

### Задача синтеза регулятора в задаче управления вертолетом

Для фиксированных значений скорости вертолета  $V_i = (i-1)\Delta V, i=1, \dots, 8$ , где  $\Delta V = 20$  узлов в час, получены уравнения линеаризованной системы

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \quad i=1, \dots, 8, \quad x(0) = x_0,$$

где  $A_i = A(V_i), B_i = B(V_i)$  - матрицы размеров  $(8 \times 8), (8 \times 4)$  соответственно.

Для каждой модели определим критерий качества

$$I_i = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left[ x^T(t) S_i x(t) + u^T(t) Q_i u(t) \right] dt \rightarrow \min, \quad i=1, \dots, 8,$$

где  $S_i$  - неотрицательно определенная матрица размеров  $(8 \times 8)$  (единичная),  $Q_i$  - положительно определенная матрица размеров  $(4 \times 4)$  (единичная).

### Алгоритм синтеза

Для каждой модели найти оптимальный регулятор

$$u^{*(i)}(x) = -Q_i^{-1} B_i^T P_i x = -F_i x, \quad F_i = Q_i^{-1} B_i^T P_i,$$

где  $P_i$  - положительно определенная симметрическая матрица, удовлетворяющая алгебраическому уравнению Риккати:

$$-A_i^T P_i - P_i A_i + P_i B_i Q_i^{-1} B_i^T P_i - S_i = 0.$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее критерию Сильвестра, единственно. Замкнутая система, описываемая уравнением

$$\dot{x}(t) = \left[ A_i - B_i Q_i^{-1} B_i^T P_i \right] x(t), \quad x(0) = x_0,$$

является асимптотически устойчивой, т.е.  $x(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ .

- 1) Решить уравнение Риккати (найти  $P_i$ ),  $i=1, \dots, 8$ .
- 2) Найти матрицу  $F_i = Q_i^{-1} B_i^T P_i$ ,  $i=1, \dots, 8$ .
- 3) Промоделировать систему

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \quad i=1, \dots, 8$$

с разными начальными условиями, немного отличающимися от нуля с управлением  $u^{(i)}(t) = u^{*(i)}(x(t)) = -Q_i^{-1} B_i^T P_i x(t) = -F_i x(t)$ . Убедиться в выполнении свойства асимптотической устойчивости. Выявить время переходных процессов.

## Данные для модели вертолета Lynx.

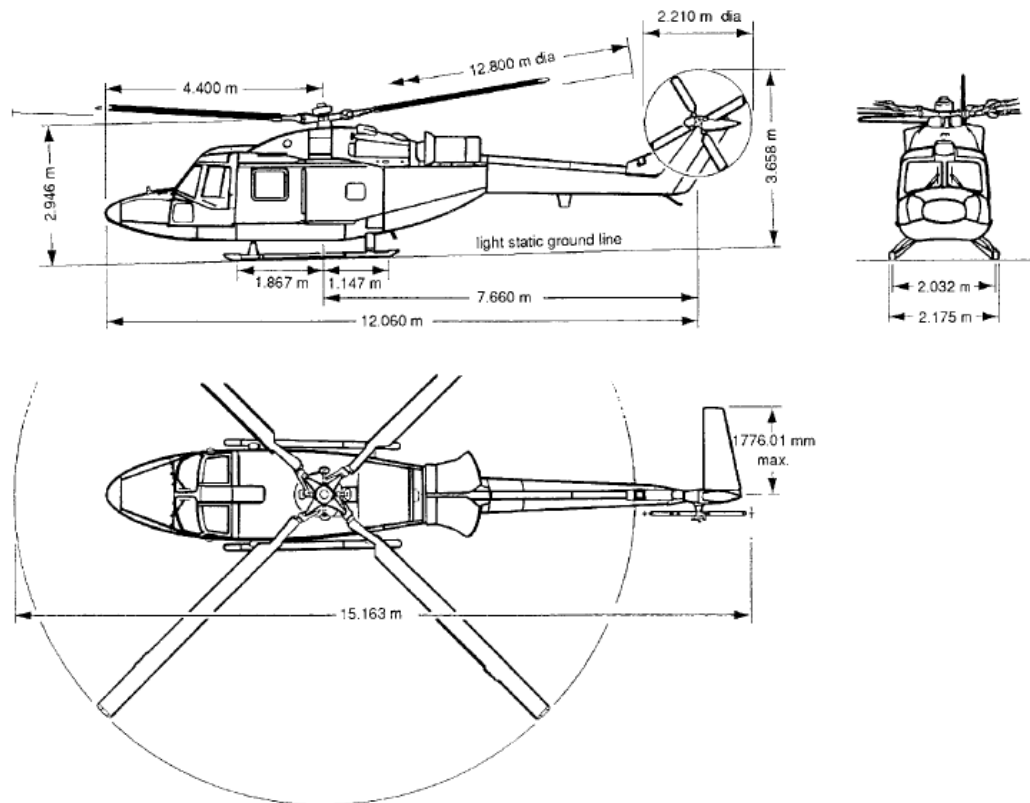


Fig. 4B.2 DRA research Lynx ZD559 three-view drawing

Lynx V = 0 kts

A matrix

```

-0.0199  0.0215  0.6674 -9.7837 -0.0205  -0.1600  0.0000  0.0000
0.0237  -0.3108  0.0134 -0.7215 -0.0028  -0.0054  0.5208  0.0000
0.0468  0.0055 -1.8954  0.0000  0.0588  0.4562  0.0000  0.0000
0.0000  0.0000  0.9985  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0532
0.0207  0.0002 -0.1609  0.0380 -0.0351  -0.6840  9.7697  0.0995
0.3397  0.0236 -2.6449  0.0000 -0.2715 -10.9759  0.0000 -0.0203
0.0000  0.0000 -0.0039  0.0000  0.0000  1.0000  0.0000  0.0737
0.0609  0.0089 -0.4766  0.0000 -0.0137 -1.9367  0.0000 -0.2743
    
```

B matrix

```

6.9417 -9.2860  2.0164  0.0000
-93.9179 -0.0020 -0.0003  0.0000
0.9554  26.4011 -5.7326  0.0000
0.0000  0.0000  0.0000  0.0000
-0.3563 -2.0164 -9.2862  3.6770
7.0476 -33.2120 -152.9537 -0.7358
0.0000  0.0000  0.0000  0.0000
17.3054 -5.9909 -27.5911 -9.9111
    
```

eigenvalues (coupled)	eigenvalues (decoupled)
$0.2394 \pm 0.5337i$	$0.0556 \pm 0.4743i$
$-0.1703 \pm 0.6027i$	$-0.0414 \pm 0.4715i$
-0.2451	-0.1843
-0.3110	-0.3127
-2.2194	-2.0247
-10.8741	-11.0182

**Lynx** V = 20 kts

A matrix

```

-0.0082   0.0254  -0.0685 -9.7868 -0.0158  -0.1480 0.00000  0.0000
-0.1723  -0.4346  10.4965 -0.6792 -0.0150  -0.1044 0.45450  0.0000
 0.0417   0.0157  -2.0012  0.0000  0.0482   0.4441 0.00000  0.0000
 0.0000   0.0000   0.9989  0.0000  0.0000   0.0000 0.00000  0.0464
 0.0173   0.0161  -0.1435  0.0311 -0.0604   0.0308 9.77607 -10.1108
 0.1531   0.2739  -2.4044  0.0000 -0.2439 -10.9208 0.00000  -0.0793
 0.0000   0.0000  -0.0032  0.0000  0.0000   1.0000 0.00000  0.0694
 0.0037   0.0455  -0.3753  0.0000  0.0025  -1.9201 0.00000  -0.4404

```

B matrix

```

 5.6326  -8.9083   2.0273  0.0000
-89.9908  -6.0809   0.0010  0.0000
 3.8558  26.6794  -5.7663  0.0000
 0.0000   0.0000   0.0000  0.0000
 0.1249  -2.0098  -9.3275  3.4515
13.2029 -32.8252 -153.5913 -0.6907
 0.0000   0.0000   0.0000  0.0000
16.5240  -5.9080 -27.5007 -9.3029

```

### Trim and Stability Analysis

eigenvalues (coupled)	eigenvalues (decoupled)
0.1273 ± 0.5157i	0.0471 ± 0.4396i
-0.0526	-0.0986
-0.2213 ± 0.8272i	-0.1637 ± 0.7956i
-0.3554	-0.3556
-2.4185	-2.1826
-10.8511	-10.9956

**Lynx** V = 40 kts

A matrix

```

-0.0146   0.0347  -0.5681 -9.7934 -0.0083  -0.1321 0.0000  0.0000
-0.1186  -0.6156  20.6855 -0.5779 -0.0180  -0.2022 0.3519  0.0000
 0.0319   0.0212  -2.1033  0.0000  0.0277   0.4210 0.0000  0.0000
 0.0000   0.0000   0.9994  0.0000  0.0000   0.0000 0.0000  0.0359
 0.0070   0.0184  -0.1303  0.0205 -0.0915   0.5342 9.7869 -20.3077
-0.0255   0.3040  -2.1361  0.0000 -0.1949 -10.7839 0.0000  -0.1441
 0.0000   0.0000  -0.0021  0.0000  0.0000   1.0000 0.0000  0.0590
-0.0325   0.0314  -0.2522  0.0000  0.0316  -1.8857 0.0000  -0.68597

```

B matrix

```

 4.8686  -8.5123   2.0305  0.0000
-95.5241 -12.7586   0.0003  0.0000
 7.2883  27.0667  -5.7827  0.0000
 0.0000   0.0000   0.0000  0.0000
 1.1239  -1.8435  -9.3132  3.3289
27.3295 -30.1532 -153.4552 -0.6662
 0.0000   0.0000   0.0000  0.0000
15.9423  -5.8252 -27.2699 -8.9726

```

eigenvalues (coupled)	eigenvalues (decoupled)
0.0878 ± 0.4135i	0.0542 ± 0.3933i
-0.0053	-0.0571
-0.3321 ± 1.2240i	-0.3098 ± 1.1926i
-0.3896	-0.4457
-2.6712	-2.3962
-10.7402	-10.8845

**Lynx** V = 60 kts

A matrix

```

-0.0243  0.0392  -0.6705 -9.8014 -0.0041  -0.1190 0.0000  0.0000
-0.0467  -0.7285  30.8640 -0.4200 -0.0186  -0.3216 0.3117  0.0000
 0.0280  0.0248  -2.2156  0.0000  0.0159   0.4108 0.0000  0.0000
 0.0000  0.0000   0.9995  0.0000  0.0000   0.0000 0.0000  0.0318
 0.0035  0.0159  -0.1293  0.0133 -0.1228   0.6465 9.7964 -30.5334
-0.0437  0.2611  -2.0532  0.0000 -0.1713 -10.6565 0.0000 -0.2069
 0.0000  0.0000  -0.0014  0.0000  0.0000   1.0000 0.0000  0.0429
-0.0273  0.0109  -0.1661  0.0000  0.0529  -1.8568 0.0000 -0.9039

```

B matrix

```

 4.6289 -8.0560  2.0386  0.0000
-107.3896 -21.2288  0.0000  0.0000
 10.7004 27.6889 -5.8115  0.0000
 0.0000  0.0000  0.0000  0.0000
 1.4472 -1.6712 -9.3018  3.7509
 31.4636 -27.4424 -153.3177 -0.7505
 0.0000  0.0000  0.0000  0.0000
 14.5826 -5.9178 -27.0369 -10.1087

```

eigenvalues (coupled)	eigenvalues (decoupled)
0.1058 ± 0.3816i	0.0736 ± 0.3823i
-0.0262	-0.0428
-0.4055	-0.4253 ± 1.5923i
-0.4355 ± 1.6130i	-0.4723
-2.9217	-2.6433
-10.6387	-10.7897

**Lynx** V = 80 kts

A Matrix

```

-0.0322  0.0403  -0.2262 -9.8081 -0.0021  -0.1086 0.0000  0.0000
-0.0010 -0.8018  41.0936 -0.2113 -0.0194  -0.4512 0.3223  0.0000
 0.0271  0.0288  -2.3350  0.0000  0.0104   0.4102 0.0000  0.0000
 0.0000  0.0000   0.9995  0.0000  0.0000   0.0000 0.0000  0.0329
 0.0032  0.0143  -0.1287  0.0069 -0.1535   0.2134 9.8028 -40.7844
-0.0371  0.2344  -1.9959  0.0000 -0.1659 -10.5388 0.0000 -0.2668
 0.0000  0.0000  -0.0007  0.0000  0.0000   1.0000 0.0000  0.0215
-0.0227  0.0025  -0.0877  0.0000  0.0662  -1.8331 0.0000 -1.0840

```

B Matrix

```

 4.3447 -7.6327  2.0578  0.0000
-117.7857 -30.3913  0.0000  0.0000
 14.0778 28.5401 -5.8552  0.0000
 0.0000  0.0000  0.0000  0.0000
 1.4988 -1.5282 -9.3201  4.1854
 32.0714 -25.0312 -153.2298 -0.8376
 0.0000  0.0000  0.0000  0.0000
 13.9462 -5.9565 -26.8073 -11.2811

```

eigenvalues (coupled)	eigenvalues (decoupled)
0.1357 ± 0.3772i	0.1037 ± 0.3832i
-0.0330	-0.0396
-0.4035	-0.4582
-0.5151 ± 1.9608i	-0.5095 ± 1.9513i
-3.1945	-2.9182
-10.5556	-10.7176

**Lynx V = 100 kts**

**A Matrix**

```

-0.0393  0.0398  0.8831 -9.8103 -0.0010 -0.0997 0.0000  0.0000
 0.0104 -0.8564 51.3352  0.0397 -0.0210 -0.5854 0.3744  0.0000
 0.0279  0.0334 -2.4604  0.0000  0.0075  0.4148 0.0000  0.0000
 0.0000  0.0000  0.9993  0.0000  0.0000  0.0000 0.0000  0.0382
 0.0037  0.0134 -0.1282 -0.0015 -0.1838 -0.8825 9.8032 -51.0333
-0.0327  0.2252 -1.9302  0.0000 -0.1713 -10.4201 0.0000 -0.3253
 0.0000  0.0000  0.0002  0.0000  0.0000  1.0000 0.0000 -0.0040
-0.0219  0.0056 -0.0044  0.0000  0.0751 -1.8067 0.0000 -1.2436

```

**B Matrix**

```

 4.0394 -7.2845  2.0955  0.0000
-126.8300 -39.8088  0.0000  0.0000
 17.4865 29.6369 -5.9169  0.0000
 0.0000  0.0000  0.0000  0.0000
 1.5127 -1.4002 -9.4000  4.5569
32.9346 -22.4516 -153.2494 -0.9119
 0.0000  0.0000  0.0000  0.0000
14.7283 -5.6161 -26.5849 -12.2824

```

eigenvalues (coupled)	eigenvalues (decoupled)
0.1799 ± 0.3731i	0.1466 ± 0.3847i
-0.0365	-0.0404
-0.3912	-0.4356
-0.5773 ± 2.2781i	-0.5726 ± 2.2763i
-3.4965	-3.2136
-10.4845	-10.6621

**Lynx V = 120 kts**

**A Matrix**

```

-0.0460  0.0385  2.7192 -9.8052 -0.0001 -0.0916 0.0000  0.0000
 0.0221 -0.9008 61.5464  0.3205 -0.0236 -0.7219 0.4681  0.0000
 0.0299  0.0380 -2.5919  0.0000  0.0058  0.4225 0.0000  0.0000
 0.0000  0.0000  0.9989  0.0000  0.0000  0.0000 0.0000  0.0477
 0.0043  0.0129 -0.1283 -0.0152 -0.2142 -2.7024 9.7940 -61.2455
-0.0320  0.2281 -1.8534  0.0000 -0.1847 -10.2992 0.0000 -0.3827
 0.0000  0.0000  0.0016  0.0000  0.0000  1.0000 0.0000 -0.0327
-0.0237  0.0187  0.0877  0.0000  0.0811 -1.7721 0.0000 -1.3896

```

**B Matrix**

```

 3.8024 -7.0223  2.1602  0.0000
-135.2500 -49.3051  0.0001  0.0000
 20.9344 30.9867 -6.0002  0.0000
 0.0000  0.0000  0.0000  0.0000
 1.5360 -1.2845 -9.5747  4.8851
34.9038 -19.4471 -153.4332 -0.9776
 0.0000  0.0000  0.0000  0.0000
17.1838 -4.6280 -26.3702 -13.1671

```

eigenvalues (coupled)	eigenvalues (decoupled)
0.2391 ± 0.3576i	0.2010 ± 0.3787i
-0.0397	-0.0429
-0.3780	-0.4184
-0.6235 ± 2.5705i	-0.6164 ± 2.5713i
-3.8269	-3.5222
-10.4281	-10.6271

**Lynx** V = 140 kts

**A Matrix**

-0.0525	0.0370	5.2710	-9.7910	0.0000	-0.0838	0.0000	0.0000
0.0286	-0.9392	71.6880	0.6160	-0.0272	-0.8596	0.6083	0.0000
0.0328	0.0426	-2.7297	0.0000	0.0047	0.4327	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.9981	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0621
0.0052	0.0127	-0.1297	-0.0383	-0.2446	-5.2343	9.7720	-71.3836
-0.0338	0.2396	-1.7657	0.0000	-0.2050	-10.1775	0.0000	-0.4394
0.0000	0.0000	0.0039	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	-0.0629
-0.0269	0.0406	0.1928	0.0000	0.0851	-1.7264	0.0000	-1.5264

**B Matrix**

3.6956	-6.8427	2.2599	0.0000
-143.5034	-58.7853	0.0001	0.0000
24.4192	32.5904	-6.1083	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.5764	-1.1831	-9.8730	5.1875
38.1461	-15.8917	-153.8247	-1.0381
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
21.4497	-2.7783	-26.1582	-13.9821

eigenvalues (coupled)	eigenvalues (decoupled)
0.3123 ± 0.3175i	0.2637 ± 0.3580i
-0.0430	-0.0464
-0.3675	-0.4099
-0.6538 ± 2.8411i	-0.6414 ± 2.8379i
-4.1847	-3.8388
-10.3916	-10.6193