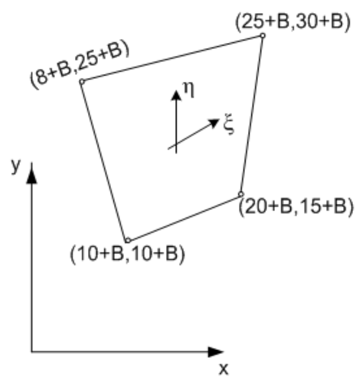
Задание

1. Построить функции формы с помощью аппроксимации Лагранжа и Серендипова семейства для квадратичного четырехугольного элемента

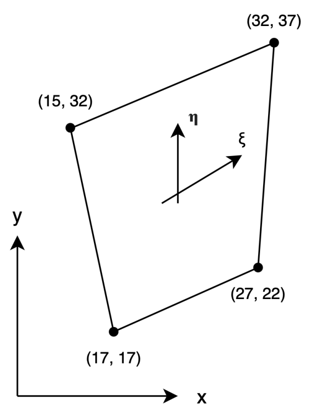
2. Вычислить производные от функций форм $\dfrac{\partial N_i}{\partial x}, \dfrac{\partial N_i}{\partial y}$

3. Вычислить интеграл $\displaystyle\iint\limits_S \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial y}\right) dS$

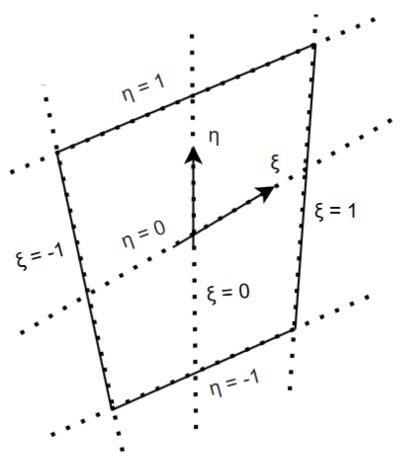


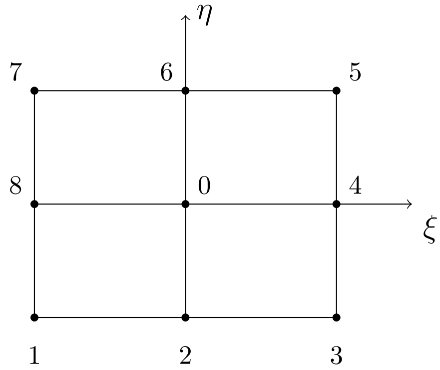
Решение

B = 7

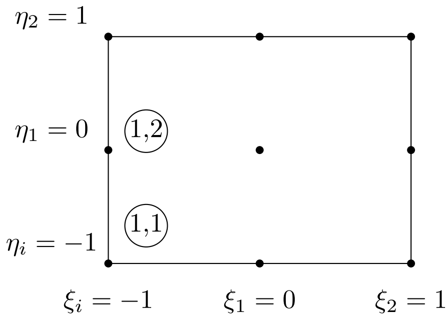


В естественной системе координат:





Лагранжево семейство



Функция формы:

$$N_{ij} = L_i^n(\xi) L_j^m(\eta)$$

$L_i^n(\xi) L_j^m(\eta)$ - многочлены Лагранжа, n, m - количество разбиений по ξ, η

$$L_i^n(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \ldots (\xi - \xi_n)}{(\xi_i - \xi_1)(\xi_i - \xi_2) \ldots (\xi_i - \xi_n)}$$

$$N_{ij} = L_i^2(\xi) L_j^2(\eta), \ i \neq 1, 2$$

$$L_i^2(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)}{(\xi_i - \xi_1)(\xi_i - \xi_2)}$$

$$N_{11} = \frac{\xi \cdot (\xi - 1)}{-1 \cdot (-2)} \cdot \frac{\eta \cdot (\eta - 1)}{-1 \cdot (-2)} = \frac{1}{4} \cdot \xi \cdot \eta (\xi - 1)(\eta - 1)$$

$$N_{12} = \frac{\xi \cdot (\xi - 1)}{2} \cdot \frac{(\eta + 1)(\eta - 1)}{1 \cdot (-1)} = -\frac{1}{2} \xi (\xi - 1)(\eta^2 - 1)$$

Серендипово семейство

$$\varphi_2 = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy + \alpha_5 x^2 y + \alpha_6 xy^2 + \alpha_7 x^2 + \alpha_8 y^2$$