01/11

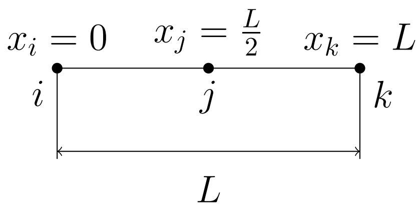
<u>Конечные элементы более высокого порядка</u>

<u>Одномерные квадратичные и кубические функции</u>

$$K_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f = 0$$

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x, \ \dim L = 1, n = 2 \text{ – симплекс элементы.}$$

Комплекс элементы – количество узлов n $>$ 2.



$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 = N\Phi$

В общем виде: $\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \cdots + \alpha_n x^{n-1}$

$$\begin{cases} \Phi_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_2 x_i^2 \\ \Phi_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_2 x_j^2 \\ \Phi_k = \alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_2 x_k^2 \end{cases} \to \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$$

$$\alpha_1 = \Phi_i, \ \alpha_2 = \frac{-3\Phi_i + 4\Phi_j - \Phi_k}{L}, \ \alpha_3 = \frac{2(\Phi_i - 2\Phi_j + \Phi_k)}{L^2}$$

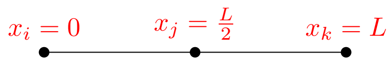
$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 =$$

$$= \Phi_i \underbrace{\left(1 - \frac{3x}{L} + \frac{2x^2}{L^2}\right)}_{N_i} + \Phi_j \underbrace{\left(\frac{4x}{L} - \frac{4x^2}{L^2}\right)}_{N_j} + \Phi_k \underbrace{\left(-\frac{x}{L} + \frac{2x^2}{L^2}\right)}_{N_k} =$$

$$= N_i\Phi_i + N_j\Phi_j + N_k\Phi_k = [N]\{\Phi\}$$

$$N_i = 1 - \frac{3x}{L} + \frac{2x^2}{L^2}, \ N_j = \frac{4x}{L} - \frac{4x^2}{L^2}, \ N_k = -\frac{x}{L} + \frac{2x^2}{L^2}$$

Этот же результат можно получить без использования системы уравнений. Зададим в узлах пробные функции f_α, $\alpha \in \{i, j, k\}$, такие, что $f_\alpha(x_\alpha) = 0$:



$$f_i = \frac{x}{L} \qquad f_j = 1 - \frac{2x}{L} \qquad f_k = 1 - \frac{x}{L}$$

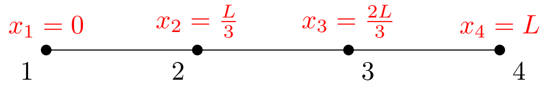
Формулы для нахождения функций форм:

$$N_i = \frac{f_j f_k}{f_j f_k|_{x=x_i=0}},\ N_j = \frac{f_i f_k}{f_i f_k|_{x=x_j=\frac{L}{2}}},\ N_k = \frac{f_i f_j}{f_i f_j|_{x=x_k=L}}$$

$$N_i = \left(1 - \frac{2x}{L}\right)\cdot\left(1 - \frac{x}{L}\right),\ N_j = \frac{4x}{L}\cdot\left(1 - \frac{x}{L}\right),\ N_k = -\frac{x}{L}\cdot\left(1 - \frac{2x}{L}\right)$$

Аналогично можно найти функции формы для конечных элементов более высокого порядка:

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 = N_i \Phi_i,\ i = 1, \dots, 4$$



$$f_2 = 1 - \frac{3x}{L} \qquad f_4 = 1 - \frac{x}{L}$$

$$f_1 = \frac{x}{L} \qquad f_3 = 1 - \frac{3x}{2L}$$

Постановка задачи

$$K^{(e)} q = P^{(e)}$$

$$K^{(e)} = \int\limits_V B^T D B dV + \int\limits_S \alpha_g N^T N dS$$

$$P^{(e)} = \int\limits_V f N^T dV - \int\limits_S q N^T dS + \int\limits_S \alpha_g T_g N^T dS$$

$$dV = Sdx,\quad dS = Pdx,\ \text{где } P \text{ – периметр}$$

$$B = \frac{d[N]}{dx} = \left[\frac{dN_i}{dx},\quad \frac{dN_j}{dx},\quad \frac{dN_k}{dx}\right] = \left[-\frac{3}{L} + \frac{4x}{L^2},\quad \frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2},\quad -\frac{1}{L} + \frac{4x}{L^2}\right]$$

$$D = k_x,\ \text{так как задача одномерная}$$

Получаем:

$$\int\limits_V B^T D B dV = S k_x \cdot \int\limits_0^L B^T B dx =$$

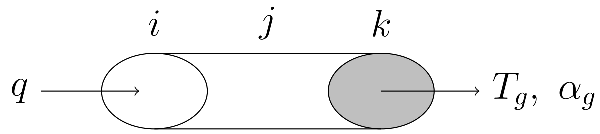
$$= S k_x \cdot \int\limits_0^L \begin{bmatrix} \left(-\frac{3}{L} + \frac{4x}{L^2}\right)^2 & \left(-\frac{3}{L} + \frac{4x}{L^2}\right)\left(\frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2}\right) & \left(-\frac{3}{L} + \frac{4x}{L^2}\right)\left(-\frac{1}{L} + \frac{4x}{L^2}\right) \\ \left(-\frac{3}{L} + \frac{4x}{L^2}\right)\left(\frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2}\right) & \left(\frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2}\right)^2 & \left(\frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2}\right)\left(-\frac{1}{L} + \frac{4x}{L^2}\right) \\ \left(-\frac{3}{L} + \frac{4x}{L^2}\right)\left(-\frac{1}{L} + \frac{4x}{L^2}\right) & \left(\frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2}\right)\left(-\frac{1}{L} + \frac{4x}{L^2}\right) & \left(-\frac{1}{L} + \frac{4x}{L^2}\right)^2 \end{bmatrix} dx =$$

$$= \frac{Sk_x}{6L} \cdot \begin{bmatrix} 14 & -16 & 2 \\ -16 & 32 & -16 \\ 2 & -16 & 14 \end{bmatrix}$$

Рассмотрим следующий интеграл:

$$\int\limits_S \alpha_g N^T N dS = P\alpha_g \cdot \int\limits_0^L N^T N dx = P\alpha_g \cdot \int\limits_0^L \begin{bmatrix} N_i^2 & N_i N_j & N_i N_k \\ N_i N_j & N_j^2 & N_j N_k \\ N_i N_k & N_j N_k & N_k^2 \end{bmatrix} dx =$$

$$= \frac{\alpha_g PL}{30} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$



Для узла k:

$$\alpha_g \int\limits_S N^T N dS = \alpha_g S_k \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где S_k – площадь сечения для k-ого узла.

Для всей боковой поверхности:

$$\alpha_g T_g \int\limits_S N^T dS = \alpha_g T_g P \cdot \int\limits_0^L \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix} dx = \frac{\alpha_g T_g PL}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Для узла k:

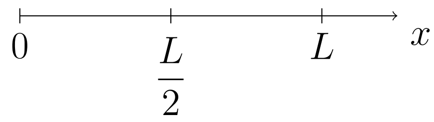
$$\alpha_g T_g \int\limits_S N^T dS = \alpha_g T_g S_k \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

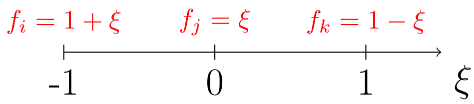
Для узла i:

$$\int\limits_S qN^T dS = qS \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\int\limits_V f \cdot N^T dV = S \cdot f \int\limits_0^L N^T dx = \frac{SfL}{6} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

<u>Естественная система координат</u>





$$-1 \leq \xi \leq 1, \ x = f(\xi) \Leftrightarrow \xi = \varphi(x)$$

$$\begin{cases} N_i = \xi(1-\xi) \cdot \dfrac{-1}{2} = -\dfrac{\xi(1-\xi)}{2}, \\ N_j = (1-\xi)(1+\xi), \\ N_k = \dfrac{\xi(1+\xi)}{2} \end{cases}$$

$$\varphi = N_i\Phi_i + N_j\Phi_j + N_k\Phi_k$$

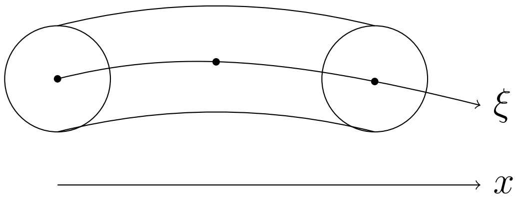
$$x = N_i x_i + N_j x_j + N_k x_k \to x = f(\xi)$$

$$B = \frac{d[N]}{dx}; \ \frac{dN_\beta}{d\xi} = \frac{dN_\beta}{dx} \underbrace{\frac{dx}{d\xi}}_{J}, \ J^{-1} = \frac{1}{\frac{dx}{d\xi}}, \ \beta = i, j, k$$

$$\frac{dN_\beta}{dx} = J^{-1} \frac{dN_\beta}{d\xi}$$

$$J = \frac{dx}{d\xi} = \frac{dN_i}{d\xi} x_i + \frac{dN_j}{d\xi} x_j + \frac{dN_k}{d\xi} x_k \neq \text{const}$$

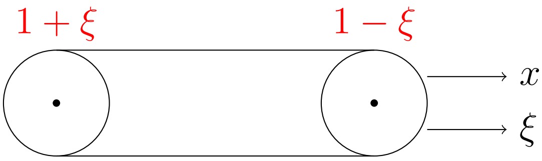
1



Криволинейный стержень

$$\begin{cases} x = N_i x_i + N_j x_j + N_k x_k \\ \varphi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k \end{cases}$$

2

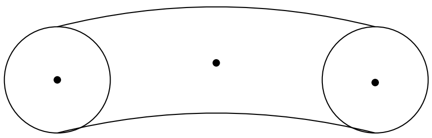


Линейный стержень
(задаем через две точки)

$$\begin{cases} x = \tilde{N}_i x_i + \tilde{N}_k x_k \\ \tilde{N}_i = \dfrac{1}{2}(1 - \xi), \ \ \tilde{N}_k = \dfrac{1}{2}(1 + \xi) \\ \varphi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k \end{cases}$$

(если в задании нужно вычислить что-то в середине, то используем квадратичные функции формы)

3



Криволинейный элемент

$$\begin{cases} x = N_i x_i + N_j x_j + N_k x_k \\ \varphi = \tilde{N}_i \Phi_i + \tilde{N}_k \Phi_k \end{cases}$$

(достаточно рассмотреть только на концах элемента)

Пусть A – количество узлов для задания формы элемента ($x = f(\xi)$), B – количество узлов для задания интерполяционного полинома (φ).

1. Если $A = B$, такой конечный элемент называется *изопараметрический*.
2. Если $A < B$, такой конечный элемент называется *субпараметрический*.
3. Если $A > B$, такой конечный элемент называется *суперпараметрический*.