Zadanie 1. Niech $W \le V$ będą przestrzeniami liniowymi, zaś $U \subseteq V$. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

1. istnieje wektor $u \in V$, taki że $U = u + W$;
2. istnieje wektor $u \in U$, taki że $U = u + W$;
3. dla każdego wektora $u \in U$ zachodzi $U = u + W$.

Udowodnij też równoważność poniższych warunków:

1. istnieje wektor $u \in V$, taki że $U - u$ jest przestrzenią liniową;
2. istnieje wektor $u \in U$, taki że $U - u$ jest przestrzenią liniową;
3. dla każdego wektora $u \in U$ zbiór $U - u$ jest przestrzenią liniową.

Jakub Kowalski, 323419, Zadanie 1.

a) • 3 → 2

$\forall_{u\in U}\ U = u+W \to \exists_{u\in U}\ U = u+W$ Oczywiste.

• 2 → 1

$\exists_{u\in U}\ U = u+W \to \exists_{u\in V}\ U = u+W$

Skoro $U \subseteq V$ to $\forall_{u\in U}\ u \in V$, zatem jeśli $\exists_{u\in U}\ U = u+W$ to oczywiście $\exists_{u\in V}\ U = u+W$.

• 1 → 2

$\exists_{u\in V}\ U = u+W \to \exists_{u\in U}\ U = u+W$

Weźmy taki $u \in V$, że $U = u+W$

Ponieważ $U = \{u+w : w\in W\}$ oraz $\vec{0} \in W$ to $u + \vec{0} = u \in U$, czyli $\exists_{u\in U}\ U = u+W$.

$1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 3$ ✓

można też:

$1 \Rightarrow 2$, $2 \Rightarrow 3$, $3 \Rightarrow 1$

• 2 → 3

$\exists_{u\in U}\ U = u+W \to \forall_{u\in U}\ U = u+W$

Weźmy wektor $u_1 \in U$, taki że $U = u_1 + W$

$U = \{u_1 + w : w \in W\}$

Weźmy dowolny wektor $u_2 \in U$

Można go zapisać w postaci $u_2 = u_1 + w'$, $w' \in W$

Chcemy pokazać, że $\underbrace{u_1 + W}_{U} = u_2 + W$

$\subseteq$: Weźmy dowolny wektor $x \in u_1 + W$. $x = u_1 + w_1 \in W + u_1$

$x = u_1 + w_1 = u_1 + w_1 + \underbrace{w' - w'}_{\vec{0}} = \underbrace{u_1 + w'}_{u_2} + w_1 - w' = u_2 + \underbrace{w_1 - w'}_{\in W} \in u_2 + W$

$\supseteq$: Weźmy dowolny wektor $x \in u_2 + W$ $x = u_2 + w_2 \in W + u_2$

$x = u_2 + w_2 = u_1 + \underbrace{w' + w_2}_{\in W} \in u_1 + W$

Zatem $u_1 + W = u_2 + W$

zatem $\forall_{u\in U}\ U = u+W$.

b) • 3 → 2

Skoro $\forall_{u\in U}$ $U - u$ jest przest. lin., to tym bardziej $\exists_{u\in U}$ taki, że $U-u$ jest przest. lin.

• 2 → 1

$\exists_{u\in U}$ $U-u$ to przestrz. lin. $\to \exists_{u\in V}$ $U-u$ to przestrz. lin.

Weźmy takie $u \in U$, że $U-u$ to przestrz. lin.

Skoro $U \subseteq V$, to $u \in V$, zatem $\exists_{u\in V}$, że $U-u$ to przestrz. lin.

• 1 → 2

Załóżmy, że $\exists_{u\in V}$, że $U-u$ to przestrz. lin.

Weźmy takie $u \in V$ takie, że $U-u$ to pewna podprzestrzeń liniowa

Nazwijmy ją $W \le V$. A więc $U - u = W$, więc $U = u + W$.

Zatem $\exists_{u\in V}$, że $U = u+W$. Z implikacji 1→2 w pod. a wiemy, że z tego wynika: $\exists_{u\in U}\ U = u+W \equiv \exists_{u\in U}\ U-u = W$, czyli $\exists_{u\in U}$ taki, że $U-u$ to przestrzeń liniowa.

Zad 3 $F(x,y,z) = (2x+y,\ 3x-z,\ 5x+y-z,\ -2x+2y-2z)$

$F(1,0,0) = (2,3,5,-2)$

$F(0,1,0) = (1,0,1,2)$

$F(0,0,1) = (0,-1,-1,-2)$

$\operatorname{im} F = LIN((2,3,5,-2),(1,0,1,2),(0,-1,-1,-2))$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)-2\cdot(2)} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & -6 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)+3\cdot(3)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -12 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

baza: $B = \{(0,0,0,-12),(1,0,1,2),(0,-1,-1,-2)\}$

$G(x,y,z) = (x+y,\ y-2z,\ 3z,\ x-y)$

$G(1,0,0) = (1,0,0,1)$

$G(0,1,0) = (1,1,0,-1)$

$G(0,0,1) = (0,-2,3,0)$

$\operatorname{im} G = LIN((1,0,0,1),(1,1,0,-1),(0,-2,3,0))$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)-(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)+2\cdot(2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

baza: $B = \{(1,0,0,1),(0,1,0,-2),(0,0,3,-4)\}$

Zeskanowane w CamScanner

$H(x,y,z) = (x+y,\ y+z)$

$H(1,0,0) = (1,0)$

$H(0,1,0) = (1,1)$

$H(0,0,1) = (0,1)$

$\operatorname{Im} H = LIN((1,0),(1,1),(0,1))$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)-(3)-(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

baza: $B = \{(1,0),(0,1)\}$

Zeskanowane w CamScanner

Zad 4

Zadanie 4. Które z poniższych przekształceń są liniowe (dziedzinami i przeciwdziedzinami przekształceń są przestrzenie $\mathbb{R}^n$ dla odpowiednich n)?

- $L(x,y) = (2x-y,\ x+3y-1,\ 5x+2y)$,
- $L'(x,y,z) = (3x+5y-2z,\ 2x-y)$,
- $L''(x,y,z) = (x\cdot y+z,\ -2x-z,\ -2y-z)$.

Dla tych z powyższych przekształceń, które są liniowe, znajdź ich rzędy oraz podaj bazy jądra i obrazu.

1) $L(x,y) = (2x-y,\ x+3y-1,\ 5x+2y)$

Sprawdzam, czy przekształcenie jest liniowe z definicji

niech $\alpha = (x_1, y_1)$, $\beta = (x_2, y_2)$ oraz

$\alpha+\beta = (x_1+x_2,\ y_1+y_2)$

$a\alpha = (ax_1,\ ay_1)$

definicja: Funkcja $\varphi: V \to W$ nazywamy przekształceniem liniowym jeśli dla dowolnych $\alpha, \beta \in V$ oraz każdego $a \in R$ zachodzi

- $\varphi(\alpha+\beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$
- $\varphi(a\alpha) = a\varphi(\alpha)$

sp.

$\varphi(\alpha+\beta) = L(x_1+x_2,\ y_1+y_2) = (2(x_1+x_2)-(y_1+y_2),\ (x_1+x_2)+3(y_1+y_2)-1,\ 5(x_1+x_2)+2(y_1+y_2))$

$\varphi(\alpha) = L(x_1,y_1) = (2x_1-y_1,\ x_1+3y_1-1,\ 5x_1+2y_1)$

$\varphi(\beta) = L(x_2,y_2) = (2x_2-y_2,\ x_2+3y_2-1,\ 5x_2+2y_2)$

$\varphi(\alpha)+\varphi(\beta) = L(x_1,y_1)+L(x_2,y_2) =$

$= (2x_1-y_1+2x_2-y_2,\ x_1+3y_1-1+x_2+3y_2-1,\ 5x_1+2y_1+5x_2+2y_2) =$

$= (2(x_1+x_2)-(y_1+y_2),\ (x_1+x_2)+3(y_1+y_2)-2,\ 5(x_1+x_2)+2(y_1+y_2))$

$\varphi(\alpha+\beta) \ne \varphi(\alpha)+\varphi(\beta)$, zatem przekształcenie $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ nie jest przekształceniem liniowym

(lub: dla przekszt. lin. $\varphi(\vec{0}) = \vec{0}$

tu $\varphi(\vec{0}) = (0,-1,0) \ne \vec{0} \Rightarrow$ nie jest lin.)

2) $L'(x,y,z) = (3x+5y-2z,\ 2x-y)$

niech $\alpha = (x_1,y_1,z_1)$, $\beta = (x_2,y_2,z_2)$,

$\alpha+\beta = (x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2)$,

$a\alpha = (ax_1,\ ay_1,\ az_1)$

sp.

$\alpha+\beta$

$L'(x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2) =$

$= (3(x_1+x_2)+5(y_1+y_2)-2(z_1+z_2),\ 2(x_1+x_2)-(y_1+y_2))$

α

$L'(x_1,y_1,z_1) = (3x_1+5y_1-2z_1,\ 2x_1-y_1)$

β

$L'(x_2,y_2,z_2) = (3x_2+5y_2-2z_2,\ 2x_2-y_2)$

$L'(x_1,y_1,z_1)+L'(x_2,y_2,z_2) =$

$= (3x_1+5y_1-2z_1+3x_2+5y_2-2z_2,\ 2x_1-y_1+2x_2-y_2) =$

$= (3(x_1+x_2)+5(y_1+y_2)-2(z_1+z_2),\ 2(x_1+x_2)-(y_1+y_2)) = L'(x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2)$

sprawdzam drugi warunek

$L'(ax_1, ay_1, az_1) = (3ax_1+5ay_1-2az_1,\ 2ax_1-ay_1) =$

$= (a(3x_1+5y_1-2z_1),\ a(2x_1-y_1)) =$

$= a(3x_1+5y_1-2z_1,\ 2x_1-y_1) = aL'(x_1,y_1,z_1)$

spełnione są oba warunki, zatem $L': \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ to przekształcenie liniowe

rząd przekształcenia = $\dim(\operatorname{Im}(L'))$

obraz $\operatorname{Im}(L')$

jądro $\ker(L')$

obraz to przestrzeń rozpinana przez wektory z bazy

$\operatorname{Im} L' = LIN(\{L'(1,0,0), L'(0,1,0), L'(0,0,1)\}) =$

$= LIN(\{(3,2),(5,1),(-2,0)\})$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \to w_2 - w_1 + w_3} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \to w_1 + w_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 \to w_3 + 2w_1 + 4w_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$LIN((1,2),(0,-1))$ ← baza obrazu $\dim(\operatorname{Im}(L')) = 2$

$rk(L') = 2$ (rząd przekształcenia liniowego)

$\ker L' = \{\vec{v} : L(\vec{v}) = \vec{0}\}$

$(3x+5y-2z,\ 2x-y) = (0,0)$ dostajemy układ równań

$\begin{cases} y = 2x \\ 13x - 2z = 0 \end{cases}$ $z = \frac{13}{2}x$ ← baza jądra

wektor przestrzeni $(x, 2x, \frac{13}{2}x)$ $\rightsquigarrow$ np. (biorąc $x=1$) $((1, 2, \frac{13}{2}))$ ← baza jądra

$\dim(V) = 3 \wedge \dim(V) = \dim(\operatorname{Im}(L')) + \dim(\ker(L'))$

$3 = 2 + \dim(\ker(L'))$

$\dim(\ker(L')) = 1$ wymiar jądra

3) $L''(x,y,z) = (x\cdot y+z,\ -2x-z,\ -2y-z)$

niech $\alpha = (x_1,y_1,z_1)$, $\beta = (x_2,y_2,z_2)$,

$\alpha+\beta = (x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2)$,

$a\alpha = (ax_1,\ ay_1,\ az_1)$

$\alpha+\beta$

$L''(x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2) =$

$= ((x_1+x_2)(y_1+y_2)+z_1+z_2,\ -2(x_1+x_2)-(z_1+z_2),\ -2(y_1+y_2)-(z_1+z_2)) =$

$= (x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+x_2y_2+z_1+z_2,\ -2x_1-2x_2-z_1-z_2,\ -2y_1-2y_2-z_1-z_2) =$

α

$L''(x_1,y_1,z_1) = (x_1y_1+z_1,\ -2x_1-z_1,\ -2y_1-z_1)$

β

$L''(x_2,y_2,z_2) = (x_2y_2+z_2,\ -2x_2-z_2,\ -2y_2-z_2)$

$L''(x_1,y_1,z_1)+L''(x_2,y_2,z_2) = (x_1y_1+z_1+x_2y_2+z_2,\ -2x_1-z_1-2x_2-z_2,\ -2y_1-z_1-2y_2-z_2)$

zatem przekształcenie nie jest liniowe

• Jaki jest wymiar jądra $\ker F$?

$\dim(\mathbb{V}) = \dim(\operatorname{Im}(F)) + \dim(\ker F)$

$\Downarrow$

$n = \dim(\operatorname{Im}(F)) + \dim(\ker F)$

Wiedząc, że $F(\vec{v}) \ne \vec{0}$ dla pewnego $\vec{v} \in \mathbb{V}$ oraz, że $\operatorname{Im}(F)$ jest przestrzenią liniową, jej wymiar będzie równy 1. Nie może być większy niż wymiar ~~ciała~~ przestrzeni na którą przechodzi. Wymiar $\mathbb{F}$ to 1.

Zatem: $n = 1 + \dim(\ker F)$

$\Downarrow$

$\dim(\ker F) = n-1$

• $\vec{w} \in \mathbb{V} \setminus \ker F$, wtedy $LIN(\ker F \cup \{\vec{w}\}) = \mathbb{V}$

$LIN(\ker F \cup \{\vec{w}\}) = LIN(\ker F) + LIN(\{\vec{w}\}) =$

$= \ker F + LIN(\{\vec{w}\})$ ($\ker F$ jest przestrzenią liniową)

Pokażemy równość:

$\ker F + LIN(\{\vec{w}\}) = \mathbb{V}$

1. Weźmy dowolne $\vec{v} \in \ker F + LIN(\{\vec{w}\})$

$\vec{v} = \vec{i} + \vec{k}$, że $\ker F$ $\vec{k} \in LIN(\{\vec{w}\})$, $\vec{i}, \vec{k} \in \mathbb{V}$

$\mathbb{V}$ jest przestrzenią liniową więc $\vec{v} \in \mathbb{V}$

2. Weźmy dowolne $\vec{p} \in \mathbb{V}$

- $F(\vec{p}) = \vec{0}$, wtedy $\vec{p} = \vec{p} + \vec{0}$, więc $\vec{p} \in \ker F + LIN(\{\vec{w}\})$
- $F(\vec{p}) \ne \vec{0}$, wtedy $\vec{p} = \vec{0} + \vec{p}$, więc $\vec{p} \in \ker F + LIN(\{\vec{w}\})$?

$F(p) = \alpha \cdot F(w)$, biorąc $\alpha = \frac{F(p)}{F(w)}$

$0 = F(p) - \alpha F(w) = F(\underbrace{p - \alpha w}_{v\ \in\ \ker F})$

$\Downarrow$

$p = \underbrace{v}_{\ker F} + \underbrace{\alpha w}_{Lin(w)} \in \ker F + Lin(w)$ ✓

• $F, G: \mathbb{V} \to \mathbb{F}$

$LIN(\ker F \cup \{\vec{w}\}) = LIN(\ker G \cup \{\vec{w}\})$

Niech baza $\mathbb{V}$ to: $B_V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$

Niech baza $\ker F$ to: $B_F = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}\}$

$B_V = \{B_F \cup \{\vec{w}\}\}$, są to wektory niezależne ze zbioru $\mathbb{V}$.

$\vec{w}$ nie jest kombinacją liniową wektorów z B_F, ponieważ $\vec{w} \notin \ker F$.

$LIN(\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, \vec{w}\}) = LIN(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{n-1}, \vec{w}\})$

$LIN(\{F(\vec{v}_1), F(\vec{v}_2), \dots, F(\vec{w})\}) = LIN(\{G(\vec{v}_1) \dots G(\vec{w})\})$

$LIN(\{\vec{0}, \dots F(\vec{w})\}) = LIN(\{\vec{0}, \dots G(\vec{w})\})$

$LIN(\{F(\vec{w})\}) = LIN(\{G(\vec{w})\})$

$\Downarrow$

$\alpha F(\vec{w}) = \beta G(\vec{w})$

$F(\vec{w}) = \frac{\beta}{\alpha} G(\vec{w})$ dla dowolnego $\vec{w} \in \mathbb{V} \setminus \ker F$

dla $\vec{w} \in \ker F \to F(\vec{w}) = \vec{0} = G(\vec{w}) \Rightarrow F(\vec{w}) = \beta G(\vec{w})$

Chcemy: $(\forall v \in \mathbb{V})$ $F(v) = \frac{\beta}{\alpha} G(v)$

$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{n-1} v_{n-1} + \alpha_n w$

Wtedy:

$F(v) = \underbrace{F(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{n-1} v_{n-1})}_{0} + \alpha_n F(w) =$

$= \alpha_n F(w) = \alpha_n \frac{\beta}{\alpha} G(w) = \frac{\beta}{\alpha} G(v)$

$G(v) = \underbrace{G(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{n-1} v_{n-1})}_{0} + \alpha_n G(w)$

np.