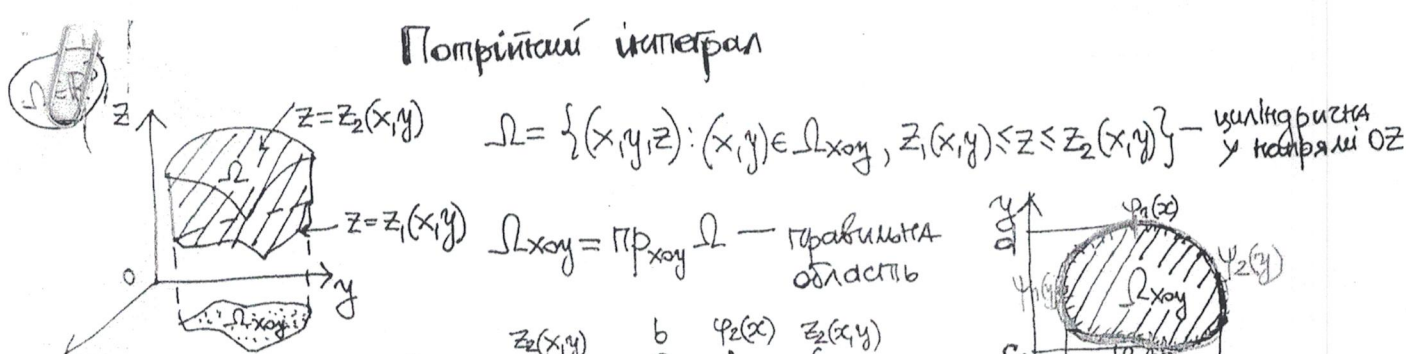


Поприйнятий інтервал

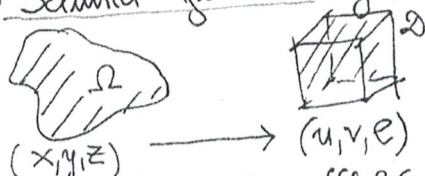


$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\Omega_{xy}} dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

Поприйнятий інтервал

$$\Omega_{xy} = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\} = \{(x, y) : \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), c \leq y \leq d\}$$

Заміна змінних у поприймай інтервалі:



$$\begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases} \quad \text{де } J = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix};$$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \cdot |J| du dv dw$$

Кулідрова система:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, & \rho \geq 0, \\ y = \rho \sin \varphi, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ z = z, & -\infty < z < \infty \end{cases}$$

$$dx dy dz = \rho d\rho d\varphi dz$$

Сферична система:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \theta, & (r \geq 0) \\ y = r \sin \varphi \cos \theta, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ z = r \sin \theta, & \theta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

$$dx dy dz = r^2 \cos \theta dr d\varphi d\theta$$

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \sin \theta, & \rho \geq 0 \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta, & \varphi \in [0, 2\pi] \\ z = \rho \cos \theta, & \theta \in [0, \pi] \end{cases}$$

$$dx dy dz = \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta$$

Об'єм тіла Ω : $V_{\Omega} = \iiint_{\Omega} dx dy dz$

Маса (загальна) тіла Ω з густотою $\gamma = \gamma(x, y, z)$ маси: $m = \iiint_{\Omega} \gamma(x, y, z) dx dy dz$

Статичні моменти відносно площин:

$$M_{xoy} = \iiint_{\Omega} z \gamma(x, y, z) dx dy dz;$$

$$M_{yoz} = \iiint_{\Omega} x \gamma(x, y, z) dx dy dz;$$

$$M_{xoz} = \iiint_{\Omega} y \gamma(x, y, z) dx dy dz$$

Центр ваги тіла Ω з густотою $\gamma(x, y, z)$: $\rightarrow C(x_c, y_c, z_c)$

$$x_c = \frac{1}{m} M_{yoz}; \quad y_c = \frac{1}{m} M_{xoz}; \quad z_c = \frac{1}{m} M_{xoy}, \quad \text{де } m = \iiint_{\Omega} \gamma(x, y, z) dx dy dz$$

Моменти інерції відносно площин:

$$I_{yoz} = \iiint_{\Omega} x^2 \gamma(x, y, z) dx dy dz;$$

$$I_{xoz} = \iiint_{\Omega} y^2 \gamma(x, y, z) dx dy dz;$$

$$I_{xoy} = \iiint_{\Omega} z^2 \gamma(x, y, z) dx dy dz$$

Моменти інерції відносно осей:

$$I_{ox} = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dx dy dz;$$

$$I_{oy} = \iiint_{\Omega} (x^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dx dy dz;$$

$$I_{oz} = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \gamma(x, y, z) dx dy dz$$

Моменти інерції тіла Ω відносно початку координат:

$$I_0 = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dx dy dz$$