2.1.

Oznaczmy jako $x_1, x_2, \dots, x_n$ rozwiązanie układu równań U oraz jako R_i i-te równanie układu U

Oznaczmy jako P_i - i-te równanie układu U'

a) U' - układ z zamienionym wyrazem k, l

Jeżeli $x_1, \dots, x_n$ spełniają U, to spełniają R_k, a zatem spełniają również P_l. oraz jeżeli spełniają R_l to również P_k.

Zatem spełniają wszystkie równania U'

Analogicznie w drugą stronę

Jeżeli $x_1, \dots x_n$ spełniają U', to spełniają P_l, a zatem spełniają R_k oraz jeżeli spełniają P_k to również R_l

Zatem spełniają wszystkie równania U

Układy U i U' są równoważne

b) U' - układ z wyrazem j równym $j + \alpha \cdot i$

Jeżeli $x_1, \dots, x_n$ spełniają U, to spełniają R_i zatem $W_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ gdzie $W_i = a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b$

oraz $R_i: a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + b = 0$

oraz oraz spełnione jest R_j zatem $W_j(x_1, \dots, x_n) = 0$

Wtedy $P_j \equiv R_j + \alpha R_i$ sprawdźmy, czy P_j jest spełnione

$W_j(x_1, \dots, x_n) + \alpha W_i(x_1, \dots, x_n) \overset{?}{=} 0$

$0 + \alpha \cdot 0 \overset{?}{=} 0 \qquad 0 = 0$

Zatem P_j jest spełnione

W drugą stronę również zachodzi, ponieważ operacje elementarne wierszowe są odwracalne,

Czyli do j-tego równania wystarczy dodać $-\alpha$ i-tych równań żeby otrzymać U

Skoro $x_1, \dots, x_n$ spełniają U w.t.w gdy $x_1, \dots, x_n$ spełniają U' to U i U' są równoważne

c) U' - układ z przemnożonym k-tym równaniem przez $\alpha \neq 0$

Skoro $x_1, \dots, x_n$ spełnia U to spełnia R_i, a wtedy $W_i(x_1, \dots, x_n) = 0$

Sprawdźmy, czy spełnione jest $P_i \equiv \alpha R_i$

$\alpha W_i(x_1, \dots, x_n) \overset{?}{=} 0$

$\alpha \cdot 0 \overset{?}{=} 0 \qquad 0 = 0$

Zatem $x_1, \dots, x_n$ spełniają P_i oraz U'

W drugą stronę korzystamy z tego, że operacje elementowe wierszowe są odwracalne

Czyli i-te równanie wystarczy pomnożyć razy $\frac{1}{\alpha}$ dla $\alpha \neq 0$ aby uzyskać R_i

Skoro $x_1, \dots, x_n$ spełniają U w.t.w gdy $x_1, \dots, x_n$ spełniają U' to U i U' są równoważne

U: $\begin{cases} R_1 \\ \vdots \\ R_m \end{cases}$

U': $\begin{cases} P_1 \\ \vdots \\ P_m \end{cases}$

d) U' - układ składa się z U rozszerzonego o równanie $P_{m+1}: \Sigma_i 0 \cdot x_i = 0$

Skoro $x_1, \dots, x_n$ spełniają U to również spełniają równania P_i, $i \leq m$

Dla dowolnego $y \in \mathbb{R}$ zachodzi $0 \cdot y = 0$ wtedy

$\Sigma_i 0 \cdot x_i = \Sigma_i 0 = 0$

Zatem $x_1, \dots, x_n$ spełnia U'

Skoro $x_1, \dots, x_n$ spełniają U' to spełniają równania P_i, $i \leq m$ zatem również $R_i \leq m$, czyli spełniają U

Zatem U i U' są równoważne

U: $\begin{cases} R_1 \\ \vdots \\ R_m \end{cases}$

U': $\begin{cases} P_1 \equiv R_1 \\ \vdots \\ P_m \equiv R_m \\ P_{m+1} \equiv \text{"}\Sigma 0 \cdot x_i = 0\text{"} \end{cases}$

2.5. 0 – zapalone, 1 – zgaszone

$\underbrace{1\ 0\ 1}\ 1\ 0\ 0 \dots$

$0\ \underbrace{1\ 0\ 1}\ 0\ 0 \dots$

$0\ 0\ \underbrace{1\ 0\ 0}\ 0 \dots$

$0\ 0\ 0\ \underbrace{1\ 1\ 0}$

$0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1 \dots$

- możemy myśleć, że operujemy na wektorze $v \in \mathbb{Z}_2^n$
- jeden krok gry polega na dodaniu do v wektora $\underbrace{(0 \cdots 111 \cdots 0)}_{b_i} \in \mathbb{Z}_2^n$ lub $\underbrace{(110 \cdots 0)}_{b_1}$ lub $\underbrace{(0 \cdots 011)}_{b_n}$
- cel: uzyskać z v wektor $(0, \dots, 0) \iff v = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$

$\left(b_i = (0, \dots 0, 1, \overset{i}{1}, 1, 0 \cdots 0) \right.$ (jak dotykamy pola i, to v "zmienia się o b_i") $\left., a_i \in \mathbb{Z}_2 \right)$.

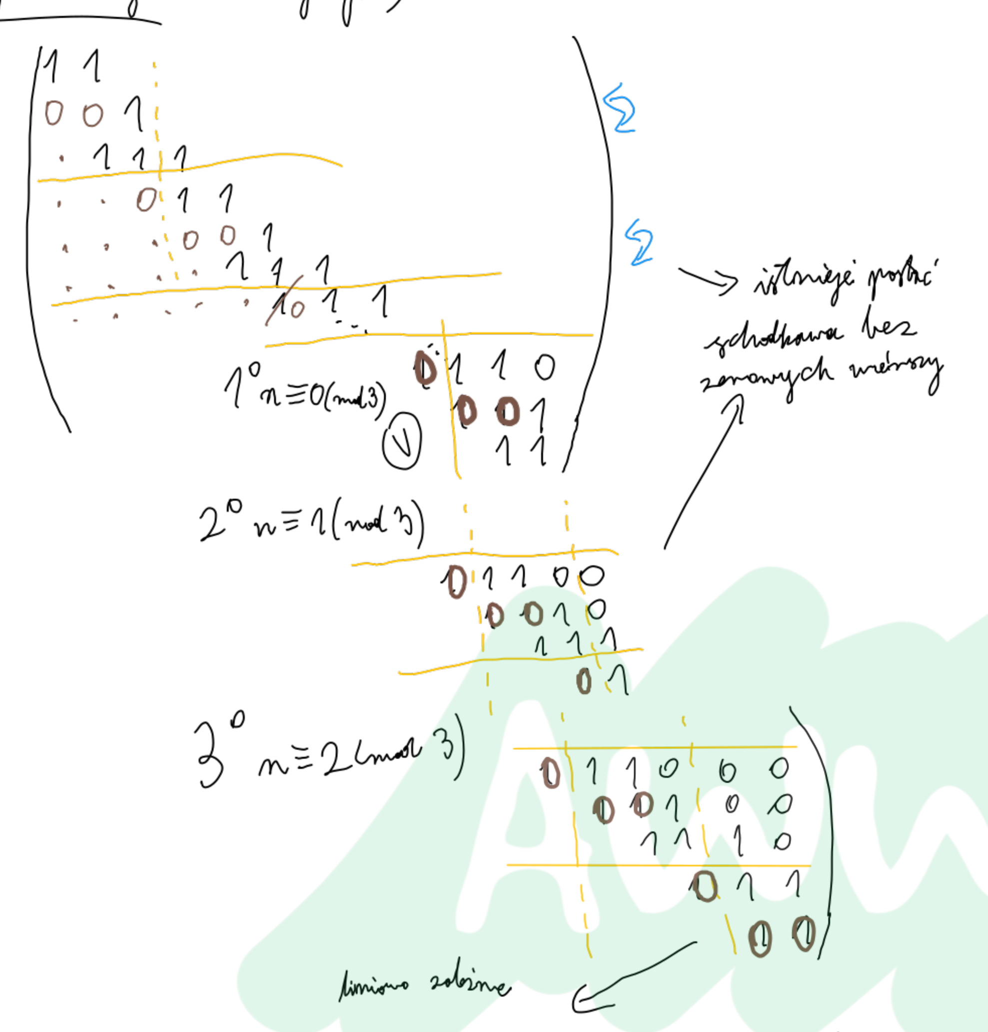
Czyli: czy dowolny $v \in \mathrm{lin}\{b_1, \dots, b_n\}$, czyli

czy $\mathrm{lin}\{b_1, \dots, b_n\} = \mathbb{Z}_2^n$?

$\Updownarrow$

$b_1, \dots, b_n$ L.N.Z.

sprawdzamy (elim. Gaussa):



$n \equiv 0$ lub $1 \pmod 3$ $\rightarrow$ zawsze mogę zapalić wszystkie pola

$n \equiv 2 \pmod 3$ $\rightarrow$ nie zawsze.

9

Zał. $A\vec{v} = \lambda \vec{v}$ dla pewnego $\vec{v}$

Pokazać $A^k \cdot \vec{v} = \lambda^k \cdot \vec{v}$ dla $k \geq 1$

Indukcyjnie:

1° Podstawa $(k = 1)$ wynika z założenia

2° Krok

Zał, że $A^k \cdot \vec{v} = \lambda^k \cdot \vec{v}$ ~~dla pewnego $\vec{v}$~~

Wtedy: $A^{k+1}\vec{v} = (A^k \cdot A) \cdot \vec{v} = A^k \cdot (A\vec{v}) \overset{\text{z zał.}}{=} A^k (\lambda \vec{v}) = \lambda(A^k\vec{v})$

$= A^k \cdot (\vec{v} \cdot \lambda) = (A^k \cdot \vec{v}) \cdot \lambda \overset{\text{z zał. ind.}}{=} \lambda^k \cdot \vec{v} \cdot \lambda = \lambda^{k+1} \cdot \vec{v}$

Zadanie 10. Pokaż, że jeśli λ^2 jest wartością własną macierzy M^2, to M wa wartość własną λ lub $-\lambda$.

Wskazówka: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

λ^2 jest wartością własną macierzy M^2

$\downarrow$ **Lemat 8.8.** *λ jest wartością własną macierzy M* $\iff \det(M - \lambda \mathrm{Id}) = 0$

$\det(M^2 - \lambda^2 \mathrm{Id}) = 0$

$\downarrow$ $\lambda \mathrm{Id} \cdot M = M \cdot \lambda \mathrm{Id} \ (= \lambda \cdot M \cdot \mathrm{Id})$, $= \lambda M =$

$\det((M - \lambda \mathrm{Id})(M + \lambda \mathrm{Id})) = 0$

$\downarrow$ **Twierdzenie 6.8** (Cauchy). $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

$\det(M - \lambda \mathrm{Id}) \cdot \det(M + \lambda \mathrm{Id}) = 0$

$\downarrow$

$\det(M - \lambda \mathrm{Id}) = 0 \lor \det(M + \lambda \mathrm{Id}) = 0$

$\downarrow$ lemat 8.8

M ma wartość własną λ lub $-\lambda$

2.6. 3.

wyznaczamy układ $\begin{cases} x_1 = 2 - 7x_2 - 9x_3 - 4x_4 \\ 4x_2 = -5x_3 - x_4 \end{cases}$

$\rightsquigarrow$ rozw. ogólne np.

$\begin{cases} x_2 = -\frac{5}{4}x_3 - \frac{x_4}{4} \\ x_1 = 2 - 7\left(-\frac{5}{4}x_3 - \frac{x_4}{4}\right) - 9x_3 - 4x_4 = \\ \quad = 2 - \frac{1}{4}x_3 - \frac{9}{4}x_4 \end{cases}$

$(x_3, x_4$ – dowolne$)$