Zadanie 1. Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią wielomianów o współczynnikach z $\mathbb{R}$ i stopnia najwyżej 3. Rozważmy układy wektorów x^0, x^1, x^2, x^3 oraz $x^0, x^0+x^1, x^0+x^1+x^2, x^0+x^1+x^2+x^3$. Udowodnij, że są one bazami. Zapisz macierz przejścia między tymi bazami.

Rozważmy przekształcenie $F : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ zadane jako $F(f) = f' + 2f'' + f'''$, gdzie $'$ oznacza pochodną. Wyznacz macierz tego przekształcenia w dwóch podanych powyżej bazach.

Jakub Kowalski, zad. 1, 323319

$B_1 = (1, x, x^2, x^3)$

$B_2 = (1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3)$

Wielomiany stopnia 3. – reprezentuję jako wektory z $\mathbb{R}^4$

$\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\\ \delta\end{bmatrix}$, gdzie $\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ ← wyrażone w bazie $S=(x^3, x^2, x, 1)$

Wtedy: 1. $x^0 \to \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$ $x^1 \to \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}$ $x^2 \to \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$ $x^3 \to \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$

Ten układ jest bazą standardową, więc jest bazą.

2. $x^0 \to \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$ $x^0+x^1 \to \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}$ $x^0+x^1+x^2 \to \begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}$ $x^0+x^1+x^2+x^3 \to \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&1\\0&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$ Ten układ 4 wektorów można zapisać w postaci schodkowej, więc jest liniowo niezależny. Jego rząd wynosi 4, więc jest to baza. $(\dim V = 4)$

Macierz przejścia: • z B_2 w B_1

$P = \begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

• z B_1 w B_2

$P = \begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

Teraz macierz przejścia.
Ponieważ E jest bazą standardową, to

$M_{BE} = \begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

$M_{EB} = M_{BE}^{-1} = \begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

$F : V \to V$ $F(f) = f' + 2f'' + f'''$

• Dla macierzy B_1 $\left(\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}\right)$

(Zapis: tu powinny być wielom.)

Tu wartości F są wyrażone w bazie S, a nie w B1

$F(0,0,0,1) = 0$; $F(0,0,1,0) = (0,0,0,1)$

$F(0,1,0,0) = 2\cdot(0,0,1,0) + 2\cdot 2\cdot(0,0,0,1)$

$F(1,0,0,0) = 3\cdot(0,1,0,0) + 2\cdot 6\cdot(0,0,1,0) + 6\cdot(0,0,0,1)$

$\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix} \xrightarrow{F(?)} \begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&3\\0&0&2&12\\0&1&4&6\end{bmatrix}$ ← otrzymujemy macierz $m_{B_1S}(F)$

• Dla macierzy B_2 $\left(\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&1\\0&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}\right)$

$F(0,0,0,1) = 0$; $F(0,0,1,1) = (0,0,0,1)$

$F(0,1,1,1) = 2\cdot(0,0,1,0) + (0,0,0,1) + 2\cdot 2\cdot(0,0,0,1)$

$F(1,1,1,1) = 3\cdot(0,1,0,0) + 2\cdot(0,0,1,0) + (0,0,0,1) + 2\cdot(6\cdot(0,0,1,0) + 2\cdot(0,0,0,1)) + 6\cdot(0,0,0,1)$

a tu macierz

$\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&1\\0&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix} \xrightarrow{F(?)} \begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&3\\0&0&2&14\\0&1&5&11\end{bmatrix}$ $m_{B_2S}(F)$

Teraz macierz przekształcenia $F(f) = f' + 2f'' + f'''$

dobry zapis

$F(x^0) = (x^0)' + 2(x^0)'' + (x^0)''' = 0$

$F(x^1) = (x^1)' + 2(x^1)'' + (x^1)''' = 1 = 1\cdot x^0 + 0\cdot x^1 + 0\cdot x^2 + 0\cdot x^3$ ← w bazie E

$F(x^2) = (x^2)' + 2(x^2)'' + (x^2)''' = 2x + 4$

$F(x^3) = (x^3)' + 2(x^3)'' + (x^3)''' = 3x^2 + 12x + 6$

więc $F_E = \begin{bmatrix}0&1&4&6\\0&0&2&12\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ $= m_{EE}(F)$

$(m_{BB}(F) =)\ F_B = M_{EB} \cdot F_E \cdot M_{BE} = \begin{bmatrix}0&1&3&-3\\0&0&2&11\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

$m_{B_1B_2}(F) = \begin{pmatrix}0&1&2&-6\\0&0&2&9\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$F(x^0) = 0$

$F(x^1) = 1 = 1\cdot 1 + 0\cdot(1+x) + 0\cdot(1+x+x^2) + 0\cdot(1+x+x^2+x^3)$

$F(x^2) = 2x + 4$

$F(x^3) = 3x^2 + 12x + 6$

Fakt 6.3. *Proste własności wyznacznika*

- *Jeśli* $\vec{v}_i = \vec{v}_j$ *to* $\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n) = 0$.

Definicja 6.4 (Minor macierzy). *Minorem macierzy M nazywamy każdą macierz uzyskaną poprzez usunięcie z M pewnego zbioru wierszy i kolumn.*

Zwyczajowo $A_{i,j}$ to macierz powstała z A poprzez usunięcie i-tego wiersza oraz j-tej kolumny.

Definicja 6.5 (Dopełnienie algebraiczne). Dopełnienie algebraiczne elementu $a_{i,j}$ to $(-1)^{i+j}\det(A_{i,j})$.

Fakt 6.6 (Rozwinięcie Laplace'a). *Dla macierzy kwadratowej $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ mamy:*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{i,j}) .$$

(W1) (liniowość) jest funkcją wielo-liniową, tj. liniową dla każdej kolumny:

$$\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \alpha\vec{v}_i, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_n) = \alpha\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_i, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_n)$$
$$\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_i + \vec{v}_i', \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_n) = \det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_i, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_n) + \det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_i', \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_n)$$

W szczególności

$$\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \vec{0}, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_n) = 0$$

(W2) zastąpienie $\vec{v}_i$ przez $\vec{v}_i + \sum_{j\neq i}\alpha_j\vec{v}_j$ nie powinno zmieniać wartości

$$\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_i + \sum_{j\neq i}\alpha_j\vec{v}_j, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_n) = \det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_i, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_n)$$

(W3) zamiana kolejności dwóch wektorów zmienia znak (objętość ze znakiem)

$$\det(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) = -\det(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_j, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_{j-1}, \vec{v}_i, \vec{v}_{j+1}, \ldots, \vec{v}_n)$$

- *Jeśli* $\vec{v}_i = \vec{v}_j$ *to* $\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n) = 0$. Fakt 6.3

Fakt 6.9. *Wyznacznik macierzy oraz macierzy transponowanej jest taki sam, tj.:*

$$\det(A) = \det(A^T) .$$

Weźmy dowolną macierz $A_{n\times n}$ i dowolną kolumnę j.

$\det(A) = \begin{vmatrix}a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n}\\ \vdots & & & & \vdots\\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n}\end{vmatrix} =$ (z własności W1 $\det(\vec{v}_1, \ldots, a\vec{v}_j, \ldots, \vec{v}_n) = a\det(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_j, \ldots, \vec{v}_n)$)

$= \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \begin{vmatrix}a_{1,1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1,n}\\ a_{i,1} & \cdots & 1 & \cdots & a_{i,n}\\ a_{n,1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{n,n}\end{vmatrix} =$ (z własności W2 możemy odjąć od każdej kolumny $k\neq j$ $a_{i,k}\cdot a_{i,j}$)

$= \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \begin{vmatrix}a_{1,1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1,n}\\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0\\ a_{n,1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{n,n}\end{vmatrix}$ (by przenieść kolumnę i wiersz i potrzebujemy wykonać $|i-j|$ zamian, więc z W3)

$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{|i-j|} a_{i,j} \begin{vmatrix}a_{1,1} & \cdots & a_{1,n}\\ 0 & 1 & 0\\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n}\end{vmatrix} =$ (korzystając z dowodu z poprzedniego)

udowodnijmy, że $(-1)^{|i-j|} = (-1)^{i+j}$

niech $k \in \mathbb{Z}$ i $l \in \mathbb{Z}$, oraz

I niech $i = 2k$, $j = 2l$, wtedy
$|i-j| = |2k-2l| = 2|k-l|$
$i+j = 2k+2l = 2(k+l)$ ← teza jest prawdziwa

II niech $i = 2k+1$, $j = 2l+1$, wtedy
$|i-j| = |2k+1-2l-1| = |2k-2l| = 2|k-l|$
$i+j = 2k+1+2l+1 = 2k+2l+2 = 2(k+l+1)$ ← teza też prawdziwa

III niech $i = 2k+1$ i $j = 2l$ (lub na odwrót)
$|i-j| = |2k+1-2l| = |2(k-l)+1|$
$i+j = 2k+1+2l = 2(k+l)+1$ ← teza znowu prawdziwa

więc $(-1)^{|i-j|} = (-1)^{i+j}$

$= \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j} \cdot \begin{vmatrix}a_{1,1} & \cdots & a_{1,n}\\ 0 & 1 & 0\\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n}\end{vmatrix}$ (używając dowodu z zadania ...) $\det A_{ij}$

$= \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j} \cdot \begin{vmatrix}a_{1,1} & \cdots & a_{1,n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n}\end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij})$

udowodniliśmy, że dla dowolnego j zachodzi

$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$

wiemy, że $\det(A) = \det(A^T)$
niech $B = A^T$ (zamieniamy kolumny z wierszami)
wtedy

$\det(A) = \det(B) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} b_{ij} \cdot \det(B_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ji} \cdot \det(A_{ji})$

zatem udowodniliśmy to dla dowolnego j. wiersza.

$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$

Zadanie 10

$M = \begin{bmatrix}M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_n\end{bmatrix}$ Oznaczmy jako N_i macierz $\begin{bmatrix}M_{n-i+1} & \\ & \ddots \\ & & M_n\end{bmatrix}$

wtedy (Podstawa indukcji)

$N_2 = \begin{bmatrix}M_{n-1} & 0\\ 0 & M_n\end{bmatrix}$

Jest to szczególny przypadek macierzy $\begin{bmatrix}A & 0\\ B & C\end{bmatrix}$ gdzie $B = 0$

Skorzystajmy z własności wyznacznika z zadania 6:

$\det(N_2) = \det(M_{n-1}) \cdot \det(M_n)$

(Krok indukcyjny)

Załóżmy, że dla pewnego $i < k$ zachodzi

$\det(N_i) = \det(M_{n-i+1}) \cdot \det(M_{n-i+2}) \cdots \det(M_n)$

$N_{i+1} = \begin{bmatrix}M_{n-i} & \\ & N_i\end{bmatrix}$

Zatem $\det(N_{i+1}) = \det(M_{n-i}) \cdot \det(N_i)$
$= \det(M_{n-i}) \cdot \det(M_{n-i+1}) \cdots \det(M_n)$

Zatem $\det(M) = \det(N_n) = \prod_{i=1}^{n} \det(M_i)$

8.

$A = \begin{bmatrix}a&b&c&d\\ b&-a&-d&c\\ c&d&-a&-b\\ d&-c&b&-a\end{bmatrix}$ $A^T = \begin{bmatrix}a&b&c&d\\ b&-a&d&-c\\ c&-d&-a&b\\ d&c&-b&-a\end{bmatrix}$

$AA^T = \begin{bmatrix}a^2+b^2+c^2+d^2 & ab-ab+cd-dc & ac-dc-ac+bd & ad+bc-bc-ad\\ \vdots & a^2+b^2+c^2+d^2 & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & a^2+b^2+c^2+d^2 & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & a^2+b^2+c^2+d^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x&0&0&0\\0&x&0&0\\0&0&x&0\\0&0&0&x\end{bmatrix}$

$x = a^2+b^2+c^2+d^2$

$\det(AA^T) = x\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}x&0&0\\0&x&0\\0&0&x\end{vmatrix} + 0 + \ldots = x\cdot x^3 = x^4 = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4$

$\det(A) = \sqrt{(a^2+b^2+c^2+d^2)^4}$

Twierdzenie 6.8 (Cauchy).

$$\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B) .$$

Fakt 6.9. *Wyznacznik macierzy oraz macierzy transponowanej jest taki sam, tj.:*

$$\det(A) = \det(A^T) .$$