https://skos.ii.uni.wroc.pl/course/view.php?id=401

Ćwiczenia
z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 6

10 listopada 2021 r.

Zajęcia 23 listopada 2021 r.
Zaliczenie listy **od 6 pkt.**

L6.1. 1 punkt Uzasadnij, że *schemat Hornera* jest algorytmem numerycznie poprawnym.

L6.2. 1 punkt Opracuj **oszczędny algorytm** zamiany postaci Newtona wielomianu na jego postać potęgową. Określ złożoność opracowanej metody. Jakie zastosowania może mieć taki algorytm?

L6.3. 1 punkt Sformułuj i udowodnij *algorytm Clenshawa* obliczania wartości wielomianu

$$w(x) = \frac{1}{2}c_0T_0(x) + c_1T_1(x) + c_2T_2(x) + \ldots + c_nT_n(x)$$

w punkcie x, gdzie $c_0, c_1, \ldots, c_n$ są danymi stałymi, a T_n oznacza n-ty *wielomiany Czebyszewa.*

L6.4. 2 punkty Niech T_n $(n = 0, 1, \ldots)$ oznacza n-ty wielomian Czebyszewa.

(a) Podaj postać potęgową wielomianu T_7.

(b) Jakimi wzorami wyrażają się współczynniki wielomianu T_n przy x^n i x^{n-1}?

(c) Korzystając z faktu, że dla dowolnego x z przedziału $[-1, 1]$ n-ty $(n \geq 0)$ wielomian Czebyszewa wyraża się wzorem $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$:

i. sprawdź, że $|T_n(x)| \leq 1 \quad (-1 \leq x \leq 1;\ n \geq 0)$;

ii. wyznacz wszystkie *punkty ekstremalne* n-tego wielomianu Czebyszewa, tj. rozwiązania równania $|T_n(x)| = 1$;

iii. udowodnij, że wielomian Czebyszewa T_{n+1} $(n \geq 0)$ ma $n+1$ zer rzeczywistych, pojedynczych, leżących w przedziale $(-1, 1)$.

L6.5. 2 punkty Wykaż, że dla dowolnych $k, l \in \mathbb{N}$ oraz $x \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$T_{kl}(x) = T_k(T_l(x)).$$

Wykorzystaj podaną zależność do opracowania **szybkiego algorytmu** wyznaczania wartości wielomianu Czebyszewa **wysokiego** stopnia niebędącego liczbą pierwszą.

L6.6. 1 punkt Udowodnij istnienie i jednoznaczność rozwiązania zadania interpolacyjnego Lagrange'a.

L6.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Podaj postać Lagrange'a wielomianu interpolacyjnego dla danych

x_k	-4	-1	0	3
y_k	-1	0	1	5

.

L6.8. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech będzie $f(x) = 2021x^5 - 1977x^4 + 1410x^2 - 1945x + 966$.

(a) Wyznacz wielomian stopnia ≤ 5 interpolujący funkcję f w punktach $-2021,\ -1977,\ -1410,\ 966,\ 1791,\ 2021$.

(b) Wyznacz wielomian drugiego stopnia, interpolujący funkcję f w punktach $-1,\ 0,\ 1$.

L6.9. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykaż, że dla wielomianów

$$\lambda_k(x) := \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \qquad (k = 0, 1, ..., n)$$

zachodzi

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k(x) \equiv 1,$ b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k(0) x_k^j = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$

(–) Paweł Woźny