11/10

Двумерные краевые задачи

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial u}{\partial y}\right)+bu=f \tag{1}$$

$K(x,y),\ b(x,y),\ f(x,y)$ – заданные (гладкие) функции.

$u(x,y)$ – неизвестная.

Ω – область, где задано уравнение (1), Γ – граница Ω .

Замкнутый контур Γ – гладкий, за исключением конечного числа угловых точек, в которых внутренний угол $\alpha \in [0;\pi]$.

$$\Gamma = \underbrace{\Gamma_1}_{\text{I рода}} \cup \underbrace{\Gamma_2}_{\text{II/III рода}}$$

$$u(\xi)=\hat{u}(\xi) \text{ – на } \Gamma_1 \text{ (заданное значение).}$$

$$K(\xi)\frac{\partial u}{\partial n}=\hat{\sigma}(\xi) - \text{ на } \Gamma_2$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}l_x+\frac{\partial u}{\partial y}l_y,\ \begin{cases} l_x=\cos(\alpha x)=\cos(\vec{x},\vec{n}),\\ l_y=\cos(\alpha y)=\cos(\vec{y},\vec{n}),\\ ||\vec{n}||=1\end{cases}$$

Составим невязку:

$$r(x,y)=-\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial u}{\partial y}\right)+bu-f=0$$

$$\iint\limits_{\Omega} r(x,y)\cdot v\,dx\,dy=0,$$

где $v(x,y)$ – пробная (гладкая) функция; на Γ_1: $v=0$

$$\iint\limits_{\Omega}\left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial u}{\partial y}\right)+bu-f\right]\cdot v\,dx\,dy=0 \tag{2}$$

Рассмотрим первый интеграл:

$$-\iint\limits_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot v\,dx\,dy$$

Формула Гаусса-Остроградского:

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} F dx dy = \int\limits_{\Gamma} F \cdot l_x d\xi$$

Представим F в виде $F = uv$:

$$\frac{\partial}{\partial x} F = \frac{\partial}{\partial x}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x} v + u \frac{\partial v}{\partial x} \ \Rightarrow \ \frac{\partial u}{\partial x} v = \frac{\partial}{\partial x}(uv) - u \frac{\partial v}{\partial x}$$

Отсюда:

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} v \, dx \, dy = \iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x}(uv) - u \frac{\partial v}{\partial x} \right) \, dx \, dy$$

И по формуле Гаусса-Остроградского:

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} v \, dx \, dy = \int\limits_{\Gamma} uv \cdot l_x d\xi - \iint\limits_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x} u \, dx \, dy$$

Тогда:

$$-\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot v \, dx \, dy = -\int\limits_{\Gamma} K \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot v \cdot l_x d\xi + \iint\limits_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x} \left(K \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) \, dx \, dy$$

$$-\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot v \, dx \, dy = -\int\limits_{\Gamma} K \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot v \cdot l_y d\xi + \iint\limits_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial y} \left(K \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) \, dx \, dy$$

Подставим в (2):

$$\iint\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial v}{\partial x} \cdot K \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot K \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + bu \cdot v - f \cdot v \right] \, dx \, dy -$$

$$-\int\limits_{\Gamma_2} K \cdot v \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot l_x + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot l_y \right) = 0$$