

## Диффузия замедляющихся нейтронов.

В предыдущих разделах рассмотрены процессы замедления и диффузии в отрыве друг от друга. При рассмотрении процесса замедления не учитывался факт пространственного перемещения, а при изучении диффузии нейтронов не учитывался их факт пространственного перемещения, а при изучении диффузии нейтронов пренебрегалось изменениями энергии нейтронов при рассеянии на ядрах среды. В действительности эти процессы происходят одновременно: нейтроны сталкиваясь с ядрами среды перемещаются в пространстве и изменяют свою энергию. Поэтому при вычислении распределения плотности потока нейтронов в ядерном реакторе нельзя разделять процессы замедления и диффузии. Наиболее простой математической моделью, позволяющей описать диффузию замедляющихся нейтронов является модель непрерывного замедления.

Основное положение этой модели заключается в том, что дискретный процесс потери энергии нейтроном, при замедлении аппроксимируется непрерывной зависимостью (см. рис 1)

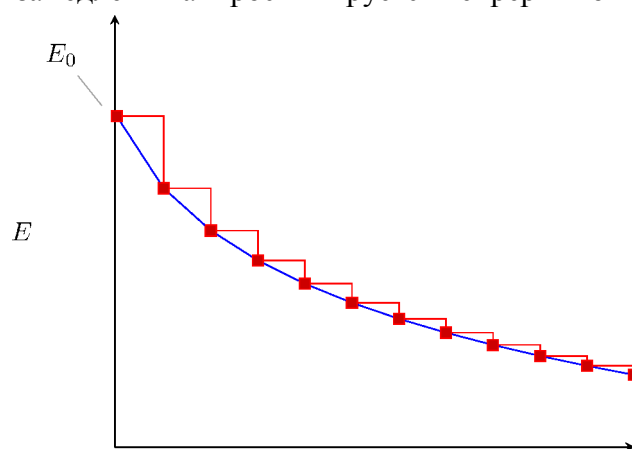


Рис. 1

Найдем функциональную связь между временем и энергией при непрерывном торможении нейтрона. Пусть нейтрон при своем замедлении проходит энергетический интервал  $dE$ , около энергии  $E$  за время  $dt$ . Нейтрон снижает свою энергию за счет того, что за время  $dt$  сталкивается с ядрами среды.

Число таких столкновений при диффузии нейтрона легко определяется из соотношений

$$\frac{v}{l_s} dt, \text{ где } v - \text{ скорость нейтрона} \quad (1)$$

соответствующая энергия  $E$ .

С другой стороны, число столкновений, которое необходимо претерпеть нейтрону, чтобы изменить свою энергию на величину  $dE$ , есть отношение приращения логарифма энергии на этом интервале к величине  $\xi$  - средней потере логарифма энергии на одно столкновение. Приравняем эти величины и выполняя простые преобразования, получим:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{v}{l_s} \xi E = \xi \sum_s v E \quad (2)$$

Знак  $(-)$  в этом выражении взят с целью описать факт уменьшения энергии нейтрона со временем.

Обратимся теперь к следующей задаче: в бесконечной непоглощающей среде находится точечный источник, испускающий нейтроны с энергией  $E_0$ . Если источник испускает в

единицу времени какую-то порцию нейтронов, то эти нейтроны будут распределяться по все возрастающему объему. Поэтому число нейтронов в  $1\text{см}^3$  около точки с координатой  $\vec{r}$ , будет зависеть от хронологического времени  $t$ , т.е.  $n_1 = n(\vec{r}, t)$ .

Изменение плотности нейтронов  $n_1(\vec{r}, t)$  при отсутствии поглощения происходит только за счет диффузии, поэтому:

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = D\nabla^2 n_1 \quad (3)$$

Уравнение (3) описывает изменение плотности нейтронов, за счет того, что источник испустил порцию нейтронов, равную мощности источника, то есть, по сути дела, уравнения (3) описывает скорость изменения числа нейтронов, т.е.  $n_1(\vec{r}_1, t) \frac{dn}{dt}$ . Учтем, что переменные  $t$  и  $E$  связаны соотношением (1). Поскольку форма дифференциала  $dn$  не зависит от того, что рассматривать в качестве переменной, имеем

$$dn = \frac{dn}{dt} dt \quad \text{или} \quad dn = \frac{dn}{dE} dE \quad (4)$$

откуда

$$\frac{dn}{dt} dt = \frac{dn}{dE} dE \quad (5)$$

Обозначим  $\frac{dn}{dE} = n_2(\vec{r}_1, E)$ , тогда будем иметь

$$n_1(\vec{r}, t) dt = n_2(\vec{r}, E) dE \quad (6)$$

откуда

$$n_1(\vec{r}, t) = n_2(\vec{r}, E) \frac{dE}{dt} = n_2(\vec{r}, E) v \xi E \sum_s \quad (7)$$

или

$$n_1(\vec{r}, t) = \Phi(\vec{r}, E) \xi \sum_s \quad (8)$$

$\frac{dn}{dE}$  - есть число нейтронов в ед. объема, приходящихся на единичный энергетический интервал, т.е.  $\phi(\vec{r}, E)$ .

Величина  $q(\vec{r}, E) = \xi \sum_s \phi(\vec{r}, E)$  носит название плотности замедления и имеет смысл числа нейтронов в  $1\text{см}^3$  пересекающих в ед. времени значение энергии  $E$ .

Действительно, величина  $\xi$  есть среднее изменение логорифма энергии в одном акте рассеяния

$$\xi = \overline{\Delta \ln E} \approx \overline{(\ln E)'_E \Delta E} = \frac{1}{E} \overline{\Delta E}, \quad \text{откуда} \quad \overline{\Delta E} = \xi E \quad (9)$$

$\overline{\Delta E}$  - потеря энергии нейтроном в одном акте рассеяния. Если интервал  $\overline{\Delta E}$  расположен между  $E$  и  $E + \overline{\Delta E}$ , то каждое рассеяние приводит к снижению энергии нейтрона за значение  $E$ .

Число нейтронов претерпевших рассеяние в интервале  $[E, E + \Delta E]$ , есть произведение числа нейтронов рассеянных в единичном интервале энергий  $\varphi(E)\Sigma_s$  на величину  $\Delta E$ . Все эти нейтроны снижают свою энергию за значение  $E$ , следовательно

$$q(\vec{r}, t) = \varphi(E) \sum_s \Delta E = \sum_s \varphi(E) E \quad (10)$$

Так как  $\frac{\partial n_1}{\partial t} = \frac{\partial n_1}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial t}$ , и  $n_1 = q(\vec{r}, E)$ , получим из уравнения (3) относительно плотности нейтронов, уравнение (23) относительно плотности замедления

$$D \Delta q(\vec{r}, t) = -\xi E \sum_s \frac{\partial q(\vec{r}, E)}{\partial E} \quad (11)$$

Уравнение (23) можно еще упростить, если ввести новую независимую переменную

$$\tau(E) = \int_E^{E_0} \frac{D dE}{\sum_s \xi E} \quad (22)$$

Очевидно, что  $\frac{\partial q}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial E} = \frac{\partial q}{\partial E}$ ; откуда

$$\frac{\partial q}{\partial \tau} = \frac{\partial \tau}{\partial E} \frac{1}{\frac{\partial \tau}{\partial E}}, \text{ но } \frac{\partial \tau}{\partial E} = -\frac{D}{\sum_s \xi E} \quad (23)$$

$$\text{т.е. } \frac{\partial q}{\partial \tau} = -\frac{\sum_s \xi E}{D} \frac{\partial q}{\partial E}$$

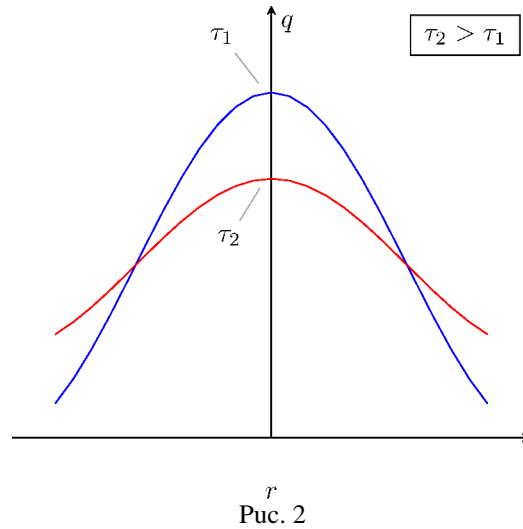
Тогда уравнение (23) запишется в следующем виде

$$\Delta q(\vec{r}, t) = \frac{\partial q(\vec{r}, \tau)}{\partial \tau} \quad (24)$$

Уравнение (24) описывает распределение в пространстве  $\vec{r}$  и в пространстве  $\tau$  плотности замедления  $q(\vec{r}, \tau)$ . Величина  $\tau$  - носит специальное название - "возраст нейтрона" и имеет размерность  $[\text{см}^2]$ . Само уравнение (24) является уравнением теплопроводности. Решение этого уравнения для точечного источника в бесконечной среде имеет вид:

$$q(\vec{r}, t) = \frac{Q}{(4\pi\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4\tau}\right) \quad (25)$$

На рис. 2 показан качественный вид решения (25) в зависимости от координаты при различных значениях параметра  $\tau$ .



Если  $\tau$  мало, то это означает, что энергия нейтронов достаточно близка к энергии нейтронов источника  $E_0$  и кривая  $q(r, \tau)$  становится более выровненным. Важным случаем является тот, когда

$$\tau = \int_E^{E_0} \frac{DdE}{\xi \sum_s E} = \tau_\tau$$

где  $E_T$  - энергия тепловых нейтронов. В этом случае  $q(r, \tau_T)$  - дает распределение источников тепловых нейтронов около точечного источника быстрых нейтронов. Физический смысл понятия возраста нейтронов  $\tau$  заключается в том, что возраст нейтронов  $\tau(E)$  есть величина пропорциональная среднему квадрату смещения нейтронов от точки их рождения до точки, где их энергия равна величине  $E$ . Действительно, средний квадрат смещения нейтрона до достижения возраста  $\tau$  есть

$$\bar{r}_\tau^2 = \frac{\int_0^\infty r^2 q(r, \tau) 4\pi r^2 dr}{\int_0^\infty q(r, \tau) 4\pi r^2 dr} = \frac{1}{Q} \frac{Q 4\pi}{4\pi \tau^{3/2}} \int_0^\infty r^4 e^{-\frac{r^2}{\tau}} dr = 6\tau \quad (16)$$

При получении этого результата  $\bar{r}^2 = 6\tau$  учтено, что  $\int_0^\infty q(r, \tau) 4\pi r^2 dr$ , т.е. число нейтронов замедляющихся до возраста  $\tau$  в ед. времени во всем объеме рассматриваемой среды равно мощности источника  $Q$ . Поскольку возраст нейтронов  $\tau(E_T)$  пропорционален смещению нейтрона от точки рождения (в качестве быстрого нейтрона) до точки замедления до тепловой энергии  $E_T$ , а квадрат длины диффузии  $L^2$  пропорционален смещению от точки рождения теплового нейтрона до точки поглощения, то величина  $M^2 = \tau + L^2$  - пропорциональна среднему смещению нейтрона от точки его рождения как быстрого нейтрона до точки его поглощения как теплового нейтрона (см.рис. 10). Величина  $M^2$  называется площадью миграции нейтрона.

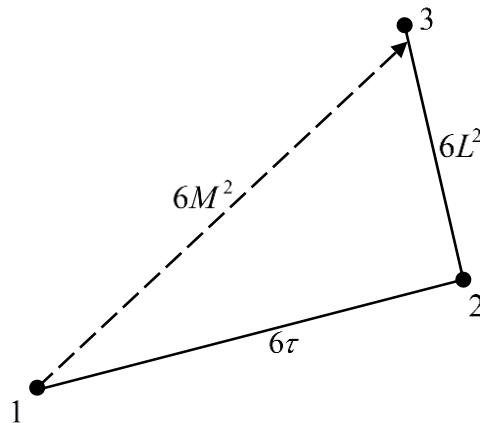


Рис. 10

1 - точка, где родился быстрый нейтрон

2 - точка, где быстрый нейтрон, замедлился до тепловой энергии и стал тепловым (точка рождения теплового нейтрона)

3 - точка поглощения теплового нейтрона

Важными характеристиками являются время диффузии и время замедления нейтронов до тепловой энергии.

При нормальных условиях в качестве тепловой энергии нейтрона  $E_T$  принимается величина  $E_T = 0,025 \text{ эВ}$ , что соответствует скорости нейтронов  $v_T = 2200 \text{ м/сек}$ .

Среднее время диффузии нейтрона до поглощения определяется из выражения

$$t_T = \frac{l_U}{v_T} = \frac{1}{\Sigma_u v_T} \quad (27)$$

$\Sigma_u$  - макроскопическое сечение поглощения среды

Среднее время замедления нейтрона от энергии  $E_0$  до энергии  $E_T$  определяется с помощью выражения (20)

$$\begin{aligned} t_{зам} &= \int_0^{t_{зам}} dt = \int_{E_T}^{E_0} -\frac{dE}{\xi \Sigma_s v E} = \int_{E_T}^{E_0} -\frac{dE}{\xi \Sigma_s \sqrt{2E} E^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{2} \xi \Sigma_s} \left[ -\frac{1}{\left(\frac{3}{2}-1\right) E^{3/2-1}} \right]_{E_T}^{E_0} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2} \xi \Sigma_s} \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{\sqrt{E}} \right)_{E_T}^{E_0} = \frac{2}{\xi \Sigma_s} \left( -\frac{1}{v} \right)_{v_T}^{v_0} = \frac{2}{\xi \Sigma_s} \left( \frac{1}{v} \right)_{v_T}^{v_0} = \frac{2}{\xi \Sigma_s} \left( \frac{1}{v_T} - \frac{1}{v_0} \right) \end{aligned}$$

Если в качестве  $E_0$  принять среднюю энергию нейтронов деления, т.е.  $E_0 \approx 2 \text{ МэВ}$ , то  $V_0 \gg V_T$  и предыдущее выражение еще более упростится

$$t_{зам} \cong \frac{2}{\xi \Sigma_u v_T} \quad (28)$$

В таблице **Ошибка! Источник ссылки не найден.** представлены значения параметров диффузии и замедления для различного вида замедлений.

Замедлитель	Плотность $\rho$ кг/м <sup>3</sup>	$L^2$ см <sup>2</sup>	$\tau$ см <sup>2</sup>	$t_T$ мс	$t_{зам}$ мкс
$H_2O$	1.00	7.4	27	0.21	6.7
$D_2O$	1.10	25600	120	138	48
$Be$	1.84	441	96	3.7	59
$BeO$	2.96	641	105	6.2	76
$C^{II}$	1.60	2916	350	15.2	149

Таблица 1: Параметры диффузии и замедления

Из таблицы видно, время пребывания нейтрона в тепловой области примерно на два порядка больше, чем время замедления. Это приводит к тому, что число тепловых нейтронов в замедлителе во столько же раз больше числа замедляющихся нейтронов, т.е. нейтроны "накапливаются" в тепловой области. В ядерных реакторах с графитовым замедлителем среднее время жизни нейтрона  $10^{-3} \text{ с}$ , а в ядерных реакторах с графитовым замедлителем  $10^{-4} \text{ с}$ . В ядерных реакторах на быстрых нейтронах, где замедления практически нет, среднее время жизни нейтрона  $10^{-7} \text{ с}$ .

### Математическое моделирование процесса диффузии замедляющихся нейтронов от точечного источника в бесконечной непоглощающей среде.

Входной информацией являются массовые числа ядер, входящих в состав рассматриваемой среды и соответствующие макроконстанты рассеяния. Например, если среда состоит из углерода, то задается  $A=12$ ,  $\Sigma_s^C$ ; Если же среда состоит из ядер двух сортов, например  $H_2O$ , то задаются  $A=1$ ;  $\Sigma_s^H$ ;  $B=16$ ;  $\Sigma_s^O$ . Задается также

энергия нейтронов источника  $E_0$  [МэВ]; Задается координата источника нейтронов  $X_M = 0$ ;  $Y_M = 0$ ;  $Z_M = 0$ .

### Алгоритм моделирования

1. Разыгрывается длина свободного пробега нейтрона до столкновения с ядром среды

$$l_1 = \frac{1}{\Sigma_{tr}} \ln \gamma, \text{ где}$$

$\gamma$  - равномерно распределенная на отрезке  $[0,1]$  случайная величина. Если среда многокомпонентна, то

$$\Sigma_{tr} = \sum_i^n \Sigma_{tr_i}, \text{ например, для } H_2O.$$

2. Разыгрываются направляющие косинусы движения нейтрона от изотропного источника

$$\omega_z = 1 - 2\gamma; \quad \omega_x = \sqrt{1 - \omega_z^2} \cos(2\pi\gamma); \quad \omega_y = \sqrt{1 - \omega_z^2} \sin(2\pi\gamma)$$

3. Рассчитывается точка, где нейтрон столкнулся с ядром:

$$X_K = X_M + \omega_x l; \quad Y_K = Y_M + \omega_y l; \quad Z_K = Z_M + \omega_z l; \quad r_K = \sqrt{X_K^2 + Y_K^2 + Z_K^2}$$

Если среда двухкомпонентная, то определяется с какого сорта ядром столкнулся нейтрон. Для этого разыгрывается  $\gamma$  из  $[0,1]$  и если  $\gamma < \frac{\Sigma_{S_1}}{\Sigma_S}$ , то нейтрон столкнулся с ядром под условным номером 1, если

$\gamma > \frac{\Sigma_{S_1}}{\Sigma_S}$ , то нейтрон столкнулся с ядром под условным номером 2. Например: для  $H_2O$  макросечение рассеяния состоит из двух слагаемых

$$\Sigma_S^{H_2O} = 2\sigma_S^H N_H + \sigma_S^{O_2} N_{O_2}$$

Тогда, если  $\gamma < \frac{\Sigma_{S_1}}{\Sigma_S^{H_2O}}$ , то нейтрон столкнулся с ядром водорода, в противном случае  $\gamma > \frac{\Sigma_{S_1}}{\Sigma_S^{H_2O}}$  - нейтрон столкнулся с ядром кислорода.

4. После того, как определен атомный номер ядра, с которым столкнулся нейтрон (пусть этот номер А), разыгрывается случайная величина  $\gamma$  из интервала  $[0,1]$

$$1. \quad \cos Q = 1 - 2\gamma = \omega_z; \quad \omega_x = \sqrt{1 - \omega_z^2} \cos(2\pi\gamma); \quad \omega_y = \sqrt{1 - \omega_z^2} \sin(2\pi\gamma); \quad l_s = -\frac{\ln \gamma}{\Sigma_{tr}}$$

$$2. \quad \varepsilon = \frac{(A-1)^2}{(A+1)^2}$$

$$3. \quad E_1 = \frac{E_0}{2} [(1 + \varepsilon) + (1 - \varepsilon) \cos \theta]$$

Таким образом, определяются энергия нейтрона после столкновения  $E_1$ , направляющие косинусы движения нейтрона после рассеяния  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$ , а значит и координаты следующего столкновения.

5. Если  $E_1 \geq E_T$ , то возврат к п.4 в котором следует положить  $E_0 = E_1$ , если  $E < E_T$ , то разыгрывается новый нейтрон источника, т.е. программа должна идти на п.1.

### Выходная информация

Выходной информацией являются для каждого из  $M$  рассмотренных нейтронов источника следующие массивы: координаты точек столкновения нейтрона с ядрами среды и энергия нейтрона после столкновения. В результате обработки этих массивов информации можно получить экспериментальные значения возраста нейтронов в зависимости от энергии и распределения плотности замедления. Действительно, так как возраст нейтронов

энергии  $E$  связан со средним квадратом смещения нейтрона соотношением  $\tau(E) = \frac{1}{6} \bar{r}^2(E)$ , то достаточно

определить средний квадрат смещения нейтронов от источника до точки замедления до энергии  $E$ . Зафиксируем некоторое заданное значение энергии нейтрона  $E$  и для каждого из  $M$  рассмотренных нейтронов источника определим координаты точки рассеяния, в результате которого энергия нейтрона станет меньше, чем  $E$ . Пусть

координаты этой точки для  $i$ -ого нейтрона будут  $(x_i, y_i, z_i)$ . Тогда средний квадрат смещения нейтрона до замедления его до энергии  $E$  будет приближенно определяться выражением

$$\bar{r}^2 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$$

Задавая различные значения величины  $E$ , можно получить зависимость возраста от энергии

$$\tau(E) = \frac{1}{6} \bar{r}^2(E)$$

При  $E = E_T$  возраст нейтрона  $\tau$  характеризует смещение нейтрона от точки его рождения до точки превращения замедляющегося нейтрона в тепловой.

Экспериментальное распределение плотности замедления по пространству при различных значениях возраста нейтронов можно получить следующим образом. Зададимся областью изменения координаты  $r$  в сферической геометрии ( $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ). Пусть эта величина будет равна  $R$ . Разобьем радиус вектор  $R$  на  $K$  частей, тогда

$R_i = i \frac{R}{k} = i \Delta R$ . Введем в рассмотрение объем пространства, заключенного между двумя соседними сферами

$$V_i = \frac{4}{3} \pi (R_{i+1}^3 - R_i^3), i = 0, \dots, k$$

Зададимся величиной энергии  $E$  и номером  $i$ , используя информацию о координатах столкновения нейтронов с ядрами среды и об их энергии, определим, как и прежде, координаты точки рассеяния, в результате которого энергия нейтрона станет меньше, чем  $E$ . Пусть эта точка характеризуется радиусом  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Определим радиусы этих точек для всех  $M$ , рассмотренных нейтронов источника. Далее вычислим относительную долю нейтронов из  $M$  рассмотренных координаты которых, попали в пространство  $V_i$ , т.е. определим величину

$$\tilde{q}(R_i) = \frac{n_i}{M} \frac{1}{V_i}$$

Где  $n_i(E)$  - число нейтронов из  $M$  рассмотренных, величина радиуса смещения которых оказалась в пределах объема. Величина  $\tilde{q}$  будет пропорциональна плотности замедления.

### Подготовка к данному разделу лабораторной работы

1. Изучить теоретический материал.
2. Для заданного вариантом состава среды рассчитать  $\Sigma_{tr}$ ,  $D$ ,  $\xi$ . В заданном энергетическом диапазоне  $E_0 \div E_T$ , построить зависимость  $\tau(E)$ .
3. Построить для заданных свойств зависимости  $q(\vec{r}, E)$  и  $q(\vec{r}, \tau)$  в случае точечного источника в бесконечной непоглощающей среде.
4. Для заданного варианта состава среды определить время замедления от энергии  $E_0$  до тепловой энергии и время диффузии.
5. Нарисовать блок схему алгоритма модели.
6. Разработать план исследования процесса замедления при диффузии.

### Подготовка к сдаче данного раздела лабораторной работы

1. По данным распечаткам построить для двух из рассмотренных  $M$  судеб нейтронов зависимость  $E(r^2)$ , где  $r^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$
2. Получить зависимость экспериментального значения возраста нейтронов от числа рассмотренных судеб нейтронов. Сравнить с теоретическими значениями возраста.
3. Построить зависимость возраста от энергии по данным численного эксперимента.
4. Построить экспериментальную зависимость  $\tilde{q}(\vec{r}, \tau)$  и сравнить с аналитической зависимостью.

Основные результаты, полученные при выполнении всех разделов лабораторной работы излагаются в заключении.

При сдаче лабораторной работы необходимо правильно отвечать на следующие контрольные вопросы:

1. На основании каких физических законов сохранения, получены выражения для описания акта рассеяния нейтрона на ядре?
2. Какой элемент эффективнее всего замедляет нейтроны?
3. Какая величина используется для характеристики качества замедлителя?
4. В какой системе координат рассеяние нейтронов практически считается сферическим - симметричным?
5. Какой физический смысл  $\Sigma_{tr}$ ?
6. Что такое летаргия нейтрона? Как с помощью летаргии определить среднее число столкновений нейтронов?
7. От чего зависит средняя логарифмическая потеря энергии нейтронов при замедлении?
8. Из каких соображений можно получить спектр замедляющихся нейтронов в поглощающей среде?
9. Что такое "спектр Ферми"? Почему с уменьшением энергии нейтронов  $\phi(E)$  растет?
10. Понятие плотности замедления. Как связана плотность замедления со спектром нейтронов?
11. Какие основные параметры процесса диффузии нейтронов и какой их физический смысл?
12. Смысл величины  $L^2$ ?
13. Какова качественная зависимость от температуры среды?
14. Смысл членов уравнения диффузии нейтронов в среде. Как они зависят от параметров среды?
15. Условия однозначности для уравнения диффузии.
16. Уравнение возраста. Смысл членов уравнения.
17. Понятие возраста нейтронов в среде. От каких физических свойств среды зависит величина возраста нейтронов?
18. Что такое площадь миграции?
19. Каковы характерные величины времени диффузии и замедления в воде, тяжелой воде и графите?

### Литература

1. Лекции по курсу "Математические модели физических систем".
2. Климов А.Н. Ядерная физика и ядерные реакторы, М., Энергоатомиздат, 1985, с. 167-195.
3. Бартоломей Г.Г. и др. Основы теории и методы расчета ядерных энергетических реакторов. М., Энергоиздат, 1982, с. 81-159