06/09

Алгоритм метода конечных элементов:

1. Дискретизация;
2. Аппроксимация кусочно-непрерывными функциями;
3. Решение СЛАУ.

Дискретизация области

1. Разделение тела на конечные элементы;
2. Нумерация (N узлов, N элементов).

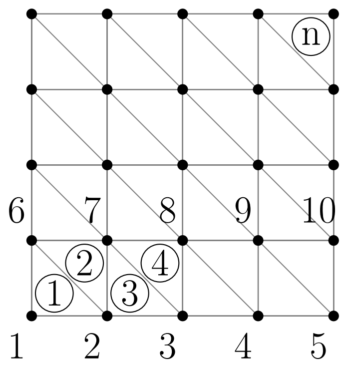


Рисунок 1 – Пример дискретизации области

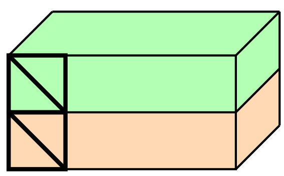


Рисунок 2 – Пример трехмерной области, состоящей из двух материалов

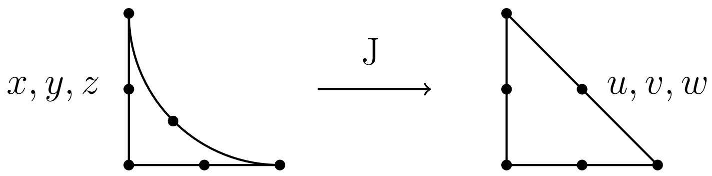


Рисунок 3 – Приведение криволинейного элемента

Замечания по разбиению:

1. Форма элемента должна быть близка к правильной;

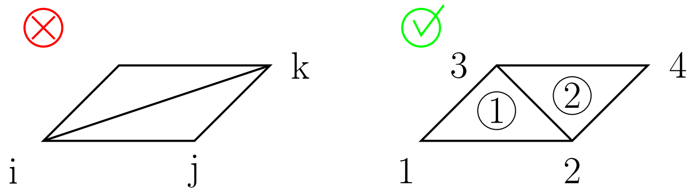


Рисунок 4 – Пример плохой и хорошей дискретизации

2. Все узлы конечного элемента должны совпадать.

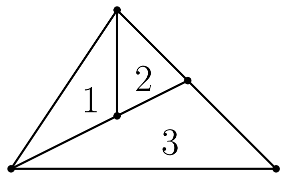


Рисунок 5 – Пример плохой дискретизации

Замечание по нумерации узлов и конечных элементов:

От нумерации узлов зависит ширина полосы ленты СЛАУ, поэтому узлы нужно нумеровать с короткой стороны для достижения наименьшей разницы между номерами узлов. Нумерация конечных элементов не важна, т.к. они привязаны к узлам.

$$B = (R + 1) \cdot Q$$

где B - ширина полосы ленты;

R - максимальная по элементам величина наибольшей разности между узлами отдельного конечного элемента;

Q - кол-во степеней свободы (число неизвестных).

Нумерация треугольников против ЧС, начало с отдельных узлов.

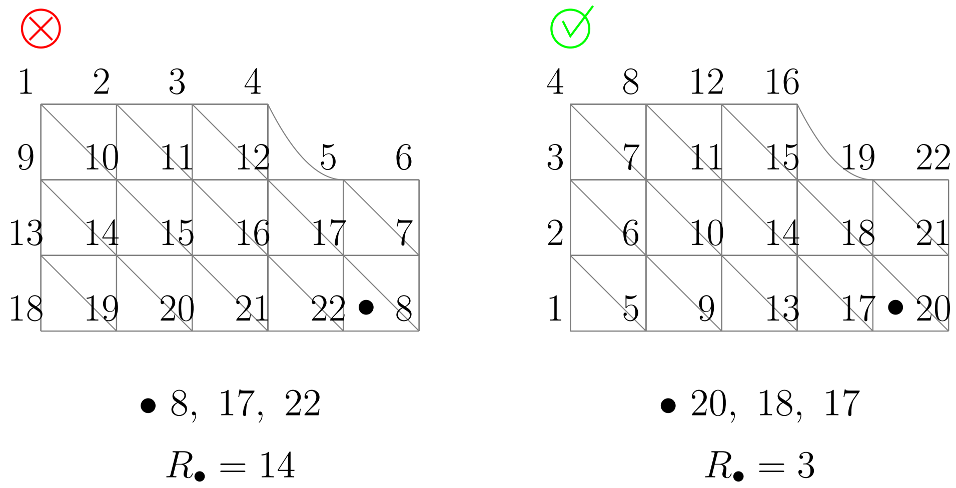


Рисунок 6 – Пример правильной и неправильной нумерации узлов

Форма записи КЭ в файл(трехмерный случай):

$$\left.\begin{array}{cccc} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 2 & x_2 & y_2 & z_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & x_n & y_n & z_n \end{array}\right\} \text{номера узлов и их координаты}$$

$$\left.\begin{array}{cccc} ① & 1 & 2 & 3 \\ ② & 4 & 3 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ⓝ & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{номера КЭ и номера узлов, из} \\ \text{которых они состоят}\end{array}$$

Замечания о порядке узлов, составляющих КЭ:

1. Обход узлов КЭ принято делать против часовой стрелки (для того, чтобы нормали были направлены в одну сторону);
2. Нумерацию желательно делать таким образом, чтобы соответствующие узлы попали в одно и то же место СЛАУ.

Пояснение к замечанию 2:

Обратимся к Рисунку 4. Представим, что мы накладываем один КЭ на другой. Первый КЭ начнем нумеровать с узла №1 — (1-2-3), тогда второй КЭ начнем обходить с узла №4 — (4-3-2) и тд.

13/09

Одномерные пружинные системы

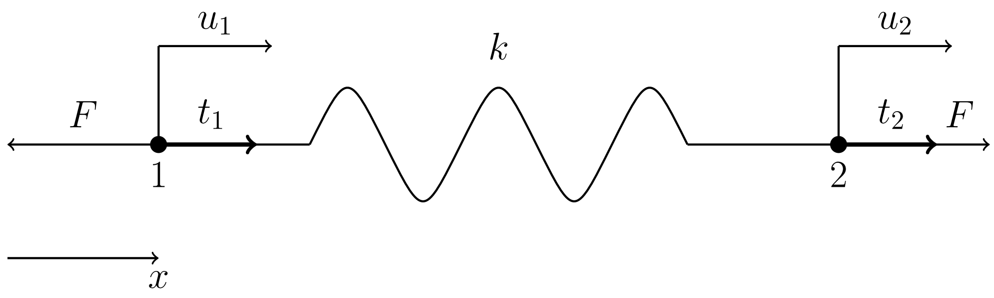


Рисунок 7 – Одномерная пружинная система из одного элемента

1. Уравнение равновесия

где k - коэффициент жесткости, u_1, u_2 - перемещения, F - приложенная сила, t_1, t_2 - реакции.

Закон Гука:

$$F = k\Delta = k(u_2 - u_1)$$

$$t_1 + t_2 = 0 \rightarrow t_1 = -t_2$$

$$F = t_2 = k(u_2 - u_1)$$

$$-F = t_1 = -k(u_2 - u_1) = k(u_1 - u_2)$$

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow Kq = t$$

где $q = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$, $t = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$, $K = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$.

2. Вариационный метод

$$\Pi = \Pi_{in} - \Pi_{ex},$$

где Π - потенциальная энергия системы.

$$\Pi_{in} = \int\limits_0^{\Delta} F d\Delta = \int\limits_0^{\Delta} k\Delta d\Delta = \frac{k(u_2 - u_1)^2}{2} = \frac{1}{2} q^{\mathrm{T}} K q = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\Pi_{ex} = t_1 u_1 + t_2 u_2 = q^{\mathrm{T}} t$$

$$\Pi = \frac{1}{2} q^{\mathrm{T}} K q - q^{\mathrm{T}} t \to min$$

Условие стационарности потенциальной энергии

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial u_1} = 0, \; \frac{\partial \Pi}{\partial u_2} = 0$$

$$\Pi = \frac{k}{2}(u_2 - u_1)^2 - t_1 u_1 - t_2 u_2$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_1} = k(u_2 - u_1)(-1) - t_1 = 0 \Leftarrow k(u_1 - u_2) = t_1$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_2} = k(u_2 - u_1) - t_2 = 0 \Leftarrow k(u_2 - u_1) = t_2$$

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$$

3. <u>Метод возможных перемещений</u>

Работа внутренних сил на возможных деформациях равна внешней работе возможных перемещений:

$$A_{in} = A_{ex},$$

где A_{in} - работа внутренних сил на возможных деформациях,
A_{ex} - работа внешних сил на возможных перемещениях.

$$A_{in} = F \delta \Delta = F(\delta u_2 - \delta u_1)$$

$$A_{ex} = t_1 \delta u_1 + t_2 \delta u_2$$

$$F(\delta u_2 - \delta u_1) = t_1 \delta u_1 + t_2 \delta u_2$$

$$\delta u_1, \delta u_2 : \begin{cases} -F = t_1 \\ F = t_2 \end{cases}$$

Методика составления глобальной системы для МКЭ

Используемые обозначения:

(1) – начало элемента,

(2) – конец элемента.

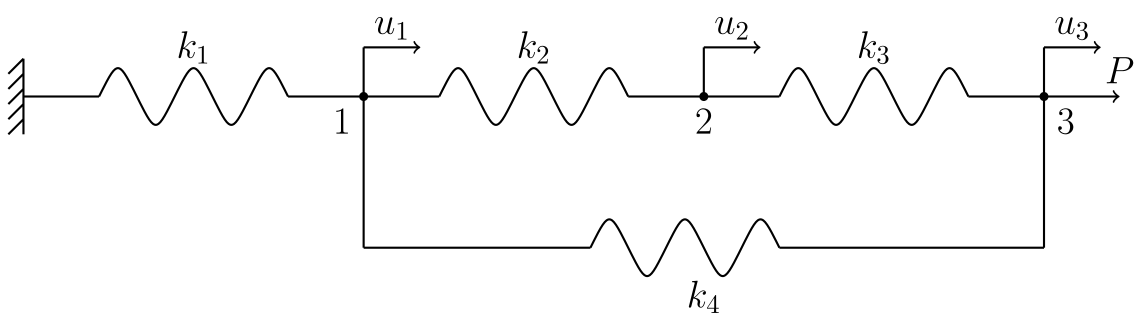


Рисунок 8 – Одномерная пружинная система из четырех элементов

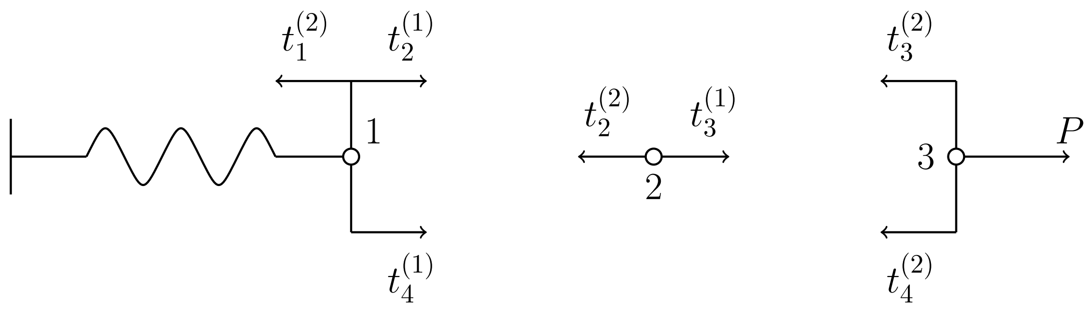


Рисунок 9 – Силы реакций в узлах системы

$$\begin{cases} t_1^{(2)} + t_2^{(1)} + t_4^{(1)} = 0 \\ t_2^{(2)} + t_3^{(1)} = 0 \\ t_3^{(2)} + t_4^{(2)} = P \end{cases} \qquad \begin{cases} t_i^{(1)} = k_i(u^{(1)} - u^{(2)}) \\ t_i^{(2)} = k_i(u^{(2)} - u^{(1)}) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} t_1^{(2)} &= k_1(u_1 - 0) \\ t_4^{(1)} &= k_4(u_1 - u_3) \\ t_3^{(1)} &= k_3(u_2 - u_3) \\ t_4^{(2)} &= k_4(u_3 - u_1) \\ t_2^{(1)} &= k_2(u_1 - u_2) \\ t_2^{(2)} &= k_2(u_2 - u_1) \\ t_3^{(2)} &= k_3(u_3 - u_2) \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} (k_1 + k_2 + k_4)u_1 - k_2 u_2 - k_4 u_3 = 0 \\ -k_2 u_1 + (k_2 + k_3)u_2 - k_3 u_3 = 0 \\ -k_4 u_1 - k_3 u_2 + (k_3 + k_4)u_3 = P \end{cases} \qquad (*)$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + k_4 & -k_2 & -k_4 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ -k_4 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix}$$

Принцип возможных перемещений

$$\sum_{i=1}^{4} F^{(i)}\delta\Delta^{(i)} = \sum_{i=1}^{4} k_{(i)}\Delta^{(i)}\delta\Delta^{(i)} = P\delta u_3$$

$$k_1 u_1 \delta u_1 + k_2(u_2 - u_1)(\delta u_2 - \delta u_1) + k_3(u_3 - u_2)(\delta u_3 - \delta u_2) + k_4(u_3 - u_1)(\delta u_3 - \delta u_1) =$$

$$= P\delta u_3 + 0 \cdot \delta u_1 + 0 \cdot \delta u_2$$

$$\begin{aligned} &\delta u_1 : \ \dots \\ &\delta u_2 : \ \dots \Rightarrow (*) \\ &\delta u_3 : \ \dots \end{aligned}$$

20/09

Хранение разреженных матриц

Опр. Портретом разреженной матрицы называется множество:

$$P_A = \{(i, j) : a_{ij} \neq 0\}$$

Возможны следующие случаи:

1. Матрица несимметрична и ее портрет несимметричен:

$$\exists\ (i, j) \in P_A : (j, i) \notin P_A \Leftrightarrow A \neq A^{\mathrm{T}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Матрица несимметрична но её портрет симметричен:

$$A \neq A^{\mathrm{T}},\ \text{но}\ (i, j) \in P_A, (j, i) \in P_A, a_{ij} \neq a_{ij}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix}$$

3. Если матрица симметрична $(a_{ji} = a_{ij})$, то её портрет симметричен:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix}$$

Форматы хранения разреженных матриц:
CSR - compressed sparse row
CSC - compressed sparse column
CSLR - compressed sparse low-triangle row

Рассмотрим формат CSR:

1. aelem - массив, хранящий все $a_{ij} \neq 0$ в строках

2. jptr - массив размерности aelem, указывает номер N_j элемента a_{ij}

3. iptr - массив размерности $n+1$ (n - размерность СЛАУ), хранит число элементов $a_{ij} \neq 0$ в строке

   iptr$[i+1]$ - iptr$[i]$ - число элементов в i-ой строке

   iptr$[n+1]$ - число элементов в aelem + 1

   Пример:

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 11 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 10 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 12 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Матрица A несимметрична, а P_A симметричен, т.к. если $a_{ij} \neq 0$, то $a_{ji} \neq 0$.

aelem: $[[9,3,1,1],[11,2,1,2],[1,10,2],[2,1,2,9,1],[1,1,12,1],[8],[2,2,3,8]]$.

jptr: $[[1,4,5,7],[2,3,4,7],[2,3,4],[1,2,3,4,5],[1,4,5,7],[6],[1,2,5,7]]$.

iptr: $[1,5,9,12,17,21,22,26]$.

Рассмотрим формат CSLR:

Обычно такой формат используется для хранения симметричных матриц, т.е. в памяти хранятся только элементы верхнего (или нижнего) треугольника. Если матрица несимметрична, то храним ещё и элементы нижнего треугольника, но уже по столбцам (для сохранения структуры).

В нашем примере:

adiag: $[9,11,10,9,12,8,8]$ – все диагональные элементы.

altr: $[1,2,1,2,1,1,2,2,3]$ – элементы нижнего треугольника.

autr: $[2,3,1,2,1,1,1,2,1]$ – элементы верхнего треугольника.

jptr: $[2,1,2,3,1,4,1,2,5]$.

iptr: $[1,1,1,2,5,7,7,10]$.

Входные данные: $\overline{x}$, aelem, jptr, iptr, n.

$$z = A\overline{x},\ A - CSR$$

Листинг 1 - алгоритм составления вектора z

```
i: 1,.., n
{
    z[i]=0;
    j: iptr[i],..,iptr[i+1]-1
    {
        z[i]=z[i]+x[jptr[j]]*aelem[j];
    }
}
```

Учет граничных условий

Граничные условия I рода

Зададим температуру в узле a_{33}:

$$A = \begin{bmatrix} \cdots & & \cdots & & \cdots \\ \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \end{bmatrix}$$

Чтобы не испортилась симметричность портрета, искусственно обнулим необходимые элементы массива aelem.

Листинг 2 - алгоритм задания граничных условий

```
i = iptr[k],..,iptr[k+1]-1
{
    if jptr[i]=k:
        aelem[jptr[k]]=1;
    else:
        aelem[jptr[k]]=0;
}
```

Метод Холецкого

$$A \approx LU$$

$$A = LU + R$$

где L - нижнетреугольная матрица;

U - верхнетреугольная матрица;

R - ошибка округления.

$$\begin{cases} Ax = b \\ LUx = b \\ Ly = b \Rightarrow Ux = y \end{cases}$$

Предобусловливание

Число обусловленности: $\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$

Если число обусловленности велико, система плохо обусловлена, и небольшие ошибки в данных могут привести к большим ошибкам в решении. Если число обусловленности близко к 1, система хорошо обусловлена, и решения будут стабильными.

Рассмотрим СЛАУ $Ax = b$, где A – плохо обусловленная матрица.

Пусть M – невырожденная матрица размерности $n \times n$. Домножим СЛАУ на матрицу, обратную M:

$$M^{-1}Ax = M^{-1}b$$

$$A^*x = b^*$$

M - матрица предобусловливания

1. M должна быть по возможности близка к A (пример: M = diag(A)).
2. M должна быть легко вычислима.
3. M должна быть легко обратима.

27/09

Одномерные краевые задачи

$$-(ku')' + cu' + bu = f, \qquad x \in (0, l), \tag{1}$$

где $u(x)$ - неизвестная функция; $k(x)$, $c(x)$, $b(x)$, $f(x)$ - известные функции.

Таблица 1 – Граничные условия

№	x = 0	x = l
1	$u(0) = U_0$	$u(l) = U_l$
2	$k(0)u'(0) = -\sigma_0$	$k(l)u'(l) = \sigma_l$
3	$k(0)u'(0) = -a_0(U_0 - u(0))$	$k(l)u'(l) = a_l(U_l - u(l))$

Интегральная формулировка

Состасим невязку:

$$r = -(ku')' + cu' + bu - f = 0 \tag{2}$$

(1) $\Leftrightarrow$ (2)

Составим следующий интеграл:

$$\int_0^l r \cdot v dx = 0, \tag{3}$$

где v – некоторая пробная функция ($v = \delta u$ – возможные изменения u)

Докажем, что (3) $\Leftrightarrow$ (2):

Предположим, что (3) выполняется, а (2) – нет, то есть $r \neq 0$. Тогда:

v – любая пробная функция:

Графики $r(x)$ и $v(x)$

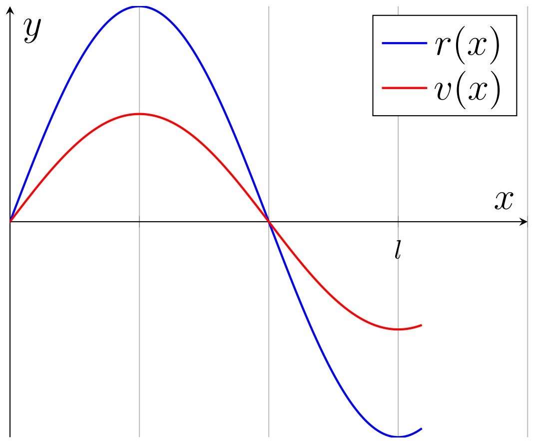
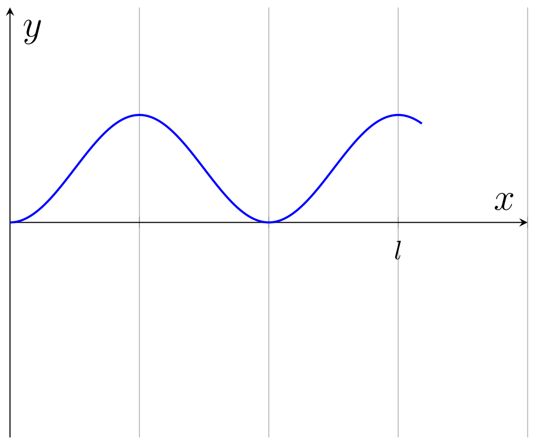


График $r(x) \cdot v(x)$



Из последнего графика видно, что

$$\int\limits_0^l r \cdot v dx \neq 0,$$

что противоречит нашему предположению о том, что (3) выполняется, ч.т.д.

Итак,

$$\int\limits_0^l r \cdot v dx = \int\limits_0^l (-(ku')'v + cu'v + buv - fv) dx = 0 \tag{4}$$

Интегрируем по частям первый интеграл:

$$\int\limits_0^l -(ku')'vdx = \left| \begin{array}{cc} \int\limits_0^l fdg = fg\Big|_0^l - \int\limits_0^l gdf & \\ dg = -(ku')'dx & g = -ku' \\ f = v & df = v'dx \end{array} \right| = \tag{5}$$

$$= -ku'v\Big|_0^l + \int\limits_0^l (ku')v'dx = \int\limits_0^l (ku')v'dx - \underbrace{(\underbrace{k(l)u'(l)v(l)}_{F_l} \underbrace{-k(0)u'(0)v(0)}_{F_0})}_{F(v)}$$

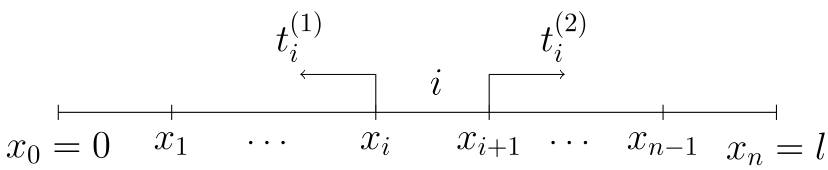
Подставим (5) в (4):

$$\int\limits_0^l ((ku')'v' + cu'v + buv - fv)dx - F(v) = 0$$

Рассмотрим граничные условия:

№	x = 0	x = l
1	$u(0) = U_0 \Rightarrow v(0) = 0,\ F_0 = 0$	$u(l) = U_l \Rightarrow v(l) = 0,\ F_l = 0$
2	$k(0)u'(0) = -\sigma_0 \Rightarrow F_0 = \sigma_0 v(0)$	$k(l)u'(l) = \sigma_l \Rightarrow F_l = \sigma_l v(l)$
3	$k(0)u'(0) = -a_0(U_0 - u(0)) \Rightarrow$ $\Rightarrow F_0 = a_0(U_0 - u(0))v(0)$	$k(l)u'(l) = a_l(U_l - u(l)) \Rightarrow$ $\Rightarrow F_l = a_l(U_l - u(l))v(l)$

Разобьем отрезок $[0, l]$ на части $[x_i, x_{i+1}]$:



$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} r \cdot vdx = 0 \Rightarrow \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} [(ku')v' + cu'v + buv - fv]dx - t_1^{(i)}v_i - t_2^{(i)}v_{i+1} = 0, \tag{6}$$

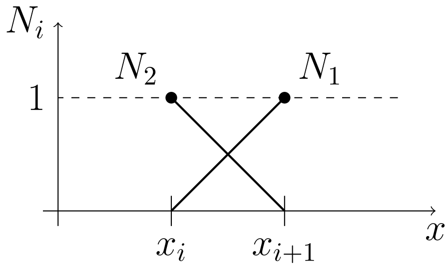
где $t_1^{(i)}, t_2^{(i)}$ – реакции отброшенных сил

$$t_1^{(i)} = -k(x_i)u'(x_i) \qquad t_2^{(i)} = -k(x_{i+1})u'(x_{i+1})$$

$$v_i = v(x_i) \qquad v_{i+1} = v(x_{i+1})$$

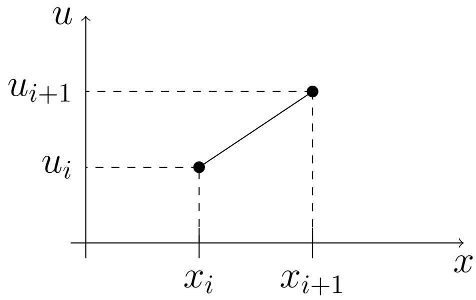
$$u = N_1^{(i)} u_i + N_2^{(i)} u_{i+1},$$

где $N_1^{(i)}, N_2^{(i)}$ – полиномы Лагранжа:



Аппроксимируем неизвестную функцию u:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x$$



$$\begin{cases} u(x_i) = \alpha_1 + \alpha_2 x_i = u_i \\ u(x_{i+1}) = \alpha_1 + \alpha_2 x_{i+1} = u_{i+1} \end{cases}$$

Поиск коэффициентов α_1, α_2:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_{i+1} \end{vmatrix} = x_{i+1} - x_i = l_i$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} u_i & x_i \\ u_{i+1} & x_{i+1} \end{vmatrix} = u_i x_{i+1} - u_{i+1} x_i$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & u_i \\ 1 & u_{i+1} \end{vmatrix} = u_{i+1} - u_i$$

$$\alpha_1 = \frac{u_i x_{i+1} - u_{i+1} x_i}{l_i}, \quad \alpha_2 = \frac{u_{i+1} - u_i}{l_i}$$

Подставляем в u:

$$u = \frac{u_i x_{i+1} - u_{i+1} x_i}{l_i} + \frac{u_{i+1} - u_i}{l_i} x = \underbrace{\left(\frac{x_{i+1} - x}{l_i}\right)}_{N_1^{(i)}} u_i + \underbrace{\left(\frac{x - x_i}{l_i}\right)}_{N_2^{(i)}} u_{i+1}$$

В матричном виде:

$$u = Nq, \ N = [\ \underbrace{N_1^{(i)}, \quad N_2^{(i)}}_{\text{функции формы}}\ ], \ q = \begin{bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix}$$

$$N_1^{(i)} = \frac{x_{i+1} - x}{l_i} = 1 - \frac{x - x_i}{l_i}$$

$$N_2^{(i)} = \frac{x - x_i}{l_i}$$

Вернемся к интегралу (6):

$$u = Nq$$

$$u' = \frac{dN}{dx} q = Bq,$$

где B – матрица производных от функций форм:

$$B = \left[-\frac{1}{l_i}, \quad \frac{1}{l_i}\right]$$

$$v = N\delta q, \quad \delta q = [v_i \quad v_{i+1}]$$

$$v' = B\delta q$$

Подставляем в (6):

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} [\underbrace{(B\delta q)^T}_{(v')^T} k \underbrace{Bq}_{u'} + \underbrace{(N\delta q)^T}_{v^T} c \underbrace{Bq}_{u'} + \underbrace{(N\delta q)^T}_{v^T} b \underbrace{Nq}_{u} - \underbrace{(N\delta q)^T}_{v^T} f] dx -$$

$$-t_1^{(i)} v_i - t_2^{(i)} v_{i+1} = 0$$

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \delta q^T [(B^T k B + N^T c B + N^T b N) q - N^T f] dx - t_1^{(i)} v_i - t_2^{(i)} v_{i+1} = 0$$

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} (B^T k B + N^T c B + N^T b N) dx = K^{(i)}$$

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} N^T f dx = P^{(i)}$$

$K^{(i)}$ и $P^{(i)}$ – матрицы 2×2.

$$t_1^{(i)} v_i + t_2^{(i)} v_{i+1} = \delta q^T t^{(i)}, \quad t^{(i)} = \begin{bmatrix} t_1^{(i)} \\ t_2^{(i)} \end{bmatrix}$$

$\delta q^T \neq 0$, поэтому можно сократить.

Получившаяся СЛАУ:

$$\boxed{K^{(i)} q = P^{(i)} + t^{(i)}}$$

04/10

Одномерные краевые элементы

1. Граничные условия Дирихле (I рода)

$$u(0) = u_0,\ u(l) = u_l$$

2. Граничные условия Неймана

$$k(0)u'(0) = -\sigma_0; \quad k(l)u'(l) = \sigma_l; \quad -(ku')' = f$$

$$u' = -\frac{1}{k}\int\limits_0^l f dx + C_1 \Rightarrow u = \int\limits_0^l (-\frac{1}{k}\int\limits_0^l f dx + C_1)dx + C_2 \Rightarrow u = u(x) + \overline{C_0}$$

$$u(x_0) = C_0$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \delta q^T \left\{ \left[B^T k B + N^T c B + \mathbf{N'}^T b N \right] q - N^T f \right\} dx$$

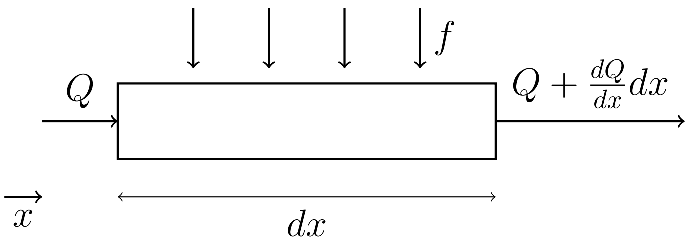
$$N = \left[N_1^{(i)}, N_2^{(i)} \right]; \quad N_1^{(i)} = 1 - \frac{x - x_i}{l_i};\ N_2^{(i)} = 1 - \frac{x - x_i}{l_i}$$

$$B = \left[B_1^{(i)}, B_2^{(i)} \right] = \left[-\tfrac{1}{l_i}, \tfrac{\lambda}{l_i} \right]; \qquad \xi = x - x_i,\ d\xi = dx$$

$$\int_0^{l_i} \left[B^T k(x) B + N^T c(x) B + N^T b(x) N \right] d\xi$$

$$\int\limits_0^{l_i} c(\xi + x_i) \begin{bmatrix} 1 - \frac{\xi}{l_i} \\ \frac{\xi}{l_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{l_i} & \frac{1}{l_i} \end{bmatrix} d\xi = \int\limits_0^{l_i} \frac{c(\xi + x_i)}{l_i} \begin{bmatrix} \frac{\xi}{l_i} - 1 & 1 - \frac{\xi}{l_i} \\ -\frac{\xi}{l_i} & \frac{\xi}{l_i} \end{bmatrix} d\xi$$

Задача теплопроводности в стержне



$$Q + fdx = Q + \frac{dQ}{dx} \cdot dx \Rightarrow f = \frac{dQ}{dx} \tag{7}$$

$$Q = -K_x \cdot \frac{dT}{dx} - \text{ закон Фурье} \tag{8}$$

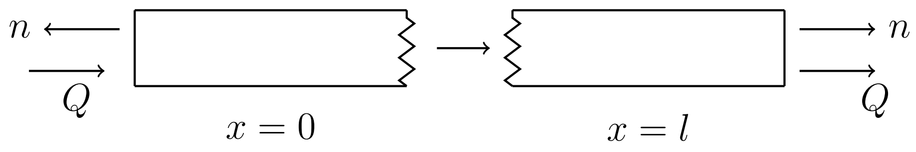
где $K_x = \lambda S$ - коэф. теплопроводности стержня, λ - коэф. теплопроводности материала, S - площадь сечения стержня.

(2) $\rightarrow$ (1):

$$-\frac{d}{dx}(K_x \cdot \frac{dT}{dx}) = f \tag{9}$$

<u>Граничные условия:</u>

1. $T(0) = T_0, \ T(l) = T_l$
2. $-K_x \cdot \dfrac{dT}{dx}|_{x=0} = q, \ -K_x \cdot \dfrac{dT}{dx}|_{x=l} = -q$
3. $K_x \cdot \dfrac{dT}{dx}|_{x=0} = -\alpha g(T_0 - T(0)), \ K_x \cdot \dfrac{dT}{dx}|_{x=l} = \alpha g(T_l - T(l))$



Чтобы определить знак в граничных условиях второго рода нужно смотреть на направление $Q = K_x \cdot \dfrac{dT}{dx}$.

<u>Интегральная формулировка:</u> $r = -\dfrac{d}{dx}(K_x \cdot \dfrac{dT}{dx}) - f = 0, \quad v = \delta T$

$$\int_0^l (-\frac{d}{dx}(K_x \cdot \frac{dT}{dx}) - f) \cdot \delta T \cdot S dx = 0 \Rightarrow \int_0^l \frac{d\delta T}{dx}(K_x \cdot \frac{dT}{dx}) \cdot S dx - F(\delta T) = 0 \tag{10}$$

$$F(\delta T) = S(K_x \cdot \frac{dT}{dx}) \cdot \delta T|_0^l = -SQ_l \cdot \delta T(l) + SQ_0 \cdot \delta T(0)$$

$$Q_0 = -K_x \cdot \frac{dT}{dx}|_{x=0}, Q_l = -K_x \cdot \frac{dT}{dx}|_{x=l}$$

$$T = Nq = N_1^{(i)} T_i + N_2^{(i)} T_{i+1}, \quad \frac{dT}{dx} = Bq$$

$$\delta T = N\delta q = N_1^{(i)} \delta T_i + N_2^{(i)} \delta T_{i+1}, \quad \frac{d\delta T}{dx} = B\delta q$$

<u>Вариационная формулировка:</u>

$$J(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^l K_x \left(\frac{dT}{dx}\right)^2 S\,dx - \int\limits_0^l SfT\,dx + SQ_l T_l - SQ_0 T_0 \to \min \quad \text{(совпадает с (4))}$$

$$\Delta J = J(T+\delta T) - J(T) = \frac{1}{2}\int\limits_0^l K_x S \left(\frac{d(T+\delta T)}{dx}\right)^2 dx - \int_0^l Sf(T+\delta T)\,dx -$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^l K_x \left(\frac{dT}{dx}\right)^2 S\,dx + \int\limits_0^l SfT\,dx + SQ_l(T_l + \delta T_l) - SQ_0(T_0 - \delta T_0) - SQ_l T_l + SQ_0 T_0 =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^l SK_x \left[\left(\frac{dT}{dx}\right)^2 + 2\cdot\frac{dT}{dx}\cdot\frac{d\delta T}{dx} + \left(\frac{d\delta T}{dx}\right)^2\right] dx - \int\limits_0^l Sf\delta T\,dx -$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^l SK_x \left(\frac{dT}{dx}\right)^2 dx + SQ_l \delta T_l - SQ_0 \delta T_0$$

Оставим линейную часть приращений ΔJ относительно δT:

$$\int\limits_0^l SK_x \frac{dT}{dx}\cdot\frac{d\delta T}{dx}\,dx - \int\limits_0^l Sf\delta T\,dx + SQ_l\delta T_l - SQ_0\delta T_0 \to (4)$$

11/10

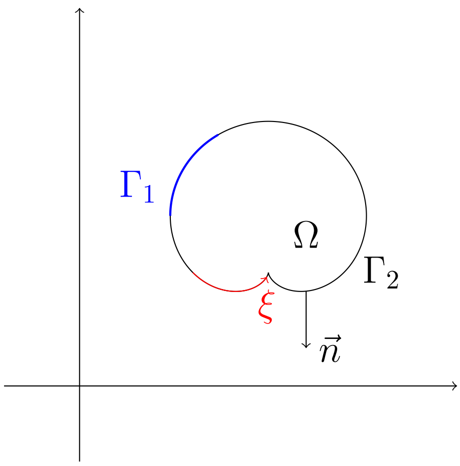
Двумерные краевые задачи

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial u}{\partial y}\right)+bu=f \tag{11}$$

$K(x,y),\ b(x,y),\ f(x,y)$ – заданные (гладкие) функции.

$u(x,y)$ – неизвестная.

Ω – область, где задано уравнение (11), Γ – граница Ω .



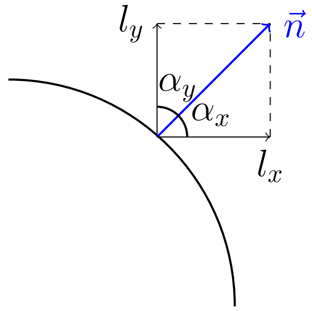
Замкнутый контур Γ – гладкий, за исключением конечного числа угловых точек, в которых внутренний угол $\alpha \in [0;\pi]$.

$$\Gamma = \underbrace{\Gamma_1}_{\text{I рода}} \cup \underbrace{\Gamma_2}_{\text{II/III рода}}$$

$u(\xi)=\hat{u}(\xi)$ – на Γ_1 (заданное значение).

$$K(\xi)\frac{\partial u}{\partial n}=\hat{\sigma}(\xi) - \text{ на } \Gamma_2$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}l_x+\frac{\partial u}{\partial y}l_y,\quad \begin{cases} l_x=\cos(\alpha x)=\cos(\vec{x},\vec{n}),\\ l_y=\cos(\alpha y)=\cos(\vec{y},\vec{n}),\\ ||\vec{n}||=1 \end{cases}$$



Составим невязку:

$$r(x,y) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial u}{\partial y}\right) + bu - f = 0$$

$$\iint\limits_{\Omega} r(x,y)\cdot v\,dx\,dy = 0,$$

где $v(x,y)$ – пробная (гладкая) функция; на Γ_1: $v = 0$

$$\iint\limits_{\Omega}\left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial u}{\partial y}\right) + bu - f\right]\cdot v\,dx\,dy = 0 \tag{12}$$

Рассмотрим первый интеграл:

$$-\iint\limits_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot v\,dx\,dy$$

Формула Гаусса-Остроградского:

$$\iint\limits_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x}F dxdy = \int\limits_{\Gamma} F\cdot l_x d\xi$$

Представим F в виде $F = uv$:

$$\frac{\partial}{\partial x}F = \frac{\partial}{\partial x}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x}v + u\frac{\partial v}{\partial x} \;\Rightarrow\; \frac{\partial u}{\partial x}v = \frac{\partial}{\partial x}(uv) - u\frac{\partial v}{\partial x}$$

Отсюда:

$$\iint\limits_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial x}v\,dx\,dy = \iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial}{\partial x}(uv) - u\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx\,dy$$

И по формуле Гаусса-Остроградского:

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} v\, dx\, dy = \int\limits_{\Gamma} uv \cdot l_x d\xi - \iint\limits_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x} u\, dx\, dy$$

Тогда:

$$-\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x}\left(K \frac{\partial u}{\partial x}\right) \cdot v\, dx\, dy = -\int\limits_{\Gamma} K \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot v \cdot l_x d\xi + \iint\limits_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x}\left(K \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx\, dy$$

$$-\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y}\left(K \frac{\partial u}{\partial y}\right) \cdot v\, dx\, dy = -\int\limits_{\Gamma} K \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot v \cdot l_y d\xi + \iint\limits_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial y}\left(K \cdot \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\, dy$$

Подставим в (12):

$$\iint\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial v}{\partial x} \cdot K \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot K \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + bu \cdot v - f \cdot v\right] dx\, dy -$$

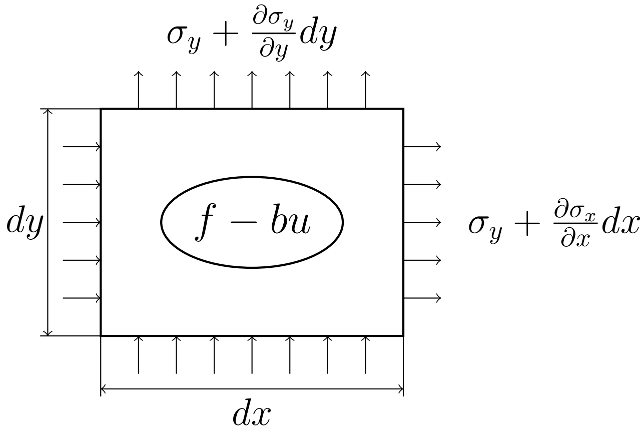
$$-\int\limits_{\Gamma_2} K \cdot v \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot l_x + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot l_y\right) = 0$$

<u>Задача упругости</u> $u(x, y)$ - перемещения

$$\varepsilon = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y]^T, \quad \varepsilon_x = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \varepsilon_y = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\varepsilon = Lu, \quad L = \left[-\frac{\partial}{\partial x} \quad -\frac{\partial}{\partial y}\right]^T$$

$$\sigma = k\varepsilon = kLu$$



$$d\Omega = dxdy$$

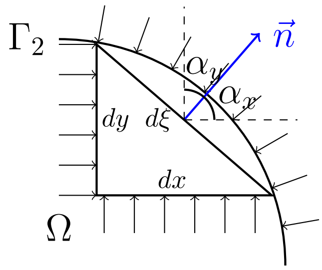
$$\sigma_x dy + \sigma_y dx + (f - bu)dxdy = \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}dx\right)dy + \left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}dy\right)dx$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = f - bu$$

$$L_* = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad L_* = -L^T, \quad L_*\sigma = L_*kLu = f - bu$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot k \cdot \begin{bmatrix} -\frac{\partial u}{\partial x} \\ -\frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = f - bu$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial u}{\partial y}\right) = f \cdot bu \Leftrightarrow (11)$$



$$\Gamma_1 : u(\xi) = \hat{u}(\xi)$$

$$dx = \cos\alpha_y d\xi = l_y d\xi, \quad dy = \cos\alpha_x d\xi = l_x d\xi$$

$$\sigma_y dx + \sigma_x dy + \hat{\sigma} d\xi = 0, \quad \sigma_x = K\varepsilon_x = -K\frac{\partial u}{\partial x}, \; \sigma_y = K\varepsilon_y = -K\frac{\partial u}{\partial y}$$

Тогда:

$$-K\frac{\partial u}{\partial y}dx - K\frac{\partial u}{\partial x}dy + \hat{\sigma}d\xi = 0, \quad -K\frac{\partial u}{\partial y}l_y d\xi - K\frac{\partial u}{\partial x}l_x d\xi + \hat{\sigma}d\xi = 0$$

$$K\frac{\partial u}{\partial n} = \hat{\sigma}$$

Отсюда:

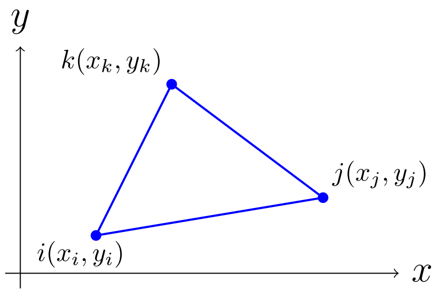
$$\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial v}{\partial x}K\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}K\frac{\partial u}{\partial y} + bu \cdot v - f \cdot v\right)dxdy - \int\limits_{\Gamma} \underbrace{\left(K\frac{\partial u}{\partial x}l_x + K\frac{\partial u}{\partial y}l_y\right)}_{K \cdot \frac{\partial u}{\partial n} = \hat{\sigma}(\xi)} \cdot v d\xi = 0 \tag{13}$$

$$\iint\limits_{\Omega}((Lu)^T K(Lu) + v^T bu - v^T f)dxdy - \int\limits_{\Gamma_2} v^T \hat{\sigma} d\xi = 0$$

18/10

Симплексный треугольный конечный элемент

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$$



$$\begin{cases} u_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \\ u_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j \\ u_k = \alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_3 y_k \end{cases} \Rightarrow \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} = 2S_\Delta$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} u_i & x_i & y_i \\ u_j & x_j & y_j \\ u_k & x_k & y_k \end{vmatrix} = u_i \underbrace{(x_j y_k - x_k y_j)}_{a_i} + u_j \underbrace{(x_k y_i - x_i y_k)}_{a_j} + u_k \underbrace{(x_i y_j - x_j y_i)}_{a_k}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & u_i & y_i \\ 1 & u_j & y_j \\ 1 & u_k & y_k \end{vmatrix} = u_i \underbrace{(y_j - y_k)}_{b_i} + u_j \underbrace{(y_k - y_i)}_{b_j} + u_k \underbrace{(y_i - y_j)}_{b_k}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & x_i & u_i \\ 1 & x_j & u_j \\ 1 & x_k & u_k \end{vmatrix} = u_i \underbrace{(x_k - x_j)}_{c_i} + u_j \underbrace{(x_i - x_k)}_{c_j} + u_k \underbrace{(x_j - x_i)}_{c_k}$$

$$\alpha_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \alpha_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \alpha_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

$$u = \frac{1}{\Delta}(a_i u_i + a_j u_j + a_k u_k + b_i u_i x + b_j u_j x + b_k u_k x + c_i u_i y + c_j u_j y + c_k u_k y) =$$

$$= \frac{1}{\Delta}\left[(a_i + b_i x + c_i y) u_i + (a_j + b_j x + c_j y) u_j + (a_k + b_k x + c_k y) u_i)\right] =$$

$$= N_i u_i + N_j u_j + N_k u_k = [N]\{\Phi\}$$

$$\{\Phi\} = [u_i,\ u_j,\ u_k]^T, \quad [N] = [N_i,\ N_j,\ N_k]$$

$$\begin{cases} N_i = \frac{1}{\Delta}(a_i + b_i x + c_i y) \\ N_j = \frac{1}{\Delta}(a_j + b_j x + c_j y) \\ N_k = \frac{1}{\Delta}(a_k + b_k x + c_k y) \end{cases} \quad - \text{ функции формы, } u = [N]\{\Phi\}$$

Свойства функций формы:

$$\begin{cases} N_i(x_i, y_i) = 1, \quad N_i(x_j, y_j) = 0, \quad N_i(x_k, y_k) = 0; \\ N_j(x_i, y_i) = 0, \quad N_j(x_j, y_j) = 1, \quad N_j(x_k, y_k) = 0; \\ N_k(x_i, y_i) = 0, \quad N_k(x_j, y_j) = 0, \quad N_k(x_k, y_k) = 1; \\ N_i + N_j + N_k = 1 \end{cases}$$

Возвращаемся к уравнению:

$$\iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cdot K_x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot K_y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + buv - fv \right) dxdy -$$

$$- \int\limits_{\Gamma} \left(K_x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot l_x + K_y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot l_y \right) v \; d\xi = 0$$

$$v = N\delta\Phi, \quad \delta\Phi = [v_i, v_j, v_k]^T$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial [N]}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial [N]}{\partial y} \end{bmatrix} \{\Phi\} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} & \dfrac{\partial N_j}{\partial x} & \dfrac{\partial N_k}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} & \dfrac{\partial N_j}{\partial y} & \dfrac{\partial N_k}{\partial y} \end{bmatrix} \{\Phi\} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \{\Phi\} = [B]\{\Phi\}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = [B]\{\delta\Phi\} \qquad D = \begin{bmatrix} K_x & 0 \\ 0 & K_y \end{bmatrix}$$

$$\int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cdot K_x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot K_y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) \; dxdy = \int\limits_{\Omega} (B\delta\Phi)^T DB\Phi \; dxdy =$$

$$= \{\delta\Phi\}^T \int\limits_{\Omega} B^T DB \; dxdy \; \{\Phi\}$$

$$\int\limits_{\Omega} buv\ dxdy = \int\limits_{\Omega} (N\delta\Phi)^T bN\Phi\ dxdy = \{\delta\Phi\}^T \int\limits_{\Omega} bN^T N\ dxdy\ \ \{\Phi\}$$

$$\int\limits_{\Omega} fv\ dxdy = \{\delta\Phi\}^T \int\limits_{\Omega} f \cdot N^T\ dxdy$$

$$\int\limits_{\Gamma} \hat{\sigma} \cdot v\ d\xi = \{\delta\Phi\}^T \int\limits_{\Gamma} \hat{\sigma} N^T\ d\xi$$

$$K = \int\limits_{\Omega} (B^T DB + bN^T N)\ dxdy; \quad P = \int\limits_{\Omega} fN^T\ dxdy + \int\limits_{\Gamma} \hat{\sigma} N^T\ d\xi$$

$$\{\delta\Phi\}^T K\Phi = \{\delta\Phi\}^T P \Rightarrow K\Phi = P$$

$$\int\limits_{\Omega} B^T DB\ dxdy = \int\limits_{\Omega} \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} b_i & c_i \\ b_j & c_j \\ b_k & c_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_x & 0 \\ 0 & K_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix}\ dxdy = ☺$$

Считаем, что K_x, K_y – const:

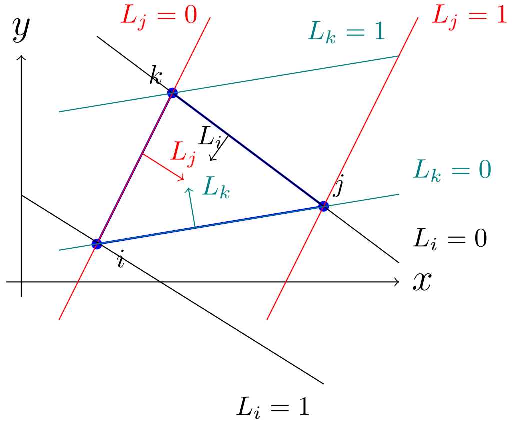
$$☺ = \frac{S_1}{(2S_1)^2} \left[K_x \begin{pmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_k \\ b_i b_j & b_j b_j & b_j b_k \\ b_i b_k & b_j b_k & b_k b_k \end{pmatrix} + K_y \begin{pmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_k \\ c_i c_j & c_j c_j & c_j c_k \\ c_i c_k & c_j c_k & c_k c_k \end{pmatrix} \right]$$

$$\int\limits_{\Omega} bN^T N\ dxdy = \int\limits_{\Omega} b \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_k \end{bmatrix}\ dxdy =$$

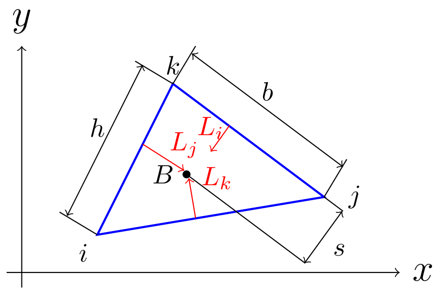
$$= \int\limits_{\Omega} b \cdot \begin{bmatrix} N_i N_i & N_i N_j & N_i N_k \\ N_i N_j & N_j N_j & N_j N_k \\ N_i N_k & N_j N_k & N_k N_k \end{bmatrix}\ dxdy$$

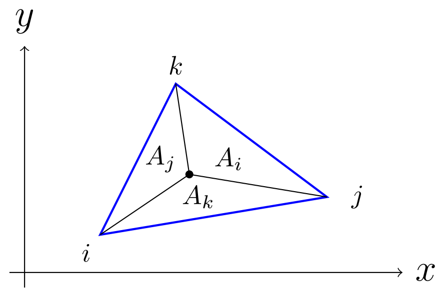
$$P_1 = \int\limits_{\Omega} fN^T\ dxdy = \int\limits_{\Omega} f \cdot \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix}\ dxdy$$

Естественная система координат



$$\begin{cases} 0 \le L_i \le 1; \\ 0 \le L_j \le 1; \\ 0 \le L_k \le 1. \end{cases}$$





$$\begin{cases} S_\triangle = \frac{1}{2}bh, \\ S_{A_i} = \frac{1}{2}bs \end{cases} \Rightarrow L_i = \frac{S_{A_i}}{S_\triangle} = \frac{s}{h}$$

$$L_j = \frac{S_{A_j}}{S_\triangle}, \quad L_k = \frac{S_{A_k}}{S_\triangle}$$

$$L_i + L_j + L_k = \frac{S_{A_i} + S_{A_j} + S_{A_k}}{S_\triangle} = 1$$

$$N_i = L_i,\ N_j = L_j,\ N_k = L_k$$

25/10

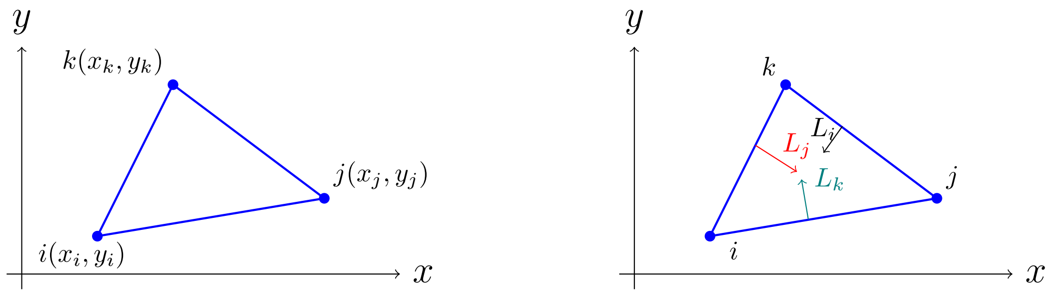
Связь между координатами:

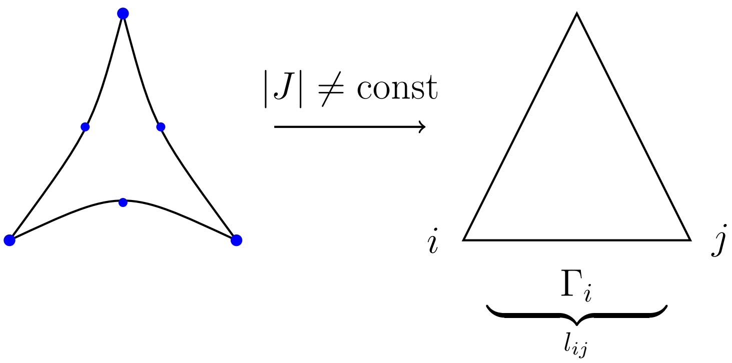
$$\begin{cases} L_i + L_j + L_k = 1 \\ x = L_i x_i + L_j x_j + L_k x_k \\ y = L_i y_i + L_j y_j + L_k y_k \end{cases}$$

$V = hdS, h = \text{const}$ – толщина элемента

$$h \iint\limits_S f(x,y)\; dxdy = h \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-L_j} f(L_i, L_j, L_k)|J|\; dL_i L_j$$

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial L_i} & \dfrac{\partial x}{\partial L_j} \\ \dfrac{\partial y}{\partial L_i} & \dfrac{\partial y}{\partial L_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i - x_k & x_j - x_k \\ y_i - y_k & y_j - y_k \end{bmatrix} \Rightarrow |J| = \Delta$$





Интегральные формулы, упрощающие вычисления:

$$\int\limits_{\Gamma_{ij}} L_i^{\alpha} L_j^{\beta}\; d\Gamma = \frac{\alpha!\beta!}{(\alpha+\beta+1)!} \cdot l_{ij}$$

$$\int\limits_S L_i^\alpha L_j^\beta L_k^\gamma \, dS = \frac{\alpha!\beta!\gamma!}{(\alpha+\beta+\gamma+2)!} \cdot 2S \tag{1}$$

Возвращаемся к формуле из прошлой лекции:

$$\int\limits_\Omega N^T N \, dxdy = \int\limits_\Omega \begin{bmatrix} N_iN_i & N_iN_j & N_iN_k \\ N_iN_j & N_jN_j & N_jN_k \\ N_iN_k & N_jN_k & N_kN_k \end{bmatrix} \, dxdy =$$

$$= \int\limits_S \begin{bmatrix} L_iL_i & L_iL_j & L_iL_k \\ L_iL_j & L_jL_j & L_jL_k \\ L_iL_k & L_jL_k & L_kL_k \end{bmatrix} |J| \, dL_iL_j = \frac{S}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Вычисляем компоненты матрицы по формуле (1):

$$\int\limits_\Omega L_i^2 \, dS = \int\limits_\Omega L_i^2 L_j^0 L_k^0 \, dS = \frac{2!\,0!\,0!}{(2+0+0+2)!} \cdot 2S = \frac{S}{6}$$

$$\int\limits_S N^{\mathrm{T}} \, dS = \int\limits_S \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix} \, dxdy = \int\limits_S \begin{bmatrix} L_i \\ L_j \\ L_k \end{bmatrix} \, dS = \frac{S}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\int\limits_\Gamma \left(K_x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot l_x + K_y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot l_y \right) v \, d\Gamma$$

1. или $K_x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot l_x + K_y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot l_y = \hat{\sigma}$ или q
2. или $K_x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot l_x + K_y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot l_y = -\alpha_g(u - \hat{u})$

Рассмотрим подробнее:

1. $\displaystyle\int\limits_\Gamma \hat{\sigma} \, d\Gamma = \{\delta\Phi\}^T \int\limits_\Gamma \hat{\sigma} N^T \, d\Gamma \int\limits_\Gamma \begin{bmatrix} L_i \\ L_j \\ L_k \end{bmatrix} \, d\Gamma$

   (a) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma_{ij}} \begin{bmatrix} L_i \\ L_j \\ 0 \end{bmatrix} \, d\Gamma = \left| \int\limits_{\Gamma_{ij}} L_i^1 L_j^0 d\Gamma = \frac{1!}{(1+1)!} l_{ij} \right| = \frac{l_{ij}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) $$\int\limits_{\Gamma_{jk}} \begin{bmatrix} 0 \\ L_j \\ L_k \end{bmatrix} d\Gamma = \frac{l_{jk}}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(c) $$\int\limits_{\Gamma_{ik}} \begin{bmatrix} L_i \\ 0 \\ L_k \end{bmatrix} d\Gamma = \frac{l_{jk}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\int\limits_{\Gamma} \alpha_g (u - \hat{u}) v d\Gamma = \int\limits_{\Gamma} \alpha_g u \cdot v d\Gamma - \int\limits_{\Gamma} \alpha_g \hat{u} \cdot v d\Gamma =$$

$$= \delta\Phi^T \left(\int\limits_{\Gamma} \alpha_g N^T N d\Gamma \cdot \Phi - \alpha_g \hat{u} \int\limits_{\Gamma} N^T d\Gamma \right)$$

$$\int\limits_{\Gamma} \alpha_g N^T N d\Gamma = \int\limits_{\Gamma} \begin{bmatrix} L_i L_i & L_i L_j & L_i L_k \\ 0 & L_j^2 & L_j L_k \\ 0 & 0 & L_k^2 \end{bmatrix} d\Gamma$$

(a)

$$\int\limits_{\Gamma_{ij}} \begin{bmatrix} L_i L_i & L_i L_j & 0 \\ 0 & L_j^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} d\Gamma = \left| \begin{matrix} \int\limits_{\Gamma_{ij}} L_i^2 L_j^0 d\Gamma = \dfrac{2! \cdot 0!}{(2+1)!} l_{ij} = \dfrac{2}{6} l_{ij} \\ \int\limits_{\Gamma_{ij}} L_i^1 L_j^1 d\Gamma = \dfrac{1! \cdot 1!}{(1+1+1)!} l_{ij} = \dfrac{1}{6} l_{ij} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{2}{6} l_{ij} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{(b), (c) – аналогично}$$

01/11

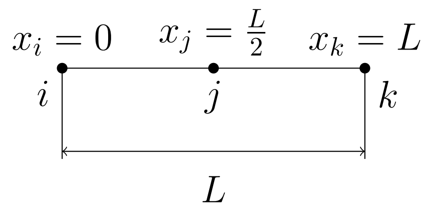
<u>Конечные элементы более высокого порядка</u>

<u>Одномерные квадратичные и кубические функции</u>

$$K_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f = 0$$

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x,\ \dim L = 1, n = 2 \text{ – симплекс элементы.}$$

Комплекс элементы – количество узлов n $>$ 2.



$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 = N\Phi$

В общем виде: $\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \dots + \alpha_n x^{n-1}$

$$\begin{cases} \Phi_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_2 x_i^2 \\ \Phi_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_2 x_j^2 \\ \Phi_k = \alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_2 x_k^2 \end{cases} \to \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$$

$$\alpha_1 = \Phi_i,\ \alpha_2 = \frac{-3\Phi_i + 4\Phi_j - \Phi_k}{L},\ \alpha_3 = \frac{2(\Phi_i - 2\Phi_j + \Phi_k)}{L^2}$$

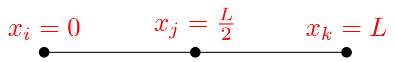
$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 =$$

$$= \Phi_i \underbrace{\left(1 - \frac{3x}{L} + \frac{2x^2}{L^2}\right)}_{N_i} + \Phi_j \underbrace{\left(\frac{4x}{L} - \frac{4x^2}{L^2}\right)}_{N_j} + \Phi_k \underbrace{\left(-\frac{x}{L} + \frac{2x^2}{L^2}\right)}_{N_k} =$$

$$= N_i\Phi_i + N_j\Phi_j + N_k\Phi_k = [N]\{\Phi\}$$

$$N_i = 1 - \frac{3x}{L} + \frac{2x^2}{L^2},\ N_j = \frac{4x}{L} - \frac{4x^2}{L^2},\ N_k = -\frac{x}{L} + \frac{2x^2}{L^2}$$

Этот же результат можно получить без использования системы уравнений. Зададим в узлах пробные функции f_α, $\alpha \in \{i, j, k\}$, такие, что $f_\alpha(x_\alpha) = 0$:



$$f_i = \frac{x}{L} \qquad f_j = 1 - \frac{2x}{L} \qquad f_k = 1 - \frac{x}{L}$$

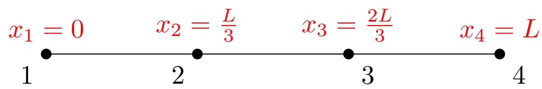
Формулы для нахождения функций форм:

$$N_i = \frac{f_j f_k}{f_j f_k|_{x=x_i=0}}, \ N_j = \frac{f_i f_k}{f_i f_k|_{x=x_j=\frac{L}{2}}}, \ N_k = \frac{f_i f_j}{f_i f_j|_{x=x_k=L}}$$

$$N_i = \left(1 - \frac{2x}{L}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right), \ N_j = \frac{4x}{L} \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right), \ N_k = -\frac{x}{L} \cdot \left(1 - \frac{2x}{L}\right)$$

Аналогично можно найти функции формы для конечных элементов более высокого порядка:

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 = N_i \Phi_i, \ i = 1, \dots, 4$$



$$f_2 = 1 - \frac{3x}{L} \qquad f_4 = 1 - \frac{x}{L}$$

$$f_1 = \frac{x}{L} \qquad f_3 = 1 - \frac{3x}{2L}$$

<u>Постановка задачи</u>

$$K^{(e)} q = P^{(e)}$$

$$K^{(e)} = \int\limits_V B^T D B dV + \int\limits_S \alpha_g N^T N dS$$

$$P^{(e)} = \int\limits_V f N^T dV - \int\limits_S q N^T dS + \int\limits_S \alpha_g T_g N^T dS$$

$$dV = S dx, \quad dS = P dx, \text{ где } P \text{ – периметр}$$

$$B = \frac{d[N]}{dx} = \left[\frac{dN_i}{dx}, \quad \frac{dN_j}{dx}, \quad \frac{dN_k}{dx}\right] = \left[-\frac{3}{L} + \frac{4x}{L^2}, \quad \frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2}, \quad -\frac{1}{L} + \frac{4x}{L^2}\right]$$

$$D = k_x, \text{ так как задача одномерная}$$

Получаем:

$$\int\limits_V B^T D B dV = S k_x \cdot \int\limits_0^L B^T B dx =$$

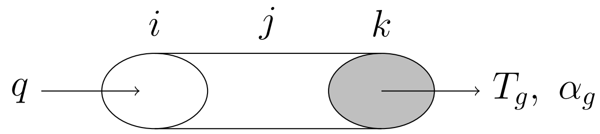
$$= S k_x \cdot \int\limits_0^L \begin{bmatrix} \left(-\frac{3}{L} + \frac{4x}{L^2}\right)^2 & \left(-\frac{3}{L} + \frac{4x}{L^2}\right)\left(\frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2}\right) & \left(-\frac{3}{L} + \frac{4x}{L^2}\right)\left(-\frac{1}{L} + \frac{4x}{L^2}\right) \\ \left(-\frac{3}{L} + \frac{4x}{L^2}\right)\left(\frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2}\right) & \left(\frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2}\right)^2 & \left(\frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2}\right)\left(-\frac{1}{L} + \frac{4x}{L^2}\right) \\ \left(-\frac{3}{L} + \frac{4x}{L^2}\right)\left(-\frac{1}{L} + \frac{4x}{L^2}\right) & \left(\frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2}\right)\left(-\frac{1}{L} + \frac{4x}{L^2}\right) & \left(-\frac{1}{L} + \frac{4x}{L^2}\right)^2 \end{bmatrix} dx =$$

$$
= \frac{Sk_x}{6L} \cdot \begin{bmatrix} 14 & -16 & 2 \\ -16 & 32 & -16 \\ 2 & -16 & 14 \end{bmatrix}
$$

Рассмотрим следующий интеграл:

$$
\int\limits_S \alpha_g N^T N dS = P\alpha_g \cdot \int\limits_0^L N^T N dx = P\alpha_g \cdot \int\limits_0^L \begin{bmatrix} N_i^2 & N_i N_j & N_i N_k \\ N_i N_j & N_j^2 & N_j N_k \\ N_i N_k & N_j N_k & N_k^2 \end{bmatrix} dx =
$$

$$
= \frac{\alpha_g PL}{30} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}
$$



Для узла k:

$$
\alpha_g \int\limits_S N^T N dS = \alpha_g S_k \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},
$$

где S_k – площадь сечения для k-ого узла.

Для всей боковой поверхности:

$$
\alpha_g T_g \int\limits_S N^T dS = \alpha_g T_g P \cdot \int\limits_0^L \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix} dx = \frac{\alpha_g T_g PL}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

Для узла k:

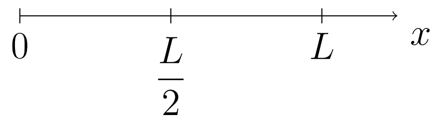
$$
\alpha_g T_g \int\limits_S N^T dS = \alpha_g T_g S_k \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

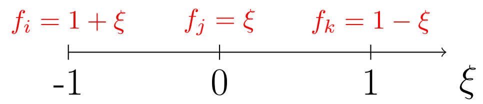
Для узла i:

$$\int\limits_S qN^T dS = qS\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\int\limits_V f\cdot N^T dV = S\cdot f\int\limits_0^L N^T dx = \frac{SfL}{6}\cdot\begin{bmatrix}1\\4\\1\end{bmatrix}$$

Естественная система координат





$$-1 \le \xi \le 1,\ x = f(\xi) \Leftrightarrow \xi = \varphi(x)$$

$$\begin{cases} N_i = \xi(1-\xi)\cdot\dfrac{-1}{2} = -\dfrac{\xi(1-\xi)}{2},\\ N_j = (1-\xi)(1+\xi),\\ N_k = \dfrac{\xi(1+\xi)}{2}\end{cases}$$

$$\varphi = N_i\Phi_i + N_j\Phi_j + N_k\Phi_k$$

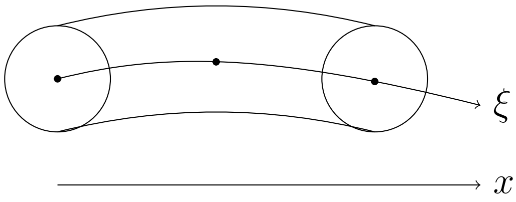
$$x = N_i x_i + N_j x_j + N_k x_k \to x = f(\xi)$$

$$B = \frac{d[N]}{dx};\ \frac{dN_\beta}{d\xi} = \frac{dN_\beta}{dx}\underbrace{\frac{dx}{d\xi}}_{J},\ J^{-1} = \frac{1}{\frac{dx}{d\xi}},\ \beta = i, j, k$$

$$\frac{dN_\beta}{dx} = J^{-1}\frac{dN_\beta}{d\xi}$$

$$J = \frac{dx}{d\xi} = \frac{dN_i}{d\xi}x_i + \frac{dN_j}{d\xi}x_j + \frac{dN_k}{d\xi}x_k \neq \text{const}$$

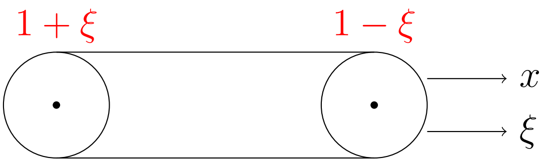
1



$$\begin{cases} x = N_i x_i + N_j x_j + N_k x_k \\ \varphi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k \end{cases}$$

Криволинейный стержень

2

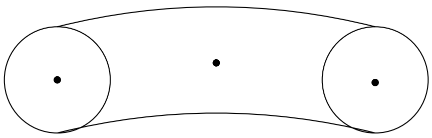


$$\begin{cases} x = \tilde{N}_i x_i + \tilde{N}_k x_k \\ \tilde{N}_i = \dfrac{1}{2}(1-\xi), \ \ \tilde{N}_k = \dfrac{1}{2}(1+\xi) \\ \varphi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k \end{cases}$$

Линейный стержень
(задаем через две точки)

(если в задании нужно вычислить что-то в середине, то используем квадратичные функции формы)

3



$$\begin{cases} x = N_i x_i + N_j x_j + N_k x_k \\ \varphi = \tilde{N}_i \Phi_i + \tilde{N}_k \Phi_k \end{cases}$$

Криволинейный элемент

(достаточно рассмотреть только на концах элемента)

Пусть A – количество узлов для задания формы элемента ($x = f(\xi)$), B – количество узлов для задания интерполяционного полинома (φ).

1. Если $A = B$, такой конечный элемент называется *изопараметрический*.
2. Если $A < B$, такой конечный элемент называется *субпараметрический*.
3. Если $A > B$, такой конечный элемент называется *суперпараметрический*.

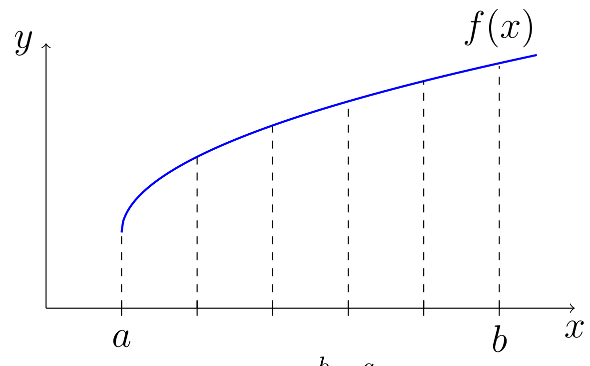
8/11

Численное интегрирование

$$\frac{\partial N_\beta}{\partial x} = J^{-1}\frac{\partial N_\beta}{\partial \xi}$$

1. Формулы Ньютона-Котса

n точек, интерполяционный полином $(n+1)$-ого порядка, совпадающий в узлах с функцией $f(x)$



$n = 6$ $\Delta x = \frac{b-a}{5}$

$$\int\limits_a^b f(x)dx = (b-a)\sum_{i=1}^{n} H_i \cdot f(x_i),$$

где H_i – весовые коэффициенты

$n=2$ формула трапеции	$H_1 = \frac{1}{2},\ H_2 = \frac{1}{2}$
$n=3$ формула Симпсона	$H_1 = \frac{1}{6},\ H_2 = \frac{2}{3},\ H_3 = \frac{1}{6}$
$n=4$	$H_1 = \frac{1}{8},\ H_2 = \frac{3}{8},\ H_3 = \frac{3}{8},\ H_4 = \frac{1}{8}$
$n=5$	$H_1 = \frac{7}{90},\ H_2 = \frac{32}{90},\ H_3 = \frac{12}{90},\ H_4 = \frac{32}{90},\ H_5 = \frac{7}{90}$

$N_2(X)$ (2 – порядок), $N^T N -$ 4 порядок, $B^T B -$ 2 порядок

2. Квадратурные формулы Гаусса-Лежандра

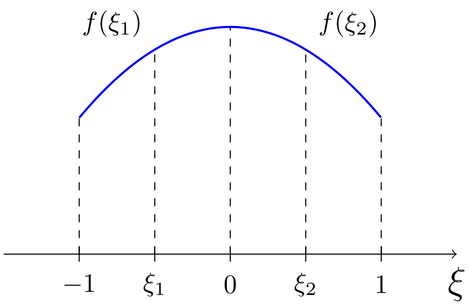
n точек, рассматриваем $2n$ неизвестных функций f и x, $(2n{-}1)$ – порядок интерполяционного многочлена.

$$N^T N \Rightarrow 4 = 2n - 1,\ n = \frac{5}{2} = 2.5 \approx 3$$

(для многочлена 4 порядка достаточно трех точек интегрирования)

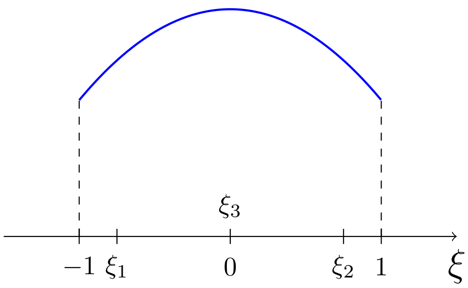
$$\int\limits_{-1}^{1} f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) H_i$$

$n = 2:$



$$\xi_1 = -0.57735,\ H_1 = 1,\ \xi_2 = 0.57735,\ H_2 = 2$$

$n = 3:$



$$\xi_1, \xi_2 = \pm 0.774597,\ H_1 = H_2 = \frac{8}{9},\ \xi_3 = 0,\ H_3 = \frac{5}{9}$$

На этом рисунке ξ_1, ξ_2 ближе к ± 1.

$n = 4:$

$$\xi_1, \xi_2 = \pm 0.861136,\ H_1 = H_2 = 0.347855$$

$$\xi_3, \xi_4 = \pm 0.339981,\ H_3 = H_4 = 0.652145$$

$$\int_{-1}^{1} N^T N |J| d\xi$$

$$x_i = \tfrac{1}{2} \qquad x_j = 1 \qquad x_k = \tfrac{3}{2} \qquad x$$

$$-1 \qquad 0 \qquad 1 \qquad \xi$$

$$x = N_i x_i + N_j x_j + N_k x_k$$

$$N_i = \frac{\xi}{2}(1-\xi),\ \ N_j = (1-\xi)(1+\xi),\ \ N_k = \frac{\xi}{2}(1+\xi)$$

$$J = \frac{dx}{d\xi} = \frac{dN_i}{d\xi} x_i + \frac{dN_j}{d\xi} x_j + \frac{dN_k}{d\xi} x_k = \left(-\frac{1}{2} + \xi\right) x_i - 2\xi x_j + \left(\frac{1}{2} + \xi\right) x_k =$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{\xi}{2} - 2\xi + \frac{3}{4} + \frac{3\xi}{2} = \frac{1}{2}$$

$$J^{-1} = 2$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} \left(-\frac{\xi}{2}(1-\xi)\right)^2 & -\frac{\xi}{2}(1-\xi)(1-\xi^2) & -\frac{\xi^2}{4}(1-\xi^2) \\ -\frac{\xi}{2}(1-\xi)(1-\xi^2) & (1-\xi^2)^2 & \frac{\xi}{2}(1-\xi)(1+\xi)^2 \\ -\frac{\xi^2}{4}(1-\xi^2) & \frac{\xi}{2}(1-\xi)(1+\xi)^2 & \frac{\xi^2}{4}(1+\xi)^2 \end{bmatrix} d\xi =$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_s N_i(\xi_s) N_i(\xi_s) H_s & \sum_s N_i(\xi_s) N_j(\xi_s) H_s & \sum_s N_i(\xi_s) N_k(\xi_s) H_s \\ \sum_s N_i(\xi_s) N_j(\xi_s) H_s & \sum_s N_j(\xi_s) N_j(\xi_s) H_s & \sum_s N_j(\xi_s) N_k(\xi_s) H_s \\ \sum_s N_i(\xi_s) N_k(\xi_s) H_s & \sum_s N_k(\xi_s) N_j(\xi_s) H_s & \sum_s N_k(\xi_s) N_k(\xi_s) H_s \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$\begin{cases} N_i(\xi_1) = \frac{\xi_1}{2}(1-\xi_1) \\ N_j(\xi_1) = (1-\xi_1)(1+\xi_1) \\ N_k(\xi_1) = \frac{\xi_1}{2}(1+\xi_1) \end{cases} \qquad \begin{cases} N_i(\xi_2) = \frac{\xi_2}{2}(1-\xi_2) \\ N_j(\xi_2) = (1-\xi_2)(1+\xi_2) \\ N_k(\xi_2) = \frac{\xi_2}{2}(1+\xi_2) \end{cases}$$

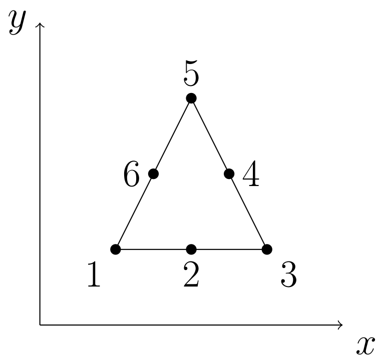
$$\begin{cases} N_i(\xi_3) = \frac{\xi_3}{2}(1-\xi_3) \\ N_j(\xi_3) = (1-\xi_3)(1+\xi_3) \\ N_k(\xi_3) = \frac{\xi_3}{2}(1+\xi_3) \end{cases}$$

Для первого элемента матрицы (14):

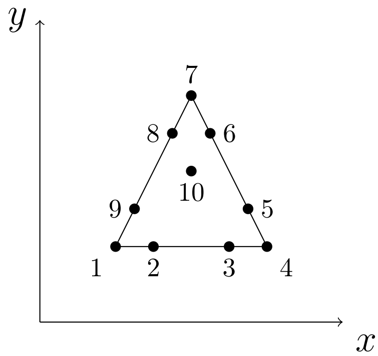
$$\int\limits_{-1}^{1} f(\xi) d\xi = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{Якобиан}} \sum_{s=1}^{3} \underbrace{f(\xi_s)}_{N_i N_i} H_s =$$

$$= \frac{1}{2}[H_1 N_i(\xi_1) N_i(\xi_1) + H_2 N_i(\xi_2) N_i(\xi_2) + H_3 N_i(\xi_3) N_i(\xi_3)]$$

Квадратичные и кубические треугольные элементы

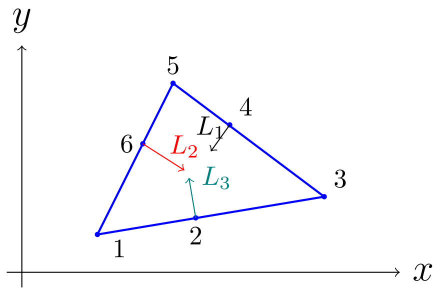


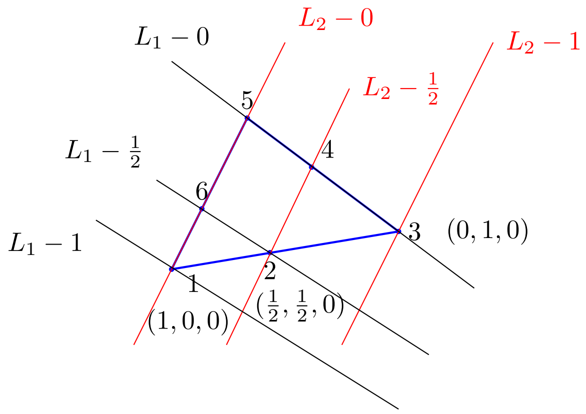
Аппроксимирующая функция: $\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 = N_1 \Phi_1 + \cdots + N_6 \Phi_6 = [N]\{\Phi\}$.



$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} xy^2 = N_i \Phi_i = [N]\{\Phi\},\ i = 1, \ldots, 10.$

Функции формы для квадратичных треугольных конечных элементов в L-координатах:





$$N_1 = L_1\left(L_1 - \frac{1}{2}\right)$$

(нужно взять такие линии, которые захватывают все узлы, кроме первого)

Нормируем:

$$N_1 = \frac{L_1\left(L_1 - \frac{1}{2}\right)}{1\left(1 - \frac{1}{2}\right)} = L_1(2L_1 - 1)$$

$$N_2 = \frac{L_2 L_1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = 4L_1L_2$$

$$N_3 = \frac{L_2\left(L_2 - \frac{1}{2}\right)}{1\left(1 - \frac{1}{2}\right)} = L_2(2L_2 - 1)$$

$$N_4 = 4L_2L_3$$

$$N_5 = L_3(2L_3 - 1)$$

$$N_6 = 4L_1L_3$$

$$N_\beta = \prod_{\delta=1}^{n} \frac{F_\delta}{F_\delta|_{L_1,L_2,L_3}},\ F_\delta - \text{ пробные функции}$$

15/11

$$\int B^T D B \, dV$$

$$B = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial [N]}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial [N]}{\partial y} \end{bmatrix} \qquad \text{где} \quad \begin{matrix} N_1 = L_1(2L_1 - 1) & N_2 = 4L_1L_2 \\ N_3 = L_2(2L_2 - 1) & N_4 = 4L_2L_3 \\ N_5 = L_3(2L_3 - 1) & N_6 = 4L_3L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x = x(L_1, L_2, L_3) \\ y = y(L_1, L_2, L_3) \end{cases}$$

$\beta = \overline{1,6}:$

$$\begin{cases} \frac{\partial N_\beta}{\partial L_1} = \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial L_1} + \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial L_1} \\ \frac{\partial N_\beta}{\partial L_2} = \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial L_2} + \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial L_2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial N_\beta}{\partial L_1} \\ \frac{\partial N_\beta}{\partial L_2} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial L_1} & \frac{\partial y}{\partial L_1} \\ \frac{\partial x}{\partial L_2} & \frac{\partial y}{\partial L_2} \end{bmatrix}}_{J} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \\ \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \end{bmatrix}$$

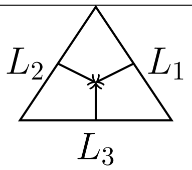
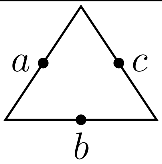
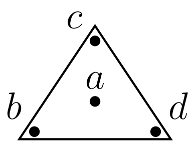
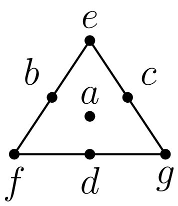
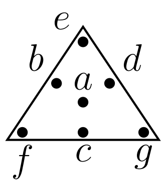
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \\ \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \end{bmatrix} = J^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial N_\beta}{\partial L_1} \\ \frac{\partial N_\beta}{\partial L_2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial N_\beta}{\partial L_1} = \frac{\partial N_\beta}{\partial L_1} \cdot \underbrace{\frac{\partial L_1}{\partial L_1}}_{1} + \frac{\partial N_\beta}{\partial L_2} \cdot \underbrace{\frac{\partial L_2}{\partial L_1}}_{0} + \frac{\partial N_\beta}{\partial L_3} \cdot \underbrace{\frac{\partial L_3}{\partial L_1}}_{-1} = \frac{\partial N_\beta}{\partial L_1} - \frac{\partial N_\beta}{\partial L_3}$$

<u>Пример:</u>

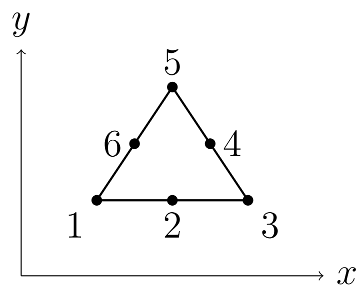
$$N_4 = 4L_2L_3 = 4L_2(1 - L_1 - L_2) \Rightarrow \frac{\partial N_4}{\partial L_1} = -4L_2$$

$$Z = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-L_2} f(L_1, L_2, L_3)|J| \, dL_1 dL_2 = \sum_{i=1}^{n} W_i g(L_1, L_2, L_3), \text{ где } g = f \cdot |J|$$

	Ошибка	$(\cdot)$	$L_1\ L_2\ L_3$	W_i
	$R = o(h^2)$	a	$\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
	$R = o(h^2)$	a	$\frac{1}{2}\ 0\ \frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
		b	$\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 0$	$\frac{1}{6}$
		c	$0\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
	$R = o(h^4)$	a	$\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}$	$\frac{27}{96}$
		b	$\frac{11}{15}\ \frac{2}{15}\ \frac{2}{15}$	$\frac{25}{96}$
		c	$\frac{2}{15}\ \frac{2}{15}\ \frac{11}{15}$	$\frac{25}{96}$
		d	$\frac{2}{15}\ \frac{11}{15}\ \frac{2}{15}$	$\frac{25}{96}$
	$R = o(h^4)$	a	$\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}$	$\frac{27}{120}$
		b	$\frac{1}{2}\ 0\ \frac{1}{2}$	$\frac{8}{120}$
		c	$0\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$	$\frac{8}{120}$
		d	$\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 0$	$\frac{8}{120}$
		e	$0\ 0\ 1$	$\frac{3}{120}$
		f	$1\ 0\ 0$	$\frac{3}{120}$
		g	$0\ 1\ 0$	$\frac{3}{120}$
		a	$\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}$	0.1125
	$R = o(h^6)$	b	$\beta\ \alpha\ \beta$	0.066197075
	$\alpha = 0.05961587$	c	$\beta\ \beta\ \alpha$	0.066197075
	$\beta = 0.47014206$	d	$\alpha\ \beta\ \beta$	0.066197075
	$\gamma = 0.10128651$	e	$\gamma\ \gamma\ \delta$	0.0629695
	$\Delta = 0.79742699$	f	$\delta\ \gamma\ \gamma$	0.0629695
		g	$\gamma\ \delta\ \gamma$	0.0629695

Пример.

$$\text{Вычислить: } \int\limits_S \frac{\partial N_4}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_4}{\partial y}\, dxdy$$



Точка	Координаты точки	
1	1	1
3	3	2
5	2	3

$$\begin{cases} x = x_1 L_1 + x_3 L_2 + x_5 L_3 \\ y = y_1 L_1 + y_3 L_2 + y_5 L_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = L_1 + 3L_2 + 2L_3 \\ y = L_1 + 2L_3 + 3L_3 \end{cases}$$

$$N_4 = 4L_2 L_3$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial L_1} & \frac{\partial y}{\partial L_1} \\ \frac{\partial x}{\partial L_2} & \frac{\partial y}{\partial L_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2 & 1-3 \\ 3-2 & 2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |J| = 1 + 2 = 3$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4L_2 \\ 4L_3 - 4L_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

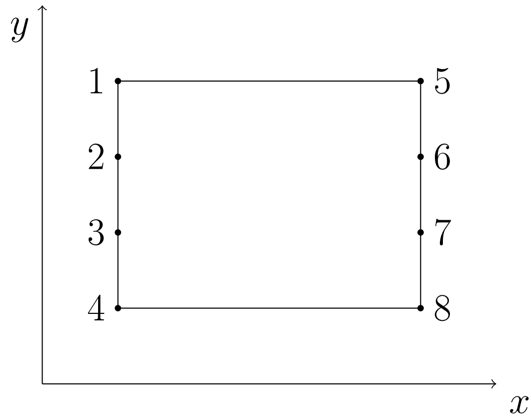
$$\frac{\partial N_4}{\partial x} = \frac{1}{3}(8L_2 - 4L_3) \qquad \frac{\partial N_4}{\partial y} = \frac{-1}{3}(4L_2 + 4L_3)$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_4}{\partial y} = -\frac{1}{9}(8L_2 - 4L_3)(4L_2 + 4L_3) = \int\limits_S \frac{\partial N_4}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_4}{\partial y}\, dxdy =$$

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-L_2} -\frac{1}{9} \cdot 3(8L_2 - 4L_3)(4L_2 + 4L_3)\, dL_1 dL_2 = -\frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} W_i \cdot g(L_1, L_2, L_3) = -\frac{12}{18}$$

29/11

Четырехугольные конечные элементы
Мультиплекс-элементы



φ - аппроксимирующая функция должна быть непрерывной между элементами.

Предположим, что вдоль верхней и нижней сторон функция меняется по линейному закону, а вдоль вертикальных сторон, например, по кубическому.

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy + \alpha_5 y^2 + \alpha_6 xy^2 + \alpha_7 y^3 + \alpha_8 xy^3$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1y_1^2 & y_1^3 & x_1y_1^3 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2y_2^2 & y_2^3 & x_2y_2^3 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3y_3^2 & y_3^3 & x_3y_3^3 \\ & & & & \dots & & & \\ 1 & x_8 & y_8 & x_8y_8 & y_8^2 & x_8y_8^2 & y_8^3 & x_8y_8^3 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \dots \\ \alpha_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \dots \\ \Phi_8 \end{bmatrix}$$

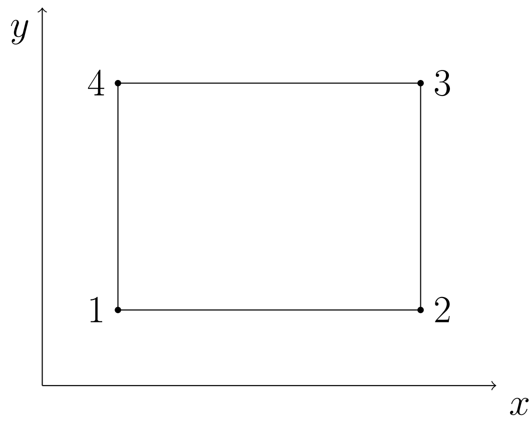
$$C \cdot \alpha = \Phi \Rightarrow \alpha = C^{-1} \cdot \Phi$$

$$\varphi = P\alpha = P \cdot C^{-1} \cdot \Phi = N\Phi$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & y^2 & xy^2 & y^3 & xy^3 \end{bmatrix}, \quad \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_8 \end{bmatrix}$$

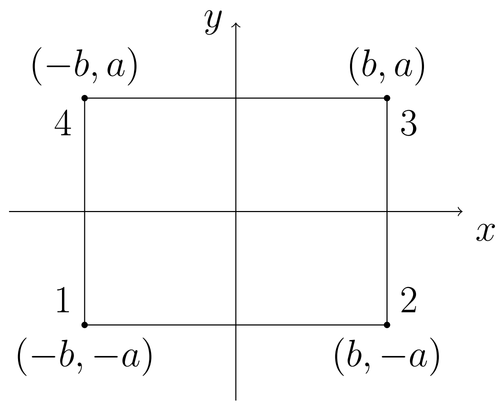
<u>Самая большая сложность - в составлении C^{-1}.</u>

Серендипово семейство



Линейная аппроксимация:

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy$$



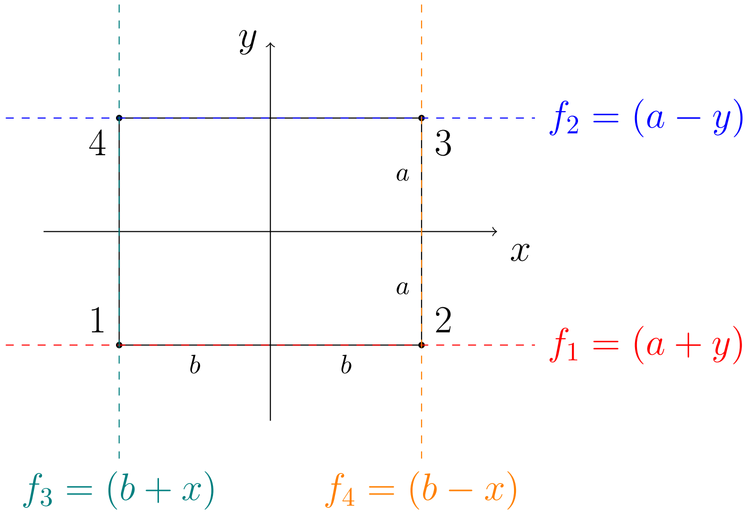
$$\begin{cases} \Phi_1 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot (-b) + \alpha_3 \cdot (-a) + \alpha_4 \cdot ab, \\ \Phi_2 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot (b) + \alpha_3 \cdot (-a) + \alpha_4 \cdot (-ab), \\ \Phi_3 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot (b) + \alpha_3 \cdot (a) + \alpha_4 \cdot ab, \\ \Phi_4 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot (-b) + \alpha_3 \cdot (a) + \alpha_4 \cdot (-ab), \end{cases}$$

В матричном виде:

$$\begin{bmatrix} 1 & -b & -a & ab \\ 1 & b & -a & -ab \\ 1 & b & a & ab \\ 1 & -b & a & -ab \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{bmatrix}; \qquad C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{4b} & -\frac{1}{4b} \\ -\frac{1}{4a} & -\frac{1}{4a} & \frac{1}{4a} & \frac{1}{4a} \\ \frac{1}{4ab} & -\frac{1}{4ab} & \frac{1}{4ab} & -\frac{1}{4ab} \end{bmatrix}$$

$$N = P \cdot C^{-1} = \frac{1}{4ab}\begin{bmatrix}1 & x & y & xy\end{bmatrix}\begin{bmatrix}ab & ab & ab & ab\\ -a & a & a & -a\\ -b & -b & b & b\\ 1 & -1 & 1 & -1\end{bmatrix} = \frac{1}{4ab}\begin{bmatrix}(b-x)(a-y)\\ (b+x)(a-y)\\ (b+x)(a+y)\\ (b-x)(a+y)\end{bmatrix}$$

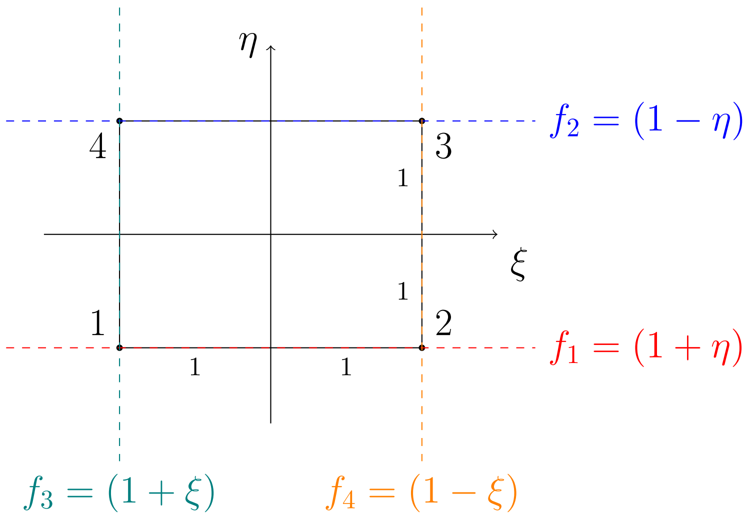
Этот метод не рационален. Поэтому функции формы будем искать с помощью их свойств:



$$\begin{cases} N_1 = \dfrac{f_2 \cdot f_4}{f_2 \cdot f_4|_{x=-b,\ y=-a}} = \dfrac{1}{4ab}(a-y)(b-x)\\ N_2 = \frac{1}{4ab}(b+x)(a-y)\\ N_3 = \frac{1}{4ab}(b+x)(a+y)\\ N_4 = \frac{1}{4ab}(b-x)(a+y)\end{cases}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \alpha_2 + \alpha_4 y,\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \alpha_3 + \alpha_4 x$$

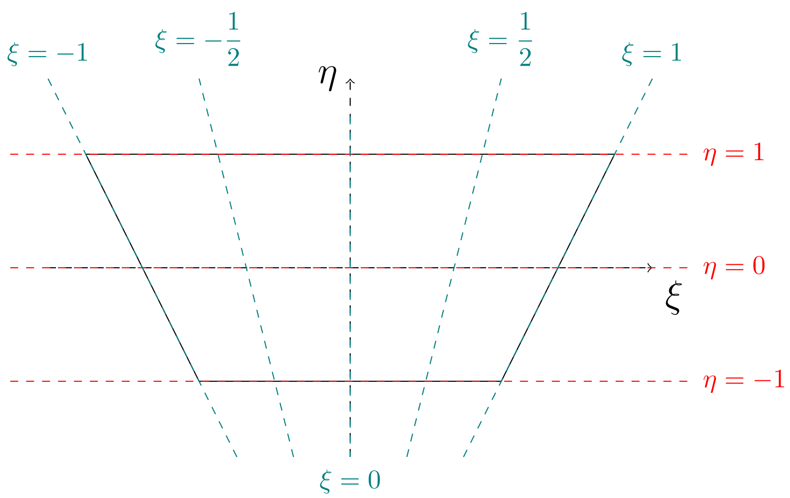
Естественная криволинейная система координат



$$\xi = \frac{x}{b},\ -1 \le \xi \le 1, \quad \eta = \frac{y}{a},\ -1 \le \eta \le 1$$

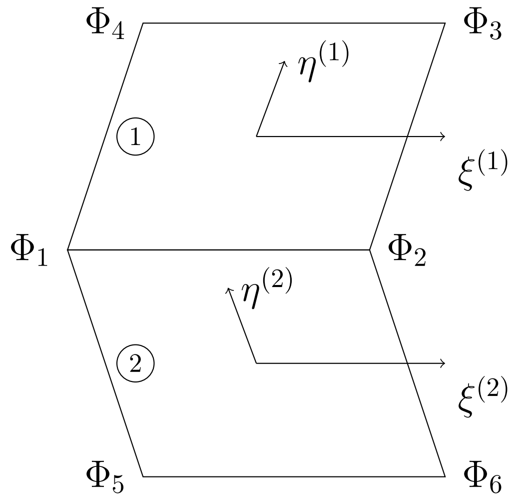
$$\begin{cases} N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{cases}$$

В случае четырехугольного элемента более сложной формы естественную систему координат можно задать следующим образом:



06/12

Сохранение непрерывности вдоль границ между элементами



$$\begin{cases} \varphi^{(1)} = N_1^{(1)}\Phi_1 + N_2^{(1)}\Phi_2 + N_3^{(1)}\Phi_3 + N_4^{(1)}\Phi_4 \\ \varphi^{(2)} = N_1^{(2)}\Phi_5 + N_2^{(2)}\Phi_6 + N_3^{(2)}\Phi_2 + N_4^{(2)}\Phi_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{cases}$$

$$\eta^{(1)} = -1, \eta^{(2)} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \varphi^{(1)} = \frac{1}{2}(1-\xi^{(1)})\Phi_1 + \frac{1}{2}(1+\xi^{(1)})\Phi_2 \\ \varphi^{(2)} = \frac{1}{2}(1+\xi^{(2)})\Phi_2 + \frac{1}{2}(1-\xi^{(2)})\Phi_1 \end{cases}$$

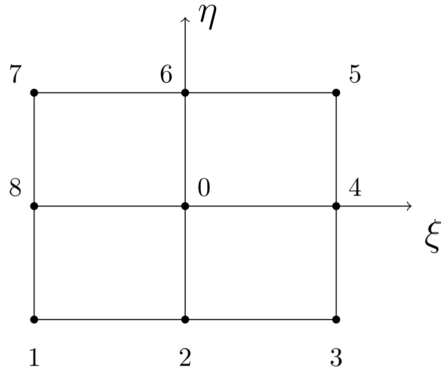
$$\xi^{(1)} = \xi^{(2)} \Rightarrow \varphi^{(1)} = \varphi^{(2)}$$

Квадратичные и кубические четырехугольные КЭ из Сирендипова семейства

$$\begin{cases} \varphi_2 = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy + \alpha_5 x^2 y + \alpha_6 xy^2 + \alpha_7 x^2 + \alpha_8 y^2 \\ \varphi_3 = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy + \alpha_5 x^2 y + \alpha_6 xy^2 + \alpha_7 x^2 + \alpha_8 y^2 + \\ \qquad + \alpha_9 x^3 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N^{(2)} = (\alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4\xi\eta)(a_1 + a_2\xi + a_3\eta) \\ N^{(3)} = (\alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4\xi\eta)(a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi^2 + a_5\eta^2) \end{cases}$$

Для квадратичного элемента:



Вычислим функцию формы для элемента 1:

$$N_1 = (1-\eta)(1-\xi)(a_1 + a_2\xi + a_3\eta)$$

$$\begin{cases} N_1(\xi = 0, \eta = 1) = 0 \\ N_1(\xi = -1, \eta = 0) = 0 \\ N_1(\xi = -1, \eta = 1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_1 = 2(a_1 - a_3) = 0 \\ N_1 = 2(a_1 - a_2) = 0 \\ N_1 = 4(a_1 - a_2 - a_3) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = -\frac{1}{4}$$

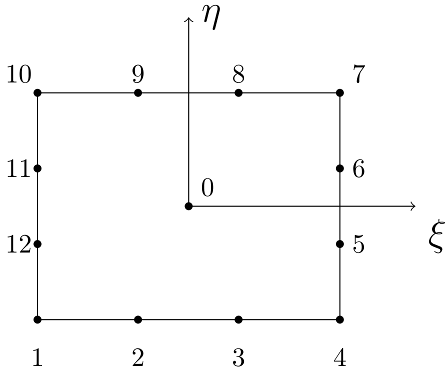
$$\Rightarrow N_1 = -\frac{1}{4}(1-\eta)(1-\xi)(1+\xi+\eta)$$

Вычислим функцию формы для элемента 2:

$$N_2 = (\alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4\xi\eta)(a_1 + a_2\xi + a_3\eta) = (1+\xi)(1-\xi)(1-\eta)\cdot a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_2(\xi = 0, \eta = -1) = 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow N_2 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$$

Для кубического элемента:



$$N_1 = (1-\xi)(1-\eta)(a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi^2 + a_5\eta^2)$$

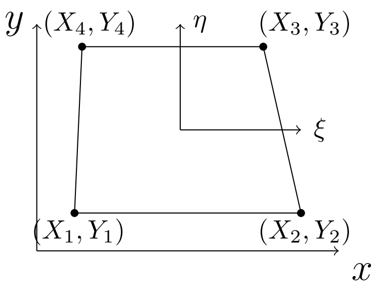
$$\begin{cases} N_1(-\frac{1}{3}, -1) = 0 \\ N_1(\frac{1}{3}, -1) = 0 \\ N_1(-1, \frac{1}{3}) = 0 \\ N_1(-1, -\frac{1}{3}) = 0 \\ N_1(-1, -1) = 1 \end{cases}$$

Вычисление производных

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \\ \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \end{bmatrix} = J \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \\ \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \\ \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Допустим, $\varphi_2 = N_1\Phi_1 + \cdots + N_8\Phi_8$

Форма элемента прямолинейного четырехугольника:

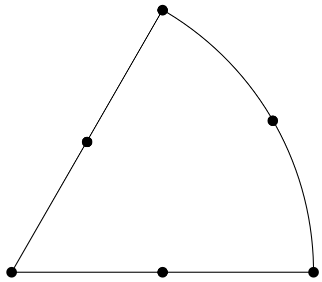


$$\begin{cases} x = R_1X_1 + R_2X_2 + R_3X_3 + R_4X_4 \\ y = R_1Y_1 + R_2Y_2 + R_3Y_3 + R_4Y_4 \end{cases}$$ – субпараметрический КЭ

где R_i - линейные интерполяции

$$\begin{cases} R_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ R_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ R_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ R_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{cases}$$

Изопараметрический КЭ:



$$\begin{cases} x = N_1X_1 + \dots + N_8X_8 \\ y = N_1Y_1 + \dots + N_8Y_8 \end{cases}$$

Так как все стороны линейные, интегралы можно свести к виду:

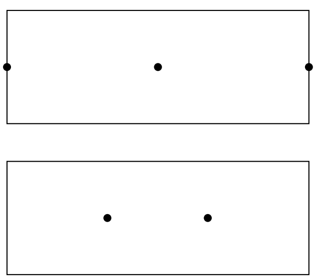
$$\int\limits_V B^T DB\ dV = t\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} B^T DB|J|\ d\eta d\xi$$

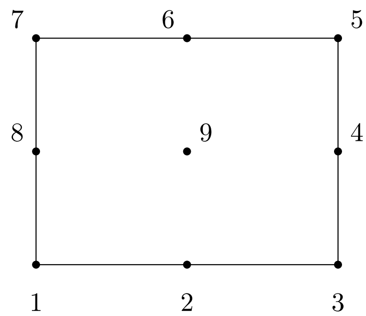
$$Z = \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} f(\xi,\eta)\ d\eta d\xi = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} H_iH_jf(\xi_i,\eta_j)$$

$$\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} f(\xi,\eta)\ d\eta = \sum_{j=1}^{n} H_jf(\xi,\eta_j) = g(\xi)$$

$$\int\limits_{-1}^{1} g(\xi)\ d\xi = \sum_{i=1}^{n} H_ig(\xi_i)$$

Лагранжево семейство





Функция формы:

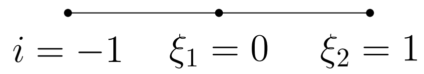
$$N_{ij} = L_i^n(\xi)L_j^m(\eta)$$

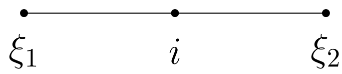
$L_i^n(\xi)L_j^m(\eta)$ - многочлены Лагранжа, n, m - количество разбиений по ξ, η

$$L_i^n(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)\dots(\xi - \xi_n)}{(\xi_i - \xi_1)(\xi_i - \xi_2)\dots(\xi_i - \xi_n)}$$

$$N_{ij} = L_i^2(\xi)L_j^2(\eta),\ i \neq 1, 2$$

$$L_i^2(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)}{(\xi_i - \xi_1)(\xi_i - \xi_2)}$$





$$N_{11} = \frac{\xi \cdot (\xi - 1)}{-1 \cdot (-2)} \cdot \frac{\eta \cdot (\eta - 1)}{-1 \cdot (-2)} = \frac{1}{4} \cdot \xi \cdot \eta(\xi - 1)(\eta - 1)$$

$$N_{12} = \frac{\xi \cdot (\xi - 1)}{2} \cdot \frac{(\eta + 1)(\eta - 1)}{1 \cdot (-1)}$$