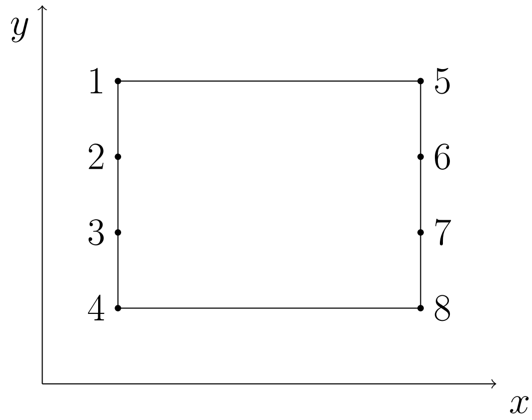
29/11

Четырехугольные конечные элементы
Мультиплекс-элементы



φ - аппроксимирующая функция должна быть непрерывной между элементами.

Предположим, что вдоль верхней и нижней сторон функция меняется по линейному закону, а вдоль вертикальных сторон, например, по кубическому.

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy + \alpha_5 y^2 + \alpha_6 xy^2 + \alpha_7 y^3 + \alpha_8 xy^3$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1y_1^2 & y_1^3 & x_1y_1^3 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2y_2^2 & y_2^3 & x_2y_2^3 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3y_3^2 & y_3^3 & x_3y_3^3 \\ & & & & \dots & & & \\ 1 & x_8 & y_8 & x_8y_8 & y_8^2 & x_8y_8^2 & y_8^3 & x_8y_8^3 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \dots \\ \alpha_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \dots \\ \Phi_8 \end{bmatrix}$$

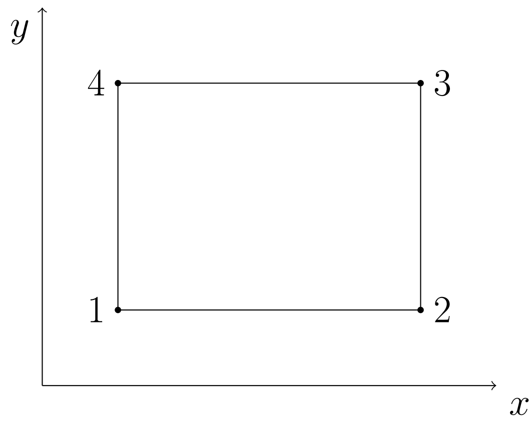
$$C \cdot \alpha = \Phi \Rightarrow \alpha = C^{-1} \cdot \Phi$$

$$\varphi = P\alpha = P \cdot C^{-1} \cdot \Phi = N\Phi$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & y^2 & xy^2 & y^3 & xy^3 \end{bmatrix}, \quad \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_8 \end{bmatrix}$$

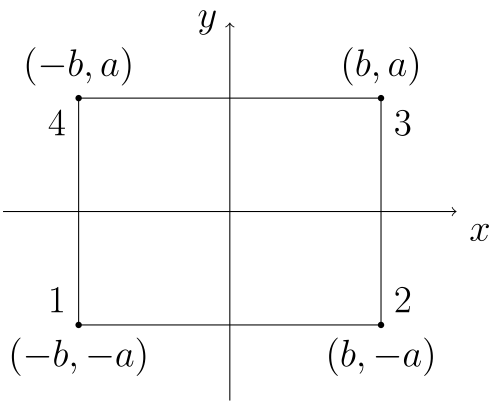
<u>Самая большая сложность - в составлении C^{-1}.</u>

Серендипово семейство



Линейная аппроксимация:

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy$$



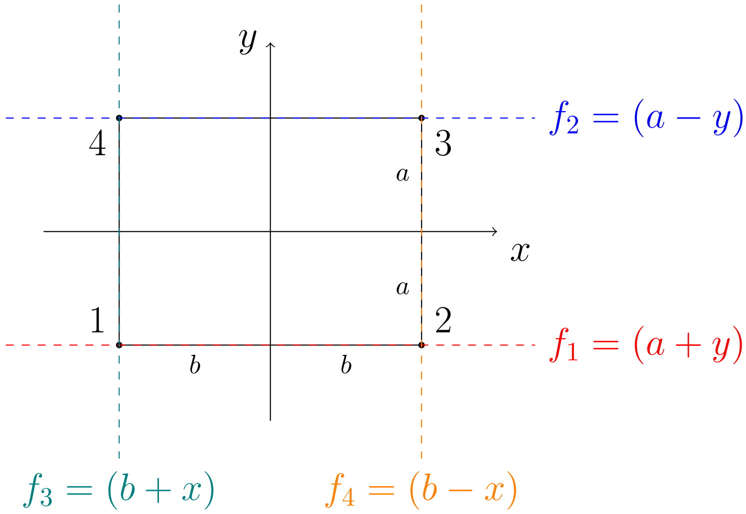
$$\begin{cases} \Phi_1 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot (-b) + \alpha_3 \cdot (-a) + \alpha_4 \cdot ab, \\ \Phi_2 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot (b) + \alpha_3 \cdot (-a) + \alpha_4 \cdot (-ab), \\ \Phi_3 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot (b) + \alpha_3 \cdot (a) + \alpha_4 \cdot ab, \\ \Phi_4 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot (-b) + \alpha_3 \cdot (a) + \alpha_4 \cdot (-ab), \end{cases}$$

В матричном виде:

$$\begin{bmatrix} 1 & -b & -a & ab \\ 1 & b & -a & -ab \\ 1 & b & a & ab \\ 1 & -b & a & -ab \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{bmatrix}; \qquad C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{4b} & -\frac{1}{4b} \\ -\frac{1}{4a} & -\frac{1}{4a} & \frac{1}{4a} & \frac{1}{4a} \\ \frac{1}{4ab} & -\frac{1}{4ab} & \frac{1}{4ab} & -\frac{1}{4ab} \end{bmatrix}$$

$$N = P \cdot C^{-1} = \frac{1}{4ab}\begin{bmatrix} 1 & x & y & xy \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ab & ab & ab & ab \\ -a & a & a & -a \\ -b & -b & b & b \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4ab}\begin{bmatrix} (b-x)(a-y) \\ (b+x)(a-y) \\ (b+x)(a+y) \\ (b-x)(a+y) \end{bmatrix}$$

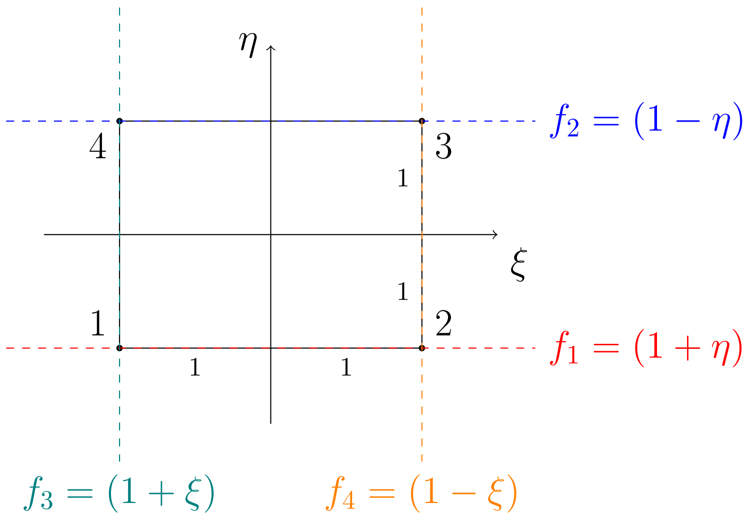
Этот метод не рационален. Поэтому функции формы будем искать с помощью их свойств:



$$\begin{cases} N_1 = \dfrac{f_2 \cdot f_4}{f_2 \cdot f_4|_{x=-b,\ y=-a}} = \dfrac{1}{4ab}(a-y)(b-x) \\ N_2 = \frac{1}{4ab}(b+x)(a-y) \\ N_3 = \frac{1}{4ab}(b+x)(a+y) \\ N_4 = \frac{1}{4ab}(b-x)(a+y) \end{cases}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \alpha_2 + \alpha_4 y, \ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \alpha_3 + \alpha_4 x$$

Естественная криволинейная система координат



$$\xi = \frac{x}{b},\ -1 \le \xi \le 1,\quad \eta = \frac{y}{a},\ -1 \le \eta \le 1$$

$$\begin{cases} N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{cases}$$

В случае четырехугольного элемента более сложной формы естественную систему координат можно задать следующим образом: