13/09

Одномерные пружинные системы

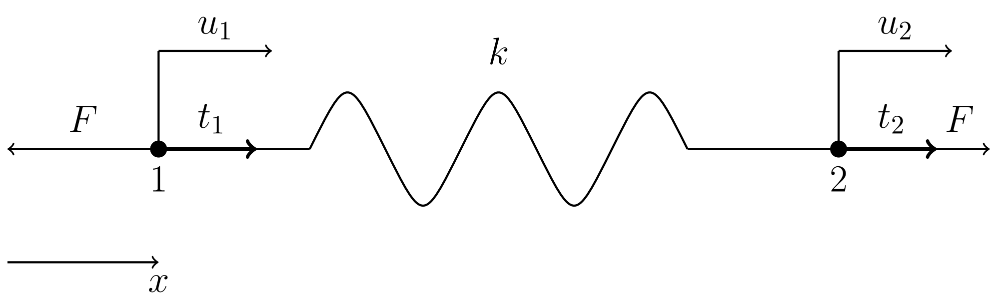

Рисунок 1 – Одномерная пружинная система из одного элемента

1. Уравнение равновесия

где k - коэффициент жесткости, u_1, u_2 - перемещения, F - приложенная сила, t_1, t_2 - реакции.

Закон Гука:

$$F = k\Delta = k(u_2 - u_1)$$

$$t_1 + t_2 = 0 \to t_1 = -t_2$$

$$F = t_2 = k(u_2 - u_1)$$

$$-F = t_1 = -k(u_2 - u_1) = k(u_1 - u_2)$$

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow Kq = t$$

где $q = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},\ t = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix},\ K = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}.$

2. Вариационный метод

$$\Pi = \Pi_{in} - \Pi_{ex},$$

где Π - потенциальная энергия системы.

$$\Pi_{in} = \int\limits_0^\Delta F d\Delta = \int\limits_0^\Delta k\Delta d\Delta = \frac{k(u_2 - u_1)^2}{2} = \frac{1}{2} q^{\mathrm{T}} K q = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\Pi_{ex} = t_1 u_1 + t_2 u_2 = q^{\mathrm{T}} t$$

$$\Pi = \frac{1}{2} q^{\mathrm{T}} K q - q^{\mathrm{T}} t \to min$$

Условие стационарности потенциальной энергии

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial u_1} = 0,\ \frac{\partial \Pi}{\partial u_2} = 0$$

$$\Pi = \frac{k}{2}(u_2 - u_1)^2 - t_1 u_1 - t_2 u_2$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_1} = k(u_2 - u_1)(-1) - t_1 = 0 \Leftarrow k(u_1 - u_2) = t_1$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_2} = k(u_2 - u_1) - t_2 = 0 \Leftarrow k(u_2 - u_1) = t_2$$

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$$

3. Метод возможных перемещений

Работа внутренних сил на возможных деформациях равна внешней работе возможных перемещений:

$$A_{in} = A_{ex},$$

где A_{in} - работа внутренних сил на возможных деформациях,
A_{ex} - работа внешних сил на возможных перемещениях.

$$A_{in} = F\delta\Delta = F(\delta u_2 - \delta u_1)$$

$$A_{ex} = t_1 \delta u_1 + t_2 \delta u_2$$

$$F(\delta u_2 - \delta u_1) = t_1 \delta u_1 + t_2 \delta u_2$$

$$\delta u_1, \delta u_2 : \begin{cases} -F = t_1 \\ F = t_2 \end{cases}$$

Методика составления глобальной системы для МКЭ

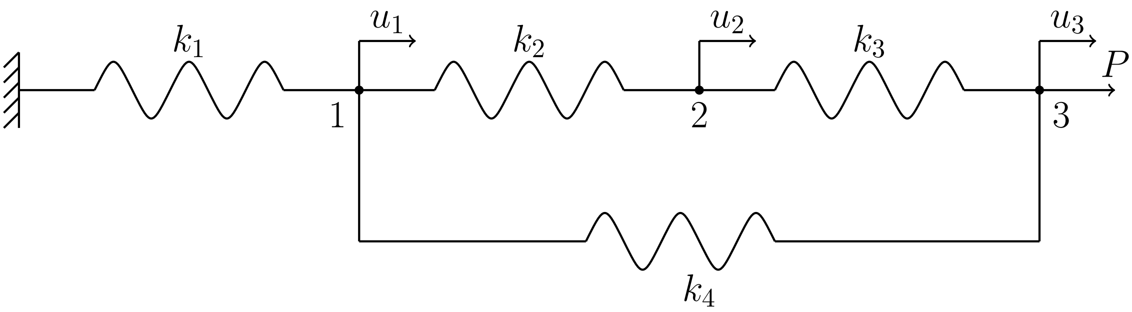

Рисунок 2 – Одномерная пружинная система из четырех элементов

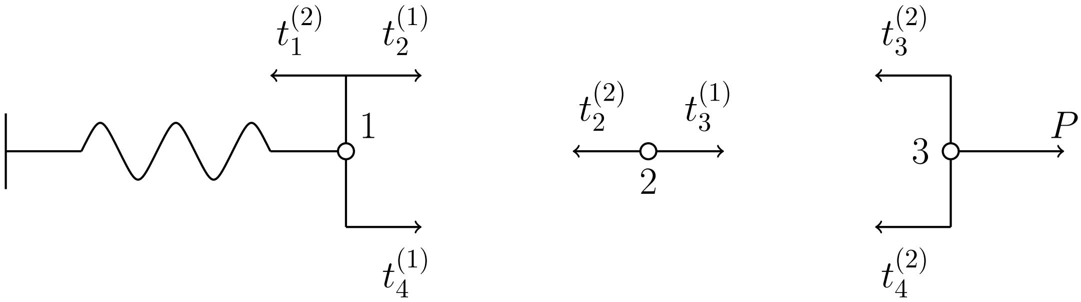

Рисунок 3 – Силы реакций в узлах системы

Используемые обозначения:

(1) – начало элемента,

(2) – конец элемента.

$$
\begin{cases}
t_1^{(2)} + t_2^{(1)} + t_4^{(1)} = 0 \\
t_2^{(2)} + t_3^{(1)} = 0 \\
t_3^{(2)} + t_4^{(2)} = P
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
t_i^{(1)} = k_i(u^{(1)} - u^{(2)}) \\
t_i^{(2)} = k_i(u^{(2)} - u^{(1)})
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
t_1^{(2)} &= k_1(u_1 - 0) \\
t_4^{(1)} &= k_4(u_1 - u_3) \\
t_3^{(1)} &= k_3(u_2 - u_3) \\
t_4^{(2)} &= k_4(u_3 - u_1) \\
t_2^{(1)} &= k_2(u_1 - u_2) \\
t_2^{(2)} &= k_2(u_2 - u_1) \\
t_3^{(2)} &= k_3(u_3 - u_2)
\end{aligned}
\;\Rightarrow\;
\begin{cases}
(k_1 + k_2 + k_4)u_1 - k_2u_2 - k_4u_3 = 0 \\
-k_2u_1 + (k_2 + k_3)u_2 - k_3u_3 = 0 \\
-k_4u_1 - k_3u_2 + (k_3 + k_4)u_3 = P
\end{cases}
\qquad (*)
$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + k_4 & -k_2 & -k_4 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ -k_4 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix}$$

<u>Принцип возможных перемещений</u>

$$\sum_{i=1}^{4} F^{(i)} \delta \Delta^{(i)} = \sum_{i=1}^{4} k_{(i)} \Delta^{(i)} \delta \Delta^{(i)} = P \delta u_3$$

$$k_1 u_1 \delta u_1 + k_2 (u_2 - u_1)(\delta u_2 - \delta u_1) + k_3 (u_3 - u_2)(\delta u_3 - \delta u_2) + k_4 (u_3 - u_1)(\delta u_3 - \delta u_1) =$$

$$= P \delta u_3 + 0 \cdot \delta u_1 + 0 \cdot \delta u_2$$

$$\begin{aligned} \delta u_1 &: \ \ldots \\ \delta u_2 &: \ \ldots \Rightarrow (*) \\ \delta u_3 &: \ \ldots \end{aligned}$$