Портрет матрицы. Хранение разреженных матриц.

Портретом разреженной матрицы А называется множество пар индексов (i, j) таких, что $a_{i,j} \, != \, 0$

$$P_A = \{(i,j) \mid a_{ij} \ \neq 0\}$$

Существует несколько случаев:

1. Матрицы с несимметричным портретов

$$\exists \ (i,j) \ \in \ P_A : (j,i) \notin \ P_A$$

   Эти матрицы не симметричны и в обычном смысле, то есть:

$$\mathrm{A} \neq \mathrm{A}^{\mathrm{T}}$$

2. Несимметричные матрицы с симметричным портретом:

$$(i,j) \in P_A \ \Leftrightarrow (j,i) \ \in P_A$$

   Хотя в общем случае $a_{ij} \ \neq a_{ji}$

3. Симметричные матрицы с симметричным портретом.

$$a_{ij} = a_{ji}$$

Любую разреженную матрицу можно представить в виде графа с множеством вершин, и в этом случае портретом будет является множество ребер этого графа.

Если у нас симметричный портрет, то такой граф будет неориентированным. Несимметричный портрет – ориентированный граф.

Понятно, что для симметричных матриц достаточно хранить только один из треугольников (либо верхний, либо нижний).

Если у нас несимметричная матрица, но портрет симметричный, то нам необходимо хранить все ненулевые элементы матрицы, однако схему их размещения нам достаточно задать только для одного из треугольников.

Одним из самых распространенных способов хранения несимметричных матриц для произвольной структуры является разреженный формат. Разреженно-строчный или разреженно-столбцовый.

Разреженно-строчный формат:

В виде 3 массивов:

1. Массив ненулевых элементов матрицы (data)
2. Массив индексов столбцов ненулевых элементов (indices)
3. Массив указателей для массивов 1 и 2 на ненулевые элементы в строках (indptr)

В последнем массиве будет храниться число элементов равное увеличенной на 1 размерности нашей СЛАУ. Его i-тый элемент указывает с какой позиции в массивах data и indices начинается i-тая строка в матрице.

Соответственно, если мы возьмем разницу между indptr[i+1] – indptr[i], то мы получим число ненулевых элементов в i-той строке.

Пример разреженно-строчного формата:

A

$= (9\ 0\ 0\ 2\ 1\ 0\ 2\quad 0\ 0\ 3\ 11\ 2\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 2\quad 10\ 2\ 0\ 0\ 0\quad 2\ 9\ 1\ 0\ 0\quad 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 2\ 0\ 1\ 2\ 0\ 3\quad 0\ 0\ 0\ 8\ 0\quad 0\ 0$

$$data = [9,3,1,1,11,2,1,2,1,10,2,2,1,2,9,1,1,1,2,1,8,1,2,2,3,8]$$
$$indices = [0,3,4,6,1,2,3,6,1,2,3,0,1,2,3,4,0,3,4,6,5,0,1,4,6]$$
$$indptr = [1,5,9,12,17,21,22,26]$$

В питоне это реализовано в SciPy csr_matrix.

LU разложение матрицы

Когда мы храним разреженную матрицу, мы храним ее портрет. Зачем нам все это нужно?

Главная задача со всеми матрицами – решить систему. Найти решение:

$$Ax = b$$

Мы знаем, что системы в прямую решаются методом Гаусса. Он вычислительно достаточно сложный, однако есть некоторые вычислительные вспомогательные вещи.

Если все главные миноры квадратной матрицы А будут отличны от нуля, то тогда существуют такие нижние и верхние треугольные матрицы, что их произведение будет равно матрице А. Это значит, что свою матрицу А я могу представить в виде произведения нижней и верхней треугольных матриц L и U.

$$A = L * U$$

L – нижняя треугольная матрица (на диагонали стоят единицы для всех i, все что выше диагонали - нули)

U – верхний треугольник (диагональные элементы $u_{ii} = a_{ii}$)

Разложение матрицы А в произведение L U.

$$[1\ 0\ \ l_{21}\ 1\ \ \cdots\ 0\ 0\ \ \vdots \ddots \vdots\ \ l_{n1}\ l_{n2}\ \ \cdots\ 1\ ] * [u_{11}\ 0\ \ u_{12}\ u_{22}\ \ \cdots\ u_{1n}\ u_{2n}\ \ \vdots \ddots \vdots\ \ 0\ 0\ \ \cdots\ u_{nn}\ ] = [a_{11}\ \cdots\ a_{1n}\ \ \vdots \ddots \vdots\ \ a_{n1}\ \cdots\ a_{nn}\ ]$$

$u_{11} = a_{11}$	$u_{12} = a_{12}$ ...	$u_{1n} = a_{1n}$
$l_{21} \cdot u_{11} = a_{21}$	$l_{21} \cdot u_{12} + u_{22} = a_{22}$	$l_{21} u_{1n} + u_{2n} = a_{2n}$
$l_{31} \cdot u_{11} = a_{31}$	$l_{31} \cdot u_{12} + l_{32} u_{22} = a_{32}$	$l_{31} u_{1n} + l_{32} u_{2n} + u_{3n} = a_{3n}$
$\vdots$	$\dots$	$\dots$
$l_{n1} u_{11} = a_{n1}$	$l_{n1} u_{12} + l_{n2} u_{22} = a_{n2}$	$l_{n1} u_{1n} + \dots + u_{nn} = a_{nn}.$

Из первой строки имеем: $\forall j:\ u_{1j} = a_{1j}$

Из первого столбца имеем: $i = 2\,..\,n:\ l_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}}$

Из оставшейся части второй строки имеем: $j = 2\,..\,n:\ u_{2j} = a_{2j} - l_{21} * u_{1j}$

Из оставшейся части второго столбца имеем: $i = 3\,..\,n:\ l_{i2} = \frac{a_{i2} - l_{i1} * u_{12}}{u_{22}}$

Обобщив все это имеем:

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \quad l_{ik}u_{kj} \quad (i \le j)$$

$$l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}}(a_{ij} - \textstyle\sum_{k=1}^{j-1} \quad l_{ik}u_{kj}) \quad (i > j)$$

Все главные миноры должны быть неравны нулю.
Вычислить все главные миноры достаточно сложно, поэтому при реализации гораздо проще проверять, что ни один из диагональных элементов не равен нулю.
(Нужна проверка, что $u_{jj} \neq 0$)

$$Ax = b$$

$A = L * U$ => $L * U * x = b$

Если мы обозначим $U * x = y$, тогда

$$L * y = b$$

Мы легко можем решить эту систему обратным ходом метода Гаусса.
Вычислительная сложность существенно меньше, чем при $Ax = b$.

$L * y = b$ отсюда получаем y, а потом решаем $U * x = y$, получаем x.

$$A = LU \leftrightarrow A^{-1} = U^{-1}L^{-1}$$

Это существенно облегчает нам жизнь, так как обратная матрица существует далеко не всегда.

Матрицы специального вида

Виды матриц:

1. Диагональные матрицы – всегда квадратные. Огромное достоинство диагональной матрицы заключается в том, что у нее очень легко вычисляется определитель. Просто произведение диагональных элементов. Диагональная матрица будет невырожденной, если ни один из диагональных элементов не равен нулю.
   $$D = [\alpha_{11}\ 0\ \ 0\ \alpha_{22} \quad \cdots\ 0\ 0\ \ \vdots \ddots \vdots\ \ 0\ 0\ \ \cdots\ \alpha_{nn}\ ]$$
   Обратная матрица диагональной матрицы – тоже диагональная матрица.
   Произведение двух диагональных матриц – диагональная матрица.

   Множество диагональных матриц замкнуто относительно операции умножения.

   Умножение диагональных матриц коммутативно ($D_1D_2 = D_2D_1$).
   Единичная матрица также является диагональной матрицей.
   Множество диагональных матриц будет образовывать абелеву мультипликативную группу.
2. Скалярные матрицы – матрицы, представимые в виде:
   $$A = \alpha * E = \ [\alpha\ 0\ \ 0\ \alpha \quad \cdots\ 0\ 0\ \ \vdots \ddots \vdots\ \ 0\ 0\ \ \cdots\ \alpha\ ]\ \alpha\ \in P$$
   E – единичная матрица
   $$\alpha * E + \beta * E = (\alpha + \beta) * E$$
   $$\alpha * E * \beta * E = (\alpha\beta) * E$$
3. Блочно-диагональные матрицы:

$A = \ [\mathrm{A}_{11}\ 0\ \ 0\ \mathrm{A}_{22}\ \ \ \cdots\ 0\ 0\ \ \vdots \ddots \vdots\ \ 0\ 0\ \ \cdots\ \mathrm{A}_{ss}\ ]$ A_{ll} – квадратная матрица, $l = 1..s$

При этом матрица A – квазидиагональная.

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$det\ A = \prod_{i=1}^{s}\ \ \ A_{ii}$ - определитель

$rg\ A = \ \sum\ \ \ \ rg\ A_{ii}$ – ранг матрицы

4. Треугольные матрицы

$$A = [\alpha_{11}\ 0\ \ \alpha_{12}\ \alpha_{22}\ \ \ \cdots\ \alpha_{1n}\ \alpha_{2n}\ \ \vdots \ddots \vdots\ \ 0\ 0\ \ \cdots\ \alpha_{nn}\ ]$$

$$det\ A = \prod_{i=1}^{n}\ \ \ \alpha_{ii}$$

$AB \neq BA$ (нет коммутативности у треугольных матриц)

5. Блочно-треугольные матрицы

   $A = \ [\mathrm{A}_{11}\ 0\ \ *\ \mathrm{A}_{22}\ \ \ \cdots\ *\ *\ \vdots \ddots \vdots\ \ 0\ 0\ \ \cdots\ \mathrm{A}_{ss}\ ]$ – верхняя блочно-треугольная матрица (* - любое число)

6. Матрицы перестановок – квадратная бинарная матрица. Является матричным представлением перестановки из n элементов.

   Состоит из нулей и единиц.

   Необходимы перестановки:

   1 -> 2
   2 -> 3
   3 -> 5
   4 -> 1
   5 -> 4

   Перестановка в виде вектора:

$$\alpha = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ \ 2\ 3\ 5\ 1\ 4\ \ )$$

   Матрица этой перестановки:

$$P_{\alpha} = (0\ 0\ \ 1\ 0\ \ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ \ \ 0\ 1\ \ 0\ 0\ \ 0\ 0\ 1\ \ 0\ 0\ 0\ \ \ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ \ \ )$$

   Размерность матрицы перестановок n*n.

Свойства матриц перестановок:

$$\sigma, \pi - \text{ перестановки}$$
$$P_\sigma * P_\pi = P_{\sigma * \pi}$$

Матрицы перестановок – ортагональны (для каждой такой матрицы будет существовать обратная). Причем: $P_\sigma{}^{-1} = P_\sigma{}^{\mathrm{T}}$

Пример:
$\mathrm{A} = (1\ 2\ 3 \ \ 1\ 1 \ \ 2\ 3 \ \ 2\ 3 \ \ )$ $P = (0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ )$ $A * P = \ (3\ 1\ 2\ 3\ 1\ 2\ 3\ 1\ 2\ )$
Меняет местами столбцы.

А если:

$$P * A - \text{тогда поменяются местами строки}$$

Определитель матрицы перестановок равен четности матрицы (если четное количество перестановок (1), если нечетное количество (-1))

7. Циркулянты – матрицы следующего вида:

$$C = (a_1\ a_n \ \ a_2\ a_1 \ \ \cdots\ a_n\ a_{n-1} \ \ \vdots \ddots \vdots \ \ a_2\ a_3 \ \ \cdots\ a_1\ )$$

$$C = \ (a_{j-\ i+1})^n$$

$C = (0\ 0 \ \ 1\ 0 \ \ 0\ 1 \ \ \ \cdots\ 0\ 0 \ \ \vdots \ddots \vdots \ \ 0\ 1 \ \ 0\ 0 \ \ 0\ 0 \ \ \ \cdots\ 1\ 0 \ \ )$ - *основной циркулянт*

Циркулянта матрицы А

$$\mathrm{A} \ = \sum_{k=0}^{n-1} \ \ a_{k+1}c^k = \ a_1c^0 + a_2c^1 + a_3c^2 + a_4c^3 + \cdots + \ \ + a_nc^{n-1}$$

$$c^0 = E$$

Первообразный корень степени m из единицы в поле k:

$$\xi \ \in k, \ \ \xi^{\ m} = 1, \ \xi^{\ n} \neq 1, \forall n < m, n \ \in N$$

Определитель циркулянты:

$$det\ C = \prod_{k=0}^{n-1} \ \ (a_1 + \ a_2\xi^{\ k} + \cdots + a_{n-1}\xi^{\ k(n-2)} + a_n\xi^{\ k(n-1)}\ )$$

Из интернета:

$$\det C = \prod_{k=0}^{n-1}(a_1 + a_2\zeta^k + \ldots + a_{n-1}\zeta^{k(n-2)} + a_n\zeta^{k(n-1)})$$

Пример:

$$n = 2$$

$$det(a_1\ a_2\ a_2\ a_1\ ) = (a_1 - a_2)(a_1 + a_2)$$

$$n = 3$$

$$det(a_1\ a_2\ \ a_3\ a_3\ a_2\ \ a_1\ a_3\ \ \ a_2\ a_1\ \ ) = \underbrace{(a_1 + a_2 + a_3)}_{k=0}\underbrace{(a_1 + a_2\xi + a_3\xi^{\ 2})}_{k=1}\underbrace{(a_1 + a_2\xi^{\ 2} + a_3\xi^{\ 4})}_{k=2}$$

из интернета:

Примеры

Для $n = 2$ определитель циркулянта равен:

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} = (a_1 - a_2)(a_1 + a_2).$$

Для $n = 3, \omega^3 = 1, \omega \neq 1$:

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{pmatrix} = (a_1 + a_2 + a_3)(a_1 + a_2\omega + a_3\omega^2)(a_1 + a_2\omega^2 + a_3\omega).$$

8. Антициркулянты – сдвиг по столбцу.

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \dots a_n \\ a_2 & a_3 \dots a_1 \\ \vdots & \vdots \quad \ddots \\ a_n & a_1 \dots a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Антициркулянт перестановками строк приводится к циркулянту.

9. Матрица Вандермонда

$$W(x_1, x_2\ \dots x_n) = (1\ 1\ \ x_1\ x_1{}^2\ \ x_2\ x_2{}^2\ \ \ \cdots\ x_1{}^{n-1}\ x_2{}^{n-1}\ \ \vdots \ddots \vdots\ \ 1\ x_n\ x_n{}^2\ \ \ \cdots\ x_n{}^{n-1}\ )$$

Определитель:

$det\ det\ W(x_1, x_2\ \dots x_n)\ \ = det\ det\ (1\ 0\ \ x_1\ x_1{}^2\ \ x_2 - x_1\ x_2{}^2 - x_1{}^2\ \ \ \cdots\ x_1{}^{n-1}\ x_2{}^{n-1}\ \ \vdots\ \ddots \vdots\ \ 0\ x_n - x_1\ x_n{}^2 - x_1{}^2\ \ \ \cdots\ x_n{}^{n-1}\ )$ (это у нее было написано, но это неправильно)

$det\ det\ W(x_1, x_2\ \dots x_n)\ \ = \prod_{i=2, j=1, i>j}^{n, n-1}\ \ (x_i - x_j)$ (она сказала, что это правильно, но я не уверен, что она не напутала с итерациями)

Из интернета

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j),$$

Блочные матрицы

Если мы возьмем некоторую матрицу A, разделим ее на части горизонтальными и вертикальными прямыми, мы получим некоторые ячейки.

$$\mathrm{A} = (a_{11}\ a_{12}\ \ a_{21}\ a_{22}\ \ a_{31}\ a_{41}\ a_{51}\ \ a_{32}\ a_{42}\ a_{52}\ \ \ a_{13}\ a_{14}\ \ a_{23}\ a_{24}\ \ a_{33}\ a_{43}\ a_{53}\ \ a_{34}\ a_{44}\ a_{54}\ \ \ a_{15}\ a_{25}\ a_{35}\ a_4$$

$$M_{11} = (a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\ )$$

$$M_{21} = (a_{41}\ a_{42}\ a_{43}\ a_{51}\ a_{52}\ a_{53}\ )$$

$$M_{12} = (a_{14}\ a_{15}\ a_{24}\ a_{25}\ a_{34}\ a_{35}\ )$$

$$M_{22} = (a_{44}\ a_{45}\ a_{54}\ a_{55}\ )$$

$$\mathrm{A} = (M_{11}\ M_{12}\ M_{21}\ M_{22}\ )$$

$$M_{i*} - \text{должны иметь одинаковое количество строк}$$
$$M_{*j} - \text{должны иметь одинаковое количество столбцов}$$

Виды блочных матриц:

1. Блочно-диагональная матрица (квазидиагональная матрица)

$$A = \ (M_1\ 0\ \ 0\ M_2\ \ \ \cdots\ 0\ 0\ \ \vdots \ddots \vdots\ \ 0\ 0\ \ \cdots\ M_s\ ) \qquad M_l - \text{квадратная ненулевая матрица}, l = 1..s$$

   Определитель равен произведению определителей диагональных блоков.

2. Блочно-треугольная матрица (квазитреугольная матрица)

$$M_{ij} = 0\ (i > j)\ \text{или}\ (i \le j)$$

$$\mathrm{A} = \ (M_{11}\ 0\ \ M_{12}\ M_{22}\ \ \ \cdots\ M_{1s}\ M_{2s}\ \ \vdots \ddots \vdots\ \ 0\ 0\ \ \cdots\ M_{ss}\ ) \qquad M_{ll} - \text{квадратная ненулевая матрица}, l = 1..s$$

   Определитель равен произведению определителей диагональных блоков.

3. Блочно-трехдиагональные матрицы (матрицы Якоби)
   $\mathrm{A} = \ (\mathrm{C}_1\ B_1\ 0\ 0\ \ A_2\ \mathrm{C}_2\ B_2\ 0\ \ 0\ 0\ \ A_3\ 0\ \ \mathrm{C}_3\ A_4\ \ B_3\ \mathrm{C}_4\ \ \ \cdots\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ \ 0\ 0\ \ 0\ 0\ \ \ \vdots \ddots \vdots\ \ 0\ 0\ 0\ 0\ \ 0\ 0\ 0\ 0\ \ 0\ 0\ 0\ 0\ \ \ \cdots\ \mathrm{C}_{n-2}\ B_{n-2}\ 0\ A_{n-1}\ \mathrm{C}_{n-1}\ B_{n-1}\ 0\ A_n\ \mathrm{C}_n\ \ )$ – общий вид трехдиагональной матрицы (Матрица Якоби)

4. Блочно-теплицева матрица (Матрица Тёплица) (диагонально-постоянная матрица)

$$\mathrm{A} = \ (a_0\ a_{-1}\ a_{-2}\ a_{-3}\ \ a_1\ a_0\ a_{-1}\ a_{-2}\ \ a_2\ a_3\ \ a_1\ a_2\ \ a_0\ a_1\ \ a_{-1}\ a_0\ \ \ \cdots\ a_{-n+3}\ a_{-n+2}\ a_{-n+1}\ a_{-n+4}\ a_{-n+3}\ a_{-n}$$
$$\vdots \ddots$$
$$\vdots\ a_{n-3}\ a_{n-4}\ a_{n-5}\ a_{n-6}\ \ a_{n-2}\ a_{n-3}\ a_{n-4}\ a_{n-5}\ \ a_{n-1}\ a_{n-2}\ a_{n-3}\ a_{n-4}\ \ \ \cdots\ a_0\ a_{-1}\ a_{-2}\ a_1\ a_0\ a_{-1}\ a_2\ a_1\ a_0$$

Пример:

$A = (1\ 2\ 3\ 4\ 1\ 2\ 5\ 4\ 1\ )$ - обычная теплицева матрица, не блочная!

Для этой матрицы выполняется следующее соотношение

$$a_{ij} = a_{i-1\ j-1}$$

$\mathrm{A} =$
$\big((1\ 2\ 3\ 4\ )\ (4\ 2\ 5\ 1\ )\ (5\ 1\ 2\ 9\ )\ (7\ 3\ 3\ 2\ )\ (1\ 2\ 3\ 4\ )\ (4\ 2\ 5\ 1\ )\ (9\ 8\ 3\ 1\ )\ (7\ 3\ 3\ 2\ )\ (1\ 2\ 3\ 4\ )\big)$
- блочно-теплицева матрица (а сама по себе она не теплицева)

Операции над блочными матрицами

1. Сложение:

   Обычные матрицы:

   Суммой двух матриц одних их тех же порядков называется матрица того же порядка, элементы которой определяются в соответствии с формулой:

   $$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

   Аналогично разность – обратная сложению операция.

   Теперь требования к блочным матрицам:

   Две матрицы должны иметь блоки одинаковых размеров и имели одинаковое количество блоков.

   $$A = (2\ 3\ 4\ 3\ 4\ 5\ 4\ 5\ 6\ ) = (A_{11}\ A_{12}\ A_{21}\ A_{22}\ )$$

   $$B = (1\ 1\ 0\ 2\ 1\ 2\ 3\ 0\ 1\ ) = (B_{11}\ B_{12}\ B_{21}\ B_{22}\ )$$

   $$C = A + B = (C_{11}\ C_{12}\ C_{21}\ C_{22}\ ) = (A_{11}\ A_{12}\ A_{21}\ A_{22}\ ) + (B_{11}\ B_{12}\ B_{21}\ B_{22}\ )$$
   $$= (2\ 3\ 4\ 3\ 4\ 5\ 4\ 5\ 6\ ) + (1\ 1\ 0\ 2\ 1\ 2\ 3\ 0\ 1\ ) = (3\ 4\ 4\ 5\ 5\ 7\ 7\ 5\ 7\ )$$
   $$C_{11} = A_{11} + B_{11} = (2\ 3) + (1\ 1\ ) = (3\ 4\ )$$

   Аналогично и все остальные части

   Важно: соответствующие блоки должны иметь одинаковый размер, иначе мы не можем произвести сложение, даже если основной размер матриц будет одинаковым.

2. Умножение:
   Матрицы А и В называются согласованными, если разбиение матрицы А на блоки по столбцам совпадает с разбиением матрицы В по строкам.

   Блоки A_{ik} имеют размеры $m_i \ \mathrm{x}\ p_k$
   А блоки B_{kj} имеют размеры $p_k \ \mathrm{x}\ n_j$

   У согласованных блочных матриц блоки тоже являются согласованными матрицами. (Это нужно, чтобы мы могли их перемножать).

Перемножать можно только согласованные матрицы.

$$C = A * B : \ C_{ij} = \sum_{k=1}^{s} \quad A_{ik} * B_{kj}$$

Пример

$$A = (2\ 3\ 4\ 3\ 4\ 5\ 4\ 5\ 6) = (A_{11}\ A_{12}\ A_{21}\ A_{22})$$

$$B = (1\ 1\ 0\ 2\ 1\ 2\ 3\ 0\ 1) = (B_{11}\ B_{12}\ B_{21}\ B_{22})$$

$$C = (C_{11}\ C_{12}\ C_{21}\ C_{22})$$

$$C_{11} = A_{11} * B_{11} + A_{12} * B_{21} = (2\ 3) * (1\ 1\ 2\ 1) + (4) * (3\ 0) = (8\ 5) + (12\ 0) = (20\ 5)$$

Аналогично для других блоков.

$$C = (C_{11}\ C_{12}\ C_{21}\ C_{22}) = (20\ 5\ 10\ 26\ 7\ 13\ 32\ 9\ 16)$$

Когда мы выполняем операции над блочными матрицами, мы всегда можем рассматривать их как числовые и всегда проводить операции по правилам для числовых матриц. При этом результат операции (сама числовая матрица) он будет один и тот же.
Работа с блоками предпочтительнее в том случае, если нам интересна не вся матрица, а только ее часть (некоторый блок). (Пример: распределение электромагнитного поля в магните. Нам интересна одна часть, т.к. там наибольшие изменения происходят).

Плотные матрицы – матрицы, у которых большая часть элементов ненулевые.
Разреженная матрица – матрица, у которая большая часть элементов – нули.

В разреженных матрицах удобно выделять блоки. Можно выделять как ненулевые блоки и работать с ними, так и нулевые блоки. С целью уменьшения вычислительных операций.

3. Кронекеровское произведение и сумма матриц.

$$A = (a_{ij}) \quad m\ x\ n$$
$$B = (b_{ij}) \quad p\ x\ q$$

Мы можем посчитать правое и левое кронекеровское произведение матриц А и В (прямое произведение матриц)

$A \otimes B = C, \ \ mp\ x\ nq$ и эта матрица будет состоять из блоков $(a_{ij} * B)$ – **правое прямое (кронекеровское) произведение**.

$A \otimes B = (a_{11} * B\ a_{12} * B\ a_{21} * B\ a_{22} * B\ \ \cdots\ a_{1n} * B\ a_{2n} * B\ \ \vdots \ddots \vdots\ a_{m1} * B\ a_{m2} * B\ \ \cdots\ a_{mn} * B\ )$ – **правое прямое (кронекеровское) произведение**.

Если A и B – квадратные матрицы размером n и m соотвественно, то **кронекеровская сумма** их будет следующей:

$$A \in M^n \quad B \in M^m$$

Ее пример:

$$A \oplus B = (E_m \otimes A) + (B \otimes E_n)$$

Но есть еще такой вариант в интернете:

$$A \oplus B = A \otimes E_m + E_n \otimes B.$$

Пример:

$A = (1\ 2\ 3\ 4) \qquad B = (1\ 0\ 2\ 0\ 2\ 3) \quad C = (5\ 6\ 7\ 8)$

$$A \otimes B = (1\ 0\ 2\ 0\ 2\ 3\ \ 2\ 0\ 4\ 0\ 4\ 6\ \ 3\ 0\ 6\ 0\ 6\ 9\ \ 4\ 0\ 8\ 0\ 8\ 12\ )$$

$A \oplus C = (E \otimes A) + (C \otimes E) = (1\ 2\ 3\ 4\ \ 0\ 0\ 0\ 0\ \ 0\ 0\ 0\ 0\ \ 1\ 2\ 3\ 4\ ) + (5\ 0\ 0\ 5\ \ 6\ 0\ 0\ 6\ \ 7\ 0\ 0\ 7\ \ 8\ 0\ 0\ 8\ ) = (6\ 2\ 3\ 9\ \ 6\ 0\ 0\ 6\ \ 7\ 0\ 0\ 7\ \ 9\ 2\ 3\ 12\ )$

4. Формула Фробениуса.
   Есть матрица M, разбитая на блоки

$$M(|M| \neq 0)$$

$$M = (A\ B\ C\ D\ ) \qquad M^{-1} = ?$$

$$(E\ 0\ \ -CA^{-1}\ E\ )\ M = (A\ B\ 0\ D - CA^{-1}B\ )$$

$$\sqsupset H = D - CA^{-1}B$$

$$|M| = |A| * |H|$$
$$(|M| \neq 0) => |H| \neq 0$$

$$M^{-1}\ (E\ 0\ \ -CA^{-1}\ E\ ) = (A\ B\ 0\ H\ )^{-1}$$

$$(A\ B\ 0\ H\ )(A^{-1}\ U\ 0\ H^{-1}\ ) = (E\ 0\ 0\ E\ ) \ \ => A * U + B * H^{-1} = 0 \ \ U = -A^{-1}BH^{-1}$$

$$(A\ B\ 0\ H\ )^{-1} = (A^{-1}\ \ -A^{-1}BH^{-1}\ 0\ H^{-1}\ )$$

$M^{-1} = \ (A^{-1} + -A^{-1}BH^{-1}CA^{-1}\ \ -A^{-1}BH^{-1}\ \ -H^{-1}CA^{-1}\ H^{-1}\ )$, где $H = D - CA^{-1}B$ – *Формула Фробениуса.*

5. Нахождение полуобратной матрицы.

$$A \ \in P^{m\,x\,n}$$

$A^{\neg 1} \in P^{n\,x\,m}$ *- полуобратная матрица.*

Если выполняется следующее условие, то

$AA^{\neg 1}A = A$ *– полуобратная матрица*

А если еще и это условие выполняется:

$A^{\neg 1}AA^{\neg 1} = A^{\neg 1}$ - *взаимная полуобратная матрица.*

Если матрица имеет обратную матрицу, то она так же является полуобратной.

$(A^{\neg 1})^* = (A^*)^{\neg 1}$ – сопряженная полуобратной матрице матрица равна полуобратной сопряженной.

Алгоритм нахождения полуобратной матрицы.

1) Составить блочную матрицу, вида
   $(A\ Em\ En\ 0\ )$ – (по классике, вместо нулей ничего нет)

2) Приводим блочную матрицу к простейшему виду ($r = rgA$)
3) Записываем полуобратную матрицу:

$$A^{\neg 1} = T(\frac{Er}{U})(Er|V)S$$

U, V - произвольные матрицы, размерами:

$$U\ -\ (n-r)\ x\ r$$

$$V - r\ x\ (m-r)$$

В первых двух пунктах находим скелетное разложение матрицы А

$$A = B * C$$

$$B = S^{-1}(\frac{Er}{0})$$

$$C = (Er|0)T^{-1}$$

$A^{\neg 1} = C_{np}^{-1} * B_l^{-1}$

Выводы:

- Любая матрица имеет хотя бы одну полуобратную матрицу.
- Если матрица обратима, то обратная матрица является полуобратной.
- Если исходная матрица нулевая, то любая матрица соответствующих размеров является для нее полуобратной.

Пример:

$AX = B \qquad A = (1\ 2\ 2\ 4\ )\ B = (1\ 0\ 2\ 0\ )$ X=?

$$det\ A\ = 0$$

$$A * A^{\neg 1} * A * X = B$$

$$A * A^{\neg 1}B = B => A^{\neg 1} * B = X$$

1) Блочная матрица

$$(1\ 2\ 2\ 4\ \ 1\ 0\ 0\ 1\ \ 1\ 0\ 0\ 1\ \ nan\ ) \sim (1\ 2\ 0\ 0\ \ 1\ 0\ \ -2\ 1\ \ 1\ 0\ 0\ 1\ \ nan\ ) \sim (1\ 0\ 0\ 0\ \ 1\ 0\ \ -2\ 1\ \ 1\ -2\ 0\ 1\ \ nan\ ) = (A\ S\ T\ nan\ )$$

2) $r\ =\ rgA =\ 1, \quad S = (1\ 0\ \ -2\ 1\ ), \quad T = (1\ \ -2\ 0\ 1\ )$
3) $m = n = 2$

$$r\ =\ 1$$

$$=>$$

$$U: (n-r)x\ r\ =\ 1\ x\ 1 \quad U(c)$$

$$V: r\ x\ (m-r)\ =\ 1\ x\ 1\quad V(d)$$

$$A^{\neg 1} = T * \left(\frac{Er}{U}\right) * (V) * S = (1\ \ -2\ 0\ 1\ )(1\ c\ )(1\ d\ )(1\ 0\ \ -2\ 1\ ) = (1-2c\ c\ )(1-2d\ d\ ) = \ (1-2c-2d+4dc\ d-2cd\ c-2cd\ cd\ )$$

$$X\ = A^{\neg 1} * B =\ (1-2c-2d+4dc\ d-2cd\ c-2cd\ cd\ ) * (1\ 0\ 2\ 0\ ) = (1-2c\ 0\ c\ 0\ )$$

$X^* = (1-2c\ \ -2d\ c\ d\ )$ - мы просто это знаем (это крах)

6. Нахождение матрицы, обратной к матрице (A+B), когда я знаю обратную A^{-1}
   (Обращение возмущенных матриц)
   Теорема Шерман, Моррисон
   Мы имеем матрицы:
   Anxn, Unxp, Wpxp, Vnxp
   А также:

$\mathrm{A}^{-1}, W^{-1}, (W^{-1}+V^T\mathrm{A}^{-1}U)^{-1} => \ (A+UWV^T)^{-1} = \mathrm{A}^{-1} - \mathrm{A}^{-1}UY^{-1}V^T\mathrm{A}^{-1}$, где $Y = W^{-1} +\ V^T\mathrm{A}^{-1}U$

В случае если $\{U =\ (u1\ \dots\ un), V\ =\ (v1\ \dots\ vn)\} \subset R^n$

$$(\mathrm{A} +\ U^TV)^{-1} =\ \mathrm{A}^{-1} - \frac{1}{1+V\mathrm{A}^{-1}U^T}\mathrm{A}^{-1}U^TV\mathrm{A}^{-1}$$

Вычислить $(A+B)^{-1}\quad A = (-7\ 22\ \ -55\ \ -94\ 87\ \ -56\ 0\ \ -62\ 97\ )\quad B = (1\ 1\ 2\ 0\ 1\ 1\ \ -1\ 0\ \ -1\ )$

$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{154713}(-4967\ \ -1276\ \ -3553\ \ -9118\ 679\ \ -4778\ \ -5828\ 434\ \ -1459\ )$