

Тестирование реализованных алгоритмов на заданных функциях:

Метод дихотомии:

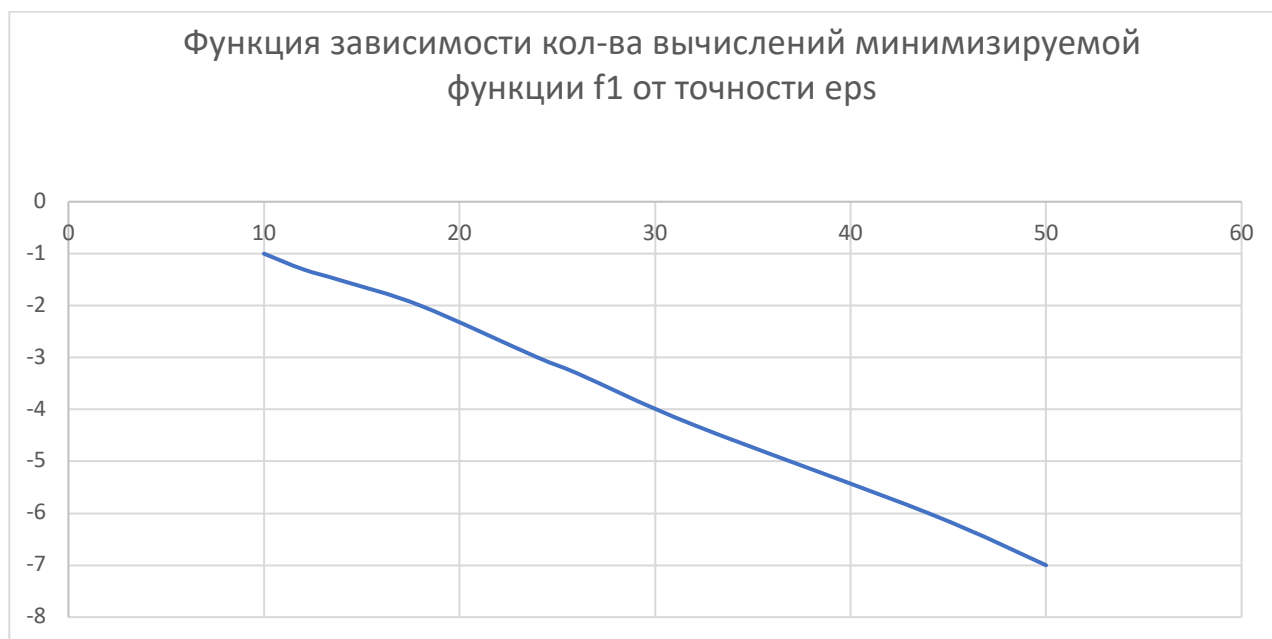
	Функция-1							
iter	a	b	Lab	Lab i / Lab i-1	x1	F(x1)	x2	F(x2)
1	-0,5000	0,5000	1,0000	1,0000	-0,0333	1,0793	0,0333	0,9451
2	-0,0333	0,5000	0,5333	0,5333	0,2000	0,9501	0,2667	1,0402
3	-0,0333	0,2667	0,3000	0,5625	0,0833	0,9030	0,1500	0,9089
4	-0,0333	0,1500	0,1833	0,6111	0,0250	0,9567	0,0917	0,9001
5	0,0250	0,1500	0,1250	0,6818	0,0542	0,9221	0,1208	0,8986
interval with minimum: [0.05416667 : 0.15]								

	Функция-2							
iter	a	b	Lab	Lab i / Lab i-1	x1	F(x1)	x2	F(x2)
1	6,0000	9,9000	3,9000	1,0000	7,9167	-0,8148	7,9833	-0,8186
2	7,9167	9,9000	1,9833	0,5085	8,8750	-0,8439	8,9417	-0,8412
3	7,9167	8,9417	1,0250	0,5168	8,3958	-0,8388	8,4625	-0,8412
4	8,3958	8,9417	0,5458	0,5325	8,6354	-0,8454	8,7021	-0,8460
5	8,6354	8,9417	0,3063	0,5611	8,7552	-0,8460	8,8219	-0,8452
6	8,6354	8,8219	0,1865	0,6088	8,6953	-0,8460	8,7620	-0,8459
7	8,6354	8,7620	0,1266	0,6788	8,6654	-0,8457	8,7320	-0,8460
interval with minimum: [8.665364 ; 8.761979]								

	Функция-3							
iter	a	b	Lab	Lab i / Lab i-1	x1	F(x1)	x2	F(x2)
1	0,0000	6,2832	6,2832	1,0000	3,1083	-10,2546	3,1749	-10,1961
2	0,0000	3,1749	3,1749	0,5053	1,5541	-4,6748	1,6208	-5,0822
3	1,5541	3,1749	1,6208	0,5105	2,3312	-8,8277	2,3979	-9,0855
4	2,3312	3,1749	0,8437	0,5206	2,7197	-9,9993	2,7864	-10,1129
5	2,7197	3,1749	0,4552	0,5395	2,9140	-10,2514	2,9807	-10,2813
6	2,9140	3,1749	0,2609	0,5732	3,0111	-10,2850	3,0778	-10,2711
7	2,9140	3,0778	0,1638	0,6277	2,9626	-10,2761	3,0292	-10,2842
8	2,9626	3,0778	0,1152	0,7035	2,9868	-10,2826	3,0535	-10,2797
interval with minimum: [2.96256 ; 3.0535097]								

Функция-4								
iter	a	b	Lab	Lab i / Lab i-1	x1	F(x1)	x2	F(x2)
1	0,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,4667	16,7133	0,5333	17,4778
2	0,0000	0,5333	0,5333	0,5333	0,2333	15,1385	0,3000	15,4510
3	0,0000	0,3000	0,3000	0,5625	0,1167	14,7771	0,1833	14,9580
4	0,0000	0,1833	0,1833	0,6111	0,0583	14,6660	0,1250	14,7964
5	0,0000	0,1250	0,1250	0,6818	0,0292	14,6245	0,0958	14,7328
interval with minimum: [0,0 : 0.09583333]								

	Функция-5							
iter	a	b	Lab	Lab i / Lab i-1	x1	F(x1)	x2	F(x2)
1	0,5000	2,5000	2,0000	1,0000	1,4667	0,7432	1,5333	0,6447
2	1,4667	2,5000	1,0333	0,5167	1,9500	0,2356	2,0167	0,2031
3	1,9500	2,5000	0,5500	0,5323	2,1917	0,1611	2,2583	0,1615
4	1,9500	2,2583	0,3083	0,5606	2,0708	0,1835	2,1375	0,1674
5	2,0708	2,2583	0,1875	0,6081	2,1313	0,1686	2,1979	0,1608
6	2,1313	2,2583	0,1271	0,6778	2,1615	0,1639	2,2281	0,1602
interval with minimum: [2.1614583 ; 2.2583332]								



Метод золотого сечения:

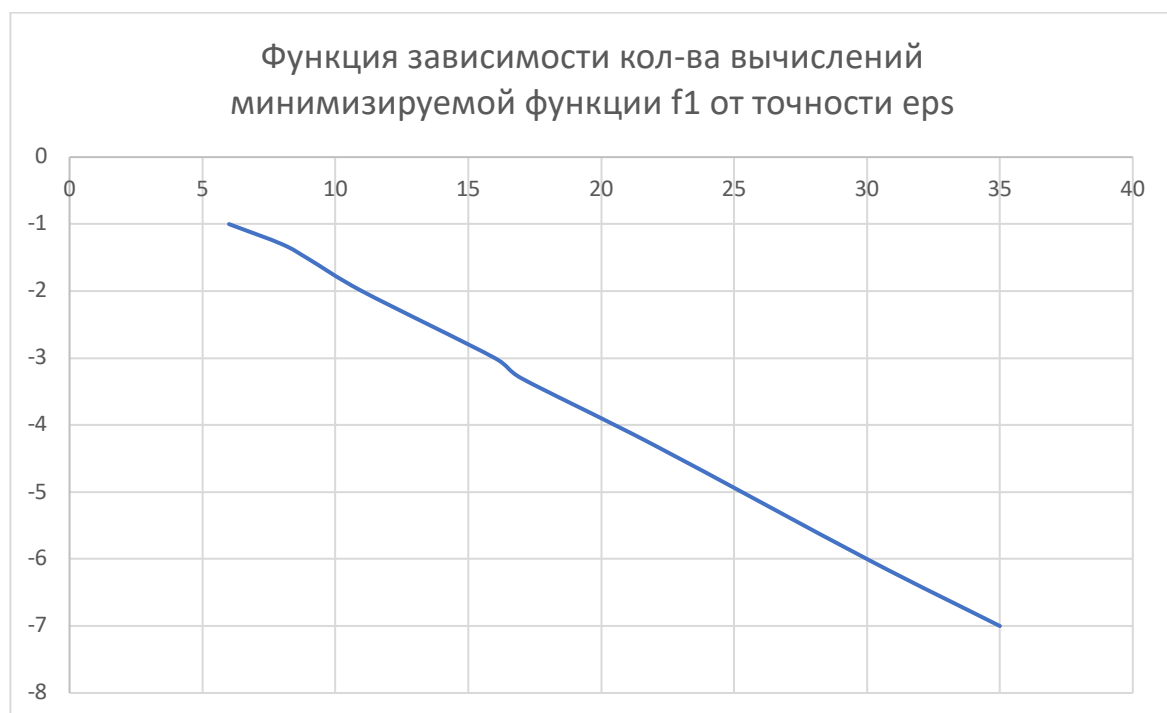
	Функция-1							
iter	a	b	Lab	Lab i / Lab i-1	x1	F(x1)	x2	F(x2)
1	-0,5000	0,5000	1,0000	1,0000	-0,1180	1,4099	0,1180	0,8982
2	-0,1180	0,5000	0,6180	0,6180	0,1180	0,8982	0,2639	1,0359
3	-0,1180	0,2639	0,3819	0,6180	0,0279	0,9526	0,1180	0,8982
4	0,0279	0,2639	0,2360	0,6180	0,1180	0,8982	0,1738	0,9251
5	0,0279	0,1738	0,1459	0,6182	0,0836	0,9029	0,1180	0,8982
next interval could be: [0.08359213 ; 0.17376207]								

	Функция-2							
iter	a	b	Lab	Lab i / Lab i-1	x1	F(x1)	x2	F(x2)
1	6,0000	9,9000	3,9000	1,0000	7,4897	-0,7892	8,4103	-0,8394
2	7,4897	9,9000	2,4103	0,6180	7,4897	-0,7892	8,4103	-0,8394
3	7,4897	8,9793	1,4896	0,6180	8,0587	-0,8228	8,4103	-0,8394
4	8,0587	8,9793	0,9206	0,6180	8,4103	-0,8394	8,6277	-0,8453
5	8,4103	8,9793	0,5690	0,6181	8,6277	-0,8453	8,7620	-0,8459
6	8,6277	8,9793	0,3516	0,6179	8,7620	-0,8459	8,8450	-0,8447
7	8,6277	8,8450	0,2173	0,6180	8,7107	-0,8460	8,7620	-0,8459
8	8,6277	8,7620	0,1343	0,6180	8,6790	-0,8458	8,7107	-0,8460
next interval could be: [8.678979 ; 8.761995]								

Функция-3								
iter	a	b	Lab	Lab i / Lab i-1	x1	F(x1)	x2	F(x2)
1	0,0000	6,2832	6,2832	1,0000	2,4000	-9,0933	3,8832	-7,6947
2	0,0000	3,8832	3,8832	0,6180	1,4833	-4,2387	2,4000	-9,0933
3	1,4833	3,8832	2,3999	0,6180	2,4000	-9,0933	2,9665	-10,2774
4	2,4000	3,8832	1,4832	0,6180	2,9665	-10,2774	3,3167	-9,9690
5	2,4000	3,3167	0,9167	0,6181	2,7501	-10,0545	2,9665	-10,2774
6	2,7501	3,3167	0,5666	0,6181	2,9665	-10,2774	3,1003	-10,2596
7	2,7501	3,1003	0,3502	0,6181	2,8839	-10,2283	2,9665	-10,2774
8	2,8839	3,1003	0,2164	0,6179	2,9665	-10,2774	3,0176	-10,2850
9	2,9665	3,1003	0,1338	0,6183	3,0176	-10,2850	3,0492	-10,2808
next interval could be: [2.966518 ; 3.049177]								

Функция-4								
iter	a	b	Lab	Lab i / Lab i-1	x1	F(x1)	x2	F(x2)
1	0,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,3820	15,9727	0,6180	18,7413
2	0,0000	0,6180	0,6180	0,6180	0,2361	15,1496	0,3820	15,9727
3	0,0000	0,3820	0,3820	0,6181	0,1459	14,8487	0,2361	15,1496
4	0,0000	0,2361	0,2361	0,6181	0,0902	14,7217	0,1459	14,8487
5	0,0000	0,1459	0,1459	0,6180	0,0557	14,6619	0,0902	14,7217
next interval could be: [0.0 ; 0.09016994]								

Функция-5								
iter	a	b	Lab	Lab i / Lab i-1	x1	F(x1)	x2	F(x2)
1	0,5000	2,5000	2,0000	1,0000	1,2639	1,0992	1,7361	0,4012
2	1,2639	2,5000	1,2361	0,6181	1,7361	0,4012	2,0279	0,1986
3	1,7361	2,5000	0,7639	0,6180	2,0279	0,1986	2,2082	0,1604
4	2,0279	2,5000	0,4721	0,6180	2,2082	0,1604	2,3197	0,1699
5	2,0279	2,3197	0,2918	0,6181	2,1393	0,1671	2,2082	0,1604
6	2,1393	2,3197	0,1804	0,6182	2,2082	0,1604	2,2508	0,1610
7	2,1393	2,2508	0,1115	0,6181	2,1819	0,1618	2,2082	0,1604
next interval could be: [2.1818926 ; 2.2507765]								



Метод Фибоначчи:

	Функция-1							
iter	a	b	Lab	Lab i / Lab i-1	x1	F(x1)	x2	F(x2)
1	-0,5000	0,5000	1,0000	1,0000	-0,1154	1,3964	0,1154	0,8979
2	-0,1154	0,5000	0,6154	0,6154	0,1154	0,8979	0,2692	1,0443
3	-0,1154	0,2692	0,3846	0,6250	0,0385	0,9387	0,1154	0,8979
4	0,0385	0,2692	0,2307	0,5998	0,1154	0,8979	0,1923	0,9421
5	0,0385	0,1923	0,1538	0,6667	0,1154	0,8979	0,1154	0,8979
interval with minimum: [0.038461536 ; 0.19230768]								

	Функция-2							
iter	a	b	Lab	Lab i / Lab i-1	x1	F(x1)	x2	F(x2)
1	6,0000	9,9000	3,9000	1,0000	7,4891	-0,7891	8,4109	-0,8394
2	7,4891	9,9000	2,4109	0,6182	8,4109	-0,8394	8,9782	-0,8391
3	7,4891	8,9782	1,4891	0,6177	8,0564	-0,8227	8,4109	-0,8394
4	8,0564	8,9782	0,9218	0,6190	8,4109	-0,8394	8,6236	-0,8452
5	8,4109	8,9782	0,5673	0,6154	8,6236	-0,8452	8,7655	-0,8459
6	8,6236	8,9782	0,3546	0,6251	8,7655	-0,8459	8,8364	-0,8449
7	8,6236	8,8364	0,2128	0,6001	8,6945	-0,8459	8,7655	-0,8459
8	8,6236	8,7655	0,1419	0,6668	8,6945	-0,8459	8,6945	-0,8459
interval with minimum: [8.623636 ; 8.765454]								

	Функция-3							
iter	a	b	Lab	Lab i / Lab i-1	x1	F(x1)	x2	F(x2)
1	0,0000	6,2832	6,2832	1,0000	2,4003	-9,0946	3,8829	-7,6967
2	0,0000	3,8829	3,8829	0,6180	1,4825	-4,2343	2,4003	-9,0946
3	1,4825	3,8829	2,4004	0,6182	2,4003	-9,0946	2,9651	-10,2770
4	2,4003	3,8829	1,4826	0,6176	2,9651	-10,2770	3,3181	-9,9660
5	2,4003	3,3181	0,9178	0,6190	2,7533	-10,0600	2,9651	-10,2770
6	2,7533	3,3181	0,5648	0,6154	2,9651	-10,2770	3,1063	-10,2559
7	2,7533	3,1063	0,3530	0,6250	2,8945	-10,2371	2,9651	-10,2770
8	2,8945	3,1063	0,2118	0,6000	2,9651	-10,2770	3,0357	-10,2834
9	2,9651	3,1063	0,1412	0,6667	3,0357	-10,2834	3,0357	-10,2834
interval with minimum: [2.9650989 ; 3.106294]								

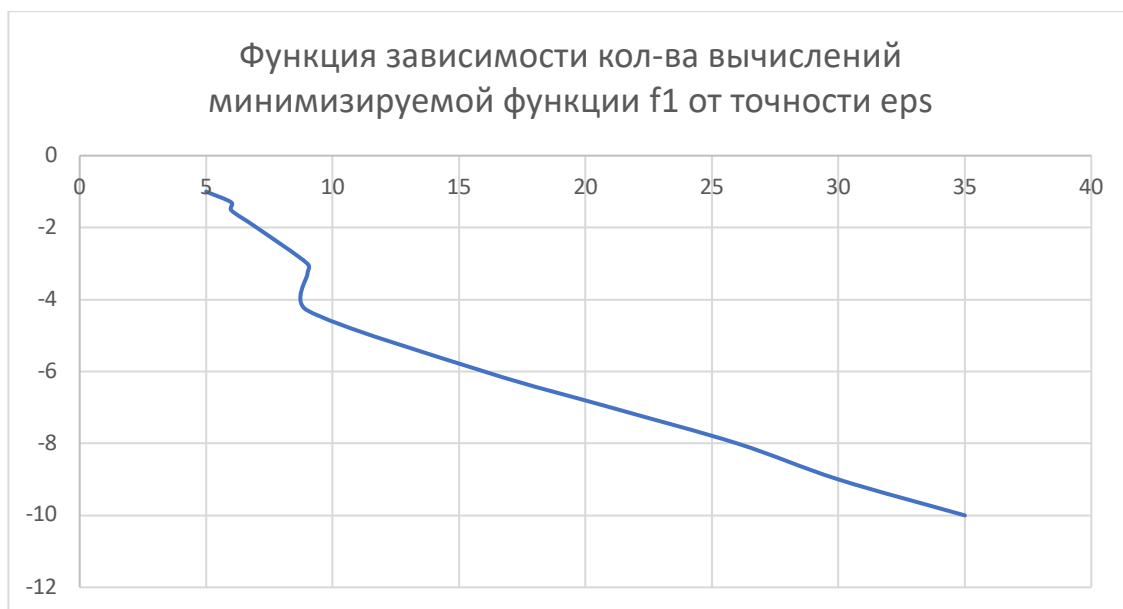
	Функция-4							
iter	a	b	Lab	Lab i / Lab i-1	x1	F(x1)	x2	F(x2)
1	0,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,3846	15,9925	0,6154	18,6960
2	0,0000	0,6154	0,6154	0,6154	0,2308	15,1282	0,3846	15,9925
3	0,0000	0,3846	0,3846	0,6250	0,1538	14,8702	0,2308	15,1282
4	0,0000	0,2308	0,2308	0,6001	0,0769	14,6971	0,1538	14,8702
5	0,0000	0,1538	0,1538	0,6664	0,0769	14,6971	0,0769	14,6971
interval with minimum: [0.0 ; 0.15384617]								

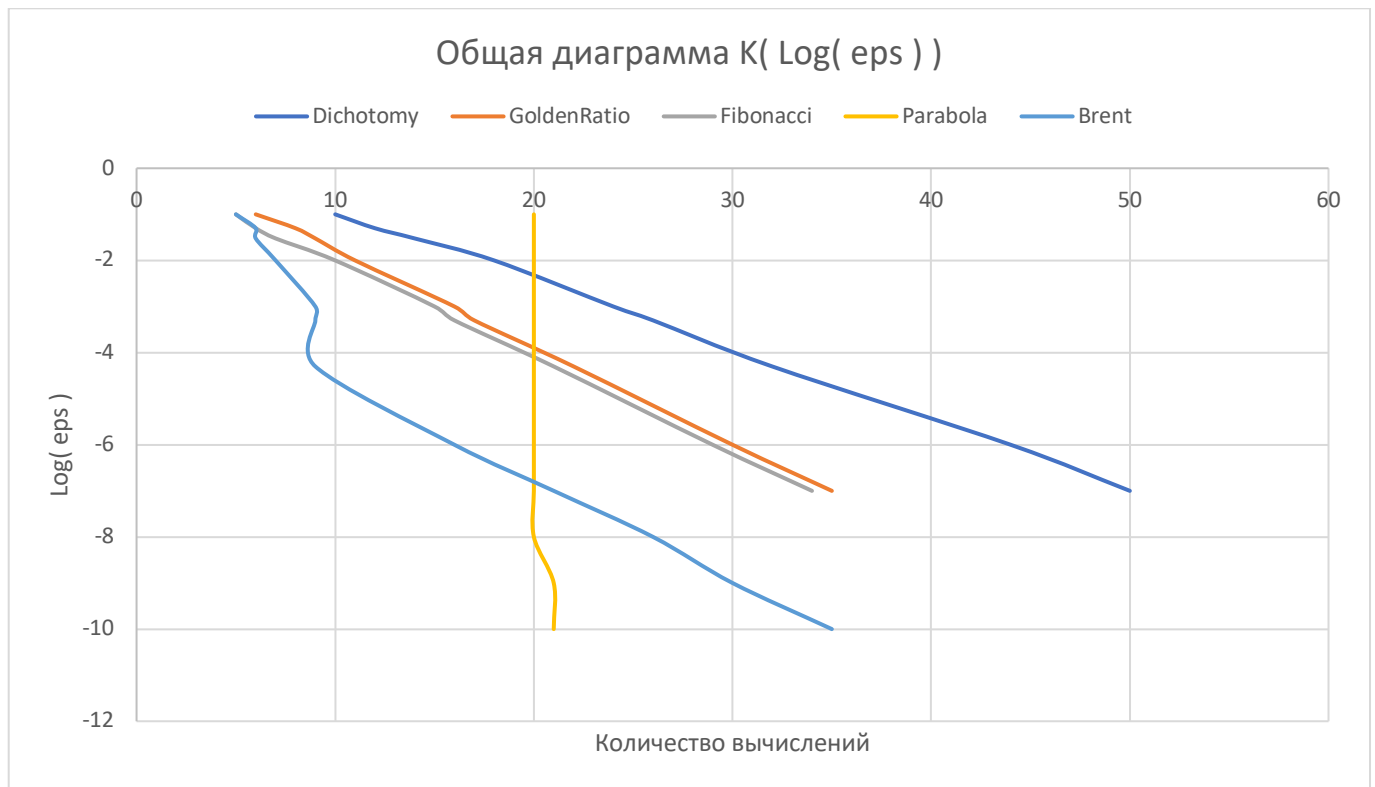
	Функция-5							
iter	a	b	Lab	Lab i / Lab i-1	x1	F(x1)	x2	F(x2)
1	0,5000	2,5000	2,0000	1,0000	1,2619	1,1031	1,7381	0,3992
2	1,2619	2,5000	1,2381	0,6191	1,7381	0,3992	2,0238	0,2002
3	1,7381	2,5000	0,7619	0,6154	2,0238	0,2002	2,2143	0,1602
4	2,0238	2,5000	0,4762	0,6250	2,2143	0,1602	2,3095	0,1680
5	2,0238	2,3095	0,2857	0,6000	2,1190	0,1710	2,2143	0,1602
6	2,1190	2,3095	0,1905	0,6668	2,2143	0,1602	2,2143	0,1602
interval with minimum: [2.1190476 ; 2.3095238]								

Функция-3						
iter	a	b	Lab	Lab i / Lab i-1	u	F(u)
1	0,0000	6,2832	6,2832	1,0000	3,8835	-7,6931
2	0,0000	3,8835	3,8835	0,6181	1,4833	-4,2390
3	1,4833	3,8835	2,4002	0,6181	2,9602	-10,2753
4	2,4002	3,8835	1,4833	0,6180	3,3562	-9,8807
5	2,4002	3,3562	0,9560	0,6445	2,9602	-10,2753
interval with minimum: [2.400176787342602 ; 3.356199974888801]						

Функция-4						
iter	a	b	Lab	Lab i / Lab i-1	u	F(u)
1	0,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,6181	18,7420
2	0,0000	0,6181	0,6181	0,6181	0,2361	15,1496
3	0,0000	0,3820	0,3820	0,6180	0,2361	15,1496
interval with minimum: [0.0 ; 0.382]						

Функция-5						
iter	a	b	Lab	Lab i / Lab i-1	u	F(u)
1	0,5000	2,5000	2,0000	1,0000	1,7362	0,4011
2	1,2640	2,5000	1,2360	0,6180	2,0279	0,1986
3	1,7362	2,5000	0,7638	0,6180	2,0279	0,1986
interval with minimum: [1.7361520000000001 ; 2.5]						





Выводы:

Были реализованы следующие алгоритмы одномерной минимизации функции:

- Метод дихотомии
- Метод золотого сечения
- Метод Фибоначчи
- Метод парабол
- Метод Брента

Метод дихотомии

Метод дихотомии заключается в делении интервала неопределенности на две части на каждой итерации. Выбираются две точки, лежащие симметрично от середины интервала на малом расстоянии ϵ .

На практике подтвердилось, что сначала за одну итерацию интервал неопределенности уменьшается примерно в 2 раза. Ближе к последним итерациям это значение уменьшается, так как влияние расстояния двух точек от центра становится все больше.

Метод золотого сечения

Точки x_1 и x_2 располагаются симметрично относительно середины отрезка и делят его в пропорции золотого сечения. На каждой итерации вычисляем исследуемую функцию один раз. Их этого следует отношение длин двух последних интервалов неопределенности на каждой итерации одинаково и равно золотому сечению (подтверждено практикой).

Метод Фибоначчи

Улучшенная реализация поиска с помощью золотого сечения. Как и в методе золотого сечения мы только на первой итерации производим два вычисления значений функции, далее одно. Число итераций задается в самом начале. Соотношение длин интервалов постепенно увеличивается.

Изначально коэффициент сокращения интервала равен дроби золотого сечения. Так получается потому, что между числами Фибоначчи и золотым сечением есть связь: предел отношения двух идущих подряд чисел Фибоначчи при стремлении их номера к бесконечности равно дроби золотого сечения, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$. Затем далее Коэффициент меняется от итерации к итерации.

Метод парабол

Основан на аппроксимации параболы на трех точках. Очень нестабилен (столкнулись с этим). На некоторых функциях и интервалах работает эффективнее всех, требуя в разы меньше итераций. Но, например, на второй функции потребовалось в разы больше итераций. При этом на каждой итерации интервал практически не уменьшался. Нет закономерности в изменении интервала, то интервалы меняются в два раза, то почти (совсем) без изменения от итерации к итерации. Точка аппроксимации на каждой итерации выбирается в предположении того, что значение функции в ней меньше значений функции на обоих границах, что не обязательно верно (гарантируется, т. к. точка попадает на отрезок убывания или отрезок возрастания, одно из неравенств $f_a > f_x$, $f_b > f_x$).

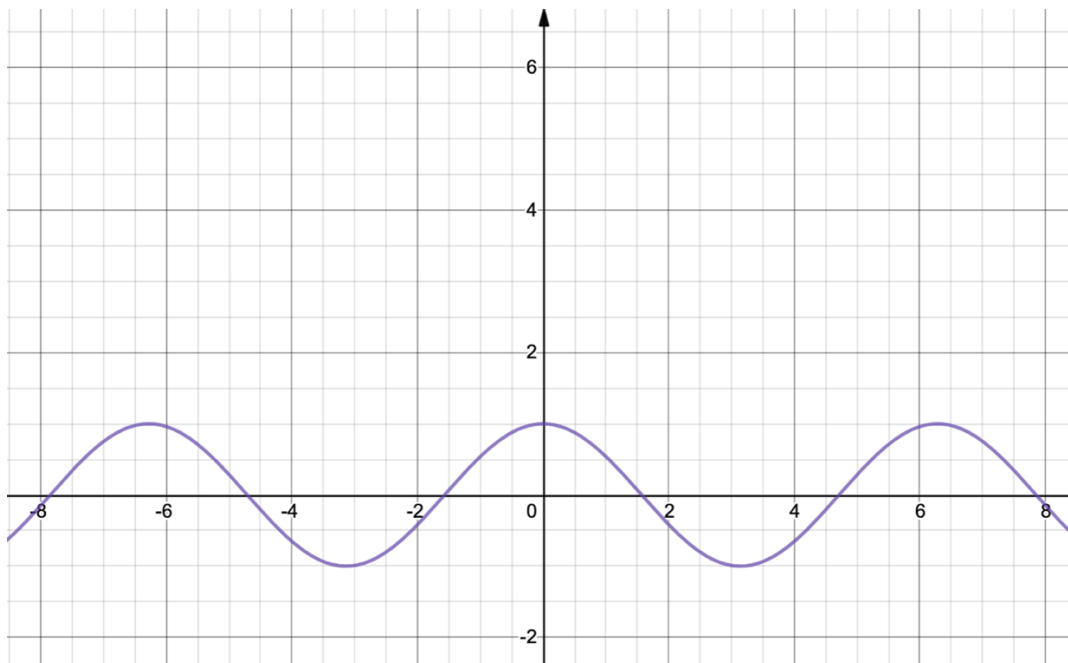
В целом, по полученному графику подтверждается сверхбыстрая сходимость в среднем.

Метод Брента

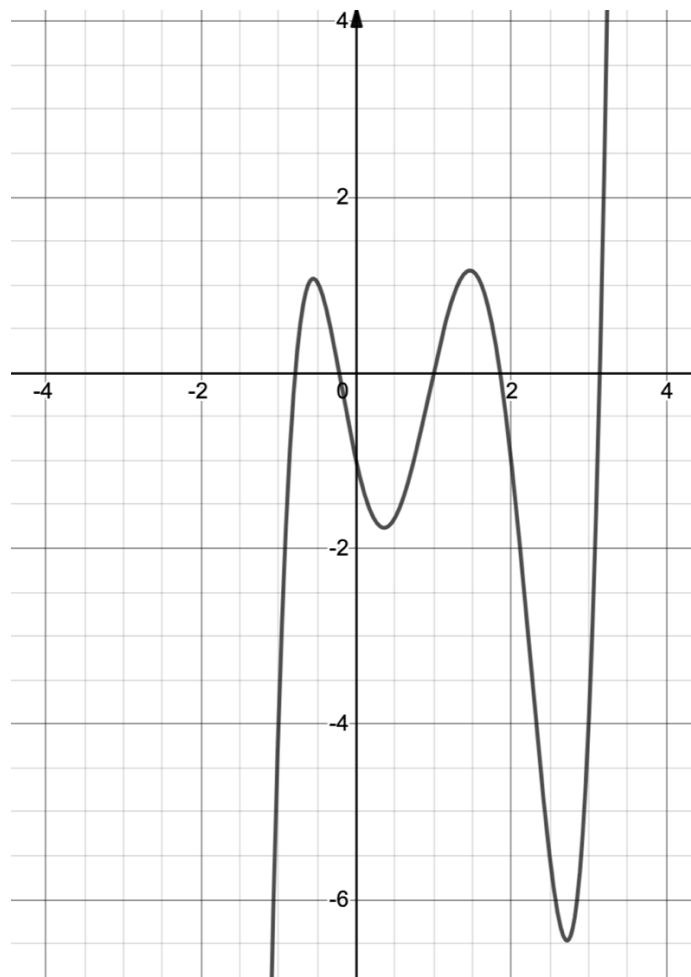
Является комбинацией метода золотого сечения и метода парабол. В среднем находит минимум функции быстрее всех остальных алгоритмов (но метод парабол при удачной функции и интервале может найти минимум сверхбыстро). В отличие от остальных алгоритмов, в которых точность является условием утверждения очередного интервала, в данном алгоритме точность используется в вычислении самого алгоритма и влияет на соотношение, в котором находятся число выбранных точек методом золотого сечения и методом парабол.

Тестирование реализованных алгоритмов на многомодальных функциях:

$f1(x) = \cos x$ на интервалах: $[-10 ; 10]$, $[-7 ; 4]$, $[-5 ; 3]$



$f2(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 4x - 1$ на интервалах: $[-1 ; 3]$, $[-0.8 ; 1]$, $[-2 ; 4]$



Функция	Метод	Интервал поиска	Интервал с минимумом	xmin	f(xmin)	Итерации
f1	дихотомии	[-10 ; 10]	[3.1007159 ; 3.1868486]	3,1340492	-0,999971548	10
f1	золотого сечения	[-10 ; 10]	[3.1116292 ; 3.1737418]	3,1426854	-0,999999403	12
f1	Фибоначчи	[-10 ; 10]	[3.0472107 ; 3.2188847]	3,13304758	-0,999963491	11
f1	парабол	[-10 ; 10]	не сходится			
f1	Брента	[-10 ; 10]	[2.36152 ; 3.4761575552]	3,0285	-0,9936	7
f1	дихотомии	[-7 ; 4]	[-3.1776042 ; -3.0895834]	-3,144271	-0,999996414	9
f1	золотого сечения	[-7 ; 4]	[-3.1772342 ; -3.0877972]	-3,1325157	-0,999958804	10
f1	Фибоначчи	[-7 ; 4]	[-3.1805553 ; -3.0277774]	-3,1041665	-0,999299724	10
f1	парабол	[-7 ; 4]	не сходится			
f1	Брента	[-7 ; 4]	[-3.59558 ; -2.798]	-3,1778	-0,9993	5
f1	дихотомии	[-5 ; 3]	[-3.202604 ; -3.104948]	-3,1382813	-0,999994518	8
f1	золотого сечения	[-5 ; 3]	[-3.176501 ; -3.111456]	-3,1439786	-0,999997154	10
f1	Фибоначчи	[-5 ; 3]	[-3.2022474 ; -3.022472]	-3,1123595	-0,999572743	9
f1	парабол	[-5 ; 3]	не сходится			
f1	Брента	[-5 ; 3]	[-3.832840256 ; -2.7002527938735486]	-3,1114	-0,9995	5
f2	дихотомии	[-1 ; 3]	[0.32135418 ; 0.41875002]	0,3546875	-1,765951768	7
f2	золотого сечения	[-1 ; 3]	[0.3049517 ; 0.39009663]	0,34752417	-1,765008331	8
f2	Фибоначчи	[-1 ; 3]	[0.30909097 ; 0.45454556]	0,38181826	-1,763966772	8
f2	парабол	[-1 ; 3]	не сходится			
f2	Брента	[-1 ; 3]	[0.23767999590158465 ; 0.528]	0,3752	-1,7653	5
f2	дихотомии	[-0.8 ; 1]	[0.31041667 ; 0.40416667]	0,34375	-1,764263302	6
f2	золотого сечения	[-0.8 ; 1]	[0.3124612 ; 0.37445652]	0,34345886	-1,764198711	7
f2	Фибоначчи	[-0.8 ; 1]	[0.31428576 ; 0.48571432]	0,40000004	-1,757759984	6
f2	парабол	[-0.8 ; 1]	не сходится			
f2	Брента	[-0.8 ; 1]	[0.18128311394656782 ; 0.4437904769476545]	0,3125	-1,7515	5
f2	дихотомии	[-2 ; 4]	[0.31770828 ; 0.40755203]	0,3742187	-1,765405664	8
f2	золотого сечения	[-2 ; 4]	[0.34057972 ; 0.4195134]	0,38004655	-1,764363365	9
f2	Фибоначчи	[-2 ; 4]	[0.2921347 ; 0.4269662]	0,35955045	-1,766241673	9
f2	парабол	[-2 ; 4]	не сходится			
f2	Брента	[-2 ; 4]	[0.2919999999999998 ; 0.5951801336223277]	0,4212	-1,7457	7
f2	дихотомии	[-10 ; 10]	[2.6724608 ; 2.7585936]	2,705794	-6,461398875	10
f2	золотого сечения	[-10 ; 10]	[-10.0 ; -9.937887]	-9,968944	-152355,7191	12
f2	Фибоначчи	[-10 ; 10]	[-10.0 ; -9.828326]	-9,9141636	- 148 527,0060788851	11
f2	парабол	[-10 ; 10]	не сходится			
f2	Брента	[-10 ; 10]	[-10.0 ; -7.08210064]	-8,1967	-62023,4651	5

Выводы:

Для более точного наблюдения исследовали поведение алгоритмов на нескольких различных интервалах.

Данные алгоритмы используются (знаем, что гарантированно дадут результат) на непрерывных и унимодальных функциях на заданном интервале, иначе алгоритмы либо найдут локальный минимум, либо не дадут результат вообще. Это можно заметить по данным выше.