

Одномерные пружинные системы

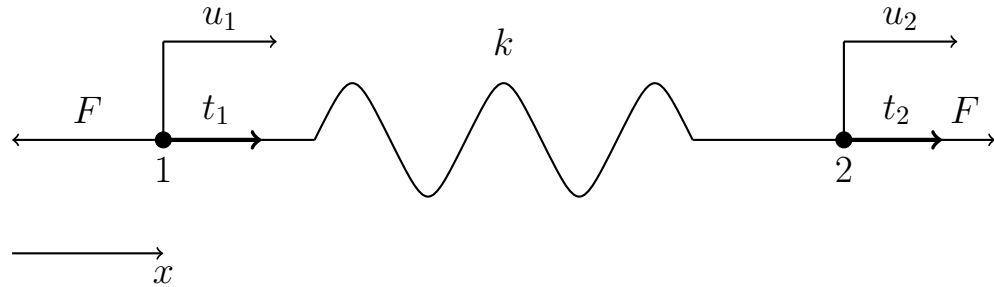


Рисунок 1 – Одномерная пружинная система из одного элемента

1. Уравнение равновесия

где k - коэффициент жесткости, u_1, u_2 - перемещения, F - приложенная сила, t_1, t_2 - реакции.

Закон Гука:

$$F = k\Delta = k(u_2 - u_1)$$

$$t_1 + t_2 = 0 \rightarrow t_1 = -t_2$$

$$F = t_2 = k(u_2 - u_1)$$

$$-F = t_1 = -k(u_2 - u_1) = k(u_1 - u_2)$$

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow Kq = t$$

где $q = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$, $t = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$, $K = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$.

2. Вариационный метод

$$\Pi = \Pi_{in} - \Pi_{ex},$$

где Π - потенциальная энергия системы.

$$\Pi_{in} = \int_0^{\Delta} F d\Delta = \int_0^{\Delta} k\Delta d\Delta = \frac{k(u_2 - u_1)^2}{2} = \frac{1}{2} q^T K q = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\Pi_{ex} = t_1 u_1 + t_2 u_2 = q^T t$$

$$\Pi = \frac{1}{2} q^T K q - q^T t \rightarrow \min$$

Условие стационарности потенциальной энергии

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial u_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial u_2} = 0$$

$$\Pi = \frac{k}{2} (u_2 - u_1)^2 - t_1 u_1 - t_2 u_2$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_1} = k(u_2 - u_1)(-1) - t_1 = 0 \Leftrightarrow k(u_1 - u_2) = t_1$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_2} = k(u_2 - u_1) - t_2 = 0 \Leftrightarrow k(u_2 - u_1) = t_2$$

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$$

3. Метод возможных перемещений

Работа внутренних сил на возможных деформациях равна внешней работе возможных перемещений:

$$A_{in} = A_{ex},$$

где A_{in} - работа внутренних сил на возможных деформациях,
 A_{ex} - работа внешних сил на возможных перемещениях.

$$A_{in} = F \delta \Delta = F(\delta u_2 - \delta u_1)$$

$$A_{ex} = t_1 \delta u_1 + t_2 \delta u_2$$

$$F(\delta u_2 - \delta u_1) = t_1 \delta u_1 + t_2 \delta u_2$$

$$\delta u_1, \delta u_2 : \begin{cases} -F = t_1 \\ F = t_2 \end{cases}$$

Методика составления глобальной системы для МКЭ

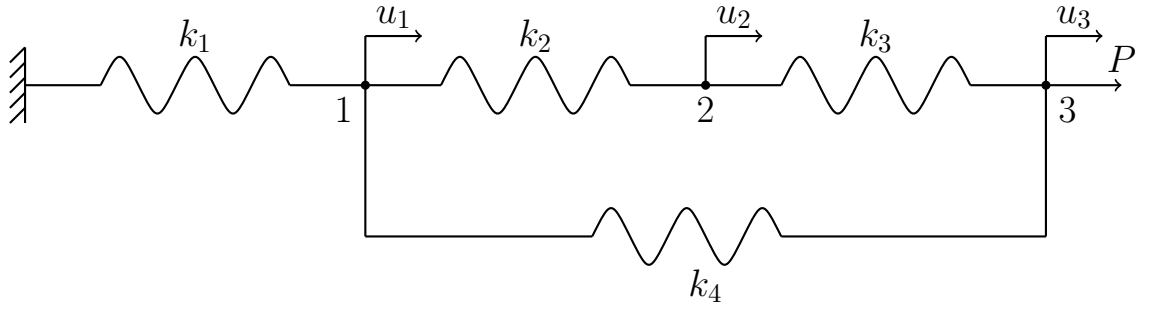


Рисунок 2 – Одномерная пружинная система из четырех элементов

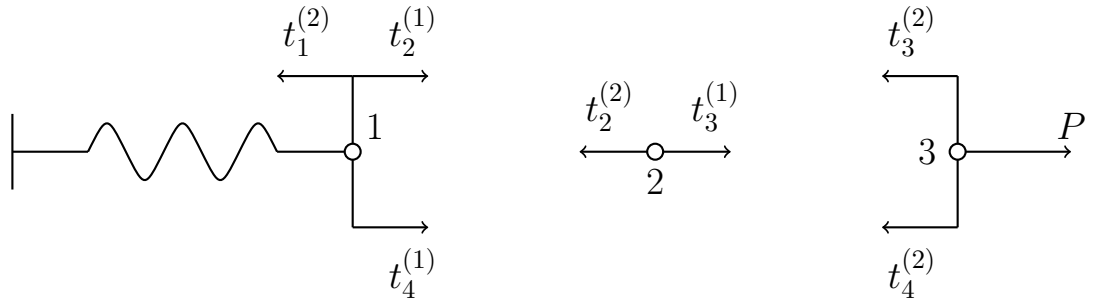


Рисунок 3 – Силы реакций в узлах системы

Используемые обозначения:

(1) – начало элемента,

(2) – конец элемента.

$$\begin{cases} t_1^{(2)} + t_2^{(1)} + t_4^{(1)} = 0 \\ t_2^{(2)} + t_3^{(1)} = 0 \\ t_3^{(2)} + t_4^{(2)} = P \end{cases} \quad \begin{cases} t_i^{(1)} = k_i(u^{(1)} - u^{(0)}) \\ t_i^{(2)} = k_i(u^{(2)} - u^{(1)}) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} t_1^{(2)} &= k_1(u_1 - 0) \\ t_4^{(1)} &= k_4(u_1 - u_3) \\ t_3^{(1)} &= k_3(u_2 - u_3) \\ t_4^{(2)} &= k_4(u_3 - u_1) \\ t_2^{(1)} &= k_2(u_1 - u_2) \\ t_2^{(2)} &= k_2(u_2 - u_1) \\ t_3^{(2)} &= k_3(u_3 - u_2) \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} (k_1 + k_2 + k_4)u_1 - k_2u_2 - k_4u_3 = 0 \\ -k_2u_1 + (k_2 + k_3)u_2 - k_3u_3 = 0 \\ -k_4u_1 - k_3u_2 + (k_3 + k_4)u_3 = P \end{cases} \quad (*)$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + k_4 & -k_2 & -k_4 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ -k_4 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix}$$

Принцип возможных перемещений

$$\sum_{i=1}^4 F^{(i)} \delta \Delta^{(i)} = \sum_{i=1}^4 k_{(i)} \Delta^{(i)} \delta \Delta^{(i)} = P \delta u_3$$

$$\begin{aligned} k_1 u_1 \delta u_1 + k_2 (u_2 - u_1) (\delta u_2 - \delta u_1) + k_3 (u_3 - u_2) (\delta u_3 - \delta u_2) + k_4 (u_3 - u_1) (\delta u_3 - \delta u_1) = \\ = P \delta u_3 + 0 \cdot \delta u_1 + 0 \cdot \delta u_2 \end{aligned}$$

$$\delta u_1 : \dots$$

$$\delta u_2 : \dots \Rightarrow (*)$$

$$\delta u_3 : \dots$$