

## пупупу

Связь между координатами:

$$\begin{cases} L_i + L_j + L_k = 1 \\ x = L_i x_i + L_j x_j + L_k x_k \\ y = L_i y_i + L_j y_j + L_k y_k \end{cases}$$

$V = h dS, h = \text{const}$  — толщина элемента

$$h \iint_S f(x, y) \, dx dy = h \int_0^1 \int_0^{1-L_j} f(L_i, L_j, L_k) |J| \, dL_i L_j$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial L_i} & \frac{\partial x}{\partial L_j} \\ \frac{\partial y}{\partial L_i} & \frac{\partial y}{\partial L_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i - x_k & x_j - x_k \\ y_i - y_k & y_j - y_k \end{bmatrix} \Rightarrow |J| = \Delta$$

Интегральные формулы, упрощающие вычисления:

$$\int_{\Gamma_{ij}} L_i^\alpha L_j^\beta \, d\Gamma = \frac{\alpha! \beta!}{(\alpha + \beta + 1)!} \cdot l_{ij}$$

$$\int_S L_i^\alpha L_j^\beta L_k^\gamma \, dS = \frac{\alpha! \beta! \gamma!}{(\alpha + \beta + \gamma + 2)!} \cdot 2S \quad (1)$$

Возвращаемся к формуле из прошлой лекции:

$$\int_{\Omega} N^T N \, dx dy = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} N_i N_i & N_i N_j & N_i N_k \\ N_i N_j & N_j N_j & N_j N_k \\ N_i N_k & N_j N_k & N_k N_k \end{bmatrix} \, dx dy =$$

$$= \int_S \begin{bmatrix} L_i L_i & L_i L_j & L_i L_k \\ L_i L_j & L_j L_j & L_j L_k \\ L_i L_k & L_j L_k & L_k L_k \end{bmatrix} |J| \, dL_i L_j = \frac{S}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Вычисляем компоненты матрицы по формуле (1):

$$\int_{\Omega} L_i^2 dS = \int_{\Omega} L_i^2 L_j^0 L_k^0 dS = \frac{2! 0! 0!}{(2+0+0+2)!} \cdot 2S = \frac{S}{6}$$

$$\int_S N^T dS = \int_S \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix} dxdy = \int_S \begin{bmatrix} L_i \\ L_j \\ L_k \end{bmatrix} dS = \frac{S}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\int_{\Gamma} \left( K_x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot l_x + K_y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot l_y \right) v d\Gamma$$

1. или  $K_x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot l_x + K_y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot l_y = \hat{\sigma}$  или  $q$
2. или  $K_x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot l_x + K_y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot l_y = -\alpha_g(u - \hat{u})$

Рассмотрим подробнее:

$$1. \int_{\Gamma} \hat{\sigma} d\Gamma = \{\delta\Phi\}^T \int_{\Gamma} \hat{\sigma} N^T d\Gamma \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} L_i \\ L_j \\ L_k \end{bmatrix} d\Gamma$$

$$(a) \int_{\Gamma_{ij}} \begin{bmatrix} L_i \\ L_j \\ 0 \end{bmatrix} d\Gamma = \int_{\Gamma_{ij}} L_i^1 L_j^0 d\Gamma = \frac{l_{ij}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(b)