

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**«Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет  
информационных технологий, механики и оптики»**

**Факультет:** «Информационных технологий и программирования»

**Кафедра:** «Информационных систем»

**Дисциплина:**

«Методы оптимизации»

**Лабораторная работы №1**

**Выполнил студент группы № М33071:**

*Щагина Анастасия Сергеевна*

*Ципко Алина Алексеевна*

**Проверил:**

*Москаленко Мария Александровна*

САНКТ -ПЕТЕРБУРГ

2020

## Тестирование реализованных алгоритмов на заданных функциях:

### Метод дихотомии:

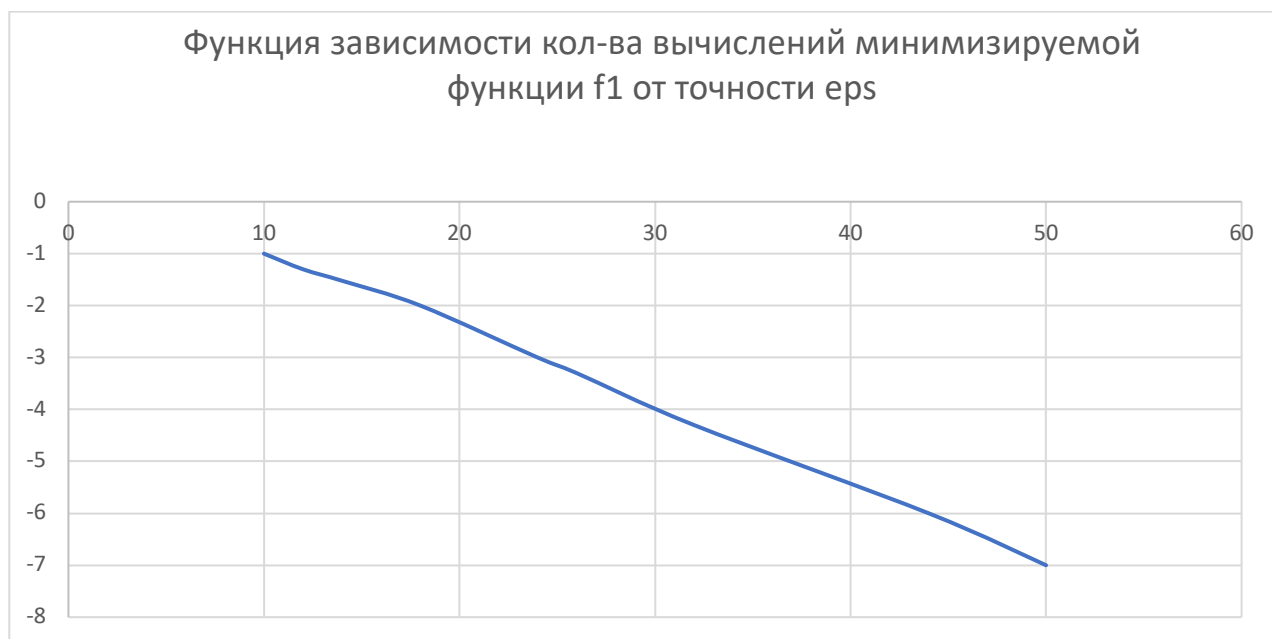
|  | Функция-1 |        |        |                 |         |        |        |        |
|--|-----------|--------|--------|-----------------|---------|--------|--------|--------|
| iter                                       | a         | b      | Lab    | Lab i / Lab i-1 | x1      | F(x1)  | x2     | F(x2)  |
| 1  | -0,5000   | 0,5000 | 1,0000 | 1,0000          | -0,0333 | 1,0793 | 0,0333 | 0,9451 |
| 2  | -0,0333   | 0,5000 | 0,5333 | 0,5333          | 0,2000  | 0,9501 | 0,2667 | 1,0402 |
| 3  | -0,0333   | 0,2667 | 0,3000 | 0,5625          | 0,0833  | 0,9030 | 0,1500 | 0,9089 |
| 4  | -0,0333   | 0,1500 | 0,1833 | 0,6111          | 0,0250  | 0,9567 | 0,0917 | 0,9001 |
| 5  | 0,0250    | 0,1500 | 0,1250 | 0,6818          | 0,0542  | 0,9221 | 0,1208 | 0,8986 |
| interval with minimum: [0.05416667 : 0.15] |           |        |        |                 |         |        |        |        |

|  | Функция-2 |        |        |                 |        |         |        |         |
|--|-----------|--------|--------|-----------------|--------|---------|--------|---------|
| iter   | a         | b      | Lab    | Lab i / Lab i-1 | x1     | F(x1)   | x2     | F(x2)   |
| 1  | 6,0000    | 9,9000 | 3,9000 | 1,0000          | 7,9167 | -0,8148 | 7,9833 | -0,8186 |
| 2  | 7,9167    | 9,9000 | 1,9833 | 0,5085          | 8,8750 | -0,8439 | 8,9417 | -0,8412 |
| 3  | 7,9167    | 8,9417 | 1,0250 | 0,5168          | 8,3958 | -0,8388 | 8,4625 | -0,8412 |
| 4  | 8,3958    | 8,9417 | 0,5458 | 0,5325          | 8,6354 | -0,8454 | 8,7021 | -0,8460 |
| 5  | 8,6354    | 8,9417 | 0,3063 | 0,5611          | 8,7552 | -0,8460 | 8,8219 | -0,8452 |
| 6  | 8,6354    | 8,8219 | 0,1865 | 0,6088          | 8,6953 | -0,8460 | 8,7620 | -0,8459 |
| 7  | 8,6354    | 8,7620 | 0,1266 | 0,6788          | 8,6654 | -0,8457 | 8,7320 | -0,8460 |
| interval with minimum: [8.665364 ; 8.761979] |           |        |        |                 |        |         |        |         |

|  | Функция-3 |        |        |                 |        |          |        |          |
|--|-----------|--------|--------|-----------------|--------|----------|--------|----------|
| iter   | a         | b      | Lab    | Lab i / Lab i-1 | x1     | F(x1)    | x2     | F(x2)    |
| 1  | 0,0000    | 6,2832 | 6,2832 | 1,0000          | 3,1083 | -10,2546 | 3,1749 | -10,1961 |
| 2  | 0,0000    | 3,1749 | 3,1749 | 0,5053          | 1,5541 | -4,6748  | 1,6208 | -5,0822  |
| 3  | 1,5541    | 3,1749 | 1,6208 | 0,5105          | 2,3312 | -8,8277  | 2,3979 | -9,0855  |
| 4  | 2,3312    | 3,1749 | 0,8437 | 0,5206          | 2,7197 | -9,9993  | 2,7864 | -10,1129 |
| 5  | 2,7197    | 3,1749 | 0,4552 | 0,5395          | 2,9140 | -10,2514 | 2,9807 | -10,2813 |
| 6  | 2,9140    | 3,1749 | 0,2609 | 0,5732          | 3,0111 | -10,2850 | 3,0778 | -10,2711 |
| 7  | 2,9140    | 3,0778 | 0,1638 | 0,6277          | 2,9626 | -10,2761 | 3,0292 | -10,2842 |
| 8  | 2,9626    | 3,0778 | 0,1152 | 0,7035          | 2,9868 | -10,2826 | 3,0535 | -10,2797 |
| interval with minimum: [2.96256 ; 3.0535097] |           |        |        |                 |        |          |        |          |

|   | Функция-4 |        |        |                 |        |         |        |         |
|---|-----------|--------|--------|-----------------|--------|---------|--------|---------|
| iter                                      | a         | b      | Lab    | Lab i / Lab i-1 | x1     | F(x1)   | x2     | F(x2)   |
| 1   | 0,0000    | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000          | 0,4667 | 16,7133 | 0,5333 | 17,4778 |
| 2   | 0,0000    | 0,5333 | 0,5333 | 0,5333          | 0,2333 | 15,1385 | 0,3000 | 15,4510 |
| 3   | 0,0000    | 0,3000 | 0,3000 | 0,5625          | 0,1167 | 14,7771 | 0,1833 | 14,9580 |
| 4   | 0,0000    | 0,1833 | 0,1833 | 0,6111          | 0,0583 | 14,6660 | 0,1250 | 14,7964 |
| 5   | 0,0000    | 0,1250 | 0,1250 | 0,6818          | 0,0292 | 14,6245 | 0,0958 | 14,7328 |
| interval with minimum: [0.0 ; 0.09583333] |           |        |        |                 |        |         |        |         |

|  | Функция-5 |        |        |                 |        |        |        |        |
|--|-----------|--------|--------|-----------------|--------|--------|--------|--------|
| iter   | a         | b      | Lab    | Lab i / Lab i-1 | x1     | F(x1)  | x2     | F(x2)  |
| 1  | 0,5000    | 2,5000 | 2,0000 | 1,0000          | 1,4667 | 0,7432 | 1,5333 | 0,6447 |
| 2  | 1,4667    | 2,5000 | 1,0333 | 0,5167          | 1,9500 | 0,2356 | 2,0167 | 0,2031 |
| 3  | 1,9500    | 2,5000 | 0,5500 | 0,5323          | 2,1917 | 0,1611 | 2,2583 | 0,1615 |
| 4  | 1,9500    | 2,2583 | 0,3083 | 0,5606          | 2,0708 | 0,1835 | 2,1375 | 0,1674 |
| 5  | 2,0708    | 2,2583 | 0,1875 | 0,6081          | 2,1313 | 0,1686 | 2,1979 | 0,1608 |
| 6  | 2,1313    | 2,2583 | 0,1271 | 0,6778          | 2,1615 | 0,1639 | 2,2281 | 0,1602 |
| interval with minimum: [2.1614583 ; 2.2583332] |           |        |        |                 |        |        |        |        |



Метод золотого сечения:

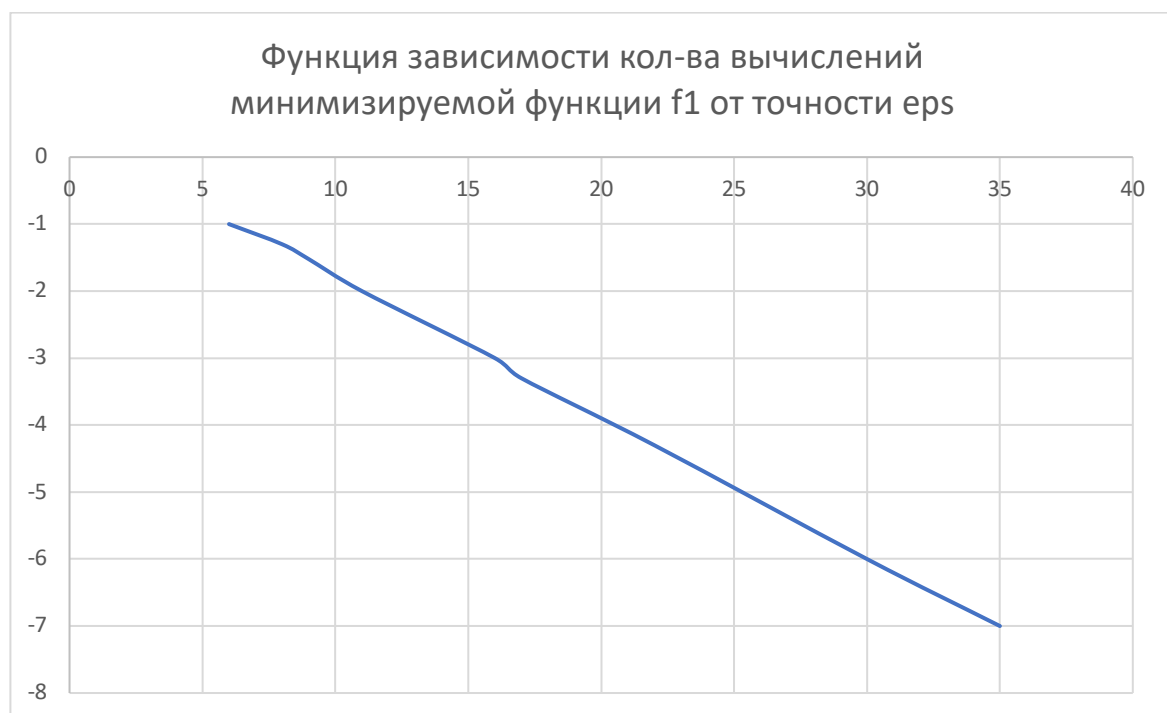
|   | Функция-1 |        |        |                 |         |        |        |        |
|---|-----------|--------|--------|-----------------|---------|--------|--------|--------|
| iter  | a         | b      | Lab    | Lab i / Lab i-1 | x1      | F(x1)  | x2     | F(x2)  |
| 1   | -0,5000   | 0,5000 | 1,0000 | 1,0000          | -0,1180 | 1,4099 | 0,1180 | 0,8982 |
| 2   | -0,1180   | 0,5000 | 0,6180 | 0,6180          | 0,1180  | 0,8982 | 0,2639 | 1,0359 |
| 3   | -0,1180   | 0,2639 | 0,3819 | 0,6180          | 0,0279  | 0,9526 | 0,1180 | 0,8982 |
| 4   | 0,0279    | 0,2639 | 0,2360 | 0,6180          | 0,1180  | 0,8982 | 0,1738 | 0,9251 |
| 5   | 0,0279    | 0,1738 | 0,1459 | 0,6182          | 0,0836  | 0,9029 | 0,1180 | 0,8982 |
| next interval could be: [0.08359213 ; 0.17376207] |           |        |        |                 |         |        |        |        |

|   | Функция-2 |        |        |                 |        |         |        |         |
|---|-----------|--------|--------|-----------------|--------|---------|--------|---------|
| iter  | a         | b      | Lab    | Lab i / Lab i-1 | x1     | F(x1)   | x2     | F(x2)   |
| 1   | 6,0000    | 9,9000 | 3,9000 | 1,0000          | 7,4897 | -0,7892 | 8,4103 | -0,8394 |
| 2   | 7,4897    | 9,9000 | 2,4103 | 0,6180          | 7,4897 | -0,7892 | 8,4103 | -0,8394 |
| 3   | 7,4897    | 8,9793 | 1,4896 | 0,6180          | 8,0587 | -0,8228 | 8,4103 | -0,8394 |
| 4   | 8,0587    | 8,9793 | 0,9206 | 0,6180          | 8,4103 | -0,8394 | 8,6277 | -0,8453 |
| 5   | 8,4103    | 8,9793 | 0,5690 | 0,6181          | 8,6277 | -0,8453 | 8,7620 | -0,8459 |
| 6   | 8,6277    | 8,9793 | 0,3516 | 0,6179          | 8,7620 | -0,8459 | 8,8450 | -0,8447 |
| 7   | 8,6277    | 8,8450 | 0,2173 | 0,6180          | 8,7107 | -0,8460 | 8,7620 | -0,8459 |
| 8   | 8,6277    | 8,7620 | 0,1343 | 0,6180          | 8,6790 | -0,8458 | 8,7107 | -0,8460 |
| next interval could be: [8.678979 ; 8.761995] |           |        |        |                 |        |         |        |         |

| Функция-3                                     |        |        |        |                 |        |          |        |          |
|---|--------|--------|--------|-----------------|--------|----------|--------|----------|
| iter  | a      | b      | Lab    | Lab i / Lab i-1 | x1     | F(x1)    | x2     | F(x2)    |
| 1   | 0,0000 | 6,2832 | 6,2832 | 1,0000          | 2,4000 | -9,0933  | 3,8832 | -7,6947  |
| 2   | 0,0000 | 3,8832 | 3,8832 | 0,6180          | 1,4833 | -4,2387  | 2,4000 | -9,0933  |
| 3   | 1,4833 | 3,8832 | 2,3999 | 0,6180          | 2,4000 | -9,0933  | 2,9665 | -10,2774 |
| 4   | 2,4000 | 3,8832 | 1,4832 | 0,6180          | 2,9665 | -10,2774 | 3,3167 | -9,9690  |
| 5   | 2,4000 | 3,3167 | 0,9167 | 0,6181          | 2,7501 | -10,0545 | 2,9665 | -10,2774 |
| 6   | 2,7501 | 3,3167 | 0,5666 | 0,6181          | 2,9665 | -10,2774 | 3,1003 | -10,2596 |
| 7   | 2,7501 | 3,1003 | 0,3502 | 0,6181          | 2,8839 | -10,2283 | 2,9665 | -10,2774 |
| 8   | 2,8839 | 3,1003 | 0,2164 | 0,6179          | 2,9665 | -10,2774 | 3,0176 | -10,2850 |
| 9   | 2,9665 | 3,1003 | 0,1338 | 0,6183          | 3,0176 | -10,2850 | 3,0492 | -10,2808 |
| next interval could be: [2.966518 ; 3.049177] |        |        |        |                 |        |          |        |          |

| Функция-4                                  |        |        |        |                 |        |         |        |         |
|--|--------|--------|--------|-----------------|--------|---------|--------|---------|
| iter                                       | a      | b      | Lab    | Lab i / Lab i-1 | x1     | F(x1)   | x2     | F(x2)   |
| 1  | 0,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000          | 0,3820 | 15,9727 | 0,6180 | 18,7413 |
| 2  | 0,0000 | 0,6180 | 0,6180 | 0,6180          | 0,2361 | 15,1496 | 0,3820 | 15,9727 |
| 3  | 0,0000 | 0,3820 | 0,3820 | 0,6181          | 0,1459 | 14,8487 | 0,2361 | 15,1496 |
| 4  | 0,0000 | 0,2361 | 0,2361 | 0,6181          | 0,0902 | 14,7217 | 0,1459 | 14,8487 |
| 5  | 0,0000 | 0,1459 | 0,1459 | 0,6180          | 0,0557 | 14,6619 | 0,0902 | 14,7217 |
| next interval could be: [0.0 ; 0.09016994] |        |        |        |                 |        |         |        |         |

| Функция-5                                       |        |        |        |                 |        |        |        |        |
|---|--------|--------|--------|-----------------|--------|--------|--------|--------|
| iter  | a      | b      | Lab    | Lab i / Lab i-1 | x1     | F(x1)  | x2     | F(x2)  |
| 1   | 0,5000 | 2,5000 | 2,0000 | 1,0000          | 1,2639 | 1,0992 | 1,7361 | 0,4012 |
| 2   | 1,2639 | 2,5000 | 1,2361 | 0,6181          | 1,7361 | 0,4012 | 2,0279 | 0,1986 |
| 3   | 1,7361 | 2,5000 | 0,7639 | 0,6180          | 2,0279 | 0,1986 | 2,2082 | 0,1604 |
| 4   | 2,0279 | 2,5000 | 0,4721 | 0,6180          | 2,2082 | 0,1604 | 2,3197 | 0,1699 |
| 5   | 2,0279 | 2,3197 | 0,2918 | 0,6181          | 2,1393 | 0,1671 | 2,2082 | 0,1604 |
| 6   | 2,1393 | 2,3197 | 0,1804 | 0,6182          | 2,2082 | 0,1604 | 2,2508 | 0,1610 |
| 7   | 2,1393 | 2,2508 | 0,1115 | 0,6181          | 2,1819 | 0,1618 | 2,2082 | 0,1604 |
| next interval could be: [2.1818926 ; 2.2507765] |        |        |        |                 |        |        |        |        |



### Метод Фибоначчи:

|   | Функция-1 |        |        |                 |         |        |        |        |
|---|-----------|--------|--------|-----------------|---------|--------|--------|--------|
| iter  | a         | b      | Lab    | Lab i / Lab i-1 | x1      | F(x1)  | x2     | F(x2)  |
| 1   | -0,5000   | 0,5000 | 1,0000 | 1,0000          | -0,1154 | 1,3964 | 0,1154 | 0,8979 |
| 2   | -0,1154   | 0,5000 | 0,6154 | 0,6154          | 0,1154  | 0,8979 | 0,2692 | 1,0443 |
| 3   | -0,1154   | 0,2692 | 0,3846 | 0,6250          | 0,0385  | 0,9387 | 0,1154 | 0,8979 |
| 4   | 0,0385    | 0,2692 | 0,2307 | 0,5998          | 0,1154  | 0,8979 | 0,1923 | 0,9421 |
| 5   | 0,0385    | 0,1923 | 0,1538 | 0,6667          | 0,1154  | 0,8979 | 0,1154 | 0,8979 |
| interval with minimum: [0.038461536 ; 0.19230768] |           |        |        |                 |         |        |        |        |

|  | Функция-2 |        |        |                 |        |         |        |         |
|--|-----------|--------|--------|-----------------|--------|---------|--------|---------|
| iter   | a         | b      | Lab    | Lab i / Lab i-1 | x1     | F(x1)   | x2     | F(x2)   |
| 1  | 6,0000    | 9,9000 | 3,9000 | 1,0000          | 7,4891 | -0,7891 | 8,4109 | -0,8394 |
| 2  | 7,4891    | 9,9000 | 2,4109 | 0,6182          | 8,4109 | -0,8394 | 8,9782 | -0,8391 |
| 3  | 7,4891    | 8,9782 | 1,4891 | 0,6177          | 8,0564 | -0,8227 | 8,4109 | -0,8394 |
| 4  | 8,0564    | 8,9782 | 0,9218 | 0,6190          | 8,4109 | -0,8394 | 8,6236 | -0,8452 |
| 5  | 8,4109    | 8,9782 | 0,5673 | 0,6154          | 8,6236 | -0,8452 | 8,7655 | -0,8459 |
| 6  | 8,6236    | 8,9782 | 0,3546 | 0,6251          | 8,7655 | -0,8459 | 8,8364 | -0,8449 |
| 7  | 8,6236    | 8,8364 | 0,2128 | 0,6001          | 8,6945 | -0,8459 | 8,7655 | -0,8459 |
| 8  | 8,6236    | 8,7655 | 0,1419 | 0,6668          | 8,6945 | -0,8459 | 8,6945 | -0,8459 |
| interval with minimum: [8.623636 ; 8.765454] |           |        |        |                 |        |         |        |         |

|   | Функция-3 |        |        |                 |        |          |        |          |
|---|-----------|--------|--------|-----------------|--------|----------|--------|----------|
| iter  | a         | b      | Lab    | Lab i / Lab i-1 | x1     | F(x1)    | x2     | F(x2)    |
| 1   | 0,0000    | 6,2832 | 6,2832 | 1,0000          | 2,4003 | -9,0946  | 3,8829 | -7,6967  |
| 2   | 0,0000    | 3,8829 | 3,8829 | 0,6180          | 1,4825 | -4,2343  | 2,4003 | -9,0946  |
| 3   | 1,4825    | 3,8829 | 2,4004 | 0,6182          | 2,4003 | -9,0946  | 2,9651 | -10,2770 |
| 4   | 2,4003    | 3,8829 | 1,4826 | 0,6176          | 2,9651 | -10,2770 | 3,3181 | -9,9660  |
| 5   | 2,4003    | 3,3181 | 0,9178 | 0,6190          | 2,7533 | -10,0600 | 2,9651 | -10,2770 |
| 6   | 2,7533    | 3,3181 | 0,5648 | 0,6154          | 2,9651 | -10,2770 | 3,1063 | -10,2559 |
| 7   | 2,7533    | 3,1063 | 0,3530 | 0,6250          | 2,8945 | -10,2371 | 2,9651 | -10,2770 |
| 8   | 2,8945    | 3,1063 | 0,2118 | 0,6000          | 2,9651 | -10,2770 | 3,0357 | -10,2834 |
| 9   | 2,9651    | 3,1063 | 0,1412 | 0,6667          | 3,0357 | -10,2834 | 3,0357 | -10,2834 |
| interval with minimum: [2.9650989 ; 3.106294] |           |        |        |                 |        |          |        |          |

|   | Функция-4 |        |        |                 |        |         |        |         |
|---|-----------|--------|--------|-----------------|--------|---------|--------|---------|
| iter                                      | a         | b      | Lab    | Lab i / Lab i-1 | x1     | F(x1)   | x2     | F(x2)   |
| 1   | 0,0000    | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000          | 0,3846 | 15,9925 | 0,6154 | 18,6960 |
| 2   | 0,0000    | 0,6154 | 0,6154 | 0,6154          | 0,2308 | 15,1282 | 0,3846 | 15,9925 |
| 3   | 0,0000    | 0,3846 | 0,3846 | 0,6250          | 0,1538 | 14,8702 | 0,2308 | 15,1282 |
| 4   | 0,0000    | 0,2308 | 0,2308 | 0,6001          | 0,0769 | 14,6971 | 0,1538 | 14,8702 |
| 5   | 0,0000    | 0,1538 | 0,1538 | 0,6664          | 0,0769 | 14,6971 | 0,0769 | 14,6971 |
| interval with minimum: [0.0 ; 0.15384617] |           |        |        |                 |        |         |        |         |

|  | Функция-5 |        |        |                 |        |        |        |        |
|--|-----------|--------|--------|-----------------|--------|--------|--------|--------|
| iter   | a         | b      | Lab    | Lab i / Lab i-1 | x1     | F(x1)  | x2     | F(x2)  |
| 1  | 0,5000    | 2,5000 | 2,0000 | 1,0000          | 1,2619 | 1,1031 | 1,7381 | 0,3992 |
| 2  | 1,2619    | 2,5000 | 1,2381 | 0,6191          | 1,7381 | 0,3992 | 2,0238 | 0,2002 |
| 3  | 1,7381    | 2,5000 | 0,7619 | 0,6154          | 2,0238 | 0,2002 | 2,2143 | 0,1602 |
| 4  | 2,0238    | 2,5000 | 0,4762 | 0,6250          | 2,2143 | 0,1602 | 2,3095 | 0,1680 |
| 5  | 2,0238    | 2,3095 | 0,2857 | 0,6000          | 2,1190 | 0,1710 | 2,2143 | 0,1602 |
| 6  | 2,1190    | 2,3095 | 0,1905 | 0,6668          | 2,2143 | 0,1602 | 2,2143 | 0,1602 |
| interval with minimum: [2.1190476 ; 2.3095238] |           |        |        |                 |        |        |        |        |





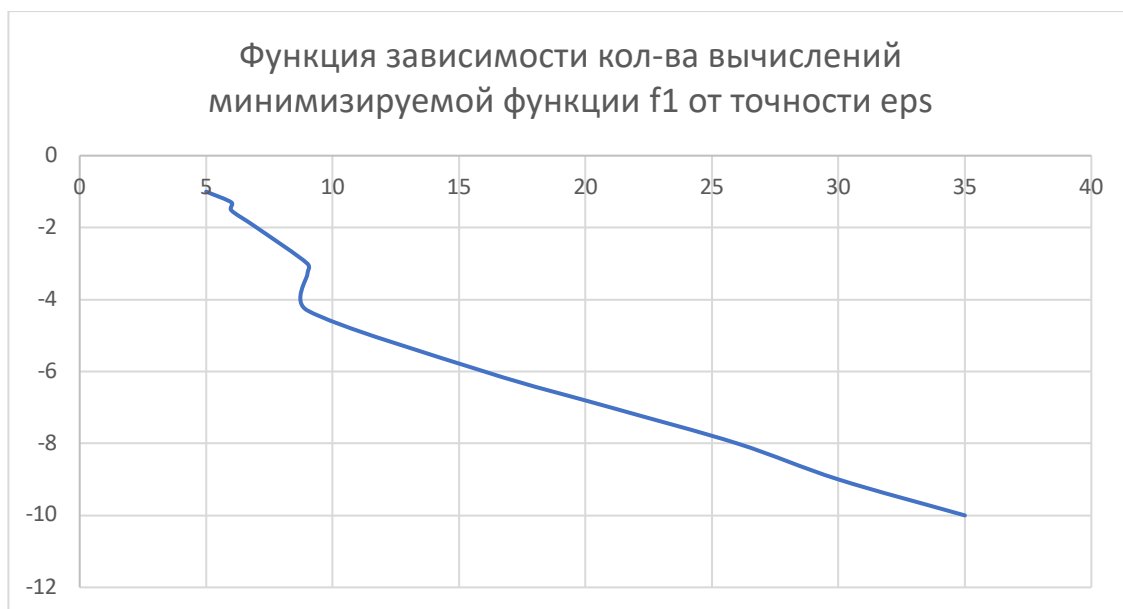


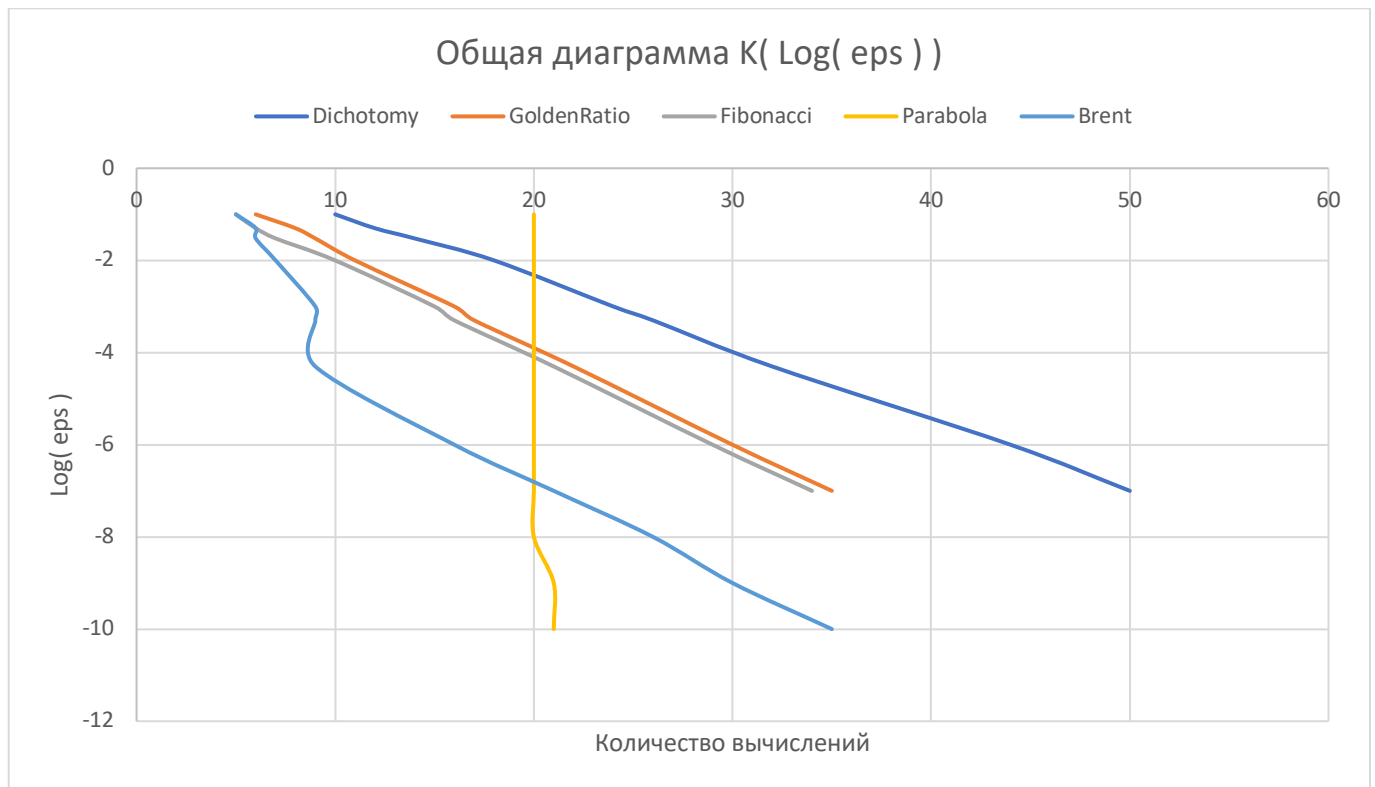


| Функция-3  |        |        |        |                 |        |          |
|--|--------|--------|--------|-----------------|--------|----------|
| iter   | a      | b      | Lab    | Lab i / Lab i-1 | u      | F(u)     |
| 1  | 0,0000 | 6,2832 | 6,2832 | 1,0000          | 3,8835 | -7,6931  |
| 2  | 0,0000 | 3,8835 | 3,8835 | 0,6181          | 1,4833 | -4,2390  |
| 3  | 1,4833 | 3,8835 | 2,4002 | 0,6181          | 2,9602 | -10,2753 |
| 4  | 2,4002 | 3,8835 | 1,4833 | 0,6180          | 3,3562 | -9,8807  |
| 5  | 2,4002 | 3,3562 | 0,9560 | 0,6445          | 2,9602 | -10,2753 |
| interval with minimum: [2.400176787342602 ; 3.356199974888801] |        |        |        |                 |        |          |

| Функция-4                            |        |        |        |                 |        |         |
|--------------------------------------|--------|--------|--------|-----------------|--------|---------|
| iter                                 | a      | b      | Lab    | Lab i / Lab i-1 | u      | F(u)    |
| 1                                    | 0,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000          | 0,6181 | 18,7420 |
| 2                                    | 0,0000 | 0,6181 | 0,6181 | 0,6181          | 0,2361 | 15,1496 |
| 3                                    | 0,0000 | 0,3820 | 0,3820 | 0,6180          | 0,2361 | 15,1496 |
| interval with minimum: [0.0 ; 0.382] |        |        |        |                 |        |         |

| Функция-5   |        |        |        |                 |        |        |
|---|--------|--------|--------|-----------------|--------|--------|
| iter  | a      | b      | Lab    | Lab i / Lab i-1 | u      | F(u)   |
| 1   | 0,5000 | 2,5000 | 2,0000 | 1,0000          | 1,7362 | 0,4011 |
| 2   | 1,2640 | 2,5000 | 1,2360 | 0,6180          | 2,0279 | 0,1986 |
| 3   | 1,7362 | 2,5000 | 0,7638 | 0,6180          | 2,0279 | 0,1986 |
| interval with minimum: [1.7361520000000001 ; 2.5] |        |        |        |                 |        |        |





**Выводы:**

Были реализованы следующие алгоритмы одномерной минимизации функции:

- Метод дихотомии
- Метод золотого сечения
- Метод Фибоначчи
- Метод парабол
- Метод Брента

### **Метод дихотомии**

Метод дихотомии заключается в делении интервала неопределенности на две части на каждой итерации. Выбираются две точки, лежащие симметрично от середины интервала на малом расстоянии  $\epsilon$ .

На практике подтвердилось, что сначала за одну итерацию интервал неопределенности уменьшается примерно в 2 раза. Ближе к последним итерациям это значение уменьшается, так как влияние расстояния двух точек от центра становится все больше.

### **Метод золотого сечения**

Точки  $x_1$  и  $x_2$  располагаются симметрично относительно середины отрезка и делят его в пропорции золотого сечения. На каждой итерации вычисляем исследуемую функцию один раз. Их этого следует отношение длин двух последних интервалов неопределенности на каждой итерации одинаково и равно золотому сечению (подтверждено практикой).

### **Метод Фибоначчи**

Улучшенная реализация поиска с помощью золотого сечения. Как и в методе золотого сечения мы только на первой итерации производим два вычисления значений функции, далее одно. Число итераций задается в самом начале. Соотношение длин интервалов постепенно увеличивается.

Изначально коэффициент сокращения интервала равен дроби золотого сечения. Так получается потому, что между числами Фибоначчи и золотым сечением есть связь: предел отношения двух идущих подряд чисел Фибоначчи при стремлении их номера к бесконечности равно дроби золотого сечения, т. е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$ . Затем далее Коэффициент меняется от итерации к итерации.

### **Метод парабол**

Основан на аппроксимации параболы на трех точках. Очень нестабилен (столкнулись с этим). На некоторых функциях и интервалах работает эффективнее всех, требуя в разы меньше итераций. Но, например, на второй функции потребовалось в разы больше итераций. При этом на каждой итерации интервал практически не уменьшался. Нет закономерности в изменении интервала, то интервалы меняются в два раза, то почти (совсем) без изменения от итерации к итерации. Точка аппроксимации на каждой итерации выбирается в предположении того, что значение функции в ней меньше значений функции на обоих границах, что не обязательно верно (гарантируется, т. к. точка попадает на отрезок убывания или отрезок возрастания, одно из неравенств  $f_a > f_x$ ,  $f_b > f_x$ ).

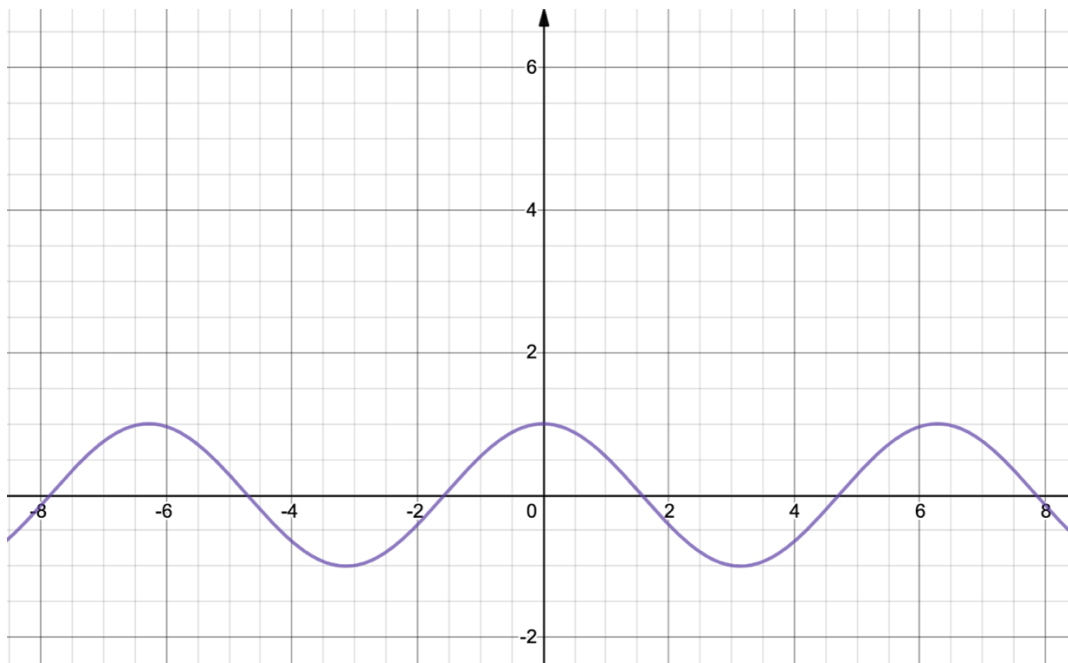
В целом, по полученному графику подтверждается сверхбыстрая сходимость в среднем.

### **Метод Брента**

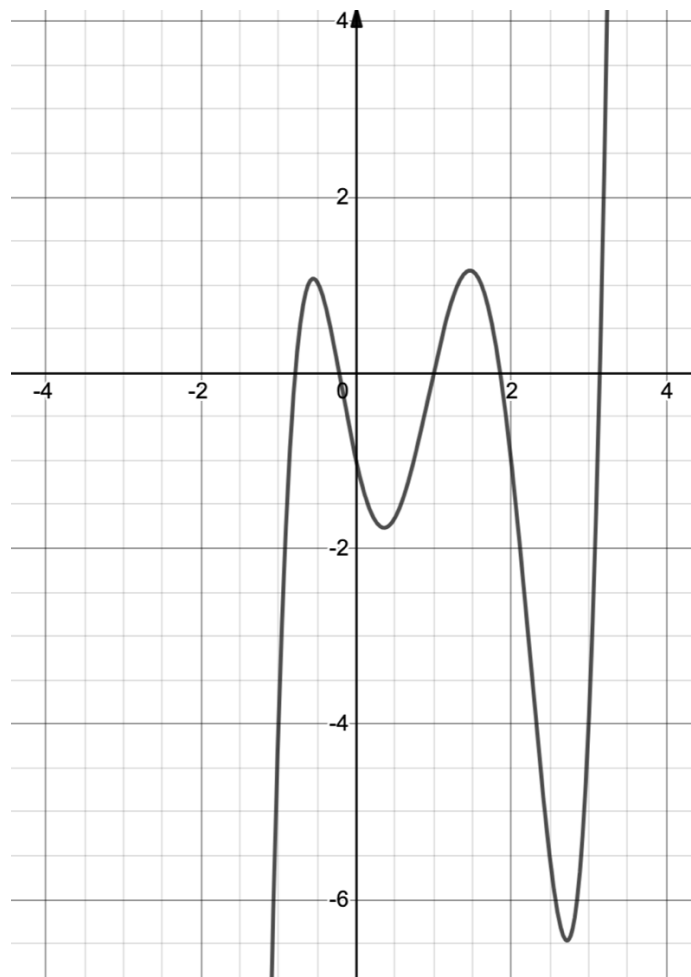
Является комбинацией метода золотого сечения и метода парабол. В среднем находит минимум функции быстрее всех остальных алгоритмов (но метод парабол при удачной функции и интервале может найти минимум сверхбыстро). В отличие от остальных алгоритмов, в которых точность является условием утверждения очередного интервала, в данном алгоритме точность используется в вычисление самого алгоритма и влияет на соотношение, в котором находятся число выбранных точек методом золотого сечения и методом парабол.

## Тестирование реализованных алгоритмов на многомодальных функциях:

$f1(x) = \cos x$  на интервалах:  $[-10 ; 10]$  ,  $[-7 ; 4]$  ,  $[-5 ; 3]$



$f2(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 4x - 1$  на интервалах:  $[-1 ; 3]$  ,  $[-0.8 ; 1]$  ,  $[-2 ; 4]$



| Функция | Метод            | Интервал поиска | Интервал с минимумом                       | xmin       | f(xmin)                 | Итерации |
|---------|------------------|-----------------|--|------------|-------------------------|----------|
| f1      | дихотомии        | [-10 ; 10]      | [3.1007159 ; 3.1868486]                    | 3,1340492  | -0,999971548            | 10       |
| f1      | золотого сечения | [-10 ; 10]      | [3.1116292 ; 3.1737418]                    | 3,1426854  | -0,999999403            | 12       |
| f1      | Фибоначчи        | [-10 ; 10]      | [3.0472107 ; 3.2188847]                    | 3,13304758 | -0,999963491            | 11       |
| f1      | парабол          | [-10 ; 10]      | не сходится                                |            |                         |          |
| f1      | Брента           | [-10 ; 10]      | [2.36152 ; 3.4761575552]                   | 3,0285     | -0,9936                 | 7        |
|         |                  |                 |  |            |                         |          |
| f1      | дихотомии        | [-7 ; 4]        | [-3.1776042 ; -3.0895834]                  | -3,144271  | -0,999996414            | 9        |
| f1      | золотого сечения | [-7 ; 4]        | [-3.1772342 ; -3.0877972]                  | -3,1325157 | -0,999958804            | 10       |
| f1      | Фибоначчи        | [-7 ; 4]        | [-3.1805553 ; -3.0277774]                  | -3,1041665 | -0,999299724            | 10       |
| f1      | парабол          | [-7 ; 4]        | не сходится                                |            |                         |          |
| f1      | Брента           | [-7 ; 4]        | [-3.59558 ; -2.798]                        | -3,1778    | -0,9993                 | 5        |
|         |                  |                 |  |            |                         |          |
| f1      | дихотомии        | [-5 ; 3]        | [-3.202604 ; -3.104948]                    | -3,1382813 | -0,999994518            | 8        |
| f1      | золотого сечения | [-5 ; 3]        | [-3.176501 ; -3.111456]                    | -3,1439786 | -0,999997154            | 10       |
| f1      | Фибоначчи        | [-5 ; 3]        | [-3.2022474 ; -3.022472]                   | -3,1123595 | -0,999572743            | 9        |
| f1      | парабол          | [-5 ; 3]        | не сходится                                |            |                         |          |
| f1      | Брента           | [-5 ; 3]        | [-3.832840256 ; -2.7002527938735486]       | -3,1114    | -0,9995                 | 5        |
|         |                  |                 |  |            |                         |          |
| f2      | дихотомии        | [-1 ; 3]        | [0.32135418 ; 0.41875002]                  | 0,3546875  | -1,765951768            | 7        |
| f2      | золотого сечения | [-1 ; 3]        | [0.3049517 ; 0.39009663]                   | 0,34752417 | -1,765008331            | 8        |
| f2      | Фибоначчи        | [-1 ; 3]        | [0.30909097 ; 0.45454556]                  | 0,38181826 | -1,763966772            | 8        |
| f2      | парабол          | [-1 ; 3]        | не сходится                                |            |                         |          |
| f2      | Брента           | [-1 ; 3]        | [0.23767999590158465 ; 0.528]              | 0,3752     | -1,7653                 | 5        |
|         |                  |                 |  |            |                         |          |
| f2      | дихотомии        | [-0.8 ; 1]      | [0.31041667 ; 0.40416667]                  | 0,34375    | -1,764263302            | 6        |
| f2      | золотого сечения | [-0.8 ; 1]      | [0.3124612 ; 0.37445652]                   | 0,34345886 | -1,764198711            | 7        |
| f2      | Фибоначчи        | [-0.8 ; 1]      | [0.31428576 ; 0.48571432]                  | 0,40000004 | -1,757759984            | 6        |
| f2      | парабол          | [-0.8 ; 1]      | не сходится                                |            |                         |          |
| f2      | Брента           | [-0.8 ; 1]      | [0.18128311394656782 ; 0.4437904769476545] | 0,3125     | -1,7515                 | 5        |
|         |                  |                 |  |            |                         |          |
| f2      | дихотомии        | [-2 ; 4]        | [0.31770828 ; 0.40755203]                  | 0,3742187  | -1,765405664            | 8        |
| f2      | золотого сечения | [-2 ; 4]        | [0.34057972 ; 0.4195134]                   | 0,38004655 | -1,764363365            | 9        |
| f2      | Фибоначчи        | [-2 ; 4]        | [0.2921347 ; 0.4269662]                    | 0,35955045 | -1,766241673            | 9        |
| f2      | парабол          | [-2 ; 4]        | не сходится                                |            |                         |          |
| f2      | Брента           | [-2 ; 4]        | [0.2919999999999998 ; 0.5951801336223277]  | 0,4212     | -1,7457                 | 7        |
|         |                  |                 |  |            |                         |          |
| f2      | дихотомии        | [-10 ; 10]      | [2.6724608 ; 2.7585936]                    | 2,705794   | -6,461398875            | 10       |
| f2      | золотого сечения | [-10 ; 10]      | [-10.0 ; -9.937887]                        | -9,968944  | -152355,7191            | 12       |
| f2      | Фибоначчи        | [-10 ; 10]      | [-10.0 ; -9.828326]                        | -9,9141636 | -<br>148 527,0060788851 | 11       |
| f2      | парабол          | [-10 ; 10]      | не сходится                                |            |                         |          |
| f2      | Брента           | [-10 ; 10]      | [-10.0 ; -7.08210064]                      | -8,1967    | -62023,4651             | 5        |

## Выводы:

Для более точного наблюдения исследовали поведение алгоритмов на нескольких различных интервалах.

Данные алгоритмы используются (знаем, что гарантированно дадут результат) на непрерывных и унимодальных функциях на заданном интервале, иначе алгоритмы либо найдут локальный минимум, либо не дадут результат вообще. Это можно заметить по данным выше.