Метод конечных элементов для двумерной задачи теплопроводности.

Задание

Решить задачу распространения тепла для области из 1 лабораторной работы. Тело разбить на треугольные симплекс элементы. Записать интегральную или вариационную формулировку задачи, показать алгоритм сведения к СЛАУ. Составить локальные матрицы жесткости и правых частей. Произвести сборку в глобальную матрицу и глобальный вектор. Решить СЛАУ.

Решение

1. Уравнение теплопроводности:

$$-\nabla(K\nabla T) = 0 \text{ в области } V$$

Граничное условие на S:

$$K\frac{\partial T}{\partial n} + a_g(T - T_g) - q = 0$$

Вариационная постановка:

$$\int\limits_V -\nabla \cdot (K\nabla T)v dV = 0,$$

где v — пробная функция. Применяя интегрирование по частям и теорему Гаусса-Остроградского, получаем функционал:

$$J(T) = \int\limits_V \frac{1}{2}\left[K_x\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + K_y\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2\right]dV - \int\limits_{S_1} qTdS + \int\limits_{S_2}\frac{1}{2}a_g(T - T_g)^2 dS \quad (1)$$

Введем обозначения:

$$K = \begin{pmatrix} K_x & 0 \\ 0 & K_y \end{pmatrix}, \quad T = N_iT_i + N_jT_j + N_kT_k = N\Phi, \quad \begin{pmatrix} \dfrac{\partial T}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial T}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial N}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial N}{\partial y} \end{pmatrix}\Phi = B\Phi \quad (2)$$

Тогда с учетом (2) перепишем (1):

$$J = \frac{1}{2}\int\limits_V \left[\Phi^T B^T K B \Phi\right] dV - \int\limits_{S_1} qN\Phi dS + \frac{1}{2}\int\limits_{S_2} a_g(N\Phi - T_g)^2 dS$$

Задача сводится к минимизации $J(T) \to \min$:

$$\frac{\partial J(T)}{\partial \Phi} = 0, \quad \Phi = (T_1, T_2, T_3)^T$$

Следовательно:

$$\int\limits_V B^T K B \Phi dV - \int\limits_{S_1} N^T q dS + \int\limits_{S_2} a_g N^T N \Phi dS - \int\limits_{S_2} a_g N^T T_g dS = 0$$

Введем обозначения:

$$K = \int\limits_V B^T K B dV + \int\limits_{S_2} a_g N^T N dS, \quad F = \int\limits_{S_1} N^T q dS + \int\limits_{S_2} a_g N^T T_g dS$$

Решение задачи сводится к решению СЛАУ $K\Phi = F$.

Задача решается с использованием симлексного трехузлового конечного элемента.

$$T = a_1 + a_2 x + a_3 y \tag{3}$$

$$\begin{cases} T_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i, \\ T_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j, \\ T_k = \alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_3 y_k \end{cases}$$

Решим систему методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} = 2S, \quad S \text{ — площадь треугольника.}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} T_i & x_i & y_i \\ T_j & x_j & y_j \\ T_k & x_k & y_k \end{vmatrix} = T_i \underbrace{(x_j y_k - x_k y_j)}_{a_i} + T_j \underbrace{(x_k y_i - x_i y_k)}_{a_j} + T_k \underbrace{(x_i y_j - x_j y_i)}_{a_k}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & T_i & y_i \\ 1 & T_j & y_j \\ 1 & T_k & y_k \end{vmatrix} = T_i \underbrace{(y_j - y_k)}_{b_i} + T_j \underbrace{(y_k - y_i)}_{b_j} + T_k \underbrace{(y_i - y_j)}_{b_k}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & x_i & T_i \\ 1 & x_j & T_j \\ 1 & x_k & T_k \end{vmatrix} = T_i \underbrace{(x_k - x_j)}_{c_i} + T_j \underbrace{(x_i - x_k)}_{c_j} + T_k \underbrace{(x_j - x_i)}_{c_k}$$

Тогда $\alpha_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $\alpha_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, $\alpha_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$. Подставим в (3):

$$T = \frac{1}{\Delta}\left(T_i(a_i + b_i x + c_i y) + T_j(a_j + b_j x + c_j y) + T_k(a_k + b_k x + c_k y)\right) = N_i T_i + N_j T_j + N_k T_k = N\Phi,$$

где

$$\begin{cases} N_i = \dfrac{1}{\Delta}(a_i + b_i x + c_i y), \\ N_j = \dfrac{1}{\Delta}(a_j + b_j x + c_j y), \\ N_k = \dfrac{1}{\Delta}(a_k + b_k x + c_k y) \end{cases}$$

— функции формы. Матрица B:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} & \dfrac{\partial N_j}{\partial x} & \dfrac{\partial N_k}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} & \dfrac{\partial N_j}{\partial y} & \dfrac{\partial N_k}{\partial y} \end{pmatrix} \Phi = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{pmatrix} \Phi = B\Phi$$

Введем систему L-координат:

$0 \le L_i, L_j, L_k \le 1$, $L_i = N_i$, $L_j = N_j$, $L_k = N_k$, $L_i + L_j + L_k = 1$.

Тело имеет фиксированную толщину l, т.е. $dV = ldS$:

$$\int\limits_V f(x,y)dV = l\int\limits_S f(x,y)dxdy = l\int_0^1 \int\limits_0^{L_j-1} f(L_i, L_j, 1-L_i-L_j)|J|dL_i dL_j,$$

где $|J|$ — Якобиан:

$$|J| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial L_i} & \dfrac{\partial x}{\partial L_j} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial L_i} & \dfrac{\partial y}{\partial L_j} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i - x_k & x_j - x_k \\ y_i - y_k & y_j - y_k \end{vmatrix} = \Delta$$

$$\int\limits_\Gamma L_i^\alpha L_j^\beta d\Gamma = \frac{\alpha!\beta!}{(\alpha+\beta+1)!} l_{ij}, \quad \text{где } l_{ij} - \text{расстояние между узлами } i \text{ и } j,$$

$$\int\limits_S L_i^\alpha L_j^\beta L_k^\gamma dS = \frac{\alpha!\beta!\gamma!}{(\alpha+\beta+\gamma+2)!} \cdot \Delta.$$

Матрица K:

$$\int\limits_V B^T K B dV = \int\limits_V \frac{1}{\Delta^2} \begin{pmatrix} b_i & c_i \\ b_j & c_j \\ b_k & c_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_x & 0 \\ 0 & K_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{pmatrix} dV =$$

$$= \frac{l}{4S}\left(K_x \begin{pmatrix} b_i^2 & b_i b_j & b_i b_k \\ b_j b_i & b_j^2 & b_j b_k \\ b_k b_i & b_k b_j & b_k^2 \end{pmatrix} + K_y \begin{pmatrix} c_i^2 & c_i c_j & c_i c_k \\ c_j c_i & c_j^2 & c_j c_k \\ c_k c_i & c_k c_j & c_k^2 \end{pmatrix} \right).$$

$$\int\limits_{S_2} \alpha_g N^T N dS = \int\limits_{S_2} \alpha_g \begin{pmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_i & N_j & N_k \end{pmatrix} dS = \int\limits_{\Gamma_2} \alpha_g l \begin{pmatrix} N_i^2 & N_i N_j & N_i N_k \\ N_j N_i & N_j^2 & N_j N_k \\ N_k N_i & N_k N_j & N_k^2 \end{pmatrix} d\Gamma =$$

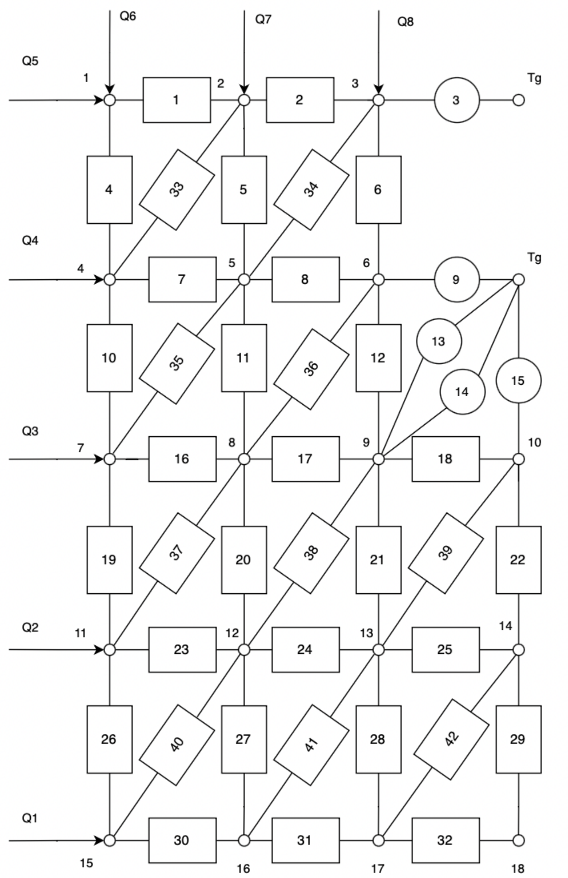
$$= \frac{\alpha_g l}{6}\left(l_{ij} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + l_{ik} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + l_{jk} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right).$$

Вектор правой части F:

$$\int\limits_{S_2} \alpha_g N^T T_g dS = l\int\limits_{\Gamma_2} \alpha_g T_g \begin{pmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{pmatrix} d\Gamma = \frac{\alpha_g T_g l}{2}\left(l_{ij} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + l_{ik} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + l_{jk} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

$$\int\limits_{S_1} N^T q dS = lq\int\limits_{\Gamma_1} \begin{pmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{pmatrix} d\Gamma = \frac{lq}{2}\left(l_{ij} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + l_{ik} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + l_{jk} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

2. Решим задачу распространения тепла для области из 1 лабораторной работы. Разобьем тело на треугольные симплекс элементы:



Сформируем глобальную матрицу K, где в качестве узлов i, j, k будут тройки

$[0, 1, 3], [1, 2, 4], [1, 3, 4], \ldots$

В силу выбора размера тела, $l = 1, l_{ij} = l_{ik} = l_{jk} = 1$ для любого узла.

Код для решения задачи:

```
import numpy as np
l = 1
S = 1/2
alpha = 10
q = 150
Tg = 25
lamb = 75
n = 18
K = np.zeros((n, n))
F = np.zeros(n)
nodes = np.array( [
        [0,1,3], [1,2,4], [1,3,4], [2,4,5], [3,4,6],
        [4,5,7], [4,6,7], [5,7,8], [6,7,10], [7,8,11],
        [8,9,12], [7,10,11], [8,11,12], [9,12,13], [10,11,14],
        [11,12,15], [12,13,16], [11,14,15], [12,15,16], [12,16,17]])
```

```python
coordinates = np.array([ [4,0], [4,1], [4,2], [3,0], [3,1],
               [3,2], [2,0], [2,1], [2,2], [2,3], [1,0], [1,1], [1,2],
               [1,3], [0,0], [0,1], [0,2], [0,3]])
bound_nodes_Q = np.array([[0,1], [1,2], [0,3], [3,6], [6,10], [10,14]])
bound_nodes_Tg = np.array([[2,5], [5,8], [8,9]])
for i, j, k in nodes:
    xi, yi = coordinates[i]
    xj, yj = coordinates[j]
    xk, yk = coordinates[k]
    ai = xj * yk - xk * yj
    aj = xk * yi - xi * yk
    ak = xi * yj - xj * yi
    bi = yj - yk
    bj = yk - yi
    bk = yi - yj
    ci = xk - xj
    cj = xi - xk
    ck = xj - xi
    k_x = l * lamb / (4 * S)
    K[i, i] += k_x * (bi ** 2 + ci ** 2)
    K[j, j] += k_x * (bj ** 2 + cj ** 2)
    K[k, k] += k_x * (bk ** 2 + ck ** 2)
    K[i, j] += k_x * (bi * bj + ci * cj)
    K[j, i] += k_x * (bi * bj + ci * cj)
    K[i, k] += k_x * (bi * bk + ci * ck)
    K[k, i] += k_x * (bi * bk + ci * ck)
    K[j, k] += k_x * (bj * bk + cj * ck)
    K[k, j] += k_x * (bj * bk + cj * ck)
for i, j in bound_nodes_Tg:
    coef = alpha * l / 6
    K[i, i] += coef * 2
    K[j, j] += coef * 2
    K[i, j] += coef
    K[j, i] += coef
for i, j in bound_nodes_Tg:
    F[i] += alpha * Tg * l / 2
    F[j] += alpha * Tg * l / 2
for i, j in bound_nodes_Q:
    F[i] += l * q / 2
    F[j] += l * q / 2
L = np.linalg.cholesky(K)
y = np.linalg.solve(L, F)
T = np.linalg.solve(L.T, y)
```

Решая СЛАУ, получим следующее распределение температур в узлах системы элементов:

T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}
62.54	60.05	56.52	61.02	58.57	55.13	60.41	58.09	54.95	53.28

T_{11}	T_{12}	T_{13}	T_{14}	T_{15}	T_{16}	T_{17}	T_{18}
60.44	58.41	56.53	55.44	60.52	58.60	57.05	57.05