Задача решения антагонистической матричной игры.

1. Постановка задачи.

Антагонистическая игра.

Пусть функция $F(x, y)$ определена на декартовом произведении $X * Y$, где X, Y - множества произвольной природы. Пара $(x^0, y^0) \in X * Y$ называется седловой точкой функции $F(x, y)$ на $X * Y$, если

$$F(x, y^0) \leq F(x^0, y^0) \leq F(x^0, y^0) \forall x \in X, \forall y \in Y$$

Опишем антагонистическую игру. В ней принимают участие два игрока: 1 и 2. Игрок выбирают стратегии x и y из множеств X и Y соответственно. Нормальная форма игры подразумевает, что каждый игрок выбирает стратегию независимо от выбора соперника. Задана функция выигрыша $F(x, y)$ первого игрока определенная на $X * Y$. Выигрыш первого игрока является проигрышем второго. Цель первого игрока заключается в увеличении своего выигрыша, в то время как цель второго - в уменьшении выигрыша первого игрока.
Говорят, что антагонистическая игра имеет решение, если функция $F(x, y)$ имеет на $X * Y$ седловую точку. Пусть (x^0, y^0) седловая точка функции $F(x, y)$. Тогда тройка $(x^0, y^0, v = F(x^0, y^0))$ называется решением игры, x^0, y^0 оптимальными стратегиями, а v значением игры.
Антагонистическая игра называется матричной , если множества стратегий игроков конечны:$X = \{1, \ldots, m\}, Y = \{1, \ldots, n\}$. Матрица $A = (a_{ij})_{mn}$ называется матрицей игры. Первый игрок выбирает в ней номер строки, второй – номер столбца. В матричных обозначениях (i^0, j^0) – седловая точка матрицы, если

$$a_{ij^0} \leq a_{i^0j^0} \leq a_{i^0j}, \ i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n.$$

Для того, чтобы функция $F(x, y)$ на $X * Y$ имела седловую точку, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено равенство

$$\underset{x \in X}{max} \underset{y \in Y}{min} F(x, y) = \underset{y \in y}{min} \underset{x \in X}{max} F(x, y)$$

Смешанное расширение антагонистических игр.

Смешанной стратегией первого игрока в антагонистической игре называется вероятностное распределение на множестве стратегий X. Таким образом Для первого игрока применить смешанную стратегию – это выбрать стратегию $x \in X$ как реализацию случайной величины, имеющей закон распределения ϕ. Множество смешанных стратегий первого игрока –

$$P = \{p = (p_1, \dots, p_m) \mid \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, p_i \geq 0, i = 1, \dots, m\}$$

Множество смешанных стратегий второго игрока –

$$Q = \{q = (q_1, \dots, q_n) \mid \sum_{j=1}^{n} q_i = 1, q_j \geq 0, j = 1, \dots, n\}$$

Математическое ожидание выигрыша первого игрока –

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i a_{ij} q_j$$

Теорема 1. Всякая матричная игра имеет решение в смешанных стратегиях. Теорема 2. Для того чтобы тройка (p_0, q_0, v) была решением в смешанных стратегиях игры с матрицей A, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие –

$$A(i, q^0) \leq v \leq A(p^0, j),\ i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n.$$

2. Математический подход к решению.

Значение матричной игры представимо в виде

$$v = \underset{p \in P}{max} \underset{1 \leq j \leq n}{min} A(p, j) = \underset{p \in P}{max} \underset{1 \leq j \leq n}{min} \sum_{j=1}^{m} p_i a_{ij}$$

Введем вспомогательную переменную u и запишем задачу нахождения максимина как задачу ЛП

$$v = \underset{(u,p) \in B}{max} u$$

, где

$$B = \{(u, p) \mid \sum_{j=1}^{m} p_i a_{ij} \geq u,\ j = 1, \dots, n \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, p \geq 0, i = 1, \dots, m\}.$$

Это возможно, так как при фиксированном $p \in P$ максимальное значение u при ограничениях $(u, p) \in B$ равно $\underset{1 \leq j \leq n}{min} A(p, j)$.

Сделаем замену переменных $z_i = \frac{p_i}{u}$, $z = (z_1, \ldots, z_m)$ и учитывая ограничения $(u,p) \in B$ получим

$$\sum_{i=1}^{m} z_i = \frac{1}{u}, \sum_{i=1}^{m} a_{ij} z_i \geq 1, j = 1, \ldots, n, z_i \geq 0, i = 1, \ldots, m.$$

отсюда

$$v = \max_{(u,p)\in B} u = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} z_i^0}$$

, где z^0 – оптимальное решение задачи ЛП:

$$\sum_{i=1}^{m} z_i \to min$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} z_i \geq 1, j = 1, \ldots, n, z_i \geq 0, i = 1, \ldots, m.$$

По z^0 находим значение игры и оптимальную смешанную стратегию первого игрока:

$$v = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} z_i^0},\ p^0 = vz^0$$

Аналогично получаем, что

$$v = \min_{q\in Q} \underset{1\leq i\leq m}{A}(i,q) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} w_j^0},$$

где w^0 - оптимальное решение задачи ЛП:

$$\sum_{j=1}^{n} w_j \to max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j \leq 1, i = 1, \ldots, m, w_j \geq 0, j = 1, \ldots, n.$$

Здесь $q^0 = vw^0$ – оптимальная смешанная стратегия второго игрока. Построенные задачи двойственны по отношению друг к другу.

3. Симплекс-метод.

Суть симплексного метода решения задачи ЛП заключается в следующих шагах:

1 шаг. Перейти к канонической форме ЗЛП путем введения дополнительных базисных переменных. По этой задаче запишем систему линейных уравнений, соответствующую этой задаче.

2 шаг. Для нахождения базисного решения надо привести данную систему к диагональной форме по базисным переменным. Полагая переменные не

вошедшие в диагональную форму равными нулю получаем значения для базисных переменных.
**справка: для нахождения оптимального решения достаточно рассмотрением только базисных решений в силу следующих утверждений:*
1. Если СЛУ совместна, то она имеет допустимое базисное решение.
2. Если задача ЛП в канонической форме имеет допустимое решение, то она имеет и допустимое базисное решение.
3. Если задача ЛП имеет оптимальное решение, то она имеет и оптимальное базисное решение.
Шаг 3. Составим таблицу коэффициентов данной диагональной формы(Симплексную таблицу).
Шаг 4. Проверка на оптимальность, нахождение ведущего столбца Симплекс-Таблицы. Если все коэффициенты индексной строки неотрицательны, то план оптимальный и задача выполнена. Иначе из отрицательных коэффициентов индексной строки выбирается наибольший по абсолютной величине. Затем элементы столбца свободных членов симплексной таблицы делит на элементы того же знака ведущего столбца. Далее идет построение нового опорного плана. Переход к новому опорному плану осуществляется в результате пересчета симплексной таблицы методом Жордана—Гаусса.
Шаг 5. Заново проверяем на оптимальность.

3. Программный подход к решению.

Решение задачи:
Задача решается посредством функции nash_equilibrium:
Сначала мы вводим массив a1 класса numpy.ndarray. Используя поле класса numpy.ndarray.shape присваиваем переменным n,m число строк и столбцов соответственно. Далее вводится переменная mina, которой, используя метод .min(), присваиваем минимальное значение из элементов матрицы a1. Далее при помощи mina преобразуем матрицу a1 в строго положительную по всем эл-там. Далее вводится вторая матрица a2, полученная путем транспонирования и умножения на -1 матрицы a1. При помощи двух списков длины n и m, которые участвуют в качестве коэффициентов целевой функции при использовании функции scipy.optimize.linprog, которая решает данную задачу симплексным методом.

Визуализация:
Задача визуализации решается внутри функции visualization, которая использует библиотеку matplotlib.pyplot и модуль random:
pyplot.axis – задает размерность осей графика.
random.shuffle – рандомизирует значения списка colors.
pyplot.scatter – метод для нанесения маркера в точке.
pyplot.axvline – рисует вертикальные линии.
pyplot.show – выводит фигуру.

Библиотеки и модули:
– SciPy.optimize
– NumPy
–Random
– MatPlotLib.pyplot

Работу выполнили: Евенко Алеся (Код), Насыров Тимур (файл Readme), Таипов Михаил (Код).