

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 13

19 stycznia 2022 r.

Zajęcia 25 stycznia 2022 r.
Zaliczenie listy **od 5 pkt.**

- L13.1.** 1 punkt Wykaż, że dla dowolnej funkcji f ciągłej w przedziale $[a, b]$ ciąg złożonych wzorów trapezów $\{T_n(f)\}$ jest zbieżny do wartości całki $\int_a^b f(x) dx$, gdy $n \rightarrow \infty$.
- L13.2.** 1 punkt O funkcji ciągłej f wiadomo, że $\max_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)| < 10$. Załóżmy, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ potrafimy z dużą dokładnością obliczać $f(x)$. Opracuj algorytm wyznaczania przybliżonej wartości całki $\int_a^b f(x) dx$ z błędem bezwzględnym nie przekraczającym ε , gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ ($a < b$) oraz $\varepsilon > 0$ są dane.
- L13.3.** 1 punkt Jak należy dobrać n , aby stosując złożony wzór Simpsona S_n obliczyć przybliżoną wartość całki $\int_{-\pi}^{\pi/2} \sin(7x + \pi/3) dx$ z błędem względnym $\leq 10^{-6}$?
- L13.4.** 1 punkt Sprawdź, że ciąg złożonych wzorów trapezów spełnia związek

$$T_{2n}(f) = \frac{1}{2} [T_n(f) + M_n(f)] \quad (n = 1, 2, \dots),$$

gdzie

$$M_n(f) := h_n \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{1}{2}(2i-1)h_n\right), \quad h_n := \frac{b-a}{n}.$$

Korzystając z tej obserwacji sformułować oszczędny algorytm konstrukcji tablicy Romberga.

- L13.5.** **Włącz komputer!** 1 punkt Stosując metodę Romberga znajdź przybliżenie $T_{18,0}$ następujących całek:

a) $\int_{-1}^2 (2022x^4 + 2021x^3 - 2020x) dx$, b) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$, c) $\int_{-\pi}^{\pi/2} \sin(7x + \pi/3) dx$.

Skomentuj wyniki.

- L13.6.** 1 punkt Rozważmy zadanie obliczania przybliżonej wartości całki $I := \int_{-2}^5 f(x) dx$ (f – funkcja ciągła) metodą Romberga. W **ilu**, i w **których**, punktach przedziału $[-2, 5]$ **wystarczy** wyznaczyć wartość funkcji f , aby obliczyć przybliżenie $T_{13,0}$ całki I ?
- L13.7.** 1 punkt Wykaż, że ciąg elementów dowolnej kolumny tablicy Romberga, utworzonej dla funkcji $f \in C[a, b]$, jest zbieżny do całki $\int_a^b f(x) dx$.

- L13.8.** 1 punkt Korzystając z faktu podanego na wykładzie, tzn. **bez konieczności** rozwiązywania układu równań nieliniowych, dobierz węzły x_0, x_1, x_2 oraz współczynniki A_0, A_1, A_2 kwadratury

$$Q_2(f) := A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$$

w taki sposób, aby równość $\int_{-2}^2 f(x) dx = Q_2(f)$ zachodziła dla wszystkich wielomianów stopnia ≤ 5 .

- L13.9.** 2 punkty W języku `PW0++` procedura `LegendreZeros(m)` znajduje z dużą dokładnością wszystkie miejsca zerowe m -tego wielomianu Legendre'a. Używając tej procedury, opracuj efektywny **algorytm** znajdowania takich węzłów $x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$ oraz współczynników $A_0^{(n)}, A_1^{(n)}, \dots, A_n^{(n)}$, że dla każdego wielomianu w stopnia mniejszego od $2n + 2$ zachodzi

$$\int_{-2}^3 w(x) dx = Q_n(w),$$

gdzie $Q_n(f) := \sum_{k=0}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)})$.

- L13.10.** Dodatkowe zadanie programistyczne (do 4 lutego; do 6 punktów)¹

Węzły równoodległe używane w kwadraturach Newtona-Cotesa bywają użyteczne dla wielomianów niskich stopni, ale mogą okazać się złym wyborem, gdy stopień jest wysoki.

Należy rozważyć kwadratury interpolacyjne dla całek postaci $\int_{-1}^1 f(x) dx$ z węzłami będącymi:

- (a) zerami wielomianu Czebyszewa pierwszego rodzaju $T_n(x)$ w przedziale $(-1, 1)$,

$$x_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n} \quad (k = 1, 2, \dots, n);$$

- (b) zerami wielomianu Czebyszewa drugiego rodzaju $U_{n-1}(x)$, które są punktami ekstremalnymi $T_n(x)$ w przedziale $(-1, 1)$,

$$(1) \quad x_k = \cos \frac{k\pi}{n} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1);$$

- (c) wartościami danymi wzorem (1) wraz z $x_0 = 1$ i $x_n = -1$.

Podaj jawne wzory na wagi kwadratur w każdym z wymienionych wypadków. Przetestuj uzyskane kwadratury dla **wielu** różnego rodzaju funkcji f . Skomentuj wyniki.

Literatura

- [1] G. Dahlquist, Å. Björck, *Numerical Methods in Scientific Computing*, Volume 1, SIAM, 2008.

(-) Paweł Woźny

¹Patrz pkt. 10. regulaminu zaliczania ćwiczeń.