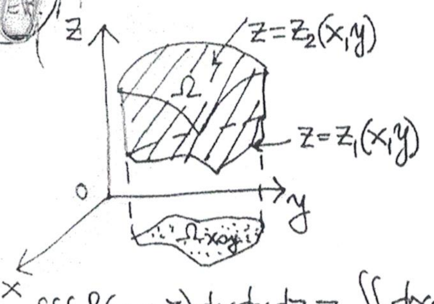
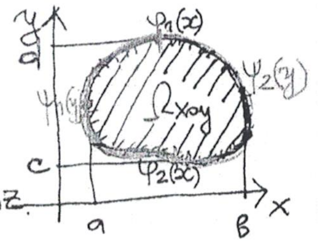
Потрійний інтеграл



$\Omega=\{(x,y,z):(x,y)\in\Omega_{xoy},\ z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)\}$ — циліндрична у напрямі OZ

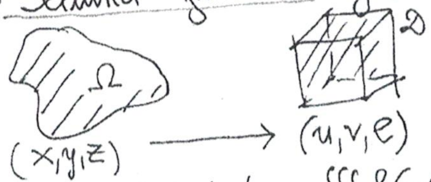
$\Omega_{xoy}=\text{пр}_{xoy}\Omega$ — правильна область



$$\underbrace{\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz}_{\text{потрійний інтеграл}}=\underbrace{\iint\limits_{\Omega_{xoy}}dxdy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}fdz}_{\text{подвійний інтеграл}}=\underbrace{\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}dy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)dz}_{\text{повторний інтеграл}}.$$

$\Omega_{xoy}=\{(x,y): a\le x\le b,\ \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}=\{(x,y):\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y),\ c\le y\le d\}$.

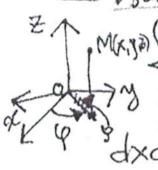
- Заміна змінних у потрійному інтегралі:



$$\begin{cases}x=x(u,v,e)\\ y=y(u,v,e)\\ z=z(u,v,e)\end{cases}\qquad dxdydz=|J|\,dudvde \quad \text{де}\quad J=\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,e)}=\begin{vmatrix}x'_u & x'_v & x'_e\\ y'_u & y'_v & y'_e\\ z'_u & z'_v & z'_e\end{vmatrix};$$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint\limits_{\mathcal{D}} f(x(u,v,e),y(u,v,e),z(u,v,e))\cdot|J|\,dudvde.$$

- Циліндрична система:

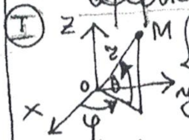


$$\begin{cases}x=\rho\cos\varphi, & \rho\ge0,\\ y=\rho\sin\varphi, & 0\le\varphi\le2\pi\\ z=z, & -\infty<z<\infty\end{cases}$$

$dxdydz=\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$

- Сферична система:

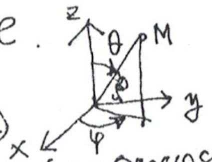
I



$$\begin{cases}x=r\cos\varphi\cos\theta, & (r\ge0)\\ y=r\sin\varphi\cos\theta, & 0\le\varphi\le2\pi\\ z=r\sin\theta, & \theta\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]\end{cases}$$

$dxdydz=r^2\cos\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta$

II



$\rho\ge0$, $\varphi\in[0,2\pi)$, $\theta\in[0,\pi]$

$$\begin{cases}x=\rho\cos\varphi\sin\theta,\\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta,\\ z=\rho\cos\theta\end{cases}$$

$dxdydz=\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$

- Об'єм тіла Ω: $V_\Omega=\iiint\limits_{\Omega}dxdydz$
- Маса (заряд) тіла Ω з густиною $\gamma=\gamma(x,y,z)$ маси: $m=\iiint\limits_{\Omega}\gamma(x,y,z)\,dxdydz$.
- Статичні моменти відносно площин:

  $M_{xoy}=\iiint\limits_{\Omega}z\gamma(x,y,z)\,dxdydz$;

  $M_{yoz}=\iiint\limits_{\Omega}x\gamma(x,y,z)\,dxdydz$;

  $M_{xoz}=\iiint\limits_{\Omega}y\gamma(x,y,z)\,dxdydz$

- Центр ваги тіла Ω з густиною $\gamma(x,y,z)$: $\longrightarrow C(x_c,y_c,z_c)$

  $x_c=\frac{1}{m}M_{yoz}$; $y_c=\frac{1}{m}M_{xoz}$; $z_c=\frac{1}{m}M_{xoy}$, де $m=\iiint\limits_{\Omega}\gamma(x,y,z)\,dxdydz$.

- Моменти інерції відносно площин:

  $I_{yoz}=\iiint\limits_{\Omega}x^2\gamma(x,y,z)\,dxdydz$;

  $I_{xoz}=\iiint\limits_{\Omega}y^2\gamma(x,y,z)\,dxdydz$;

  $I_{xoy}=\iiint\limits_{\Omega}z^2\gamma(x,y,z)\,dxdydz$.

- Моменти інерції відносно осей:

  $I_{ox}=\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)\gamma(x,y,z)\,dxdydz$;

  $I_{oy}=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+z^2)\gamma(x,y,z)\,dxdydz$;

  $I_{oz}=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\gamma(x,y,z)\,dxdydz$.

- Момент інерції тіла Ω відносно початку координат:

  $I_0=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\gamma(x,y,z)\,dxdydz$.