20/09

Хранение разреженных матриц

Опр. Портретом разреженной матрицы называется множество:

$$P_A = \{(i, j) : a_{ij} \neq 0\}$$

Возможны следующие случаи:

1. Матрица несимметрична и ее портрет несимметричен:

$$\exists\ (i, j) \in P_A : (j, i) \notin P_A \Leftrightarrow A \neq A^{\mathrm{T}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Матрица несимметрична но её портрет симметричен:

$$A \neq A^{\mathrm{T}},\ \text{но } (i, j) \in P_A, (j, i) \in P_A, a_{ij} \neq a_{ij}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix}$$

3. Если матрица симметрична ($a_{ji} = a_{ij}$), то её портрет симметричен:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix}$$

Форматы хранения разреженных матриц:
CSR - compressed sparse row
CSC - compressed sparse column
CSLR - compressed sparse low-triangle row

Рассмотрим формат CSR:

1. aelem - массив, хранящий все $a_{ij} \neq 0$ в строках

2. jptr - массив размерности aelem, указывает N_j элемента a_{ij}

3. iptr - массив размерности $n+1$ (n - размерность СЛАУ), хранит число элементов $a_{ij} \neq 0$ в строке

   iptr$[i+1]$ - iptr$[i]$ - число элементов в i-ой строке

   iptr$[n+1]$ - число элементов в aelem $+ 1$

   Пример:

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 11 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 10 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 12 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Матрица A несимметрична, а P_A симметричен, т.к. если $a_{ij} \neq 0$, то $a_{ji} \neq 0$.

aelem: $[[9,3,1,1],[11,2,1,2],[1,10,2],[2,1,2,9,1],[1,1,12,1],[8],[2,2,3,8]]$.

jptr: $[[1,4,5,7],[2,3,4,7],[2,3,4],[1,2,3,4,5],[1,4,5,7],[6],[1,2,5,7]]$.

iptr: $[1,5,9,12,17,21,22,26]$.

Если матрица несимметрична, то храним ещё и элементы нижнего треугольника, но уже по столбцам (для сохранения структуры).

К ЧЕМУ ЭТО

autr: $[2,3,1,2,1,1,1,2,1]$.

jptr: $[2,1,2,3,1,4,1,2,5]$.

iptr: $[1,1,1,2,5,7,7,10]$.

Я НЕ ПОНИМАЮ

Входные данные: $\overline{x}$, aelem, jptr, iptr, n.

$$z = A\overline{x},\ A - CSR$$

как оформить код (а главное, зачем в нем столько скобок) - а хуй его знает

Учет граничных условий

Граничные условия I рода

Зададим температуру в узле a_{33}:

$$A = \begin{bmatrix} \cdots & & \cdots & & \cdots \\ \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \end{bmatrix}$$

Чтобы не испортилась симметричность портрета, искусственно обнулим необходимые элементы массива aelem.

(я не понимаю к чему относится часть первой строки в коде после точки с запятой)

```
i = iptr[k]; iptr[k+1]-1
{
    if jptr[i=k]
        aelem[jptr[k]]=1;
    else
        aelem[jptr[k]]=0;
}
```

Метод Холецкого

$$A \approx LU$$
$$A = LU + R$$

где L - нижнетреугольная матрица;

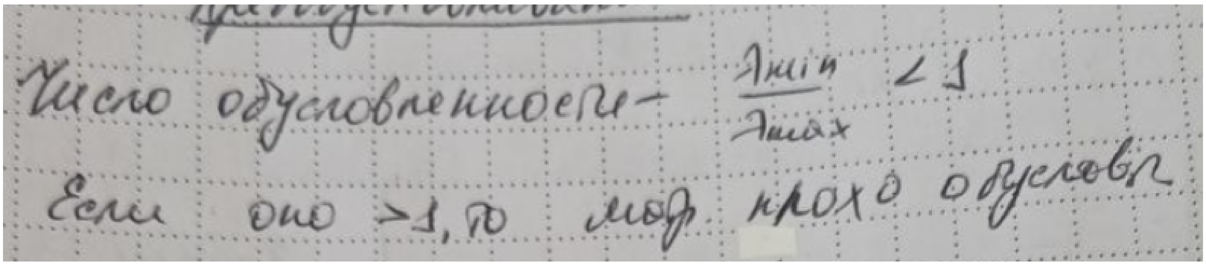
U - верхнетреугольная матрица;

R - ошибка округления.

$$\begin{cases} Ax = b \\ LUx = b \\ Ly = b \Rightarrow Ux = y \end{cases}$$

Предобусловливание

Число обусловленности: $\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}} < 1$
Так оно меньше единицы или больше?



M - матрица предобусловливания

1. M должна быть по возможности близка к A (пример: M = diag(A)).
2. M должна быть легко вычислима.
3. M должна быть обратима.