Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 14

26 stycznia 2022 r.

Zajęcia 1 lutego 2022 r.
Zaliczenie listy **od 3 pkt.**

L14.1. 1 punkt Niech będzie

$$A := \begin{bmatrix} 780 & 563 \\ 913 & 659 \end{bmatrix}, \quad b := \begin{bmatrix} 217 \\ 254 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{x} := \begin{bmatrix} 0.999 \\ -1.001 \end{bmatrix}, \quad \widehat{x} := \begin{bmatrix} 0.341 \\ -0.087 \end{bmatrix}.$$

Oblicz wektory reszt $\widetilde{r} := A\widetilde{x} - b$, $\widehat{r} := A\widehat{x} - b$ oraz wektory błędów $\widetilde{e} := \widetilde{x} - x$, $\widehat{e} := \widehat{x} - x$, gdzie x jest rozwiązaniem układu $Ax = b$. Który z wektorów $\widetilde{x}$, $\widehat{x}$ jest lepszym przybliżeniem rozwiązania rozważanego układu równań liniowych? Jaki stąd wniosek?

L14.2. 1 punkt Znajdź rozkład LU macierzy

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -7 & -7 \\ 0 & -3 & 10 & 10 \\ 4 & -1 & 6 & 5 \end{bmatrix},$$

a otrzymany wynik wykorzystaj do obliczenia wartości jej wyznacznika oraz macierzy A^{-1}.

L14.3. 1 punkt Stosując metodę faktoryzacji rozwiąż układ równań $Ax = b$, gdzie

$$A := \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 1 & -1 \\ 2 & -7 & 10 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad b := \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 26 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

L14.4. 1 punkt Udowodnij następujące twierdzenia:

(a) Iloczyn dwu macierzy trójkątnych dolnych (górnych) jest macierzą trójkątną dolną (górną).

(b) Jeśli L jest macierzą trójkątną dolną z jedynkami na przekątnej głównej, to L^{-1} również jest macierzą tego typu.

L14.5. 1 punkt Zaproponuj algorytm odwracania nieosobliwej macierzy trójkątnej dolnej. Jaka jest jego złożoność?

L14.6. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Opracuj oszczędny algorytm znajdowania rozkładu LU macierzy trójprzekątniowej, przy założeniu, że rozkład ten istnieje.

L14.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech dana będzie macierz $A_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ postaci

$$A_n := \begin{bmatrix} a_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ & a_2 & & & & d_2 \\ & & a_3 & & & d_3 \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & a_{n-1} & d_{n-1} \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{n-1} & a_n \end{bmatrix},$$

gdzie zaznaczono jedynie niezerowe elementy. Załóżmy, że istnieje rozkład LU macierzy A_n. Opracuj oszczędny algorytm wyznaczania tego rozkładu. Podaj jego złożoność czasową i pamięciową.

(–) Paweł Woźny