

Диффузия замедляющихся нейтронов.

Напечатано по заказу кафедры K01-22М: Петровская А.В., Бодунков Д.В., Таракчан Л.С., Мина

21 ноября 2015 г.

В предыдущих разделах рассмотрены процессы замедления и диффузии в отрыве друг от друга. При рассмотрении процесса замедления не учитывался факт пространственного перемещения, а при изучении диффузии нейтронов не учитывался их факт пространственного перемещения, а при изучении диффузии нейтронов пренебрегалось изменениями энергии нейтронов при рассеянии на ядрах среды. В действительности эти процессы происходят одновременно: нейтроны сталкиваясь с ядрами среды перемещаются в пространстве и изменяют свою энергию. Поэтому при вычислении распределения плотности потока нейтронов в ядерном реакторе нельзя разделять процессы замедления и диффузии. Наиболее простой математической моделью, позволяющей описать диффузию замедляющихся нейтронов является модель непрерывного замедления.

Основное положение этой модели заключается в том, что дискретный процесс потери энергии нейтроном, при замедлении аппроксимируется непрерывной зависимостью (см. рис)

Найдем функциональную связь между временем и энергией при непрерывном торможении нейтрона. Пусть нейтрон при своем замедлении проходит энергетический интервал dE , около энергии E за время dt . Нейтрон снижает свою энергию за счет того, что за время dt сталкивается с ядрами среды.

Число таких столкновений при диффузии нейтрона легко определяется из соотношений

$$\frac{V}{l_s} dt, \text{ где } V - \text{ скорость нейтрона} \quad (1)$$

соответствующая энергия E .

С другой стороны, число столкновений, которое необходимо претерпеть нейтрону, чтобы изменить свою энергию на величину dE , есть отношение приращения логарифма энергии на этом интервале к величине ξ - средней потере логарифма энергии на одно столкновение. Приравняем эти величины и выполняя простые преобразования, получим:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{V}{l_s} \xi E = \xi \Sigma_s V E \quad (2)$$

Знак $(-)$ в этом выражении взят с целью описать факт уменьшения энергии нейтрона со временем.

Обратимся теперь к следующей задаче: в бесконечной непоглощающей среде находится точечный источник, испускающий нейтроны с энергией E_0 . Если источник испускает в единицу времени какую-то порцию нейтронов, то эти нейтроны будут распределяться по все возрастающему объему. Поэтому число нейтронов в 1 см^3 около точки с координатой \vec{r} , будет зависеть от хронологического времени t , т.е. $n_1 = n_1(\vec{r}, t)$. Изменение плотности нейтронов $n_1(\vec{r}, t)$ при отсутствии поглощения происходит только за счет диффузии, поэтому:

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = DV_{\Delta} n_1 \quad (3)$$

Уравнение (3) описывает изменение плотности нейтронов, за счет того, что источник испустил порцию нейтронов, равную мощности источника, то есть, по сути дела, уравнения (3) описывает скорость изменения числа нейтронов, т.е. $n_1(\vec{r}, t) = \frac{dn}{dt}$. Учтем, что переменные t и E связаны соотношением (1). Поскольку форма дифференциала dn не зависит от того, что рассматривать в качестве переменной, имеем

$$dn = \frac{dn}{dt} dt \quad \text{или} \quad dn = \frac{dn}{dE} dE \quad (4)$$

откуда

$$\frac{dn}{dt} dt = \frac{dn}{dE} dE \quad (5)$$

Обозначим $\frac{dn}{dE} = n_2(\vec{r}, E)$, тогда будем иметь

$$n_1(\vec{r}, t) dt = n_2(\vec{r}, E) dE \quad (6)$$

откуда

$$n_1(\vec{r}, t) = n_2(\vec{r}, E) \frac{dE}{dt} = n_2(\vec{r}, E) V \xi E \Sigma_s \quad (7)$$

или

$$n_1(\vec{r}, t) = \Phi(\vec{r}, E) \xi \Sigma_s E \quad (8)$$

$\frac{dn}{dE}$ - есть число нейтронов в ед. объема, приходящихся на единичный энергетический интервал, т.е. $\varphi(\vec{r}, E)$.

Величина $q(\vec{r}, \vec{E}) = \xi \Sigma_s E \varphi(\vec{r}, E)$ носит название плотности замедления и имеет смысл числа нейтронов в 1 см^3 пересекающих в ед. времени значение энергии E .

Действительно, величина ξ есть среднее изменение логорифма энергии в одном акте рассеяния

$$\xi = \overline{\Delta \ln E} \approx \overline{(\ln E)'_{E \Delta E}} = \frac{1}{E} \Delta E, \text{ откуда } \overline{\Delta E} = \xi E \quad (9)$$

$\overline{\Delta E}$ - потеря энергии нейтроном в одном акте рассеяния. Если интервал $\overline{\Delta E}$ расположен между E и $E + \overline{\Delta E}$, то каждое рассеяние приводит к снижению энергии нейтрона за значение E .

Число нейтронов претерпевших рассеяние в интервале $[E, E + \overline{\Delta E}]$, есть произведение числа нейтронов рассеянных в единичном интервале энергий $\varphi(E) \Sigma_s$ на величину $\overline{\Delta E}$. Все эти нейтроны снижают свою энергию за значение E , следовательно

$$q(\vec{r}, E) = \varphi(E) \Sigma_s \overline{\Delta E} = \Sigma_s \varphi(E) E \quad (10)$$

Так как $\frac{\partial n_1}{\partial E} = \frac{\partial n_1}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial t}$, и $n_1 = q(\vec{r}, E)$, получим из уравнения (3) относительно плотности нейтронов, уравнение (23) относительно плотности замедления

$$D \Delta q(\vec{r}, E) = -\xi E \Sigma_s \frac{\partial q(\vec{r}, E)}{\partial E} \quad (11)$$

Уравнение (23) можно еще упростить, если ввести новую независимую переменную

$$\tau(E) = \int_E^{E_0} \frac{D}{\Sigma_s} \frac{dE}{\xi E}$$

$$\text{Очевидно, что } \frac{\partial q}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial E} = \frac{\partial q}{\partial E}; \text{ откуда} \quad (12)$$

$$\frac{\partial q}{\partial \tau} = \frac{\partial q}{\partial E} \frac{1}{\frac{\partial \tau}{\partial E}}, \text{ но } \frac{\partial \tau}{\partial E} = -\frac{D}{\Sigma_s \xi E} \quad (13)$$

$$\text{т.е. } \frac{\partial q}{\partial \tau} = -\frac{\xi \Sigma_s E}{D} \frac{\partial q}{\partial E}$$

Тогда уравнение (23) запишется в следующем виде

$$\Delta q(\vec{r}, \tau) = \frac{\partial q(\vec{r}, \tau)}{\partial \tau} \quad (24)$$

Уравнение (24) описывает распределение в пространстве \vec{r} и в пространстве τ плотности замедления $q(\vec{r}, \tau)$. Величина τ - носит специальное название - "возраст нейтрона" и имеет размерность $[\text{см}^2]$. Само уравнение (24) является уравнением теплопроводности. Решение этого уравнения для точечного источника в бесконечной среде имеет вид:

$$q(\vec{r}, \tau) = \frac{Q}{(4\pi\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4\tau}\right) \quad (25)$$

На рис. 9 показан качественный вид решения (25) в зависимости от координаты при различных значениях параметра τ . Если τ мало, то это означает, что энергия нейтронов достаточно близка к энергии нейтронов источника E_0 и кривая $q(r, \tau)$ становится более выровненным. Важным случаем является тот, когда

$$\tau = \int_{E_t}^{E_0} \frac{D}{\xi \Sigma_s} \frac{dE}{E} = \tau_\tau$$

где E_T - энергия тепловых нейтронов. В этом случае $q(r, \tau)$ - дает распределение источников тепловых нейтронов около точечного источника быстрых нейтронов. Физический смысл понятия возраста нейтронов τ заключается в том, что возраст нейтронов $\tau(E)$ есть величина пропорциональная среднему квадрату смещения нейтронов от точки их рождения до точки, где их энергия равна величине E . Действительно, средний квадрат смещения нейтрона до достижения возраста τ есть

$$\overrightarrow{r}_\tau^2 = \frac{1}{Q} \int_0^\infty r^2 q(r, \tau) 4\pi r^2 dr \int_0^\infty q(r, \tau) \pi r^2 dr = \frac{1}{Q} \frac{Q 4\pi}{4\pi \tau^{3/2}} \int_0^\infty r^4 e^{-\frac{r^2}{\tau}} dr = 6\tau \quad (14)$$

При получении этого результата $\overrightarrow{r}^2 = 6\tau$ учтено, что $\int_0^\infty q(r, \tau) 4\pi r^2 dr$, т.е. число нейтронов замедляющихся до возраста τ в ед. времени во всем объеме рассматриваемой среды равно мощности источника Q . Поскольку возраст нейтронов $\tau(E_T)$ пропорционален смещению нейтрона от точки рождения (в качестве быстрого нейтрона) до точки замедления до тепловой энергии E_T , а квадрат длины диффузии L^2 пропорционален смещению от точки рождения теплового нейтрона до точки поглощения, то величина $M^2 = \tau + L^2$ - пропорциональна среднему смещению нейтрона от точки его рождения как быстрого нейтрона до точки его поглощения как теплового нейтрона (см.рис. 10). Величина M^2 называется площадью миграции нейтрона.

1 - точка, где родился быстрый нейтрон

2 - точка, где быстрый нейтрон, замедлился до тепловой энергии и стал тепловым (точка рождения теплового нейтрона)

3 - точка поглощения теплового нейтрона

Важными характеристиками являются время диффузии и время замедления нейтронов до тепловой энергии. При нормальных условиях в качестве тепловой энергии нейтрона E_T принимается величина $E_T = 0,025$ эВ, что соответствует скорости нейтронов $V_T = 2200 \frac{\text{м}}{\text{сек}}$.

Среднее время диффузии нейтрона до поглощения определяется из выражения

$$t_T = \frac{l_U}{V_T} = \frac{1}{\Sigma_u V_T} \quad (27)$$

Σ_u - макроскопическое сечение поглощения среды

Среднее время замедления нейтрона от энергии E_0 до энергии E_T определяется с помощью выражения (20)

$$t_{\text{зам}} = \int_0^{t_{\text{зам}}} dt = \int_{E_T}^{E_0} -\frac{dE}{\xi \Sigma_s V E} = \int_{E_T}^{E_0} -\frac{dE}{\xi \Sigma \sqrt{2} E^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{2} \xi \Sigma_s} \quad (15)$$

$$\left[-\frac{1}{\left(\frac{3}{2} - 1\right) E^{3/2-1}} \right] \quad (16)$$

$$(17)$$

Если в качестве E_0 принять среднюю энергию нейтронов деления, т.е. $E_0 \text{ TODO } 2 \text{ МэВ}$, то $V_0 \text{ TODO } V_T$ и предыдущее выражение еще более упростится

$$t_{\text{зам}} \text{ TODO } \frac{2}{\xi \Sigma_s V_T} \quad (28)$$

В таблице TODO представлены значения параметров диффузии и замедления для различного вида замедлений TODO Таблица1 Из таблицы видно, время пребывания нейтрона в тепловой области примерно на два порядка больше, чем время замедления. Это приводит к тому, что число тепловых нейтронов в замедлителе во столько же раз больше числа замедляющихся нейтронов, т.е. нейтроны "накапливаются" в тепловой области. В ядерных реакторах с графитовым замедлителем среднее время жизни нейтрона 10^{-3} с, а в ядерных реакторах с графитовым замедлителем 10^{-4} с. В ядерных реакторах на быстрых нейтронах, где замедления практически нет, среднее время жизни нейтрона 10^{-4} с. TODO Математическое моделирование процесса диффузии замедляющихся нейтронов от точечного источника в бесконечной непоглощающей среде.

Входной информацией являются массовые числа ядер, входящих в состав рассматриваемой среды и соответствующие макроконстанты рассеяния. Например, если среда состоит из углерода, то задается $A = 12$, Σ_s^c ; Если же среда состоит из ядер двух сортов, например H_2O , то задаются $A = 1$; Σ_s^H ; $B = 16$; Σ_s^O . Задается также энергия нейтронов источника E_0 [МэВ]; Задается координата источника нейтронов $X_M = 0$;

$Y_M = 0; Z_M = 0$. TODO Алгоритм моделирования 1. Разыгрывается длина свободного пробега нейтрона до столкновения с ядром среды

$$l_1 = \frac{1}{\Sigma_{tr}} \ln \gamma, \text{ где}$$

γ - равномерно распределенная на отрезке $[0, 1]$ случайная величина. Если среда многокомпонентна, то $\Sigma_{tr} = \sum_i^n \Sigma_{tr,i}$, например, для H_2O

2. Разыгрываются направляющие косинусы движения нейтрона от изотропного источника

$$\omega_z = 1 - 2\gamma; \quad \omega_x = \sqrt{1 - \omega_z^2} \cos(2\pi\gamma); \quad \omega_y = \sqrt{1 - \omega_z^2} \sin(2\pi\gamma)$$

3. Рассчитывается точка, где нейтрон столкнулся с ядром:

$$X_K = X_M + \omega_x l; \quad Y_K = Y_M + \omega_y l; \quad Z_K = Z_M + \omega_z l; \quad r_K = \sqrt{X_K^2 + Y_K^2 + Z_K^2}$$

Если среда двухкомпонентная, то определяется с какого сорта ядром столкнулся нейтрон. Для этого разыгрывается γ из $[0, 1]$ и если $\gamma < \frac{\Sigma_S 1}{\Sigma_S}$, то нейтрон столкнулся с ядром под условным номером 1, если $\gamma > \frac{\Sigma_S 1}{\Sigma_S}$, то нейтрон столкнулся с ядром под условным номером 2. Например: для H_2O макросечение рассеяния состоит из двух слагаемых

$$\Sigma_s^{H_2O} = TODO$$

Тогда, если $\gamma < \frac{\Sigma_S 1}{\Sigma_{H_2O}^1}$, то нейтрон столкнулся с ядром водорода, в противном случае $\gamma < \frac{\Sigma_S 1}{\Sigma_{H_2O}^1}$ - нейтрон столкнулся с ядром кислорода. 4. После того, как определен атомный номер ядра, с которым столкнулся нейтрон (пусть этот номер A), разыгрывается случайная величина γ из интервала $[0, 1]$

$$1. \cos Q = 1 - 2\gamma = \omega_z \omega_x = \sqrt{1 - \omega_z^2} \cos(2\pi\gamma) \omega_y = \sqrt{1 - \omega_z^2} \sin(2\pi\gamma) l_s = -\frac{\ln \gamma}{\Sigma_{tr}} 2.\epsilon = \frac{(A-1)^2}{(A+1)^2} 3.E_1 = \frac{E_0}{2} [(1+\epsilon) + (1-$$

Таким образом, определятся энергия нейтрона после столкновения E_1 , направляющие косинусы движения нейтрона после рассеяния $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, а значит и координаты следующего столкновения. 6. Если $E_1 < E_T$, то возврат к п.4 в котором следует положить $E_0 = E_1$, если $E < E_T$, то разыгрывается новый нейтрон источника, т.е. программа должна идти на п.1.

0.1 Выходная информация

Выходной информацией являются для каждого из M рассмотренных нейтронов источника следующие массивы: координаты точек столкновения нейтрона с ядрами среды и энергия нейтрона после столкновения. В результате обработки этих массивов информации можно получить экспериментальные значения возраста нейтронов в зависимости от энергии и распределения плотности замедления. Действительно, так как возраст нейтронов энергии E связан со средним квадратом смещения нейтрона соотношением $\tau(E) = \frac{1}{\Omega} \bar{r}^2(E)$, то достаточно определить средний квадрат смещения нейтронов от источника до точки замедления до энергии E . Зафиксируем некоторое заданное значение энергии нейтрона E и для каждого из M рассмотренных нейтронов источника определим координаты точки рассеяния, в результате которого энергия нейтрона станет меньше, чем E . Пусть координаты этой точки для i -ого нейтрона будут (x_i, y_i, z_i) . Тогда средний квадрат смещения нейтрона до замедления его до энергии E будет приближенно определяться выражением

$$TODO r^2 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$$

Задавая различные значения величины E , можно получить зависимость возраста от энергии

$$\tau(E) = \frac{1}{6} TODO r^2(E)$$

При $E = E_T$ возраст нейтрона τ характеризует смещение нейтрона от точки его рождения до точки превращения замедляющегося нейтрона в тепловой.

Экспериментальное распределение плотности замедления по пространству при различных значениях возраста нейтронов можно получить следующим образом. Зададимся областью изменения координаты r в сферической геометрии $r = TODO x_2 + y_2 + z_2^2$. Пусть эта величина будет равна R . Разобьем радиус вектор R на K частей, тогда $R_i = i \frac{R}{K} = i_\Delta R$. Введем в рассмотрение объем пространства, заключенного между двумя соседними сферами

$$V_i = \frac{4}{3} \pi (R_{i+1}^3 - R_i^3), i = 0, \dots, k$$

Зададимся величиной энергии E и номером i , используя информацию о координатах столкновения нейтронов с ядрами среды и об их энергии, определим, как и прежде, координаты точки рассеяния, в результате которого энергия нейтрона станет меньше, чем E . Пусть эта точка характеризуется радиусом $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Определим радиусы этих точек для всех M , рассмотренных нейтронов источника. Далее вычислим относительную долю нейтронов из M рассмотренных координаты которых, попали в пространство V_i , т.е. определим величину

$$TODOq(R_i) = \frac{n_i}{M} \frac{1}{V_i}$$

где $n_i(E)$ - число нейтронов из M рассмотренных, величина радиуса смещения которых оказалась в пределах объема. Величина $TODOq$ будет пропорциональна плотности замедления.

0.2 Подготовка к данному разделу лабораторной работы

1. Изучить теоретический материал.
2. Для заданного вариантом состава среды рассчитать Σ_{tr} , D , ξ . В заданном энергетическом диапазоне E_0 до E_T , построить зависимость $\tau(E)$.
3. Построить для заданных свойств зависимости $q(\vec{r}, E)$ и $q(\vec{r}, \tau)$ в случае точечного источника в бесконечной непоглощающей среде.
4. Для заданного варианта состава среды определить время замедления от энергии E_0 до тепловой энергии и время диффузии.
5. Нарисовать блок схему алгоритма модели.
6. Разработать план исследования процесса замедления при диффузии.

0.3 Подготовка к сдаче данного раздела лабораторной работы

1. По данным распечаткам построить для двух из рассмотренных M судеб нейтронов зависимость $E(r^2)$, где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$
 2. Получить зависимость экспериментального значения возраста нейтронов от числа рассмотренных судеб нейтронов. Сравнить с теоретическими значениями возраста.
 3. Построить зависимость возраста от энергии по данным численного эксперимента.
 4. Построить экспериментальную зависимость $TODOq(\vec{r}, \tau)$ и сравнить с аналитической зависимостью.
- Основные результаты, полученные при выполнении всех разделов лабораторной работы излагаются в заключении.

При сдаче лабораторной работы необходимо правильно отвечать на следующие $TODO$ контрольные вопросы:

1. На основании каких физических законов сохранения, получены выражения для описания акта рассеяния нейтрона на ядре?
2. Какой элемент эффективнее всего замедляет нейтроны?
3. Какая величина используется для характеристики качества замедлителя?
4. В какой системе координат рассеяние нейтронов практически считается сферическим - симметричным?
5. Какой физический смысл Σ_{tr} ?
6. Что такое летаргия нейтрона? Как с помощью летаргии определить среднее число столкновений нейтронов?
7. От чего зависит средняя логарифмическая потеря энергии нейтронов при замедлении?
8. Из каких соображений можно получить спектр замедляющихся нейтронов в поглощающей среде?
9. Что такое "спектр Ферми"? Почему с уменьшением энергии нейтронов $\varphi(E)$ растет?
10. Понятие плотности замедления. Как связана плотность замедления со спектром нейтронов?
11. Какие основные параметры процесса диффузии нейтронов и какой их физический смысл?
12. Смысл величины L^2 ?
13. Какова качественная зависимость L^2 от температуры среды?
14. Смысл членов уравнения диффузии нейтронов в среде. Как они зависят от параметров среды?
15. Условия однозначности для уравнения диффузии.
16. Уравнение возраста. Смысл членов уравнения.
17. Понятие возраста нейтронов в среде. От каких физических свойств среды зависит величина возраста нейтронов?
18. Что такое площадь миграции?
19. Каковы характерные величины времени диффузии и замедления в воде, тяжелой воде и графите?

0.4 Литература

1. Лекции по курсу "Математические модели физических систем".
2. Климов А.Н. Ядерная физика и ядерные реакторы, М., Энергоатомиздат, 1985, с. 167-195.
3. Бартоломей Г.Г. и др. Основы теории и методы расчета ядерных энергетических реакторов. М., Энергоиздат, 1982, с. 81-159