06/12

Сохранение непрерывности вдоль границ между элементами

$$\begin{cases} \varphi^{(1)} = N_1^{(1)}\Phi_1 + N_2^{(1)}\Phi_2 + N_3^{(1)}\Phi_3 + N_4^{(1)}\Phi_4 \\ \varphi^{(2)} = N_1^{(2)}\Phi_5 + N_2^{(2)}\Phi_6 + N_3^{(2)}\Phi_2 + N_4^{(2)}\Phi_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{cases}$$

$$\eta^{(1)} = -1, \eta^{(2)} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \varphi^{(1)} = \frac{1}{2}(1-\xi^{(1)})\Phi_1 + \frac{1}{2}(1+\xi^{(1)})\Phi_2 \\ \varphi^{(2)} = \frac{1}{2}(1+\xi^{(2)})\Phi_2 + \frac{1}{2}(1-\xi^{(2)})\Phi_1 \end{cases}$$

$$\xi^{(1)} = \xi^{(2)} \Rightarrow \varphi^{(1)} = \varphi^{(2)}$$

Квадратичные и кубические четырехугольные КЭ из Серендипова семейства

$$\begin{cases} \varphi_2 = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy + \alpha_5 x^2 y + \alpha_6 x y^2 + \alpha_7 x^2 + \alpha_8 y^2 \\ \varphi_3 = -//- + \alpha_9 x^3 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} x y^3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N^{(2)} = (\alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4\xi\eta)(a_1 + a_2\xi + a_3\eta) \\ N^{(3)} = (\alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4\xi\eta)(a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi^2 + a_5\eta^2) \end{cases}$$

Вычислим функцию формы для элемента 1:

$$N_1 = (1-\eta)(1-\xi)(a_1 + a_2\xi + a_3\eta)$$

$$\begin{cases} N_1(\xi = 0, \eta = 1) = 0 \\ N_1(\xi = -1, \eta = 0) = 0 \\ N_1(\xi = -1, \eta = 1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_1 = 2(a_1 - a_3) = 0 \\ N_1 = 2(a_1 - a_2) = 0 \\ N_1 = 4(a_1 - a_2 - a_3) = 1 \end{cases} \Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow N_1 = -\frac{1}{4}(1-\eta)(1-\xi)(1+\xi+\eta)$$

Вычислим функцию формы для элемента 2:

$$N_2 = (\alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4\xi\eta)(a_1 + a_2\xi + a_3\eta) = (1+\xi)(1-\xi)(1-\eta)\cdot a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_2(\xi=0, \eta=-1) = 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow N_2 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$$

Для кубического элемента:

$$N_1 = (1-\xi)(1-\eta)(a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi^2 + a_5\eta^2)$$

$$\begin{cases} N_1(-\frac{1}{3}, -1) = 0 \\ N_1(\frac{1}{3}, -1) = 0 \\ N_1(-1, \frac{1}{3}) = 0 \\ N_1(-1, -\frac{1}{3}) = 0 \\ N_1(-1, -1) = 1 \end{cases}$$

Вычисление производных

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \\ \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \\ \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Допустим, $\varphi_2 = N_1\Phi_1 + \cdots + N_8\Phi_8$

$$\begin{cases} x = R_1X_1 + R_2X_2 + R_3X_3 + R_4X_4 \\ y = R_1Y_1 + R_2Y_2 + R_3Y_3 + R_4Y_4 \end{cases} \quad \text{– субпараметрический КЭ}$$

где R_i - линейные интерполяции

$$\begin{cases} R_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ R_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ R_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ R_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{cases}$$

Изопараметрический КЭ:

$$\begin{cases} x = N_1X_1 + \cdots + N_8X_8 \\ y = N_1Y_1 + \cdots + N_8Y_8 \end{cases}$$

Так как все стороны линейные, интегралы можно свести к виду:

$$\int\limits_V B^T DB \; dV = t \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-1}^{1} B^T DB |J| \; d\eta d\xi$$

$$Z = \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-1}^{1} f(\xi, \eta) \; d\eta d\xi = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} H_i H_j f(\xi_i, \eta_j)$$

$$\int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-1}^{1} f(\xi, \eta) \; d\eta = \sum_{j=1}^{n} H_j f(\xi, \eta_j) = g(\xi)$$

$$\int\limits_{-1}^{1} g(\xi) \; d\xi = \sum_{i=1}^{n} H_i g(\xi_i)$$

Лагранжево семейство

Функция формы:

$$N_{ij} = L_i^n(\xi) L_j^m(\eta)$$

$L_i^n(\xi) L_j^m(\eta)$ - многочлены Лагранжа, n, m - количество разбиений по ξ, η

$$L_i^n(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \ldots (\xi - \xi_n)}{(\xi_i - \xi_1)(\xi_i - \xi_2) \ldots (\xi_i - \xi_n)}$$

$$N_{ij} = L_i^2(\xi) L_j^2(\eta), \; i \neq 1, 2$$

$$L_i^2(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)}{(\xi_i - \xi_1)(\xi_i - \xi_2)}$$

$$N_{11} = \frac{\xi \cdot (\xi - 1)}{-1 \cdot (-2)} \cdot \frac{\eta \cdot (\eta - 1)}{-1 \cdot (-2)} = \frac{1}{4} \cdot \xi \cdot \eta (\xi - 1)(\eta - 1)$$

$$N_{12} = \frac{\xi \cdot (\xi - 1)}{2} \cdot \frac{(\eta + 1)(\eta - 1)}{1 \cdot (-1)}$$