{(2)} &= k_1(u_1 - 0) \\ t_4^{(1)} &= k_4(u_1 - u_3) \\ t_3^{(1)} &= k_3(u_2 - u_3) \\ t_4^{(2)} &= k_4(u_3 - u_1) \\ t_2^{(1)} &= k_2(u_1 - u_2) \\ t_2^{(2)} &= k_2(u_2 - u_1) \\ t_3^{(2)} &= k_3(u_3 - u_2) \end{aligned} \;\Rightarrow\; \begin{cases} (k_1 + k_2 + k_4)u_1 - k_2u_2 - k_4u_3 = 0 \\ -k_2u_1 + (k_2 + k_3)u_2 - k_3u_3 = 0 \\ -k_4u_1 - k_3u_2 + (k_3 + k_4)u_3 = P \end{cases} \qquad (*)$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + k_4 & -k_2 & -k_4 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ -k_4 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix}$$

<u>Принцип возможных перемещений</u>

$$\sum_{i=1}^{4} F^{(i)} \delta\Delta^{(i)} = \sum_{i=1}^{4} k_{(i)} \Delta^{(i)} \delta\Delta^{(i)} = P\delta u_3$$

$$k_1 u_1 \delta u_1 + k_2(u_2 - u_1)(\delta u_2 - \delta u_1) + k_3(u_3 - u_2)(\delta u_3 - \delta u_2) + k_4(u_3 - u_1)(\delta u_3 - \delta u_1) =$$

$$= P\delta u_3 + 0 \cdot \delta u_1 + 0 \cdot \delta u_2$$

$$\begin{aligned} &\delta u_1 : \ \dots \\ &\delta u_2 : \ \dots \Rightarrow (*) \\ &\delta u_3 : \ \dots \end{aligned}$$

## 20/09

### Хранение разреженных матриц

Опр. Портретом разреженной матрицы называется множество:

$$P_A = \{(i, j) : a_{ij} \neq 0\}$$

Возможны следующие случаи:

1. Матрица несимметрична и ее портрет несимметричен:

$$\exists\ (i, j) \in P_A : (j, i) \notin P_A \Leftrightarrow A \neq A^{\mathrm{T}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Матрица несимметрична но её портрет симметричен:

$$A \neq A^{\mathrm{T}},\ \text{но } (i, j) \in P_A, (j, i) \in P_A, a_{ij} \neq a_{ij}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix}$$

3. Если матрица симметрична ($a_{ji} = a_{ij}$), то её портрет симметричен:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix}$$

Форматы хранения разреженных матриц:
CSR - compressed sparse row
CSC - compressed sparse column
CSLR - compressed sparse low-triangle row

Рассмотрим формат CSR:

1. aelem - массив, хранящий все $a_{ij} \neq 0$ в строках

2. jptr - массив размерности aelem, указывает номер $N_j$ элемента $a_{ij}$

3. iptr - массив размерности $n+1$ ($n$ - размерность СЛАУ), хранит число элементов $a_{ij} \neq 0$ в строке

   iptr$[i+1]$ - iptr$[i]$ - число элементов в i-ой строке

   iptr$[n+1]$ - число элементов в aelem $+\ 1$

   <u>Пример:</u>

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 11 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 10 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 12 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Матрица $A$ несимметрична, а $P_A$ симметричен, т.к. если $a_{ij} \neq 0$, то $a_{ji} \neq 0$.

aelem: $[[9,3,1,1], [11,2,1,2], [1,10,2], [2,1,2,9,1], [1,1,12,1], [8], [2,2,3,8]]$.

jptr: $[[1,4,5,7], [2,3,4,7], [2,3,4], [1,2,3,4,5], [1,4,5,7], [6], [1,2,5,7]]$.

iptr: $[1,5,9,12,17,21,22,26]$.

Рассмотрим формат CSLR:

Обычно такой формат используется для хранения симметричных матриц, т.е. в памяти хранятся только элементы верхнего (или нижнего) треугольника. Если матрица несимметрична, то храним ещё и элементы нижнего треугольника, но уже по столбцам (для сохранения структуры).

В нашем примере:

adiag: $[9,11,10,9,12,8,8]$ – все диагональные элементы.

altr: $[1,2,1,2,1,1,2,2,3]$ – элементы нижнего треугольника.

autr: $[2,3,1,2,1,1,1,2,1]$ – элементы верхнего треугольника.

jptr: $[2,1,2,3,1,4,1,2,5]$.

iptr: $[1,1,1,2,5,7,7,10]$.

Входные данные: $\overline{x}$, aelem, jptr, iptr, n.

$$z = A\overline{x},\ A - CSR$$

*Листинг 1 - алгоритм составления вектора $z$*

```
i: 1,.., n
{
    z[i]=0;
    j: iptr[i],..,iptr[i+1]-1
    {
        z[i]=z[i]+x[jptr[j]]*aelem[j];
    }
}
```

## Учет граничных условий

Граничные условия I рода

Зададим температуру в узле $a_{33}$:

$$A = \begin{bmatrix} \cdots & & \cdots & & \cdots \\ \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \end{bmatrix}$$

Чтобы не испортилась симметричность портрета, искусственно обнулим необходимые элементы массива aelem.

***Листинг 2 - алгоритм задания граничных условий***

```
i = iptr[k],..,iptr[k+1]-1
{
    if jptr[i]=k:
        aelem[jptr[k]]=1;
    else:
        aelem[jptr[k]]=0;
}
```

Метод Холецкого

$$A \approx LU$$
$$A = LU + R$$

где $L$ - нижнетреугольная матрица;

$U$ - верхнетреугольная матрица;

$R$ - ошибка округления.

$$\begin{cases} Ax = b \\ LUx = b \\ Ly = b \Rightarrow Ux = y \end{cases}$$

## Предобусловливание

Число обусловленности: $\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$

Если число обусловленности велико, система плохо обусловлена, и небольшие ошибки в данных могут привести к большим ошибкам в решении. Если число обусловленности близко к 1, система хорошо обусловлена, и решения будут стабильными.

Рассмотрим СЛАУ $Ax = b$, где $A$ – плохо обусловленная матрица.

Пусть $M$ – невырожденная матрица размерности $n \times n$. Домножим СЛАУ на матрицу, обратную $M$:

$$M^{-1}Ax = M^{-1}b$$

$$A^{*}x = b^{*}$$

M - матрица предобусловливания

1. M должна быть по возможности близка к A (пример: M = diag(A)).
2. M должна быть легко вычислима.
3. M должна быть легко обратима.

## 27/09

### Одномерные краевые задачи

$$-(ku')' + cu' + bu = f, \qquad x \in (0, l), \tag{1}$$

где $u(x)$ - неизвестная функция; $k(x)$, $c(x)$, $b(x)$, $f(x)$ - известные функции.

Таблица 1 – Граничные условия

| № | x = 0 | x = l |
|---|---|---|
| 1 | $u(0) = U_0$ | $u(l) = U_l$ |
| 2 | $k(0)u'(0) = -\sigma_0$ | $k(l)u'(l) = \sigma_l$ |
| 3 | $k(0)u'(0) = -a_0(U_0 - u(0))$ | $k(l)u'(l) = a_l(U_l - u(l))$ |

### Интегральная формулировка

Состасим невязку:

$$r = -(ku')' + cu' + bu - f = 0 \tag{2}$$

(**??**) ⇔ (**??**)

Составим следующий интеграл:

$$\int_0^l r \cdot v dx = 0, \tag{3}$$

где $v$ – некоторая пробная функция ($v = \delta u$ – возможные изменения $u$)

Докажем, что (**??**) ⇔ (**??**):

Предположим, что (**??**) выполняется, а (**??**) – нет, то есть $r \neq 0$. Тогда:

$v$ – любая пробная функция:

Графики $r(x)$ и $v(x)$

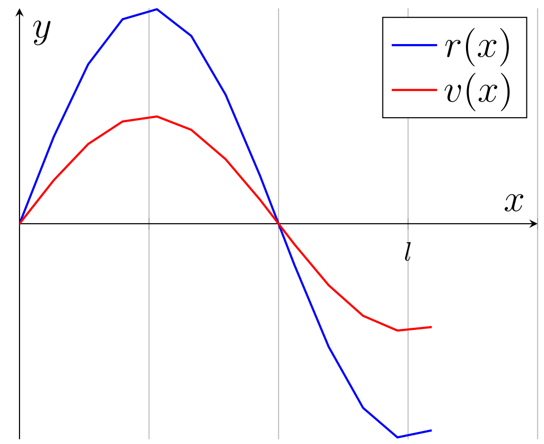
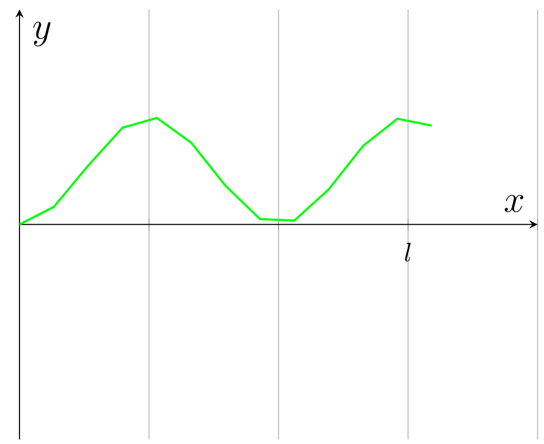



График $r(x) \cdot v(x)$




Из последнего графика видно, что

$$\int\limits_0^l r \cdot v dx \neq 0,$$

что противоречит нашему предположению о том, что (**??**) выполняется, ч.т.д.

Итак,

$$\int\limits_0^l r \cdot v dx = \int\limits_0^l (-(ku')'v + cu'v + buv - fv) dx = 0 \tag{4}$$

Интегрируем по частям первый интеграл:

$$\int\limits_0^l -(ku')'vdx = \left| \begin{array}{cc} \int\limits_0^l fdg = fg\Big|_0^l - \int\limits_0^l gdf & \\ dg = -(ku')'dx & g = -ku' \\ f = v & df = v'dx \end{array} \right| = \tag{5}$$

$$= -ku'v\Big|_0^l + \int\limits_0^l (ku')v'dx = \int\limits_0^l (ku')v'dx - \underbrace{(\underbrace{k(l)u'(l)v(l)}_{F_l} \underbrace{-k(0)u'(0)v(0)}_{F_0})}_{F(v)}$$

Подставим (**??**) в (**??**):

$$\int\limits_0^l ((ku')'v' + cu'v + buv - fv)dx - F(v) = 0$$

Рассмотрим граничные условия:

| № | x = 0 | x = l |
|---|---|---|
| 1 | $u(0) = U_0 \Rightarrow v(0) = 0,\ F_0 = 0$ | $u(l) = U_l \Rightarrow v(l) = 0,\ F_l = 0$ |
| 2 | $k(0)u'(0) = -\sigma_0 \Rightarrow F_0 = \sigma_0 v(0)$ | $k(l)u'(l) = \sigma_l \Rightarrow F_l = \sigma_l v(l)$ |
| 3 | $k(0)u'(0) = -a_0(U_0 - u(0)) \Rightarrow$ $\Rightarrow F_0 = a_0(U_0 - u(0))v(0)$ | $k(l)u'(l) = a_l(U_l - u(l)) \Rightarrow$ $\Rightarrow F_l = a_l(U_l - u(l))v(l)$ |

Разобьем отрезок $[0, l]$ на части $[x_i, x_{i+1}]$: