МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Московский государственный технический
университет имени Н.Э. Баумана»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАУКИ
КАФЕДРА
«ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА»

Направление: **Математика и компьютерные науки**

Дисциплина: Основы метода конечных элементов

Лабораторная работа 1
«Дискретные одномерные элементы»
Группа ФН11-71Б

Вариант 7

Студент: Долотова А.А.

Преподаватель: Захарова Ю.В.

Оценка:

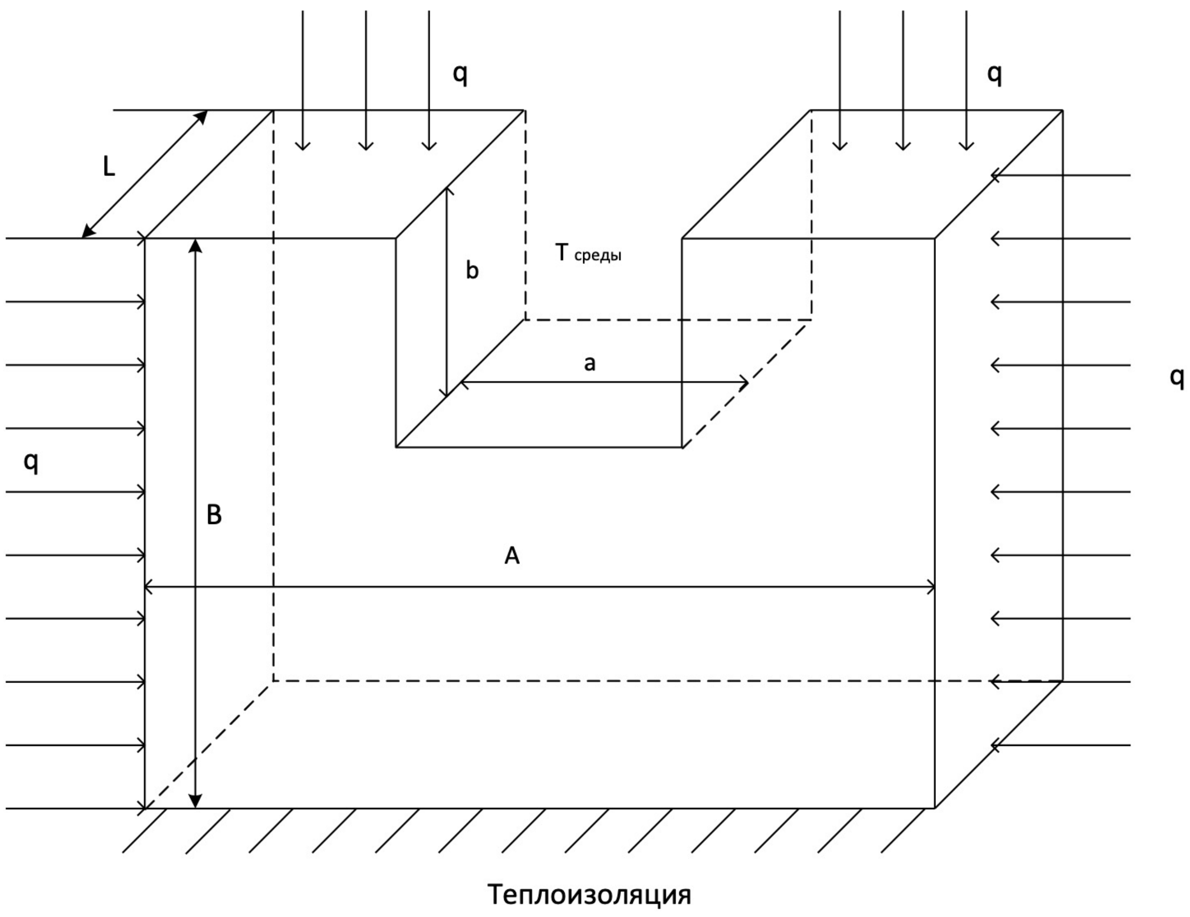
Москва, 2024

Задание

Дана исследуемая область с граничными условиям ($T_{\text{среды}}$ или $T_{\text{ср}}$ равносильно теплообмену со средой). Геометрические параметры области A, B, L, a, b [см] задаются самостоятельно. Воздействие теплового потока принять равным $q = 150$ [Вт/см^2], коэффициент теплоотдачи от стенки к среде $\alpha_g = 10$[Вт/(см)$^2\cdot$ °C]; T – заданная температура стенки, 150 [°C] ; $T_{\text{среды}} = 25$ [°C] – температура окружающей среды, $\lambda = 75$[Вт/(см)$\cdot$ °C] - коэффициент теплопроводности материала.

Требуется:

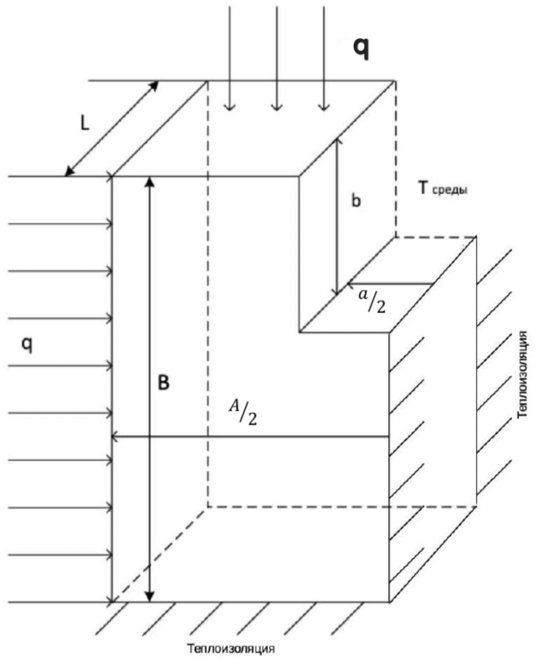
1. Провести дискретизацию области дискретными одномерными элементами.
2. Выписать уравнения равновесия для нескольких элементов.
3. Записать несколько локальных матриц: для внутренних элементов, граничных элементов и локальных векторов правых частей.
4. Описать процедуру формирования глобальной матрицы теплопроводности и правых частей.
5. Получить СЛАУ для решения методом Гаусса и Холецкого.
6. Найти распределение температуры в исследуемой области, решив полученное СЛАУ.



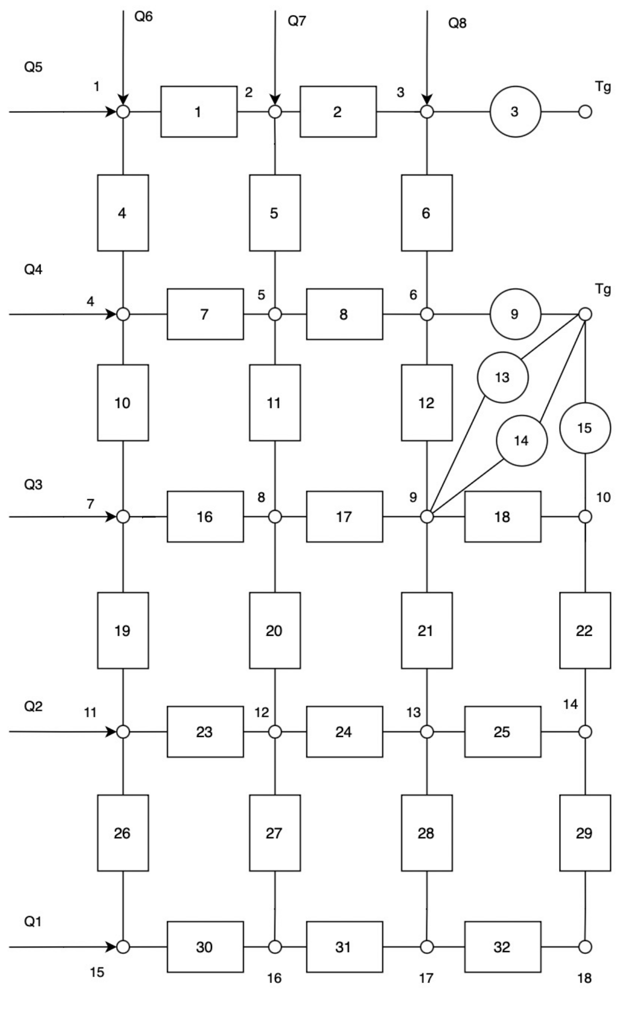
Решение

Пусть $L = 1, A = 6, B = 4, a = 2, b = 2$.

Разделим исходную область на две симметричные части и будем рассматривать одну из них. Грань поверхности разреза будем считать абсолютно теплоизолированной.

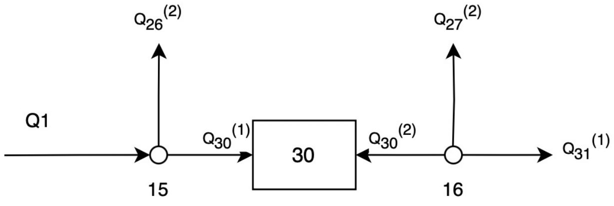


1. Проведем дискретизацию области дискретными одномерными элементами:



2-3. Выпишем уравнения равновесия для нескольких элементов. Запишем локальные матрицы для внутренних элементов, граничных элементов и локальных векторов правых частей:

Рассмотрим элемент 30:



Составим уравнения равновесия:

$$\begin{cases} Q_{26}^{(2)} + Q_{30}^{(1)} = Q_1 \\ Q_{30}^{(2)} + Q_{27}^{(2)} + Q_{31}^{(1)} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Значения потоков можно рассчитать по формулам:

$$\begin{cases} Q_{30}^{(1)} = k_{30}(T_{15} - T_{16}) \\ Q_{30}^{(2)} = k_{30}(T_{16} - T_{15}) \end{cases} \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), получаем:

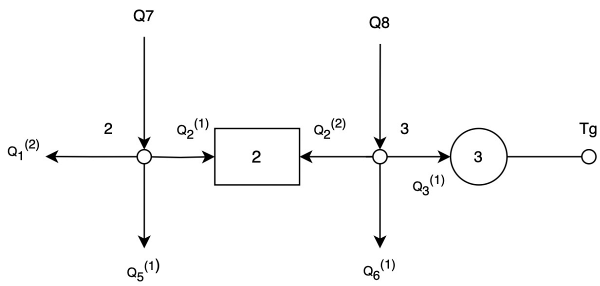
$$\begin{cases} k_{30}(T_{15} - T_{16}) = Q_1 - Q_{26}^{(2)} \\ k_{30}(T_{16} - T_{15}) = -Q_{27}^{(2)} - Q_{31}^{(1)} \end{cases} \tag{3}$$

В матричной форме:

$$\begin{pmatrix} k_{30} & -k_{30} \\ -k_{30} & k_{30} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{15} \\ T_{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 - Q_{26}^{(2)} \\ -Q_{27}^{(2)} - Q_{31}^{(1)} \end{pmatrix} \tag{4}$$

– локальная матрица и локальный вектор правой части для узлов 15 и 16.

Рассмотрим элементы под номерами 2 и 3:



Составим уравнения равновесия:

$$\begin{cases} Q_1^{(2)} + Q_2^{(1)} + Q_5^{(1)} = Q_7 \\ Q_2^{(2)} + Q_6^{(1)} + Q_3^{(1)} = Q_8 \end{cases} \tag{5}$$

Значения потоков можно рассчитать по формулам:

$$\begin{cases} Q_2^{(1)} = k_2(T_2 - T_3) \\ Q_2^{(2)} = k_2(T_3 - T_2) \\ Q_3^{(1)} = h_3(T_3 - T_g) \end{cases} \tag{6}$$

Подставляя (6) в (5), получаем:

$$\begin{cases} k_2(T_2 - T_3) = Q_7 - Q_1^{(2)} - Q_5^{(1)} \\ k_2(T_3 - T_2) + h_3(T_3 - T_g) = Q_8 - Q_6^{(1)} \end{cases} \tag{7}$$

В матричной форме:

$$\begin{pmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + h_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_7 - Q_1^{(2)} - Q_5^{(1)} \\ Q_8 - Q_6^{(1)} + h_3 T_g \end{pmatrix} \tag{8}$$

– локальная матрица и локальный вектор правой части для узлов 2 и 3.

4. Опишем процедуру формирования глобальной матрицы теплопроводности и правых частей.

Рассмотрим метод подсчета k_i. Согласно закону теплопроводности $k = \lambda S$, где λ – коэффициент теплопроводности, S – площадь теплопроводящей стенки, h – ее толщина. Рассматривая каждый одномерный элемент необходимо определить его длину, а также площадь боковой поверхности, «приходящуюся» на него в модели.

Остановимся на подобласти между узлами 1254. Длина элемента 1 равна 1, однако, поскольку он является граничным, на него приходится лишь половина площади подобласти:

$$k_1 = \frac{\lambda \cdot S}{h} = \lambda \cdot \frac{L \cdot b}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2}{a} = \frac{\lambda}{2}$$

Для внутреннего элемента 4:

$$k_4 = \frac{\lambda \cdot S}{h} = \lambda \cdot \frac{L \cdot b}{2} \cdot \frac{2}{a} = \lambda$$

Для вычисления теплового потока, например, к узлу 2 нужно так же учитывать эту половину:

$$Q_2 = q \cdot S = \frac{q \cdot L \cdot b}{2 \cdot 2} = \frac{q}{2}$$

Составим таблицу о теплопередающей системе и глобальную матрицу теплопроводности K:

Номер элемента	Характеристика элемента	Температура в первом узле	Температура во втором узле
1	$k_1 = \lambda/2$	T_1	T_2
2	$k_2 = \lambda/2$	T_2	T_3
3	$h_3 = \alpha_g/2$	T_3	T_g
4	$k_4 = \lambda/2$	T_1	T_4
5	$k_5 = \lambda$	T_2	T_5
6	$k_6 = \lambda/2$	T_3	T_6
7	$k_7 = \lambda$	T_4	T_5
8	$k_8 = \lambda$	T_5	T_6
9	$h_9 = \alpha_g$	T_6	T_g
10	$k_{10} = \lambda/2$	T_4	T_7
11	$k_{11} = \lambda$	T_5	T_8
12	$k_{12} = \lambda/2$	T_6	T_9
13	$h_{13} = \alpha_g/2$	T_9	T_g
14	$h_{14} = \alpha_g/2$	T_9	T_g
15	$h_{15} = \alpha_g/2$	T_{10}	T_g
16	$k_{16} = \lambda$	T_7	T_8
17	$k_{17} = \lambda$	T_8	T_9
18	$k_{18} = \lambda/2$	T_9	T_{10}
19	$k_{19} = \lambda/2$	T_7	T_{11}
20	$k_{20} = \lambda$	T_8	T_{12}
21	$k_{21} = \lambda$	T_9	T_{13}
22	$k_{22} = \lambda/2$	T_{10}	T_{14}
23	$k_{23} = \lambda$	T_{11}	T_{12}
24	$k_{24} = \lambda$	T_{12}	T_{13}
25	$k_{25} = \lambda$	T_{13}	T_{14}
26	$k_{26} = \lambda/2$	T_{11}	T_{15}
27	$k_{27} = \lambda$	T_{12}	T_{16}
28	$k_{28} = \lambda$	T_{13}	T_{17}
29	$k_{29} = \lambda/2$	T_{14}	T_{18}
30	$k_{30} = \lambda/2$	T_{15}	T_{16}
31	$k_{31} = \lambda/2$	T_{16}	T_{17}
32	$k_{32} = \lambda/2$	T_{17}	T_{18}

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	k_1+k_4	$-k_1$	0	$-k_4$	0	0	0	0	0	0	0	0
2	$-k_1$	k_1+k_2+ $+k_5$	$-k_2$	0	$-k_5$	0	0	0	0	0	0	0
3	0	$-k_2$	k_2+k_6+ $+h_3$	0	0	$-k_6$	0	0	0	0	0	0
4	$-k_4$	0	0	k_4+k_7+ $+k_{10}$	$-k_7$	0	$-k_{10}$	0	0	0	0	0
5	0	$-k_5$	0	$-k_7$	k_5+k_7+ $+k_8+k_{11}$	$-k_8$	0	$-k_{11}$	0	0	0	0
6	0	0	$-k_6$	0	$-k_8$	k_6+k_8+ $+k_{12}+h_9$	0	0	$-k_{12}$	0	0	0
7	0	0	0	$-k_{10}$	0	0	$k_{10}+k_{16}+$ $+k_{19}$	$-k_{16}$	0	0	$-k_{19}$	0
8	0	0	0	0	$-k_{11}$	0	$-k_{16}$	$k_{11}+k_{16}+$ $+k_{17}+k_{20}$	$-k_{17}$	0	0	$-k_{20}$
9	0	0	0	0	0	$-k_{12}$	0	$-k_{17}$	$k_{12}+k_{17}+k_{18}+$ $+k_{21}+h_{13}+h_{14}$	$-k_{18}$	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	$-k_{18}$	$k_{18}+k_{22}+$ $+h_{15}$	0	0
11	0	0	0	0	0	0	$-k_{19}$	0	0	0	$k_{19}+k_{23}+$ $+k_{26}$	$-k_{23}$
12	0	0	0	0	0	0	0	$-k_{20}$	0	0	$-k_{23}$	$k_{20}+k_{23}+$ $+k_{24}+k_{27}$
13	0	0	0	0	0	0	0	0	$-k_{21}$	0	0	$-k_{24}$
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-k_{22}$	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-k_{26}$	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-k_{27}$

Правые части:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$Q_5 + Q_6$	Q_7	$Q_8 + h_3 T_g$	Q_4	0	$h_9 T_g$	Q_3	0	$h_{13} T_g + h_{14} T_g$	$h_{15} T_g$	Q_2	0	0

14	15	16	17	18
0	Q_1	0	0	0

$$Q_1 = \frac{q}{2},\ Q_2 = q,\ Q_3 = q,\ Q_4 = q,\ Q_5 = \frac{q}{2},\ Q_6 = \frac{q}{2},\ Q_7 = q,\ Q_8 = \frac{q}{2}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 150.0 \\ 150.0 \\ 275.0 \\ 150.0 \\ 0.0 \\ 125.0 \\ 150.0 \\ 0.0 \\ 250.0 \\ 125.0 \\ 150.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 75.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix}
75.0 & -37.5 & 0.0 & -37.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
-37.5 & 150.0 & -37.5 & 0.0 & -75.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & -37.5 & 80.0 & 0.0 & 0.0 & -37.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
-37.5 & 0.0 & 0.0 & 150.0 & -75.0 & 0.0 & -37.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & -75.0 & 0.0 & -75.0 & 300.0 & -75.0 & 0.0 & -75.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & -37.5 & 0.0 & -75.0 & 160.0 & 0.0 & 0.0 & -37.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & -37.5 & 0.0 & 0.0 & 150.0 & -75.0 & 0.0 & 0.0 & -37.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -75.0 & 0.0 & -75.0 & 300.0 & -75.0 & 0.0 & 0.0 & -75.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -37.5 & 0.0 & -75.0 & 235.0 & -37.5 & 0.0 & 0.0 & -37.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -37.5 & 80.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -37.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -37.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 150.0 & -75.0 & 0.0 & 0.0 & -37.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -75.0 & 0.0 & 0.0 & -75.0 & 300.0 & -75.0 & 0.0 & 0.0 & -75.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -37.5 & 0.0 & 0.0 & -75.0 & 300.0 & -75.0 & 0.0 & 0.0 & -75.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -37.5 & 0.0 & 0.0 & -75.0 & 150.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -37.5 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -37.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 75.0 & -37.5 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -75.0 & 0.0 & 0.0 & -37.5 & 150.0 & -37.5 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -75.0 & 0.0 & 0.0 & -37.5 & 150.0 & -37.5 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -37.5 & 0.0 & 0.0 & -37.5 & 75.0
\end{bmatrix}$$

4-5. СЛАУ и ее решение

СЛАУ соответствующая постановке задачи имеет вид:

$$K\overline{t} = \overline{f},$$

где $\overline{t}$ – вектор температур в узлах области.

Данную СЛАУ можно решить с помощью разложения Холецкого с последующим применением метода Гаусса. Разложение Холецкого позволяет представить матрицу $K = (k_{ij})$ в виде $K = LL^T$, где $L = (l_{ij})$ – нижнетреугольная матрица. Разложение Холецкого имеет следующие рабочие формулы:

$$\begin{cases} l_{11} = \sqrt{k_{11}}, \\ l_{j1} = \frac{k_{j1}}{l_{11}},\ j = 2, \ldots, n, \\ l_{ii} = \sqrt{k_{ii} - \sum\limits_{p=1}^{i-1} l_{ip}^2},\ i = 2, \ldots, n, \\ l_{ji} = \frac{1}{l_{ii}} \left(k_{ji} - \sum\limits_{p=1}^{i-1} l_{ip} l_{jp} \right),\ i = 2, \ldots, n-1,\ j = i+1, \ldots, n \end{cases}$$

Если же имеется СЛАУ вида $K\overline{t} = \overline{f}$, то решение данной СЛАУ, применив разложение Холецкого $K = LL^T$, можно получить следующие СЛАУ:

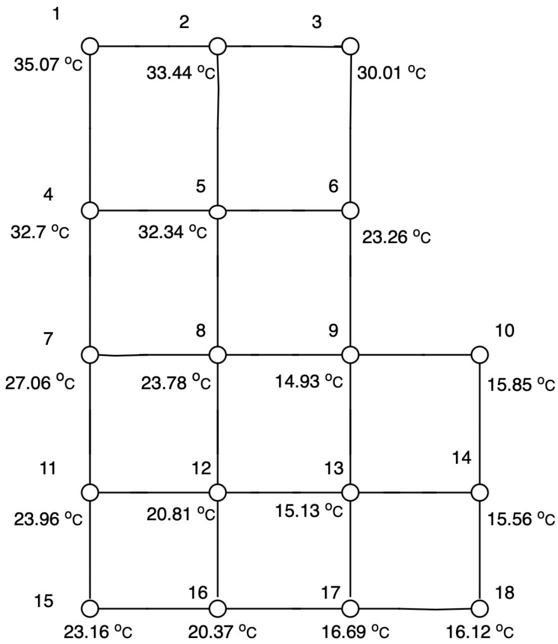
$$L\overline{y} = \overline{f},\ L^T\overline{t} = \overline{y}.$$

Поскольку матрицы L и L^T являются нижне- и верхнетреугольной соответственно, для решения СЛАУ применим метод Гаусса.

Решая СЛАУ данным методом, получим следующее распределение температур в узлах системы дискретных одномерных элементов:

T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}
35.07	33.44	30.01	32.7	32.34	23.26	27.06	23.78	14.93	15.85

T_{11}	T_{12}	T_{13}	T_{14}	T_{15}	T_{16}	T_{17}	T_{18}
23.96	20.81	15.13	15.56	23.16	20.37	16.69	16.12


1
2
3
35.07 °C
33.44 °C
30.01 °C
4
5
6
32.7 °C
32.34 °C
23.26 °C
7
8
9
10
27.06 °C
23.78 °C
14.93 °C
15.85 °C
11
12
13
14
23.96 °C
20.81 °C
15.13 °C
15.56 °C
15
16
17
18
23.16 °C
20.37 °C
16.69 °C
16.12 °C