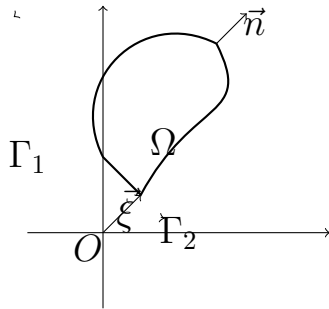


Двумерные краевые задачи

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial u}{\partial y} \right) + bu = f \quad (1)$$

$K(x, y)$, $b(x, y)$, $f(x, y)$ – заданные (гладкие) функции.
 $u(x, y)$ – неизвестная.

Ω – область, где задано уравнение (??), Γ – граница Ω .



Замкнутый контур Γ – гладкий, за исключением конечного числа угловых точек, в которых внутренний угол $\alpha \in [0; \pi]$.

$$\Gamma = \underbrace{\Gamma_1}_{\text{I рода}} \cup \underbrace{\Gamma_2}_{\text{II/III рода}}$$

$u(\xi) = \hat{u}(\xi)$ – на Γ_1 (заданное значение).

$$K(\xi) \frac{\partial u}{\partial n} = \hat{\sigma}(\xi) \quad \text{на } \Gamma_2$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} l_x + \frac{\partial u}{\partial y} l_y, \quad \begin{cases} l_x = \cos(\alpha x) = \cos(\vec{x}, \vec{n}), \\ l_y = \cos(\alpha y) = \cos(\vec{y}, \vec{n}), \\ ||\vec{n}|| = 1 \end{cases}$$

Составим невязку:

$$r(x, y) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial u}{\partial y} \right) + bu - f = 0$$

$$\iint_{\Omega} r(x, y) \cdot v \, dx \, dy = 0,$$

где $v(x, y)$ – пробная (гладкая) функция; на Γ_1 : $v = 0$

$$\iint_{\Omega} \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial u}{\partial y} \right) + bu - f \right] \cdot v \, dx \, dy = 0 \quad (2)$$

Рассмотрим первый интеграл:

$$-\iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot v \, dx \, dy$$

Формула Гаусса-Остроградского:

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} F \, dx \, dy = \int_{\Gamma} F \cdot l_x \, d\xi$$

Представим F в виде $F = uv$:

$$\frac{\partial}{\partial x} F = \frac{\partial}{\partial x} (uv) = \frac{\partial u}{\partial x} v + u \frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} v = \frac{\partial}{\partial x} (uv) - u \frac{\partial v}{\partial x}$$

Отсюда:

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} v \, dx \, dy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} (uv) - u \frac{\partial v}{\partial x} \right) \, dx \, dy$$

И по формуле Гаусса-Остроградского:

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} v \, dx \, dy = \int_{\Gamma} uv \cdot l_x \, d\xi - \iint_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x} u \, dx \, dy$$

Тогда:

$$-\iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot v \, dx \, dy = - \int_{\Gamma} K \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot v \cdot l_x \, d\xi + \iint_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x} \left(K \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) \, dx \, dy$$

$$-\iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot v \, dx \, dy = - \int_{\Gamma} K \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot v \cdot l_y \, d\xi + \iint_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial y} \left(K \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) \, dx \, dy$$

Подставим в (??):

$$\iint_{\Omega} \left[\frac{\partial v}{\partial x} \cdot K \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot K \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + bu \cdot v - f \cdot v \right] dx dy -$$

$$- \int_{\Gamma_2} K \cdot v \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot l_x + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot l_y \right) = 0$$