

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Московский государственный технический  
университет имени Н.Э. Баумана»  
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАУКИ  
КАФЕДРА  
«ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА»

Направление: **Математика и компьютерные науки**

Дисциплина: Основы метода конечных элементов

Лабораторная работа 2  
«Колебания пружин»  
Группа ФН11-71Б  
Вариант 7

Студент: Долотова А.А.

Преподаватель: Захарова Ю.В.

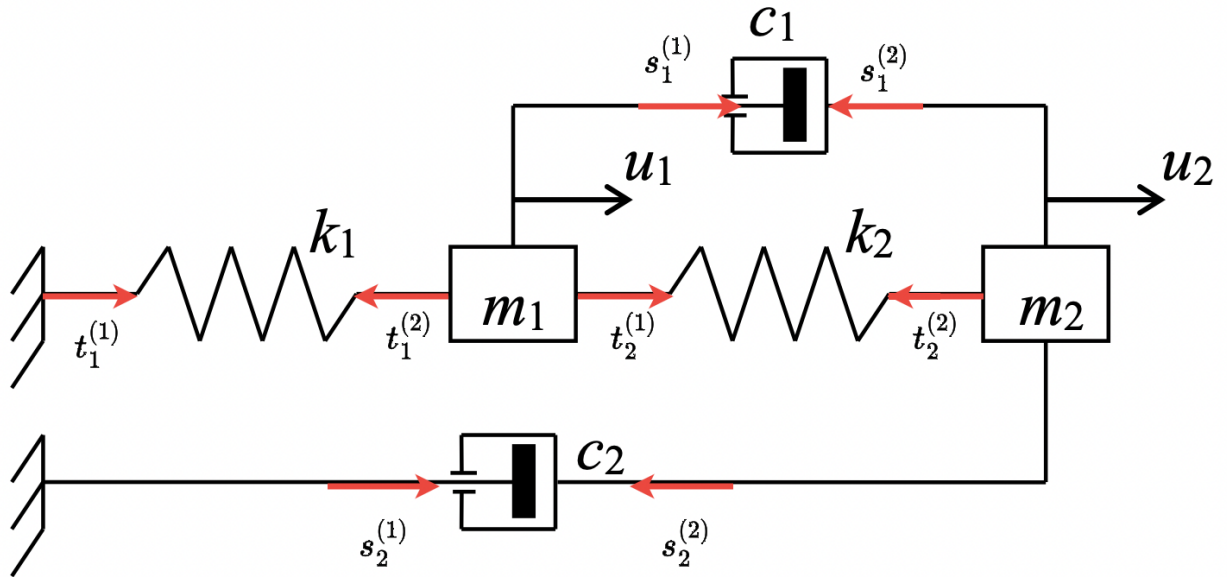
Оценка:

Москва, 2024

## Задание

Составить уравнения движения для систем.

### Система 1



Составим уравнения:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{u}_1 + t_1^{(2)} + t_2^{(1)} + s_1^{(1)} = 0 \\ m_2 \ddot{u}_2 + t_2^{(2)} + s_2^{(2)} + s_1^{(2)} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} t_1^{(2)} = k_1 u_1 \\ t_2^{(1)} = k_2 (u_1 - u_2) \\ t_2^{(2)} = k_2 (u_2 - u_1) \\ s_1^{(1)} = c_1 (\dot{u}_1 - \dot{u}_2) \\ s_2^{(2)} = c_2 \dot{u}_2 \\ s_1^{(2)} = c_1 (\dot{u}_2 - \dot{u}_1) \end{cases} \quad (2)$$

Подставляем (2) в (1):

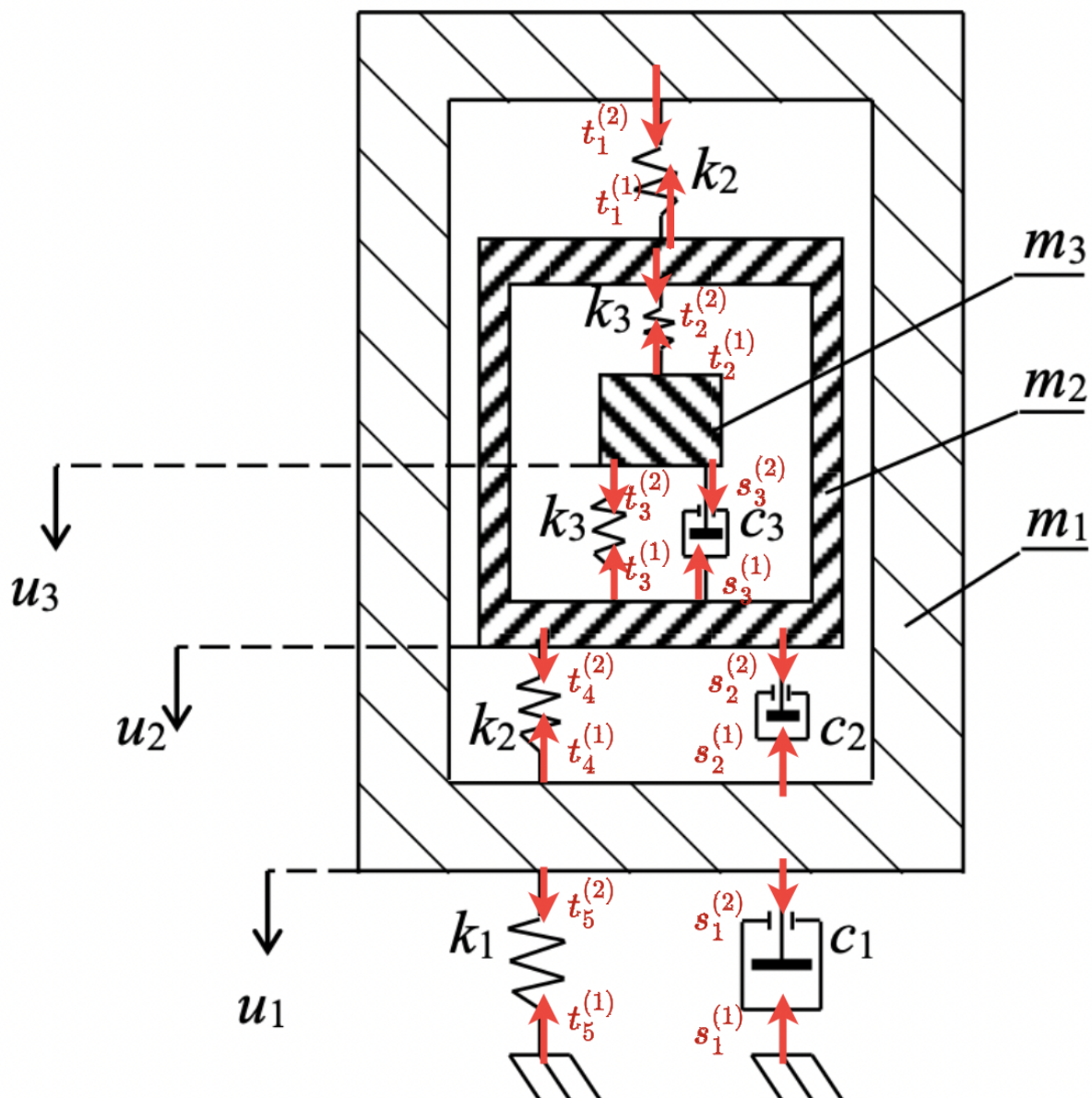
$$\begin{cases} m_1 \ddot{u}_1 + k_1 u_1 + k_2 (u_1 - u_2) + c_1 (\dot{u}_1 - \dot{u}_2) = 0 \\ m_2 \ddot{u}_2 + k_2 (u_2 - u_1) + c_2 \dot{u}_2 + c_1 (\dot{u}_2 - \dot{u}_1) = 0 \end{cases}$$

В матричном виде:

$$M \ddot{q} + C \dot{q} + K q = 0$$

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_1 & c_1 + c_2 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix}$$

Система 2



Составим уравнения:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{u}_1 + t_1^{(2)} + t_4^{(1)} + t_5^{(2)} + s_1^{(2)} + s_2^{(1)} = 0 \\ m_2 \ddot{u}_2 + t_1^{(1)} + t_2^{(2)} + t_4^{(2)} + t_3^{(1)} + s_2^{(2)} + s_3^{(1)} = 0 \\ m_3 \ddot{u}_3 + t_2^{(1)} + t_3^{(2)} + s_3^{(2)} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t_5^{(2)} = k_1 u_1 \\ s_1^{(2)} = c_1 \dot{u}_1 \\ t_4^{(1)} = k_2(u_1 - u_2) \\ s_2^{(1)} = c_2(\dot{u}_1 - \dot{u}_2) \\ t_4^{(2)} = k_2(u_2 - u_1) \\ s_2^{(2)} = c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) \\ t_3^{(1)} = k_3(u_2 - u_3) \\ s_3^{(1)} = c_3(\dot{u}_2 - \dot{u}_3) \\ t_3^{(2)} = k_3(u_3 - u_2) \\ s_3^{(2)} = c_3(\dot{u}_3 - \dot{u}_2) \\ t_2^{(1)} = k_3(u_3 - u_2) \\ t_2^{(2)} = k_3(u_2 - u_3) \\ t_1^{(1)} = k_2(u_2 - u_1) \\ t_1^{(2)} = k_2(u_1 - u_2) \end{array} \right. \quad (4)$$

Подставляем (4) в (3):

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \ddot{u}_1 + k_2(u_1 - u_2) + k_2(u_1 - u_2) + k_1 u_1 + c_1 \dot{u}_1 + c_2(\dot{u}_1 - \dot{u}_2) = 0 \\ m_2 \ddot{u}_2 + k_2(u_2 - u_1) + k_3(u_2 - u_3) + k_2(u_2 - u_1) + k_3(u_2 - u_3) + c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + c_3(\dot{u}_2 - \dot{u}_3) = 0 \\ m_3 \ddot{u}_3 + k_3(u_3 - u_2) + k_3(u_3 - u_2) + c_3(\dot{u}_3 - \dot{u}_2) = 0 \end{array} \right.$$

В матричном виде:

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = 0$$

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} k_1 + 2k_2 & -2k_2 & 0 \\ -2k_2 & 2k_2 + 2k_3 & -2k_3 \\ 0 & -2k_3 & 2k_3 \end{pmatrix}$$