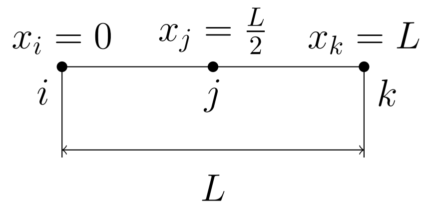
01/11

Конечные элементы более высокого порядка

Одномерные квадратичные и кубические функции

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x,\ \dim L = 1, n = 2 \text{ – симплекс элементы.}$$

Комплекс элементы – количество узлов n $>$ 2.



$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 = N\Phi$

В общем виде: $\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \cdots + \alpha_n x^{n-1}$

$$\begin{cases} \Phi_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_2 x_i^2 \\ \Phi_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_2 x_j^2 \\ \Phi_k = \alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_2 x_k^2 \end{cases} \to \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$$

$$\alpha_1 = \Phi_i,\ \alpha_2 = \frac{-3\Phi_i + 4\Phi_j - \Phi_k}{L},\ \alpha_3 = \frac{2(\Phi_i - 2\Phi_j + \Phi_k)}{L^2}$$

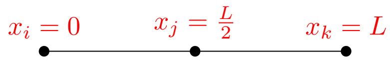
$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 =$$

$$= \Phi_i \underbrace{\left(1 - \frac{3x}{L} + \frac{2x^2}{L^2}\right)}_{N_i} + \Phi_j \underbrace{\left(\frac{4x}{L} - \frac{4x^2}{L^2}\right)}_{N_j} + \Phi_k \underbrace{\left(-\frac{x}{L} + \frac{2x^2}{L^2}\right)}_{N_k} =$$

$$= N_i\Phi_i + N_j\Phi_j + N_k\Phi_k = [N]\{\Phi\}$$

$$N_i = 1 - \frac{3x}{L} + \frac{2x^2}{L^2},\ N_j = \frac{4x}{L} - \frac{4x^2}{L^2},\ N_k = -\frac{x}{L} + \frac{2x^2}{L^2}$$

Этот же результат можно получить без использования системы уравнений. Зададим в узлах пробные функции f_α, $\alpha \in \{i, j, k\}$, такие, что $f_\alpha(x_\alpha) = 0$:



$$f_i = \frac{x}{L} \qquad f_j = 1 - \frac{2x}{L} \qquad f_k = 1 - \frac{x}{L}$$

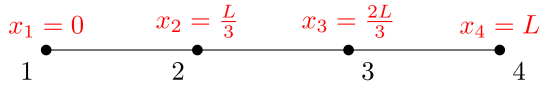
Формулы для нахождения функций форм:

$$N_i = \frac{f_j f_k}{f_j f_k|_{x=x_i=0}}, \; N_j = \frac{f_i f_k}{f_i f_k|_{x=x_j=\frac{L}{2}}}, \; N_k = \frac{f_i f_j}{f_i f_j|_{x=x_k=L}}$$

$$N_i = \left(1 - \frac{2x}{L}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right), \; N_j = \frac{4x}{L} \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right), \; N_k = -\frac{x}{L} \cdot \left(1 - \frac{2x}{L}\right)$$

Аналогично можно найти функции формы для конечных элементов более высокого порядка:

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 = N_i \Phi_i, \; i = 1, \ldots, 4$$



$$f_2 = 1 - \frac{3x}{L} \qquad f_4 = 1 - \frac{x}{L}$$

$$f_1 = \frac{x}{L} \qquad f_3 = 1 - \frac{3x}{2L}$$

Постановка задачи

$$K^{(e)} q = P^{(e)}$$

$$K^{(e)} = \int\limits_V B^T D B dV + \int\limits_S \alpha_g N^T N dS$$

$$P^{(e)} = \int\limits_V f N^T dV - \int\limits_S q N^T dS + \int\limits_S \alpha_g T_g N^T dS$$

$$dV = S dx, \quad dS = P dx, \text{ где } P \text{ – периметр}$$

$$B = \frac{d[N]}{dx} = \left[\frac{dN_i}{dx}, \quad \frac{dN_j}{dx}, \quad \frac{dN_k}{dx}\right] = \left[-\frac{3}{L} + \frac{4x}{L^2}, \quad \frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2}, \quad -\frac{1}{L} + \frac{4x}{L^2}\right]$$

$$D = k_x, \text{ так как задача одномерная}$$

Получаем:

$$\int\limits_V B^T D B dV = S k_x \cdot \int\limits_0^L B^T B dx =$$

$$= S k_x \cdot \int\limits_0^L \begin{bmatrix} \left(-\frac{3}{L} + \frac{4x}{L^2}\right)^2 & \left(-\frac{3}{L} + \frac{4x}{L^2}\right)\left(\frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2}\right) & \left(-\frac{3}{L} + \frac{4x}{L^2}\right)\left(-\frac{1}{L} + \frac{4x}{L^2}\right) \\ \left(-\frac{3}{L} + \frac{4x}{L^2}\right)\left(\frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2}\right) & \left(\frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2}\right)^2 & \left(\frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2}\right)\left(-\frac{1}{L} + \frac{4x}{L^2}\right) \\ \left(-\frac{3}{L} + \frac{4x}{L^2}\right)\left(-\frac{1}{L} + \frac{4x}{L^2}\right) & \left(\frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2}\right)\left(-\frac{1}{L} + \frac{4x}{L^2}\right) & \left(-\frac{1}{L} + \frac{4x}{L^2}\right)^2 \end{bmatrix} dx =$$

$$
= \frac{Sk_x}{6L} \cdot \begin{bmatrix} 14 & -16 & 2 \\ -16 & 32 & -16 \\ 2 & -16 & 14 \end{bmatrix}
$$

Рассмотрим следующий интеграл:

$$
\int\limits_S \alpha_g N^T N dS = P\alpha_g \cdot \int\limits_0^L N^T N dx = P\alpha_g \cdot \int\limits_0^L \begin{bmatrix} N_i^2 & N_i N_j & N_i N_k \\ N_i N_j & N_j^2 & N_j N_k \\ N_i N_k & N_j N_k & N_k^2 \end{bmatrix} dx =
$$

$$
= \frac{\alpha_g L}{30} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}
$$