

06/09

Алгоритм метода конечных элементов:

1. Дискретизация;
2. Аппроксимация кусочно-непрерывными функциями;
3. Решение СЛАУ.

Дискретизация области

1. Разделение тела на конечные элементы;
2. Нумерация (N узлов, N элементов).

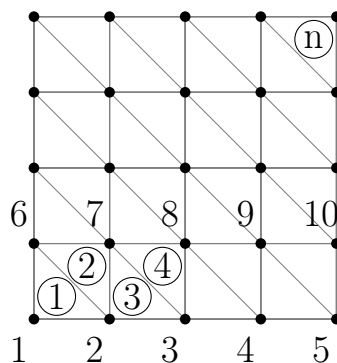


Рисунок 1 – Пример дискретизации области

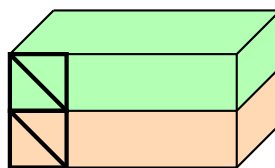


Рисунок 2 – Пример трехмерной области, состоящей из двух материалов

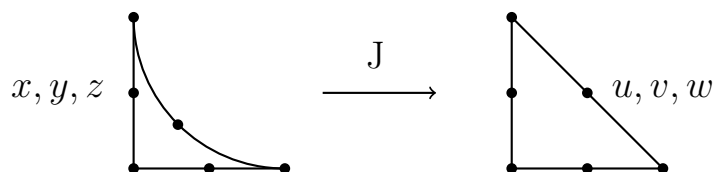


Рисунок 3 – Приведение криволинейного элемента

Замечания по разбиению:

1. Форма элемента должна быть близка к правильной;

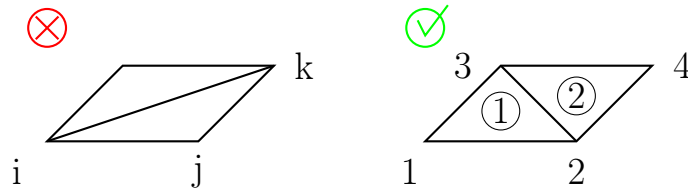


Рисунок 4 – Пример плохой и хорошей дискретизации

2. Все узлы конечного элемента должны совпадать.

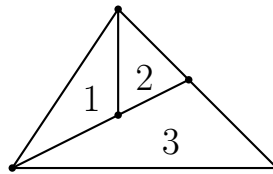


Рисунок 5 – Пример плохой дискретизации

Замечание по нумерации узлов и конечных элементов:

От нумерации узлов зависит ширина полосы ленты СЛАУ, поэтому узлы нужно нумеровать с короткой стороны для достижения наименьшей разницы между номерами узлов. Нумерация конечных элементов не важна, т.к. они привязаны к узлам.

$$B = (R + 1) \cdot Q$$

где B - ширина полосы ленты;

R - максимальная по элементам величина наибольшей разности между узлами отдельного конечного элемента;

Q - кол-во степеней свободы (число неизвестных).

Нумерация треугольников против ЧС, начало с отдельных узлов.

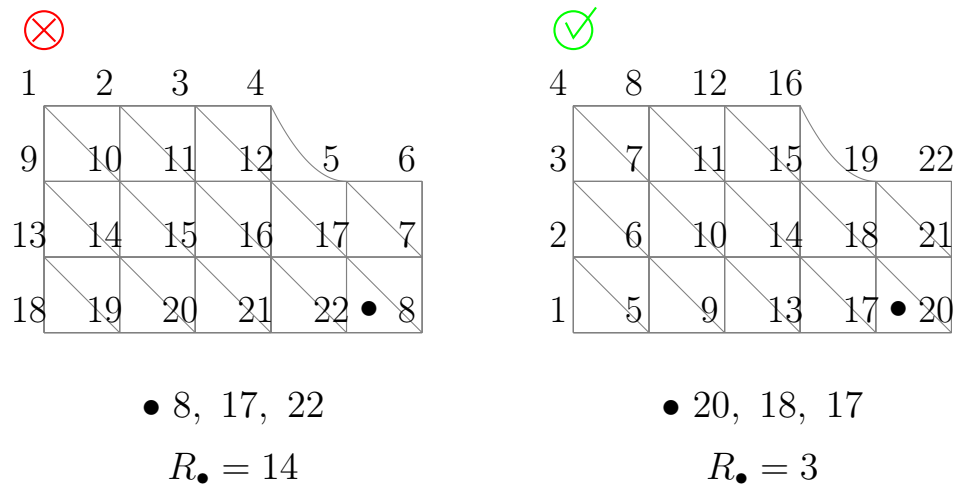


Рисунок 6 – Пример правильной и неправильной нумерации узлов

Форма записи КЭ в файл(трехмерный случай):

$$\left. \begin{array}{cccc} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 2 & x_2 & y_2 & z_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & x_n & y_n & z_n \end{array} \right\} \text{номера узлов и их координаты}$$

$$\left. \begin{array}{cccc} \textcircled{1} & 1 & 2 & 3 \\ \textcircled{2} & 4 & 3 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \textcircled{n} & \dots & \dots & \dots \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{номера КЭ и номера узлов, из} \\ \text{которых они состоят} \end{array}$$

Замечания о порядке узлов, составляющих КЭ:

1. Обход узлов КЭ принято делать против часовой стрелки (для того, чтобы нормали были направлены в одну сторону);
2. Нумерацию желательно делать таким образом, чтобы соответствующие узлы попали в одно и то же место СЛАУ.

Пояснение к замечанию 2:

Обратимся к Рисунку 4. Представим, что мы накладываем один КЭ на другой. Первый КЭ начнем нумеровать с узла №1 — (1-2-3), тогда второй КЭ начнем обходить с узла №4 — (4-3-2) и тд.

Одномерные пружинные системы

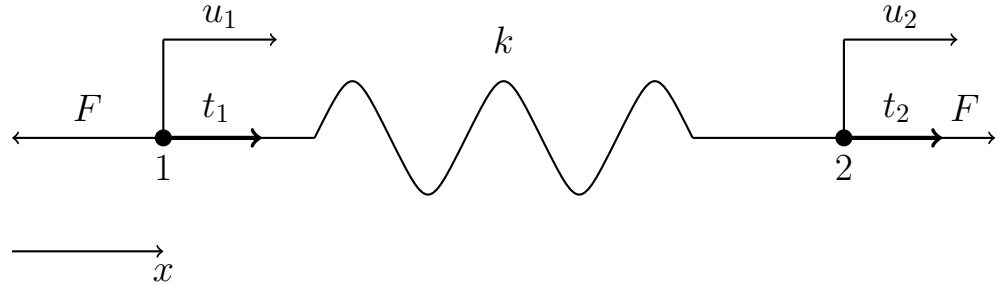


Рисунок 7 – Одномерная пружинная система из одного элемента

1. Уравнение равновесия

где k - коэффициент жесткости, u_1, u_2 - перемещения, F - приложенная сила, t_1, t_2 - реакции.

Закон Гука:

$$F = k\Delta = k(u_2 - u_1)$$

$$t_1 + t_2 = 0 \rightarrow t_1 = -t_2$$

$$F = t_2 = k(u_2 - u_1)$$

$$-F = t_1 = -k(u_2 - u_1) = k(u_1 - u_2)$$

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow Kq = t$$

где $q = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$, $t = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$, $K = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$.

2. Вариационный метод

$$\Pi = \Pi_{in} - \Pi_{ex},$$

где Π - потенциальная энергия системы.

$$\Pi_{in} = \int_0^{\Delta} F d\Delta = \int_0^{\Delta} k\Delta d\Delta = \frac{k(u_2 - u_1)^2}{2} = \frac{1}{2} q^T K q = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\Pi_{ex} = t_1 u_1 + t_2 u_2 = q^T t$$

$$\Pi = \frac{1}{2} q^T K q - q^T t \rightarrow \min$$

Условие стационарности потенциальной энергии

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial u_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial u_2} = 0$$

$$\Pi = \frac{k}{2} (u_2 - u_1)^2 - t_1 u_1 - t_2 u_2$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_1} = k(u_2 - u_1)(-1) - t_1 = 0 \Leftrightarrow k(u_1 - u_2) = t_1$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_2} = k(u_2 - u_1) - t_2 = 0 \Leftrightarrow k(u_2 - u_1) = t_2$$

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$$

3. Метод возможных перемещений

Работа внутренних сил на возможных деформациях равна внешней работе возможных перемещений:

$$A_{in} = A_{ex},$$

где A_{in} - работа внутренних сил на возможных деформациях,
 A_{ex} - работа внешних сил на возможных перемещениях.

$$A_{in} = F \delta \Delta = F(\delta u_2 - \delta u_1)$$

$$A_{ex} = t_1 \delta u_1 + t_2 \delta u_2$$

$$F(\delta u_2 - \delta u_1) = t_1 \delta u_1 + t_2 \delta u_2$$

$$\delta u_1, \delta u_2 : \begin{cases} -F = t_1 \\ F = t_2 \end{cases}$$

Методика составления глобальной системы для МКЭ

Используемые обозначения:

- (1) – начало элемента,
- (2) – конец элемента.

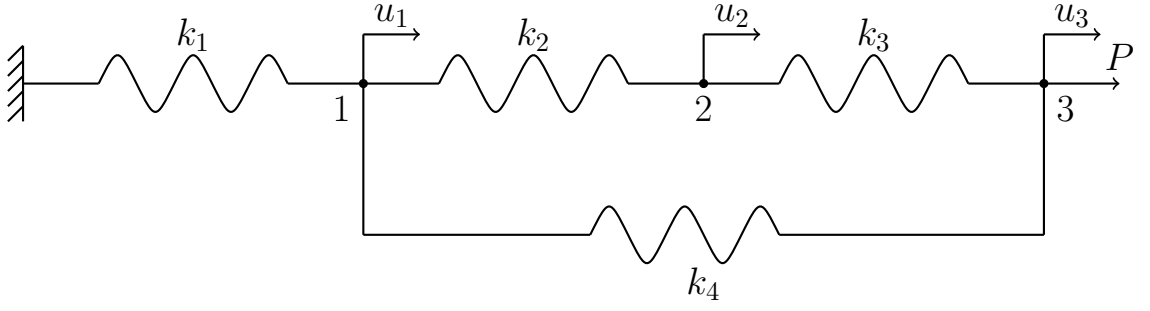


Рисунок 8 – Одномерная пружинная система из четырех элементов

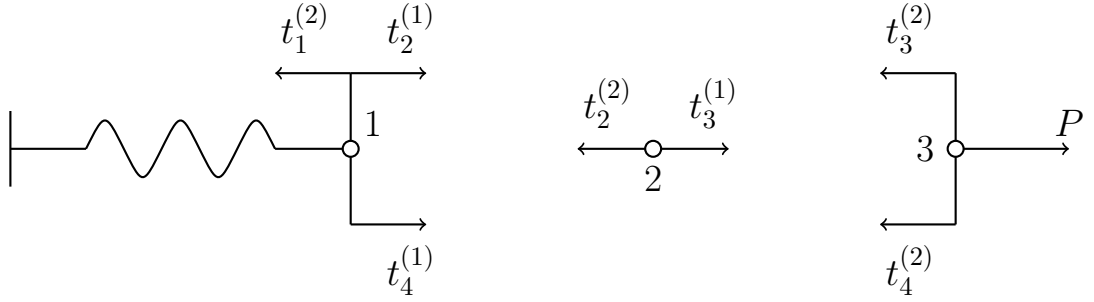


Рисунок 9 – Силы реакций в узлах системы

$$\begin{cases} t_1^{(2)} + t_2^{(1)} + t_4^{(1)} = 0 \\ t_2^{(2)} + t_3^{(1)} = 0 \\ t_3^{(2)} + t_4^{(2)} = P \end{cases} \quad \begin{cases} t_i^{(1)} = k_i(u^{(1)} - u^{(2)}) \\ t_i^{(2)} = k_i(u^{(2)} - u^{(1)}) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} t_1^{(2)} &= k_1(u_1 - 0) \\ t_4^{(1)} &= k_4(u_1 - u_3) \\ t_3^{(1)} &= k_3(u_2 - u_3) \\ t_4^{(2)} &= k_4(u_3 - u_1) \\ t_2^{(1)} &= k_2(u_1 - u_2) \\ t_2^{(2)} &= k_2(u_2 - u_1) \\ t_3^{(2)} &= k_3(u_3 - u_2) \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} (k_1 + k_2 + k_4)u_1 - k_2u_2 - k_4u_3 = 0 \\ -k_2u_1 + (k_2 + k_3)u_2 - k_3u_3 = 0 \\ -k_4u_1 - k_3u_2 + (k_3 + k_4)u_3 = P \end{cases} \quad (*)$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + k_4 & -k_2 & -k_4 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ -k_4 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix}$$

Принцип возможных перемещений

$$\sum_{i=1}^4 F^{(i)} \delta \Delta^{(i)} = \sum_{i=1}^4 k_{(i)} \Delta^{(i)} \delta \Delta^{(i)} = P \delta u_3$$

$$\begin{aligned} k_1 u_1 \delta u_1 + k_2 (u_2 - u_1) (\delta u_2 - \delta u_1) + k_3 (u_3 - u_2) (\delta u_3 - \delta u_2) + k_4 (u_3 - u_1) (\delta u_3 - \delta u_1) = \\ = P \delta u_3 + 0 \cdot \delta u_1 + 0 \cdot \delta u_2 \end{aligned}$$

$$\delta u_1 : \dots$$

$$\delta u_2 : \dots \Rightarrow (*)$$

$$\delta u_3 : \dots$$

20/09

Хранение разреженных матриц

Опр. Портретом разреженной матрицы называется множество:

$$P_A = \{(i, j) : a_{ij} \neq 0\}$$

Возможны следующие случаи:

1. Матрица несимметрична и ее портрет несимметричен:

$$\exists (i, j) \in P_A : (j, i) \notin P_A \Leftrightarrow A \neq A^T$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Матрица несимметрична но её портрет симметричен:

$$A \neq A^T, \text{ но } (i, j) \in P_A, (j, i) \in P_A, a_{ij} \neq a_{ji}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix}$$

3. Если матрица симметрична ($a_{ji} = a_{ij}$), то её портрет симметричен:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix}$$

Форматы хранения разреженных матриц:

CSR - compressed sparse row

CSC - compressed sparse column

CSLR - compressed sparse low-triangle row

Рассмотрим формат CSR:

1. aelem - массив, хранящий все $a_{ij} \neq 0$ в строках
2. jptr - массив размерности aelem, указывает номер N_j элемента a_{ij}

3. iptr - массив размерности $n + 1$ (n - размерность СЛАУ), хранит число элементов $a_{ij} \neq 0$ в строке

iptr[$i + 1$] - iptr[i] - число элементов в i -ой строке

iptr[$n + 1$] - число элементов в aelem + 1

Пример:

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 11 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 10 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 12 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Матрица A несимметрична, а P_A симметричен, т.к. если $a_{ij} \neq 0$, то $a_{ji} \neq 0$.

aelem: [[9, 3, 1, 1], [11, 2, 1, 2], [1, 10, 2], [2, 1, 2, 9, 1], [1, 1, 12, 1], [8], [2, 2, 3, 8]].

jptr: [[1, 4, 5, 7], [2, 3, 4, 7], [2, 3, 4], [1, 2, 3, 4, 5], [1, 4, 5, 7], [6], [1, 2, 5, 7]].

iptr: [1, 5, 9, 12, 17, 21, 22, 26].

Рассмотрим формат CSLR:

Обычно такой формат используется для хранения симметричных матриц, т.е. в памяти хранятся только элементы верхнего (или нижнего) треугольника. Если матрица несимметрична, то храним ещё и элементы нижнего треугольника, но уже по столбцам (для сохранения структуры).

В нашем примере:

adiag: [9, 11, 10, 9, 12, 8, 8] – все диагональные элементы.

altr: [1, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 3] – элементы нижнего треугольника.

autr: [2, 3, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1] – элементы верхнего треугольника.

jptr: [2, 1, 2, 3, 1, 4, 1, 2, 5].

iptr: [1, 1, 1, 2, 5, 7, 7, 10].

Входные данные: \bar{x} , aelem, jptr, iptr, n.

$$z = A\bar{x}, \quad A - CSR$$

Листинг 1 - алгоритм составления вектора z

```

i: 1, ..., n
{
    z[i]=0;
    j: iptr[i], ..., iptr[i+1]-1
    {
        z[i]=z[i]+x[jptr[j]]*aelem[j];
    }
}

```

Учет граничных условий

Граничные условия I рода

Зададим температуру в узле a_{33} :

$$A = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Чтобы не испортилась симметричность портрета, искусственно обнулим необходимые элементы массива aelem.

Листинг 2 - алгоритм задания граничных условий

```

i = iptr[k], ..., iptr[k+1]-1
{
    if jptr[i]=k:
        aelem[jptr[k]]=1;
    else:
        aelem[jptr[k]]=0;
}

```

Метод Холецкого

$$A \approx LU$$

$$A = LU + R$$

где L - нижнетреугольная матрица;

U - верхнетреугольная матрица;

R - ошибка округления.

$$\begin{cases} Ax = b \\ LUx = b \\ Ly = b \Rightarrow Ux = y \end{cases}$$

Предобусловливание

Число обусловленности: $\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$

Если число обусловленности велико, система плохо обусловлена, и небольшие ошибки в данных могут привести к большим ошибкам в решении. Если число обусловленности близко к 1, система хорошо обусловлена, и решения будут стабильными.

Рассмотрим СЛАУ $Ax = b$, где A – плохо обусловленная матрица.

Пусть M – невырожденная матрица размерности $n \times n$. Домножим СЛАУ на матрицу, обратную M :

$$M^{-1}Ax = M^{-1}b$$

$$A^*x = b^*$$

M - матрица предобусловливания

1. M должна быть по возможности близка к A (пример: $M = \text{diag}(A)$).
2. M должна быть легко вычислима.
3. M должна быть легко обратима.

Одномерные краевые задачи

$$-(ku')' + cu' + bu = f, \quad x \in (0, l), \quad (1)$$

где $u(x)$ - неизвестная функция; $k(x)$, $c(x)$, $b(x)$, $f(x)$ - известные функции.

Таблица 1 – Граничные условия

| № | $x = 0$ | $x = l$ |
|---|--------------------------------|-------------------------------|
| 1 | $u(0) = U_0$ | $u(l) = U_l$ |
| 2 | $k(0)u'(0) = -\sigma_0$ | $k(l)u'(l) = \sigma_l$ |
| 3 | $k(0)u'(0) = -a_0(U_0 - u(0))$ | $k(l)u'(l) = a_l(U_l - u(l))$ |

Интегральная формулировка

Состасим невязку:

$$r = -(ku')' + cu' + bu - f = 0 \quad (2)$$

$$(1) \Leftrightarrow (2)$$

Составим следующий интеграл:

$$\int_0^l r \cdot v dx = 0, \quad (3)$$

где v – некоторая пробная функция ($v = \delta u$ – возможные изменения u)

Докажем, что $(3) \Leftrightarrow (2)$:

Предположим, что (3) выполняется, а (2) – нет, то есть $r \neq 0$. Тогда:

v – любая пробная функция:

Графики $r(x)$ и $v(x)$

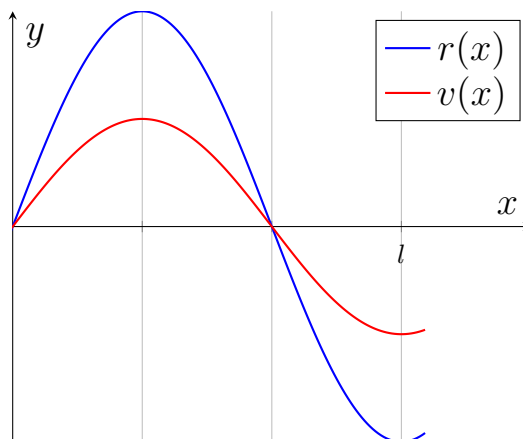
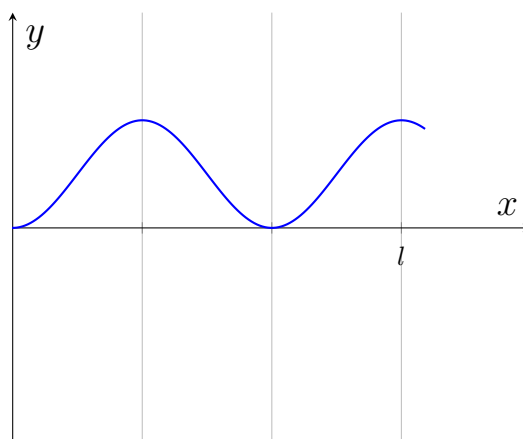


График $r(x) \cdot v(x)$



Из последнего графика видно, что

$$\int_0^l r \cdot v dx \neq 0,$$

что противоречит нашему предположению о том, что (3) выполняется, ч.т.д.

Итак,

$$\int_0^l r \cdot v dx = \int_0^l (-(ku')'v + cu'v + buv - fv) dx = 0 \quad (4)$$

Интегрируем по частям первый интеграл:

$$\int_0^l -(ku')'v dx = \left| \begin{array}{ll} \int_0^l f dg = fg \Big|_0^l - \int_0^l g df \\ dg = -(ku')' dx & g = -ku' \\ f = v & df = v' dx \end{array} \right| = \quad (5)$$

$$= -ku'v \Big|_0^l + \int_0^l (ku')v' dx = \int_0^l (ku')v' dx - \underbrace{(k(l)u'(l)v(l) - k(0)u'(0)v(0))}_{F(v)}$$

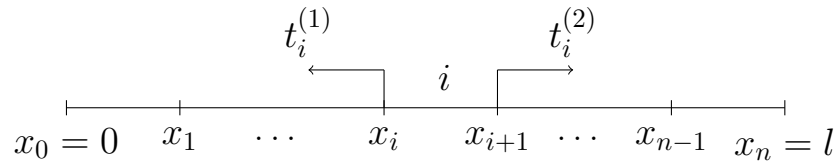
Подставим (5) в (4):

$$\int_0^l ((ku')'v' + cu'v + buv - fv) dx - F(v) = 0$$

Рассмотрим граничные условия:

| № | x = 0 | x = l |
|---|---|--|
| 1 | $u(0) = U_0 \Rightarrow v(0) = 0, F_0 = 0$ | $u(l) = U_l \Rightarrow v(l) = 0, F_l = 0$ |
| 2 | $k(0)u'(0) = -\sigma_0 \Rightarrow F_0 = \sigma_0 v(0)$ | $k(l)u'(l) = \sigma_l \Rightarrow F_l = \sigma_l v(l)$ |
| 3 | $k(0)u'(0) = -a_0(U_0 - u(0)) \Rightarrow$ $\Rightarrow F_0 = a_0(U_0 - u(0))v(0)$ | $k(l)u'(l) = a_l(U_l - u(l)) \Rightarrow$ $\Rightarrow F_l = a_l(U_l - u(l))v(l)$ |

Разобьем отрезок $[0, l]$ на части $[x_i, x_{i+1}]$:



$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} r \cdot v dx = 0 \Rightarrow \int_{x_i}^{x_{i+1}} [(ku')v' + cu'v + buv - fv] dx - t_1^{(i)}v_i - t_2^{(i)}v_{i+1} = 0, \quad (6)$$

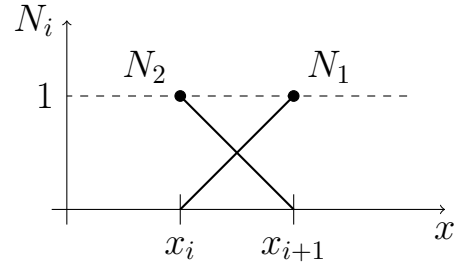
где $t_1^{(i)}, t_2^{(i)}$ – реакции отброшенных сил

$$t_1^{(i)} = -k(x_i)u'(x_i) \quad t_2^{(i)} = -k(x_{i+1})u'(x_{i+1})$$

$$v_i = v(x_i) \quad v_{i+1} = v(x_{i+1})$$

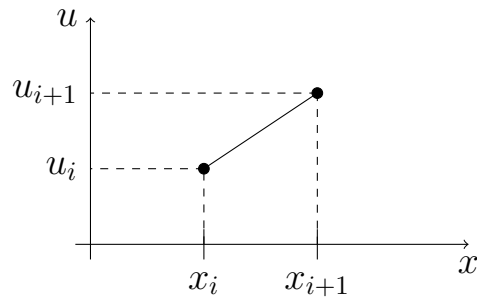
$$u = N_1^{(i)} u_i + N_2^{(i)} u_{i+1},$$

где $N_1^{(i)}, N_2^{(i)}$ – полиномы Лагранжа:



Аппроксимируем неизвестную функцию u :

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x$$



$$\begin{cases} u(x_i) = \alpha_1 + \alpha_2 x_i = u_i \\ u(x_{i+1}) = \alpha_1 + \alpha_2 x_{i+1} = u_{i+1} \end{cases}$$

Поиск коэффициентов α_1, α_2 :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_{i+1} \end{vmatrix} = x_{i+1} - x_i = l_i$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} u_i & x_i \\ u_{i+1} & x_{i+1} \end{vmatrix} = u_i x_{i+1} - u_{i+1} x_i$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & u_i \\ 1 & u_{i+1} \end{vmatrix} = u_{i+1} - u_i$$

$$\alpha_1 = \frac{u_i x_{i+1} - u_{i+1} x_i}{l_i}, \quad \alpha_2 = \frac{u_{i+1} - u_i}{l_i}$$

Подставляем в u :

$$u = \frac{u_i x_{i+1} - u_{i+1} x_i}{l_i} + \frac{u_{i+1} - u_i}{l_i} x = \underbrace{\left(\frac{x_{i+1} - x}{l_i} \right)}_{N_1^{(i)}} u_i + \underbrace{\left(\frac{x - x_i}{l_i} \right)}_{N_2^{(i)}} u_{i+1}$$

В матричном виде:

$$u = Nq, \quad N = [\underbrace{N_1^{(i)}, N_2^{(i)}}_{\text{функции формы}}], \quad q = \begin{bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix}$$

$$N_1^{(i)} = \frac{x_{i+1} - x}{l_i} = 1 - \frac{x - x_i}{l_i}$$

$$N_2^{(i)} = \frac{x - x_i}{l_i}$$

Вернемся к интегралу (6):

$$u = Nq$$

$$u' = \frac{dN}{dx} q = Bq,$$

где B – матрица производных от функций форм:

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l_i} & \frac{1}{l_i} \end{bmatrix}$$

$$v = N\delta q, \quad \delta q = [v_i \quad v_{i+1}]$$

$$v' = B\delta q$$

Подставляем в (6):

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} [\underbrace{(B\delta q)^T}_{(v')^T} k \underbrace{Bq}_{u'} + \underbrace{(N\delta q)^T}_{v^T} c \underbrace{Bq}_{u'} + \underbrace{(N\delta q)^T}_{v^T} b \underbrace{Nq}_u - \underbrace{(N\delta q)^T}_{v^T} f] dx -$$

$$-t_1^{(i)} v_i - t_2^{(i)} v_{i+1} = 0$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \delta q^T [(B^T k B + N^T c B + N^T b N) q - N^T f] dx - t_1^{(i)} v_i - t_2^{(i)} v_{i+1} = 0$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (B^T k B + N^T c B + N^T b N) dx = K^{(i)}$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} N^T f dx = P^{(i)}$$

$K^{(i)}$ и $P^{(i)}$ – матрицы 2×2 .

$$t_1^{(i)} v_i + t_2^{(i)} v_{i+1} = \delta q^T t^{(i)}, \quad t^{(i)} = \begin{bmatrix} t_1^{(i)} \\ t_2^{(i)} \end{bmatrix}$$

$\delta q^T \neq 0$, поэтому можно сократить.

Получившаяся СЛАУ:

$$K^{(i)} q = P^{(i)} + t^{(i)}$$

Одномерные краевые элементы

1. Граничные условия Дирихле (I рода)

$$u(0) = u_0, \quad u(l) = u_l$$

2. Граничные условия Неймана

$$k(0)u'(0) = -\sigma_0; \quad k(l)u'(l) = \sigma_l; \quad -(ku')' = f$$

$$u' = -\frac{1}{k} \int_0^l f dx + C_1 \Rightarrow u = \int_0^l \left(-\frac{1}{k} \int_0^l f dx + C_1\right) dx + C_2 \Rightarrow u = u(x) + \overline{C_0}$$

$$u(x_0) = C_0$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \delta q^T \left\{ \left[B^T k B + N^T c B + \mathbf{N}'^T b N \right] q - N^T f \right\} dx$$

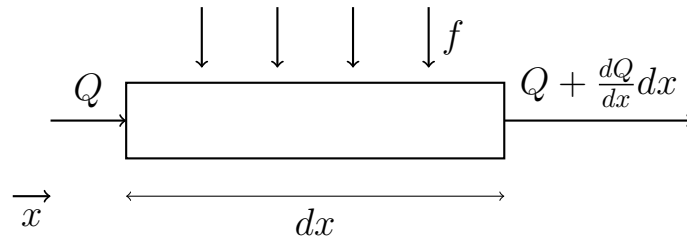
$$N = \left[N_1^{(i)}, N_2^{(i)} \right]; \quad N_1^{(i)} = 1 - \frac{x - x_i}{l_i}; \quad N_2^{(i)} = 1 - \frac{x - x_i}{l_i}$$

$$B = \left[B_1^{(i)}, B_2^{(i)} \right] = \left[-\frac{1}{l_i}, \frac{\lambda}{l_i} \right]; \quad \xi = x - x_i, \quad d\xi = dx$$

$$\int_0^{l_i} \left[B^T k(x) B + N^T c(x) B + N^T b(x) N \right] d\xi$$

$$\int_0^{l_i} c(\xi + x_i) \begin{bmatrix} 1 - \frac{\xi}{l_i} \\ \frac{\xi}{l_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{l_i} & \frac{1}{l_i} \end{bmatrix} d\xi = \int_0^{l_i} \frac{c(\xi + x_i)}{l_i} \begin{bmatrix} \frac{\xi}{l_i} - 1 & 1 - \frac{\xi}{l_i} \\ -\frac{\xi}{l_i} & \frac{\xi}{l_i} \end{bmatrix} d\xi$$

Задача теплопроводности в стержне



$$Q + f dx = Q + \frac{dQ}{dx} \cdot dx \Rightarrow f = \frac{dQ}{dx} \quad (7)$$

$$Q = -K_x \cdot \frac{dT}{dx} - \text{закон Фурье} \quad (8)$$

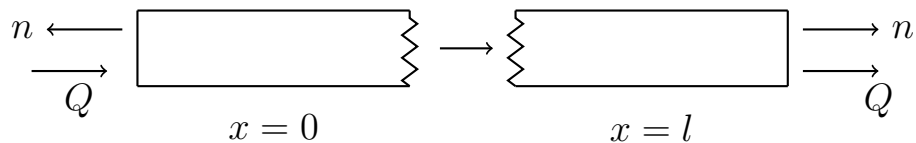
где $K_x = \lambda S$ - коэф. теплопроводности стержня, λ - коэф. теплопроводности материала, S - площадь сечения стержня.

(2) \rightarrow (1):

$$-\frac{d}{dx}(K_x \cdot \frac{dT}{dx}) = f \quad (9)$$

Граничные условия:

1. $T(0) = T_0, \quad T(l) = T_l$
2. $-K_x \cdot \frac{dT}{dx}|_{x=0} = q, \quad -K_x \cdot \frac{dT}{dx}|_{x=l} = -q$
3. $K_x \cdot \frac{dT}{dx}|_{x=0} = -\alpha g(T_0 - T(0)), \quad K_x \cdot \frac{dT}{dx}|_{x=l} = \alpha g(T_l - T(l))$



Чтобы определить знак в граничных условиях второго рода нужно смотреть на направление $Q = K_x \cdot \frac{dT}{dx}$.

Интегральная формулировка: $r = -\frac{d}{dx}(K_x \cdot \frac{dT}{dx}) - f = 0, \quad v = \delta T$

$$\int_0^l (-\frac{d}{dx}(K_x \cdot \frac{dT}{dx}) - f) \cdot \delta T \cdot S dx = 0 \Rightarrow \int_0^l \frac{d\delta T}{dx} (K_x \cdot \frac{dT}{dx}) \cdot S dx - F(\delta T) = 0 \quad (10)$$

$$F(\delta T) = S(K_x \cdot \frac{dT}{dx}) \cdot \delta T|_0^l = -SQ_l \cdot \delta T(l) + SQ_0 \cdot \delta T(0)$$

$$Q_0 = -K_x \cdot \frac{dT}{dx}|_{x=0}, Q_l = -K_x \cdot \frac{dT}{dx}|_{x=l}$$

$$T = Nq = N_1^{(i)}T_i + N_2^{(i)}T_{i+1}, \quad \frac{dT}{dx} = Bq$$

$$\delta T = N\delta q = N_1^{(i)}\delta T_i + N_2^{(i)}\delta T_{i+1}, \quad \frac{d\delta T}{dx} = B\delta q$$

Вариационная формулировка:

$$J(t) = \frac{1}{2} \int_0^l K_x \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 S dx - \int_0^l S f T dx + SQ_l T_l - SQ_0 T_0 \rightarrow \min \quad (\text{совпадает с (4)})$$

$$\Delta J = J(T + \delta T) - J(T) = \frac{1}{2} \int_0^l K_x S \left(\frac{d(T + \delta T)}{dx} \right)^2 dx - \int_0^l S f (T + \delta T) dx -$$

$$\frac{1}{2} \int_0^l K_x \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 S dx + \int_0^l S f T dx + SQ_l (T_l + \delta T_l) - SQ_0 (T_0 + \delta T_0) - SQ_l T_l + SQ_0 T_0 =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^l S K_x \left[\left(\frac{dT}{dx} \right)^2 + 2 \cdot \frac{dT}{dx} \cdot \frac{d\delta T}{dx} + \left(\frac{d\delta T}{dx} \right)^2 \right] dx - \int_0^l S f \delta T dx -$$

$$\frac{1}{2} \int_0^l S K_x \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 dx + SQ_l \delta T_l - SQ_0 \delta T_0$$

Оставим линейную часть приращений ΔJ относительно δT :

$$\int_0^l S K_x \frac{dT}{dx} \cdot \frac{d\delta T}{dx} dx - \int_0^l S f \delta T dx + SQ_l \delta T_l - SQ_0 \delta T_0 \rightarrow (4)$$

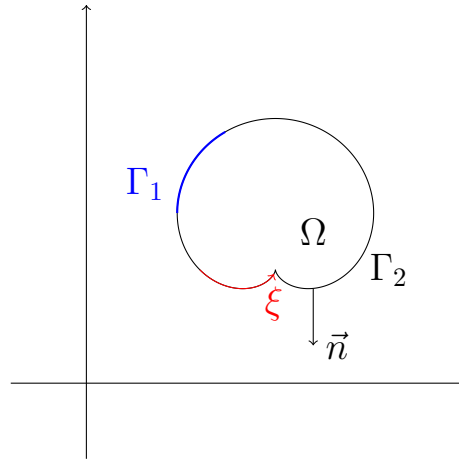
Двумерные краевые задачи

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial u}{\partial y} \right) + bu = f \quad (11)$$

$K(x, y)$, $b(x, y)$, $f(x, y)$ – заданные (гладкие) функции.

$u(x, y)$ – неизвестная.

Ω – область, где задано уравнение (11), Γ – граница Ω .



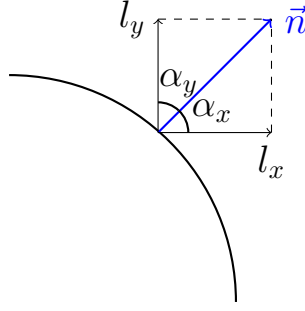
Замкнутый контур Γ – гладкий, за исключением конечного числа угловых точек, в которых внутренний угол $\alpha \in [0; \pi]$.

$$\Gamma = \underbrace{\Gamma_1}_{\text{I рода}} \cup \underbrace{\Gamma_2}_{\text{II/III рода}}$$

$$u(\xi) = \hat{u}(\xi) - \text{на } \Gamma_1 \text{ (заданное значение)}.$$

$$K(\xi) \frac{\partial u}{\partial n} = \hat{\sigma}(\xi) - \text{на } \Gamma_2$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} l_x + \frac{\partial u}{\partial y} l_y, \quad \begin{cases} l_x = \cos(\alpha x) = \cos(\vec{x}, \vec{n}), \\ l_y = \cos(\alpha y) = \cos(\vec{y}, \vec{n}), \\ ||\vec{n}|| = 1 \end{cases}$$



Составим невязку:

$$r(x, y) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial u}{\partial y} \right) + bu - f = 0$$

$$\iint_{\Omega} r(x, y) \cdot v \, dx \, dy = 0,$$

где $v(x, y)$ – пробная (гладкая) функция; на Γ_1 : $v = 0$

$$\iint_{\Omega} \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial u}{\partial y} \right) + bu - f \right] \cdot v \, dx \, dy = 0 \quad (12)$$

Рассмотрим первый интеграл:

$$-\iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot v \, dx \, dy$$

Формула Гаусса-Остроградского:

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} F \, dx \, dy = \int_{\Gamma} F \cdot l_x \, d\xi$$

Представим F в виде $F = uv$:

$$\frac{\partial}{\partial x} F = \frac{\partial}{\partial x} (uv) = \frac{\partial u}{\partial x} v + u \frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} v = \frac{\partial}{\partial x} (uv) - u \frac{\partial v}{\partial x}$$

Отсюда:

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} v \, dx \, dy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} (uv) - u \frac{\partial v}{\partial x} \right) \, dx \, dy$$

И по формуле Гаусса-Остроградского:

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} v \, dx \, dy = \int_{\Gamma} uv \cdot l_x d\xi - \iint_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x} u \, dx \, dy$$

Тогда:

$$- \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot v \, dx \, dy = - \int_{\Gamma} K \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot v \cdot l_x d\xi + \iint_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x} \left(K \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) \, dx \, dy$$

$$- \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot v \, dx \, dy = - \int_{\Gamma} K \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot v \cdot l_y d\xi + \iint_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial y} \left(K \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) \, dx \, dy$$

Подставим в (12):

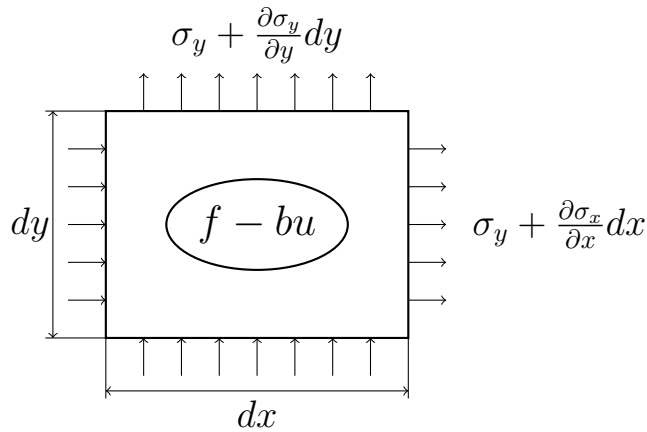
$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial v}{\partial x} \cdot K \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot K \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + bu \cdot v - f \cdot v \right] \, dx \, dy - \\ - \int_{\Gamma_2} K \cdot v \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot l_x + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot l_y \right) = 0 \end{aligned}$$

Задача упругости $u(x, y)$ - перемещения

$$\varepsilon = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y]^T, \quad \varepsilon_x = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \varepsilon_y = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon = Lu, \quad L = \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}^T$$

$$\sigma = k\varepsilon = kLu$$



$$d\Omega = dx dy$$

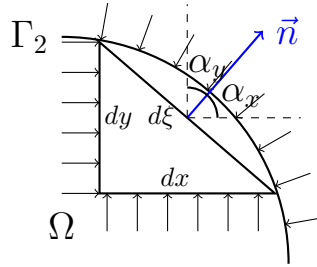
$$\sigma_x dy + \sigma_y dx + (f - bu) dx dy = \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy + \left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \right) dx$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = f - bu$$

$$L_* = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad L_* = -L^T, \quad L_* \sigma = L_* k L u = f - bu$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot k \cdot \begin{bmatrix} -\frac{\partial u}{\partial x} \\ -\frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = f - bu$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f - bu \Leftrightarrow (11)$$



$$\Gamma_1 : u(\xi) = \hat{u}(\xi)$$

$$dx = \cos \alpha_y d\xi = l_y d\xi, \quad dy = \cos \alpha_x d\xi = l_x d\xi$$

$$\sigma_y dx + \sigma_x dy + \hat{\sigma} d\xi = 0, \quad \sigma_x = K \varepsilon_x = -K \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_y = K \varepsilon_y = -K \frac{\partial u}{\partial y}$$

Тогда:

$$-K \frac{\partial u}{\partial y} dx - K \frac{\partial u}{\partial x} dy + \hat{\sigma} d\xi = 0, \quad -K \frac{\partial u}{\partial y} l_y d\xi - K \frac{\partial u}{\partial x} l_x d\xi + \hat{\sigma} d\xi = 0$$

$$K \frac{\partial u}{\partial n} = \hat{\sigma}$$

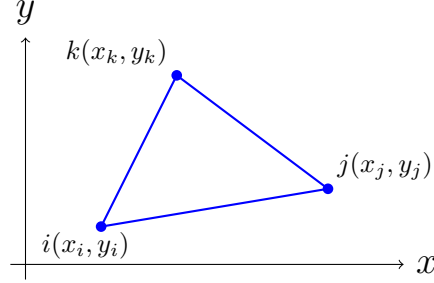
Отсюда:

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x} K \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} K \frac{\partial u}{\partial y} + bu \cdot v - f \cdot v \right) dx dy - \int_{\Gamma} \underbrace{\left(K \frac{\partial u}{\partial x} l_x + K \frac{\partial u}{\partial y} l_y \right)}_{K \cdot \frac{\partial u}{\partial n} = \hat{\sigma}(\xi)} \cdot v d\xi = 0 \quad (13)$$

$$\iint_{\Omega} ((Lu)^T K (Lu) + v^T bu - v^T f) dx dy - \int_{\Gamma_2} v^T \hat{\sigma} d\xi = 0$$

Симплексный треугольный конечный элемент

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$$



$$\begin{cases} u_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \\ u_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j \\ u_k = \alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_3 y_k \end{cases} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} = 2S_\Delta$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} u_i & x_i & y_i \\ u_j & x_j & y_j \\ u_k & x_k & y_k \end{vmatrix} = u_i \underbrace{(x_j y_k - x_k y_j)}_{a_i} + u_j \underbrace{(x_k y_i - x_i y_k)}_{a_j} + u_k \underbrace{(x_i y_j - x_j y_i)}_{a_k}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & u_i & y_i \\ 1 & u_j & y_j \\ 1 & u_k & y_k \end{vmatrix} = u_i \underbrace{(y_j - y_k)}_{b_i} + u_j \underbrace{(y_k - y_i)}_{b_j} + u_k \underbrace{(y_i - y_j)}_{b_k}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & x_i & u_i \\ 1 & x_j & u_j \\ 1 & x_k & u_k \end{vmatrix} = u_i \underbrace{(x_k - x_j)}_{c_i} + u_j \underbrace{(x_i - x_k)}_{c_j} + u_k \underbrace{(x_j - x_i)}_{c_k}$$

$$\alpha_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \alpha_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \alpha_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\Delta} (a_i u_i + a_j u_j + a_k u_k + b_i u_i x + b_j u_j x + b_k u_k x + c_i u_i y + c_j u_j y + c_k u_k y) = \\ &= \frac{1}{\Delta} [(a_i + b_i x + c_i y) u_i + (a_j + b_j x + c_j y) u_j + (a_k + b_k x + c_k y) u_k] = \\ &= N_i u_i + N_j u_j + N_k u_k = [N] \{\Phi\} \end{aligned}$$

$$\{\Phi\} = [u_i, u_j, u_k]^T, \quad [N] = [N_i, N_j, N_k]$$

$$\begin{cases} N_i = \frac{1}{\Delta}(a_i + b_i x + c_i y) \\ N_j = \frac{1}{\Delta}(a_j + b_j x + c_j y) \\ N_k = \frac{1}{\Delta}(a_k + b_k x + c_k y) \end{cases} \quad - \text{ функции формы, } u = [N] \{\Phi\}$$

Свойства функций формы:

$$\begin{cases} N_i(x_i, y_i) = 1, & N_i(x_j, y_j) = 0, & N_i(x_k, y_k) = 0; \\ N_j(x_i, y_i) = 0, & N_j(x_j, y_j) = 1, & N_j(x_k, y_k) = 0; \\ N_k(x_i, y_i) = 0, & N_k(x_j, y_j) = 0, & N_k(x_k, y_k) = 1; \\ N_i + N_j + N_k = 1 \end{cases}$$

Возвращаемся к уравнению:

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cdot K_x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot K_y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + buv - fv \right) dx dy -$$

$$- \int_{\Gamma} \left(K_x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot l_x + K_y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot l_y \right) v \, d\xi = 0$$

$$v = N \delta \Phi, \quad \delta \Phi = [v_i, v_j, v_k]^T$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial [N]}{\partial x} \\ \frac{\partial [N]}{\partial y} \end{bmatrix} \{\Phi\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_k}{\partial y} \end{bmatrix} \{\Phi\} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \{\Phi\} = [B] \{\Phi\}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = [B] \{\delta \Phi\} \quad D = \begin{bmatrix} K_x & 0 \\ 0 & K_y \end{bmatrix}$$

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cdot K_x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot K_y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Omega} (B \delta \Phi)^T D B \Phi \, dx dy =$$

$$= \{\delta \Phi\}^T \int_{\Omega} B^T D B \, dx dy \, \{\Phi\}$$

$$\int_{\Omega} buv \, dxdy = \int_{\Omega} (N\delta\Phi)^T bN\Phi \, dxdy = \{\delta\Phi\}^T \int_{\Omega} bN^T N \, dxdy \, \{\Phi\}$$

$$\int_{\Omega} fv \, dxdy = \{\delta\Phi\}^T \int_{\Omega} f \cdot N^T \, dxdy$$

$$\int_{\Gamma} \hat{\sigma} \cdot v \, d\xi = \{\delta\Phi\}^T \int_{\Gamma} \hat{\sigma} N^T \, d\xi$$

$$K = \int_{\Omega} (B^T DB + bN^T N) \, dxdy; \quad P = \int_{\Omega} fN^T \, dxdy + \int_{\Gamma} \hat{\sigma} N^T \, d\xi$$

$$\{\delta\Phi\}^T K\Phi = \{\delta\Phi\}^T P \Rightarrow K\Phi = P$$

$$\int_{\Omega} B^T DB \, dxdy = \int_{\Omega} \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} b_i & c_i \\ b_j & c_j \\ b_k & c_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_x & 0 \\ 0 & K_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \, dxdy = \odot$$

Считаем, что $K_x, K_y - \text{const}$:

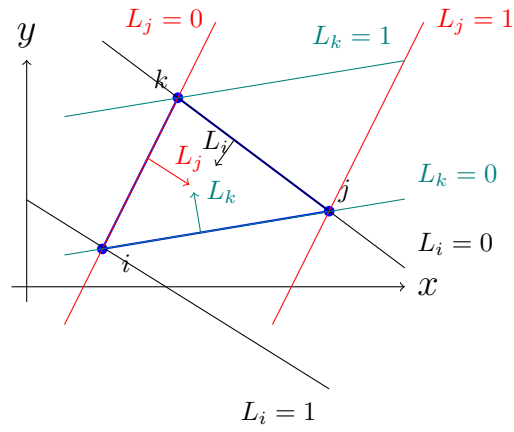
$$\odot = \frac{S_1}{(2S_1)^2} \left[K_x \begin{pmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_k \\ b_i b_j & b_j b_j & b_j b_k \\ b_i b_k & b_j b_k & b_k b_k \end{pmatrix} + K_y \begin{pmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_k \\ c_i c_j & c_j c_j & c_j c_k \\ c_i c_k & c_j c_k & c_k c_k \end{pmatrix} \right]$$

$$\int_{\Omega} bN^T N \, dxdy = \int_{\Omega} b \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_k \end{bmatrix} \, dxdy =$$

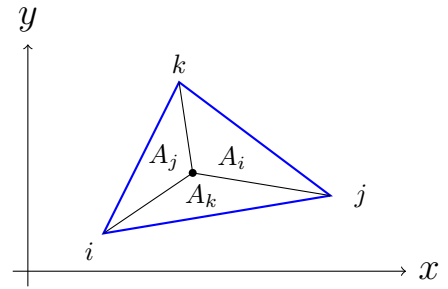
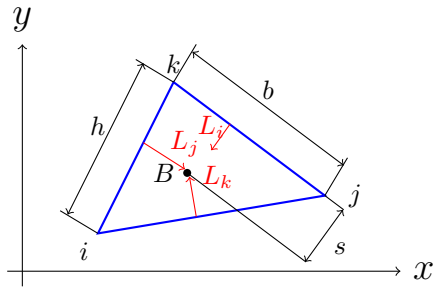
$$= \int_{\Omega} b \cdot \begin{bmatrix} N_i N_i & N_i N_j & N_i N_k \\ N_i N_j & N_j N_j & N_j N_k \\ N_i N_k & N_j N_k & N_k N_k \end{bmatrix} \, dxdy$$

$$P_1 = \int_{\Omega} fN^T \, dxdy = \int_{\Omega} f \cdot \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix} \, dxdy$$

Естественная система координат



$$\begin{cases} 0 \leq L_i \leq 1; \\ 0 \leq L_j \leq 1; \\ 0 \leq L_k \leq 1. \end{cases}$$



$$\begin{cases} S_\Delta = \frac{1}{2}bh, \\ S_{A_i} = \frac{1}{2}bs \end{cases} \Rightarrow L_i = \frac{S_{A_i}}{S_\Delta} = \frac{s}{h}$$

$$L_j = \frac{S_{A_j}}{S_\Delta}, \quad L_k = \frac{S_{A_k}}{S_\Delta}$$

$$L_i + L_j + L_k = \frac{S_{A_i} + S_{A_j} + S_{A_k}}{S_\Delta} = 1$$

$$N_i = L_i, \quad N_j = L_j, \quad N_k = L_k$$

25/10

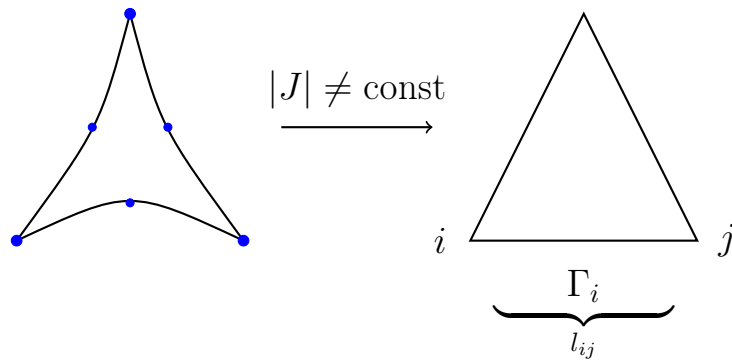
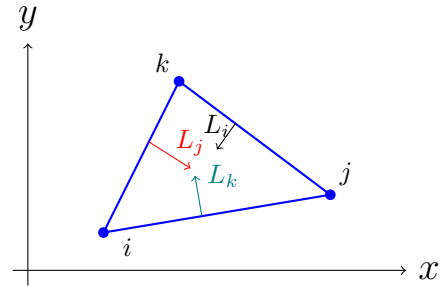
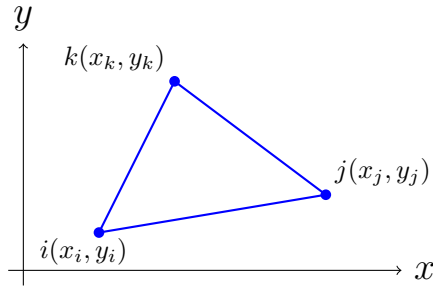
Связь между координатами:

$$\begin{cases} L_i + L_j + L_k = 1 \\ x = L_i x_i + L_j x_j + L_k x_k \\ y = L_i y_i + L_j y_j + L_k y_k \end{cases}$$

$V = h dS, h = \text{const}$ — толщина элемента

$$h \iint_S f(x, y) dx dy = h \int_0^1 \int_0^{1-L_j} f(L_i, L_j, L_k) |J| dL_i dL_j$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial L_i} & \frac{\partial x}{\partial L_j} \\ \frac{\partial y}{\partial L_i} & \frac{\partial y}{\partial L_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i - x_k & x_j - x_k \\ y_i - y_k & y_j - y_k \end{bmatrix} \Rightarrow |J| = \Delta$$



Интегральные формулы, упрощающие вычисления:

$$\int_{\Gamma_{ij}} L_i^\alpha L_j^\beta d\Gamma = \frac{\alpha! \beta!}{(\alpha + \beta + 1)!} \cdot l_{ij}$$

$$\int_S L_i^\alpha L_j^\beta L_k^\gamma dS = \frac{\alpha! \beta! \gamma!}{(\alpha + \beta + \gamma + 2)!} \cdot 2S \quad (1)$$

Возвращаемся к формуле из прошлой лекции:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} N^T N \, dxdy &= \int_{\Omega} \begin{bmatrix} N_i N_i & N_i N_j & N_i N_k \\ N_i N_j & N_j N_j & N_j N_k \\ N_i N_k & N_j N_k & N_k N_k \end{bmatrix} dxdy = \\ &= \int_S \begin{bmatrix} L_i L_i & L_i L_j & L_i L_k \\ L_i L_j & L_j L_j & L_j L_k \\ L_i L_k & L_j L_k & L_k L_k \end{bmatrix} |J| \, dL_i L_j = \frac{S}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Вычисляем компоненты матрицы по формуле (1):

$$\int_{\Omega} L_i^2 \, dS = \int_{\Omega} L_i^2 L_j^0 L_k^0 \, dS = \frac{2! 0! 0!}{(2 + 0 + 0 + 2)!} \cdot 2S = \frac{S}{6}$$

$$\int_S N^T \, dS = \int_S \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix} dxdy = \int_S \begin{bmatrix} L_i \\ L_j \\ L_k \end{bmatrix} dS = \frac{S}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\int_{\Gamma} \left(K_x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot l_x + K_y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot l_y \right) v \, d\Gamma$$

1. или $K_x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot l_x + K_y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot l_y = \hat{\sigma}$ или q
2. или $K_x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot l_x + K_y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot l_y = -\alpha_g(u - \hat{u})$

Рассмотрим подробнее:

$$1. \int_{\Gamma} \hat{\sigma} \, d\Gamma = \{\delta\Phi\}^T \int_{\Gamma} \hat{\sigma} N^T \, d\Gamma \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} L_i \\ L_j \\ L_k \end{bmatrix} d\Gamma$$

$$(a) \int_{\Gamma_{ij}} \begin{bmatrix} L_i \\ L_j \\ 0 \end{bmatrix} d\Gamma = \left| \int_{\Gamma_{ij}} L_i^1 L_j^0 d\Gamma \right| = \frac{1!}{(1+1)!} l_{ij} = \frac{l_{ij}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(b) \int_{\Gamma_{jk}} \begin{bmatrix} 0 \\ L_j \\ L_k \end{bmatrix} d\Gamma = \frac{l_{jk}}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(c) \int_{\Gamma_{ik}} \begin{bmatrix} L_i \\ 0 \\ L_k \end{bmatrix} d\Gamma = \frac{l_{jk}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\int_{\Gamma} \alpha_g (u - \hat{u}) v d\Gamma = \int_{\Gamma} \alpha_g u \cdot v d\Gamma - \int_{\Gamma} \alpha_g \hat{u} \cdot v d\Gamma =$$

$$= \delta \Phi^T \left(\int_{\Gamma} \alpha_g N^T N d\Gamma \cdot \Phi - \alpha_g \hat{u} \int_{\Gamma} N^T d\Gamma \right)$$

$$\int_{\Gamma} \alpha_g N^T N d\Gamma = \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} L_i L_i & L_i L_j & L_i L_k \\ 0 & L_j^2 & L_j L_k \\ 0 & 0 & L_k^2 \end{bmatrix} d\Gamma$$

(a)

$$\int_{\Gamma_{ij}} \begin{bmatrix} L_i L_i & L_i L_j & 0 \\ 0 & L_j^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} d\Gamma = \left| \begin{array}{l} \int_{\Gamma_{ij}} L_i^2 L_j^0 d\Gamma = \frac{2! \cdot 0!}{(2+1)!} l_{ij} = \frac{2}{6} l_{ij} \\ \int_{\Gamma_{ij}} L_i^1 L_j^1 d\Gamma = \frac{1! \cdot 1!}{(1+1+1)!} l_{ij} = \frac{1}{6} l_{ij} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{2}{6} l_{ij} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (b), (c) - \text{аналогично}$$

33

Формулы для нахождения функций форм:

$$N_i = \frac{f_j f_k}{f_j f_k|_{x=x_i=0}}, \quad N_j = \frac{f_i f_k}{f_i f_k|_{x=x_j=\frac{L}{2}}}, \quad N_k = \frac{f_i f_j}{f_i f_j|_{x=x_k=L}}$$

$$N_i = \left(1 - \frac{2x}{L}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right), \quad N_j = \frac{4x}{L} \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right), \quad N_k = -\frac{x}{L} \cdot \left(1 - \frac{2x}{L}\right)$$

Аналогично можно найти функции формы для конечных элементов более высокого порядка:

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 = N_i \Phi_i, \quad i = 1, \dots, 4$$

$x_1 = 0$ $x_2 = \frac{L}{3}$ $x_3 = \frac{2L}{3}$ $x_4 = L$
 1 2 3 4
 $f_2 = 1 - \frac{3x}{L}$ $f_4 = 1 - \frac{x}{L}$
 $f_1 = \frac{x}{L}$ $f_3 = 1 - \frac{3x}{2L}$

Постановка задачи

$$K^{(e)} q = P^{(e)}$$

$$K^{(e)} = \int_V B^T D B dV + \int_S \alpha_g N^T N dS$$

$$P^{(e)} = \int_V f N^T dV - \int_S q N^T dS + \int_S \alpha_g T_g N^T dS$$

$$dV = S dx, \quad dS = P dx, \quad \text{где } P - \text{периметр}$$

$$B = \frac{d[N]}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{dN_i}{dx} & \frac{dN_j}{dx} & \frac{dN_k}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{L} + \frac{4x}{L^2} & \frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2} & -\frac{1}{L} + \frac{4x}{L^2} \end{bmatrix}$$

$$D = k_x, \quad \text{так как задача одномерная}$$

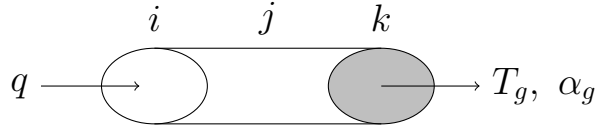
Получаем:

$$\begin{aligned} \int_V B^T D B dV &= S k_x \cdot \int_0^L B^T B dx = \\ &= S k_x \cdot \int_0^L \begin{bmatrix} \left(-\frac{3}{L} + \frac{4x}{L^2}\right)^2 & \left(-\frac{3}{L} + \frac{4x}{L^2}\right) \left(\frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2}\right) & \left(-\frac{3}{L} + \frac{4x}{L^2}\right) \left(-\frac{1}{L} + \frac{4x}{L^2}\right) \\ \left(-\frac{3}{L} + \frac{4x}{L^2}\right) \left(\frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2}\right) & \left(\frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2}\right)^2 & \left(\frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2}\right) \left(-\frac{1}{L} + \frac{4x}{L^2}\right) \\ \left(-\frac{3}{L} + \frac{4x}{L^2}\right) \left(-\frac{1}{L} + \frac{4x}{L^2}\right) & \left(\frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2}\right) \left(-\frac{1}{L} + \frac{4x}{L^2}\right) & \left(-\frac{1}{L} + \frac{4x}{L^2}\right)^2 \end{bmatrix} dx = \end{aligned}$$

$$= \frac{Sk_x}{6L} \cdot \begin{bmatrix} 14 & -16 & 2 \\ -16 & 32 & -16 \\ 2 & -16 & 14 \end{bmatrix}$$

Рассмотрим следующий интеграл:

$$\begin{aligned} \int_S \alpha_g N^T N dS &= P \alpha_g \cdot \int_0^L N^T N dx = P \alpha_g \cdot \int_0^L \begin{bmatrix} N_i^2 & N_i N_j & N_i N_k \\ N_i N_j & N_j^2 & N_j N_k \\ N_i N_k & N_j N_k & N_k^2 \end{bmatrix} dx = \\ &= \frac{\alpha_g P L}{30} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



Для узла k :

$$\alpha_g \int_S N^T N dS = \alpha_g S_k \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где S_k – площадь сечения для k -ого узла.

Для всей боковой поверхности:

$$\alpha_g T_g \int_S N^T dS = \alpha_g T_g P \cdot \int_0^L \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix} dx = \frac{\alpha_g T_g P L}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Для узла k :

$$\alpha_g T_g \int_S N^T dS = \alpha_g T_g S_k \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Для узла i :

$$\int_S q N^T dS = qS \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\int_V f \cdot N^T dV = S \cdot f \int_0^L N^T dx = \frac{SfL}{6} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Естественная система координат

$$\begin{array}{c} \text{---} \xrightarrow{\hspace{1.5cm}} \text{---} \\ | \hspace{0.5cm} | \hspace{1.5cm} | \hspace{0.5cm} \rightarrow x \\ 0 \hspace{1.5cm} \frac{L}{2} \hspace{1.5cm} L \end{array}$$

$$\begin{array}{c} f_i = 1 + \xi \hspace{1cm} f_j = \xi \hspace{1cm} f_k = 1 - \xi \\ | \hspace{0.5cm} | \hspace{1.5cm} | \hspace{0.5cm} \rightarrow \xi \\ -1 \hspace{1.5cm} 0 \hspace{1.5cm} 1 \end{array}$$

$$-1 \leq \xi \leq 1, \quad x = f(\xi) \Leftrightarrow \xi = \varphi(x)$$

$$\begin{cases} N_i = \xi(1 - \xi) \cdot \frac{-1}{2} = -\frac{\xi(1 - \xi)}{2}, \\ N_j = (1 - \xi)(1 + \xi), \\ N_k = \frac{\xi(1 + \xi)}{2} \end{cases}$$

$$\varphi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k$$

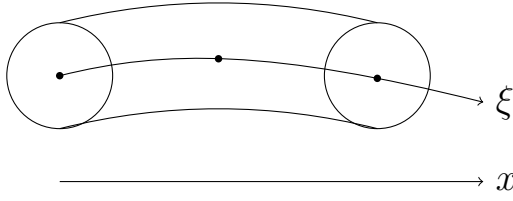
$$x = N_i x_i + N_j x_j + N_k x_k \rightarrow x = f(\xi)$$

$$B = \frac{d[N]}{dx}; \quad \frac{dN_\beta}{d\xi} = \frac{dN_\beta}{dx} \underbrace{\frac{dx}{d\xi}}_J, \quad J^{-1} = \frac{1}{\frac{dx}{d\xi}}, \quad \beta = i, j, k$$

$$\frac{dN_\beta}{dx} = J^{-1} \frac{dN_\beta}{d\xi}$$

$$J = \frac{dx}{d\xi} = \frac{dN_i}{d\xi} x_i + \frac{dN_j}{d\xi} x_j + \frac{dN_k}{d\xi} x_k \neq \text{const}$$

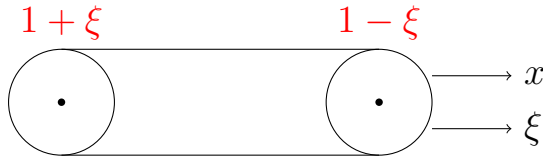
1



$$\begin{cases} x = N_i x_i + N_j x_j + N_k x_k \\ \varphi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k \end{cases}$$

Криволинейный стержень

2

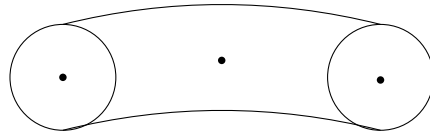


$$\begin{cases} x = \tilde{N}_i x_i + \tilde{N}_k x_k \\ \tilde{N}_i = \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad \tilde{N}_k = \frac{1}{2}(1 + \xi) \\ \varphi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k \end{cases}$$

Линейный стержень
(задаем через две точки)

(если в задании нужно вычислить что-то в середине, то используем квадратичные функции формы)

3



$$\begin{cases} x = N_i x_i + N_j x_j + N_k x_k \\ \varphi = \tilde{N}_i \Phi_i + \tilde{N}_k \Phi_k \end{cases}$$

Криволинейный элемент

(достаточно рассмотреть только на концах элемента)

Пусть A – количество узлов для задания формы элемента ($x = f(\xi)$), B – количество узлов для задания интерполяционного полинома (φ).

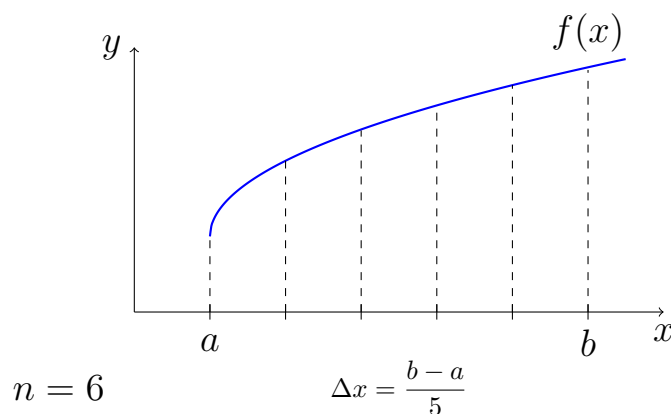
1. Если $A = B$, такой конечный элемент называется *изопараметрический*.
2. Если $A < B$, такой конечный элемент называется *субпараметрический*.
3. Если $A > B$, такой конечный элемент называется *суперпараметрический*.

Численное интегрирование

$$\frac{\partial N_\beta}{\partial x} = J^{-1} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi}$$

1. Формулы Ньютона-Котса

n точек, интерполяционный полином $(n + 1)$ -ого порядка, совпадающий в узлах с функцией $f(x)$



$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \sum_{i=1}^n H_i \cdot f(x_i),$$

где H_i – весовые коэффициенты

| | |
|-----------------------------|---|
| $n = 2$ формула трапеции | $H_1 = \frac{1}{2}, H_2 = \frac{1}{2}$ |
| $n = 3$ формула Симпсона | $H_1 = \frac{1}{6}, H_2 = \frac{2}{3}, H_3 = \frac{1}{6}$ |
| $n = 4$ | $H_1 = \frac{1}{8}, H_2 = \frac{3}{8}, H_3 = \frac{3}{8}, H_4 = \frac{1}{8}$ |
| $n = 5$ | $H_1 = \frac{7}{90}, H_2 = \frac{32}{90}, H_3 = \frac{12}{90}, H_4 = \frac{32}{90}, H_5 = \frac{7}{90}$ |

$N_2(X)$ (2 – порядок), $N^T N$ – 4 порядок, $B^T B$ – 2 порядок

2. Квадратурные формулы Гаусса-Лежандра

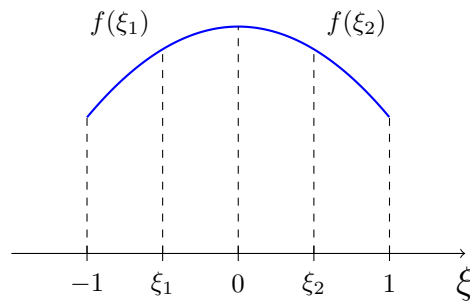
n точек, рассматриваем $2n$ неизвестных функций f и x , $(2n-1)$ – порядок интерполяционного многочлена.

$$N^T N \Rightarrow 4 = 2n - 1, \quad n = \frac{5}{2} = 2.5 \approx 3$$

(для многочлена 4 порядка достаточно трех точек интегрирования)

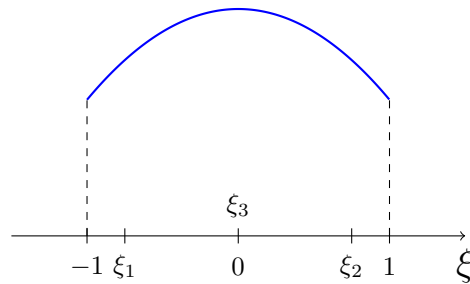
$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) H_i$$

$n = 2$:



$$\xi_1 = -0.57735, \quad H_1 = 1, \quad \xi_2 = 0.57735, \quad H_2 = 2$$

$n = 3$:



$$\xi_1, \xi_2 = \pm 0.774597, \quad H_1 = H_2 = \frac{8}{9}, \quad \xi_3 = 0, \quad H_3 = \frac{5}{9}$$

На этом рисунке ξ_1, ξ_2 ближе к ± 1 .

$n = 4$:

$$\xi_1, \xi_2 = \pm 0.861136, \quad H_1 = H_2 = 0.347855$$

$$\xi_3, \xi_4 = \pm 0.339981, \quad H_3 = H_4 = 0.652145$$

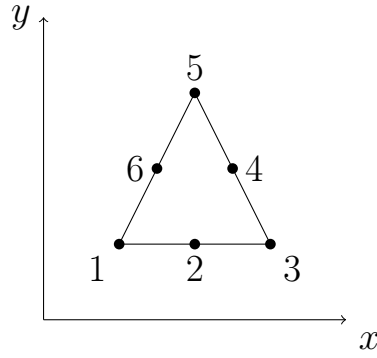
$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 N^T N |J| d\xi \\
& \begin{array}{c} \xrightarrow{\hspace{1.5cm}} x \\ \begin{array}{ccc} | & | & | \\ x_i = \frac{1}{2} & x_j = 1 & x_k = \frac{3}{2} \end{array} \end{array} \\
& \begin{array}{c} \xrightarrow{\hspace{1.5cm}} \xi \\ \begin{array}{ccc} | & | & | \\ -1 & 0 & 1 \end{array} \end{array} \\
& x = N_i x_i + N_j x_j + N_k x_k \\
& N_i = \frac{\xi}{2}(1 - \xi), \quad N_j = (1 - \xi)(1 + \xi), \quad N_k = \frac{\xi}{2}(1 + \xi) \\
& J = \frac{dx}{d\xi} = \frac{dN_i}{d\xi} x_i + \frac{dN_j}{d\xi} x_j + \frac{dN_k}{d\xi} x_k = \left(-\frac{1}{2} + \xi\right) x_i - 2\xi x_j + \left(\frac{1}{2} + \xi\right) x_k = \\
& \quad = -\frac{1}{4} + \frac{\xi}{2} - 2\xi + \frac{3}{4} + \frac{3\xi}{2} = \frac{1}{2} \\
& J^{-1} = 2 \\
& \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} \left(-\frac{\xi}{2}(1 - \xi)\right)^2 & -\frac{\xi}{2}(1 - \xi)(1 - \xi^2) & -\frac{\xi^2}{4}(1 - \xi^2) \\ -\frac{\xi}{2}(1 - \xi)(1 - \xi^2) & (1 - \xi^2)^2 & \frac{\xi}{2}(1 - \xi)(1 + \xi)^2 \\ -\frac{\xi^2}{4}(1 - \xi^2) & \frac{\xi}{2}(1 - \xi)(1 + \xi)^2 & \frac{\xi^2}{4}(1 + \xi)^2 \end{bmatrix} d\xi = \\
& = \begin{bmatrix} \sum_s N_i(\xi_s) N_i(\xi_s) H_s & \sum_s N_i(\xi_s) N_j(\xi_s) H_s & \sum_s N_i(\xi_s) N_k(\xi_s) H_s \\ \sum_s N_i(\xi_s) N_j(\xi_s) H_s & \sum_s N_j(\xi_s) N_j(\xi_s) H_s & \sum_s N_j(\xi_s) N_k(\xi_s) H_s \\ \sum_s N_i(\xi_s) N_k(\xi_s) H_s & \sum_s N_k(\xi_s) N_j(\xi_s) H_s & \sum_s N_k(\xi_s) N_k(\xi_s) H_s \end{bmatrix} \quad (14) \\
& \begin{cases} N_i(\xi_1) = \frac{\xi_1}{2}(1 - \xi_1) \\ N_j(\xi_1) = (1 - \xi_1)(1 + \xi_1) \\ N_k(\xi_1) = \frac{\xi_1}{2}(1 + \xi_1) \end{cases} \quad \begin{cases} N_i(\xi_2) = \frac{\xi_2}{2}(1 - \xi_2) \\ N_j(\xi_2) = (1 - \xi_2)(1 + \xi_2) \\ N_k(\xi_2) = \frac{\xi_2}{2}(1 + \xi_2) \end{cases} \\
& \begin{cases} N_i(\xi_3) = \frac{\xi_3}{2}(1 - \xi_3) \\ N_j(\xi_3) = (1 - \xi_3)(1 + \xi_3) \\ N_k(\xi_3) = \frac{\xi_3}{2}(1 + \xi_3) \end{cases}
\end{aligned}$$

Для первого элемента матрицы (14):

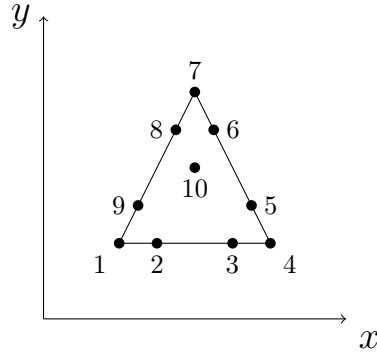
$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{Якобиан}} \sum_{s=1}^3 \underbrace{f(\xi_s)}_{N_i N_i} H_s =$$

$$= \frac{1}{2} [H_1 N_i(\xi_1) N_i(\xi_1) + H_2 N_i(\xi_2) N_i(\xi_2) + H_3 N_i(\xi_3) N_i(\xi_3)]$$

Квадратичные и кубические треугольные элементы

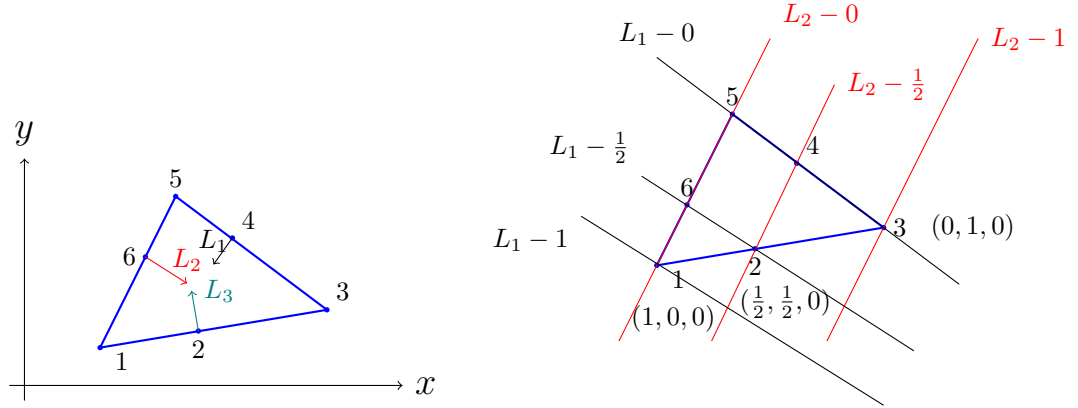


Аппроксимирующая функция: $\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 = N_1 \Phi_1 + \dots + N_6 \Phi_6 = [N] \{ \Phi \}$.



$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 = N_i \Phi_i = [N] \{ \Phi \}, i = 1, \dots, 10.$

Функции формы для квадратичных треугольных конечных элементов в L -координатах:



$$N_1 = L_1 \left(L_1 - \frac{1}{2} \right)$$

(нужно взять такие линии, которые захватывают все узлы, кроме первого)

Нормируем:

$$N_1 = \frac{L_1 \left(L_1 - \frac{1}{2} \right)}{1 \left(1 - \frac{1}{2} \right)} = L_1(2L_1 - 1)$$

$$N_2 = \frac{L_2 L_1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 4L_1 L_2$$

$$N_3 = \frac{L_2 \left(L_2 - \frac{1}{2} \right)}{1 \left(1 - \frac{1}{2} \right)} = L_2(2L_2 - 1)$$

$$N_4 = 4L_2 L_3$$

$$N_5 = L_3(2L_3 - 1)$$

$$N_6 = 4L_1 L_3$$

$$N_\beta = \prod_{\delta=1}^n \frac{F_\delta}{F_\delta|_{L_1, L_2, L_3}}, \quad F_\delta - \text{ пробные функции}$$

$$\int B^T DB dV$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial [N]}{\partial x} \\ \frac{\partial [N]}{\partial y} \end{bmatrix} \quad \text{где} \quad \begin{array}{ll} N_1 = L_1(2L_1 - 1) & N_2 = 4L_1L_2 \\ N_3 = L_2(2L_2 - 1) & N_4 = 4L_2L_3 \\ N_5 = L_3(2L_3 - 1) & N_6 = 4L_3L_1 \end{array}$$

$$\begin{cases} x = x(L_1, L_2, L_3) \\ y = y(L_1, L_2, L_3) \end{cases}$$

$$\beta = \overline{1,6} :$$

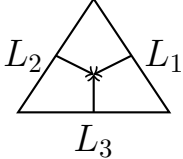
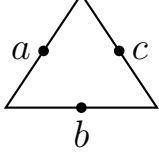
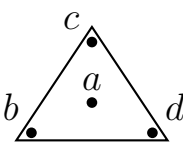
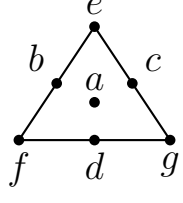
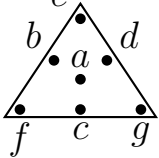
$$\begin{cases} \frac{\partial N_\beta}{\partial L_1} = \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial L_1} + \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial L_1} \\ \frac{\partial N_\beta}{\partial L_2} = \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial L_2} + \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial L_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial N_\beta}{\partial L_1} \\ \frac{\partial N_\beta}{\partial L_2} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial L_1} & \frac{\partial y}{\partial L_1} \\ \frac{\partial x}{\partial L_2} & \frac{\partial y}{\partial L_2} \end{bmatrix}}_J \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \\ \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \\ \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \end{bmatrix} &= J^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial N_\beta}{\partial L_1} \\ \frac{\partial N_\beta}{\partial L_2} \end{bmatrix} \\ \frac{\partial N_\beta}{\partial L_1} &= \frac{\partial N_\beta}{\partial L_1} \cdot \underbrace{\frac{\partial L_1}{\partial L_1}}_1 + \frac{\partial N_\beta}{\partial L_2} \cdot \underbrace{\frac{\partial L_2}{\partial L_1}}_0 + \frac{\partial N_\beta}{\partial L_3} \cdot \underbrace{\frac{\partial L_3}{\partial L_1}}_{-1} = \frac{\partial N_\beta}{\partial L_1} - \frac{\partial N_\beta}{\partial L_3} \end{aligned}$$

Пример:

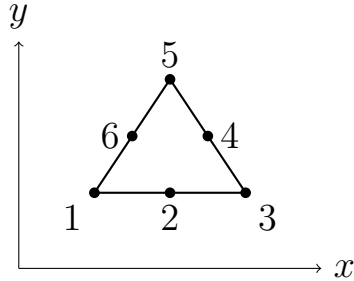
$$N_4 = 4L_2L_3 = 4L_2(1 - L_1 - L_2) \Rightarrow \frac{\partial N_4}{\partial L_1} = -4L_2$$

$$Z = \int_0^1 \int_0^{1-L_2} f(L_1, L_2, L_3) |J| dL_1 dL_2 = \sum_{i=1}^n W_i g(L_1, L_2, L_3), \quad \text{где } g = f \cdot |J|$$

| | Ошибка | (\cdot) | $L_1 \ L_2 \ L_3$ | W_i |
|---|---|---------------------------------|---|--|
|  | $R = o(h^2)$ | a | $\frac{1}{3} \ \frac{1}{3} \ \frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ |
|  | $R = o(h^2)$ | a b c | $\frac{1}{2} \ 0 \ \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \ 0$ $0 \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ |
|  | $R = o(h^4)$ | a b c d | $\frac{1}{3} \ \frac{1}{3} \ \frac{1}{3}$ $\frac{11}{15} \ \frac{2}{15} \ \frac{2}{15}$ $\frac{2}{15} \ \frac{2}{15} \ \frac{11}{15}$ $\frac{2}{15} \ \frac{11}{15} \ \frac{2}{15}$ | $\frac{27}{96}$ $\frac{25}{96}$ $\frac{25}{96}$ $\frac{25}{96}$ |
|  | $R = o(h^4)$ | a b c d e f g | $\frac{1}{3} \ \frac{1}{3} \ \frac{1}{3}$ $\frac{1}{2} \ 0 \ \frac{1}{2}$ $0 \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \ 0$ $0 \ 0 \ 1$ $1 \ 0 \ 0$ $0 \ 1 \ 0$ | $\frac{27}{120}$ $\frac{8}{120}$ $\frac{8}{120}$ $\frac{8}{120}$ $\frac{3}{120}$ $\frac{3}{120}$ $\frac{3}{120}$ |
|  | $R = o(h^6)$ $\alpha = 0.05961587$ $\beta = 0.47014206$ $\gamma = 0.10128651$ $\Delta = 0.79742699$ | a b c d e f g | $\frac{1}{3} \ \frac{1}{3} \ \frac{1}{3}$ $\beta \ \alpha \ \beta$ $\beta \ \beta \ \alpha$ $\alpha \ \beta \ \beta$ $\gamma \ \gamma \ \delta$ $\delta \ \gamma \ \gamma$ $\gamma \ \delta \ \gamma$ | 0.1125 0.066197075 0.066197075 0.066197075 0.0629695 0.0629695 0.0629695 |

Пример.

Вычислить: $\int_S \frac{\partial N_4}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_4}{\partial y} dx dy$



| Точка | Координаты точки | |
|-------|------------------|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 3 | 3 | 2 |
| 5 | 2 | 3 |

$$\begin{cases} x = x_1 L_1 + x_3 L_2 + x_5 L_3 \\ y = y_1 L_1 + y_3 L_2 + y_5 L_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = L_1 + 3L_2 + 2L_3 \\ y = L_1 + 2L_3 + 3L_3 \end{cases}$$

$$N_4 = 4L_2 L_3$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial L_1} & \frac{\partial y}{\partial L_1} \\ \frac{\partial x}{\partial L_2} & \frac{\partial y}{\partial L_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2 & 1-3 \\ 3-2 & 2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |J| = 1 + 2 = 3$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4L_2 \\ 4L_3 - 4L_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial x} = \frac{1}{3}(8L_2 - 4L_3) \quad \frac{\partial N_4}{\partial y} = \frac{-1}{3}(4L_2 + 4L_3)$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_4}{\partial y} = -\frac{1}{9}(8L_2 - 4L_3)(4L_2 + 4L_3) = \int_S \frac{\partial N_4}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_4}{\partial y} dx dy =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-L_2} -\frac{1}{9} \cdot 3(8L_2 - 4L_3)(4L_2 + 4L_3) dL_1 dL_2 = -\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 W_i \cdot g(L_1, L_2, L_3) = -\frac{12}{18}$$