https://skos.ii.uni.wroc.pl/course/view.php?id=401

Ćwiczenia
z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 7

17 listopada 2021 r.

Zajęcia 7 grudnia 2021 r.
Zaliczenie listy **od 5 pkt.**

L7.1. 1 punkt Używając postaci Newtona, podaj wielomian interpolacyjny dla następujących danych:

a)

x_k	-2	-1	0	3
y_k	1	-1	3	-189

b)

x_k	3	1	-2	0	-1
y_k	-189	-83	1	3	-1

c)

x_k	-5	0	2	5	10	1
y_k	5	0	-2	-5	-10	-217

Uwaga. Na pewno zauważysz, że rozwiązując to zadanie nie musisz wykonywać wielu obliczeń.

L7.2. 1 punkt Ile i jakich operacji arytmetycznych należy wykonać, aby dla danych parami różnych węzłów $x_0, x_1, \ldots, x_n$ obliczyć ilorazy różnicowe

$$f[x_0], f[x_0, x_1], \ldots, f[x_0, x_1, \ldots, x_n]? \tag{1}$$

Podaj pseudokod algorytmu wyznaczającego ilorazy różnicowe (1), którego złożoność pamięciowa wynosi $O(n)$.

L7.3. **Włącz komputer!** 1 punkt Przy pomocy programu umożliwiającego rysowanie wykresów funkcji, przygotuj wykresy wielomianów

$$p_{n+1}(x) := (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n) \qquad (n = 4, 5, \ldots, 20)$$

dla x_k $(0 \le k \le n)$ będących węzłami równoodległymi w przedziale $[-1, 1]$. Następnie powtórz eksperyment dla *węzłów Czebyszewa*. Skomentuj wyniki porównując odpowiednie wykresy. Jakie i dlaczego płyną stąd wnioski dla sposobu wyboru węzłów interpolacji?

L7.4. **Włącz komputer!** 1 punkt Niech $t_{nk}^{[a,b]}$ $(0 \le k \le n;\ n \in \mathbb{N})$ oznacza węzły Czebyszewa w przedziale $[a, b]$ $(a < b)$. Podaj jawny wzór dla tych węzłów. Jaką wartość przyjmuje wyrażenie

$$\max_{x\in[a,b]} \left| \left(x - t_{n0}^{[a,b]}\right) \left(x - t_{n1}^{[a,b]}\right) \cdot \ldots \cdot \left(x - t_{nn}^{[a,b]}\right) \right| ?$$

L7.5. 1 punkt Funkcję $f(x) = \ln(3x + 9)$ interpolujemy wielomianem $L_n \in \Pi_n$ w pewnych $n + 1$ różnych punktach przedziału $[-2, -1]$. Znajdź wartość n, dla której

$$\max_{x\in[-2,-1]} |f(x) - L_n(x)| \le 10^{-10}.$$

Jak zmieni się sytuacja, gdy użyjemy węzłów Czebyszewa odpowiadających przedziałowi $[-2, -1]$?

L7.6. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Funkcję $f(x) = e^{x/5}$ interpolujemy wielomianem $L_n \in \Pi_n$ w $n+1$ równoodległych punktach przedziału $[-1, 1]$. Znajdź **możliwie najmniejszą** wartość n, dla której

$$\max_{x \in [-1,1]} |f(x) - L_n(x)| \le 10^{-16} \ ?$$

Jak zmieni się sytuacja, gdy za węzły przyjmiemy zera wielomianu Czebyszewa T_{n+1}?

L7.7. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Język programowania `PWO++` ma bogatą bibliotekę funkcji i procedur numerycznych. Wśród nich znajduje się m.in. procedura `Interp_Newton(x,f)` znajdująca dla wektora `x`$:= [x_0, x_1, \ldots, x_n]$ parami różnych liczb rzeczywistych i wektora `f`$:= [f_0, f_1, \ldots, f_n]$ współczynniki b_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ postaci Newtona wielomianu interpolacyjnego $L_n \in \Pi_n$,

$$L_n(x) := b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + b_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}),$$

spełniającego warunki $L_n(x_i) = f_i$ dla $i = 0, 1, \ldots, n$. Niestety procedura ta ma pewną wadę, mianowicie n **musi być mniejsze** niż 31. W jaki sposób, wykorzystując procedurę `Interp_Newton` **tylko raz**, można **szybko** wyznaczyć współczynniki postaci Newtona wielomianu $L_{31} \in \Pi_{31}$ spełniającego warunki

$$L_{31}(z_i) = h_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, 31;\ z_i \ne z_j \text{ dla } i \ne j)?$$

L7.8. $\boxed{\text{1 punkt}}$ W rzeczywistości procedura `Interp_Newton(x,f)` języka `PWO++` (patrz zadanie poprzednie) ma jeszcze jedno ograniczenie. Chodzi o to, że żaden z elementów wektorów `x` oraz `f` nie może być co do modułu większy niż 2021. Czy jeśli warunek ten nie jest spełniony, to procedura ta może być nadal użyteczna?

(–) Paweł Woźny