1. Введение в анализ и дифференциальное исчисление

- определение производной и ее геометрический смысл
- правила дифференцирования элементарных функций
- понятие дифференциала функции

2. Понятие интеграла и методы его вычисления

- определенный и неопределенный интеграл
- подстановочный метод
- метод интегрирования по частям
- метод интегрирования дробно-рациональных функций

3. Приложения дифференцирования и интегрирования

- нахождение экстремумов функций
- вычисление площади фигур и объемов тел
- решение определенных интегралов для нахождения площади под графиками функций

4. Теорема о среднем значении и ее применении

- теорема Лагранжа и ее геометрический смысл
- Подсчет среднего значения функции на отрезке

5. Дифференцирование и интегрирование композиций функций

- правила дифференцирования сложных функций
- правила интегрирования сложных функций

6. Переход к полярным координатам и другие системы координат

- преобразование уравнений и функций в полярные координаты
- вычисление производных и интегралов в полярных координатах

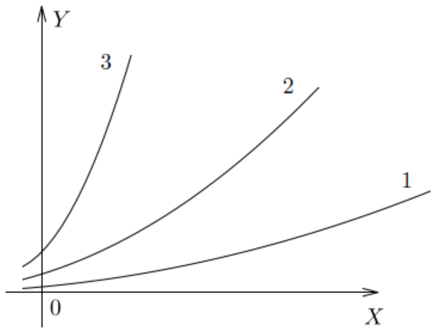
Надо знать:

- Производные и их свойства
- Основные понятия алгебры (арифметические операции, множества, функции и графики)
- Понятия предела функции и непрерывности
- Дифференцирования различных типов функций (показательных, тригонометрический, логарифмических и т.д.)

Производная

1 страница

Производной функции называется математическое понятие, характеризующее скорость изменения функции.



На рисунке видно три графика функции. Очевидно, что график под номером 3 растет быстрее.

Интуитивно мы без труда оцениваем скорость изменения функции. Но как же это делаем?

На самом деле мы смотрим, насколько круто идет вверх (или вниз) график функции. Другими словами — насколько быстро меняется ***y*** с изменением ***x***. Очевидно, что одна и та же функция в разных точках может иметь разное значение производной — то есть может меняться быстрее или медленнее.

Производная функции обозначается ***f'(x).***

Сам процесс нахождения производной называется дифференцированием. Функция, которая имеет производную в данной точке, называется дифференцируемой.

Чтобы найти производную, надо выражение под знаком штриха разобрать на составляющие простые функции и определить, какими действиями (произведение, сумма, частное) связаны эти функции. Далее производные элементарных функций находим в таблице производных, а формулы производных произведения, суммы и частного - в правилах дифференцирования.

Скачать таблицу производных элементарных функций. (ссылка на документ)

2 страница Правила нахождения производных

Первое правило дифференцирования:

Постоянный множитель можно вынести за знак производной: $(Cf(x))' = Cf\,'(x)$

Второе правило дифференцирования:

Производная суммы равна сумме производных: $(f(x) + g(x))' = f\,'(x) + g'(x)$.

Производная разности равна разности производных: $(f(x) - g(x))' = f\,'(x) - g'(x)$.

Пример:

Найти производную функции $f(x)=8x^3+3x^2-x$

Решение:

$f'(x)=(8x^3)'+(3x^2)'-x'$

Рассмотрим каждый член многочлена по отдельности

$(8x^3)' = 8(x^3)' = 8\cdot 3x^2 = 24x^2$

$(3x^2)' = 3(x^2)' = 3\cdot x = 6x$

$(-x)' = -(x) = -1$

$f'(x) = (8x^3)' + (3x^2)' - x' = 24x^2+6x-1.$

Ответ: $f'(x) = 24x^2+6x-1.$

Третье правило дифференцирования:

Производная произведения равна произведению первого множителя на второй плюс первый множитель, умноженный на производную второго. $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$

Пример:

Найти производную функции $f(x) = (3x-4)\cdot(4-5x)$.

Решение:

$f'(x) = (3x-4)'\cdot(4-5x)+(3x-4)\cdot(4-5x)' = 3(4-5x)-5(3x-4) = 12-15x-15x+20 = 32-30x$

Ответ: $f'(x) = 32-30x$

Четвертое правило дифференцирования:

Производная частного равна производной числителя, умноженного на знаменатель минус числитель, умноженный на производную знаменателя и все это деленное на квадрат знаменателя.

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Пример:

$$\frac{x-5}{2x-5}.$$

Решение:

$$\left(\frac{x-5}{2x-5}\right)' = \frac{(x-5)'(2x-5)-(x-5)(2x-5)'}{(2x-5)^2}.$$

$$\left(\frac{x-5}{2x-5}\right)' = \frac{(2x-5)-(2x-10)}{(2x-5)^2} =$$

$$= \frac{-5+10}{(2x-5)^2} = \frac{5}{(2x-5)^2}.$$

Тренажер (1):

См. примеры на листочке

2 страница Производная сложной функции

Производная сложной функции находится по формуле: (f(g(x)))' = f '(g(x))·g'(x)

Пример:

$$s = \left(\sin x - 2\cos x\right)^3$$

Решение:

$$s' = \left(\left(\sin x - 2\cos x\right)^3\right)' =$$
$$= 3\left(\sin x - 2\cos x\right)^2 \bullet \left(\sin x - 2\cos x\right)'.$$

$$\left(\sin x - 2\cos x\right)' = \left(\sin x\right)' - \left(2\cos x\right)' =$$
$$= \cos x - 2\left(\cos x\right) = \cos x - 2\left(-\sin x\right) =$$
$$= \cos x + 2\sin x.$$

Ответ: $3\left(\sin x - 2\cos x\right)^2 \bullet \left(\cos x + 2\sin x\right).$

Тренажер (2):

См. примеры на листочке

3 страница Производная неявно-заданной функции

Рассмотрим функцию y(x), которая записывается неявным способом в общем виде $F(x, y(x))$ = 0. Производная неявной функции находится двумя способами:

1. Дифференцированием обеих частей уравнения
2. С помощью использования готовой формулы: $y' = -\frac{F'_x}{F'_y}$

Способ 1

Не требуется приводить функцию к явному виду. Нужно сразу приступать к дифференцированию левой и правой части уравнения по $\boldsymbol{x}$. Стоит обратить внимание, что производная $\boldsymbol{y'}$ вычисляется по правилу дифференцирования сложной функции. После нахождения производной необходимо выразить $\boldsymbol{y'}$ из полученного уравнения и разместить в левой части.

Пример:

$$3x^2y^2 - 5x = 3y - 1$$

Решение:

Воспользуемся способом №1. А именно продифференцируем левую и правую часть уравнения:

$$(3x^2y^2-5x)'_x=(3y-1)'_x$$

Не забываем при дифференцировании использовать формулу производной произведения функций:

$$(3x^2)'_xy^2+3x^2(y^2)'_x-(5x)'_x=(3y)'_x-(1)'_x$$

$$6xy^2+3x^22yy'-5=3y'$$

Далее выражаем y' из уравнения:

$$6xy^2-5=3y'-6x^2yy'$$

$$6xy^2-5=y'(3-6x^2y)$$

$$y'=\frac{6xy^2-5}{3-6x^2y}$$

Способ 2

Можно воспользоваться формулой, в которой используются в числителе и знаменателе частные производные неявной функции $F(x,y(x))$=0.

Каждая частная производная (по x и по y) функции двух переменных представляет собой обыкновенную производную функции одной переменной при фиксированном значении другой переменной.

То есть для нахождения числителя берем производную по $\boldsymbol{x}$, а для знаменателя производную по $\boldsymbol{y}$.

Пример:

$$3x^4y^5+e^{7x-4y}-4x^5-2y^4=0$$

Решение:

Положим y постоянной и продифференцируем по x :

$$F'_x=12x^3y^5+e^{7x-4y}\cdot 7-20x^4$$

$$F'_x=12x^3y^5+7e^{7x-4y}-20x^4$$

Считаем теперь x константой и дифференцируем по y :

$$F'_y=15x^4y^4+e^{7x-4y}\cdot(-4)-8y^3$$

$$F'_y=15x^4y^4-4e^{7x-4y}-8y^3$$

Подставляем теперь в формулу $y'=-\frac{F'_x}{F'_y}$ и получаем:

$$y'=-\frac{12x^3y^5+7e^{7x-4y}-20x^4}{15x^4y^4-4e^{7x-4y}-8y^3}$$

Тренажер (3):

См. примеры на листочке

4 страница Производная параметрически-заданных функций

Параметрическая функция задаётся в виде:

$$\begin{cases} y = \phi(t) \\ x = \psi(t) \end{cases}, t \in [a; b]$$

, где ***t*** это параметр функции.

Производная параметрически заданной функции находится по обычным правилам дифференцирования, но с использованием дополнительных формул.

Формула первой производной:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Пример:

$$\begin{cases} y = t^2 - 16 \\ x = t - 4 \end{cases}$$

Решение:

Рассмотрев формулу понимаем, что для решения примера нужно найти неизвестные y'_t и x'_t. Займемся этим:

$$y'_t = (t^2 - 16)'_t = 2t$$

$$x'_t = (t - 4)'_t = 1$$

Обратите внимание! При записи производной нужно обязательно внизу писать t. Теперь подставляем найденное в формулу:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2t}{1} = 2t$$

Формула второй производной:

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$$

Пример:

Найдите вторую производную функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} y = \sin 2t \\ x = \cos^2 t \end{cases}$$

Решение:

Как видно из формулы для начала нужно найти первую производную y'_x , а затем уже можно получить вторую. Приступаем:

$$y'_t = (\sin 2t)'_t = \cos 2t \cdot (2t)'_t = 2\cos 2t$$

$$x'_t = (\cos^2 t)'_t = 2\cos t \cdot (\cos t)'_t = -2\cos t \sin t = -\sin 2t$$

Тогда первая производная параметрической функции равна:

$$y'_x = \frac{2\cos 2t}{-\sin 2t} = -2ctg2t$$

Зная первую производную находим вторую. Используем формулу:

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(-2ctg2t)'_t}{-\sin 2t} =$$

$$= \frac{2\frac{2}{sin^2 2t}}{-\sin 2t} = -\frac{4}{\sin^3 2t}$$

Тренажер (4):

См. примеры на листочке

5 страница Производные высшего порядка

Производные более высокого порядка являются второй, третьей или дальнейшей производной функции, т.е. многократное дифференцирование функции приводит к производной более высокого порядка.

Производную n-го порядка от произведения двух функций можно найти по формуле Лейбница:

$$(uv)^n = C_n^0 u^{(n)} v + C_n^1 u^{(n-1)} v' + C_n^2 u^{(n-2)} v'' + C_n^3 u^{(n-3)} v''' + \ldots + C_n^{n-2} u'' v^{(n-2)} + C_n^{n-1} u' v^{(n-1)} + C_n^n u v^{(n)}$$

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Пример:

Найдём третью производную функции $y = e^{-x}\cos x$.

Используем формулу Лейбница: $(uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$

Решение:

$$y''' = (e^{-x}\cos x)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''' =$$
$$= -e^{-x}\cos x + 3e^{-x}(-\sin x) - 3e^{-x}(-\cos x) + e^{-x}\sin x =$$
$$= e^{-x}(-\cos x - 3\sin x + 3\cos x + \sin x) = e^{-x}(2\cos x - 2\sin x) = 2e^{-x}(\cos x - \sin x)$$

Ответ: $y''' = 2e^{-x}(\cos x - \sin x)$

Производные высших порядков от функций, заданных неявно

То, что функция и её производная выражены неявно сути дела не меняет, вторая производная – это производная от 1-й производной. Однако производные 2-го и более высоких порядков принято выражать только через «***x***» и «***y***». Поэтому в полученную 2-ю производную подставляется результат первой производной и т.д.

Пример:

Найти вторую производную неявно заданной функции:

$y = e^y + 4x$

Решение:

Найдём 1-ю производную:

$(y)' = (e^y + 4x)'$

$y' = e^y \cdot y' + 4$

$y' - e^y \cdot y' = 4$

$y'(1 - e^y) = 4$

$y' = \dfrac{4}{1 - e^y}$

Найдём 2-ю производную:

$(y'(1 - e^y))' = (4)'$

$y''(1 - e^y) + y'(0 - e^y \cdot y') = 0$

$y''(1 - e^y) - e^y \cdot (y')^2 = 0$

Подставим $y' = \dfrac{4}{1 - e^y}$*:*

$y''(1 - e^y) - e^y \cdot \left(\dfrac{4}{1 - e^y}\right)^2 = 0$

$y''(1 - e^y) = \dfrac{16e^y}{(1 - e^y)^2}$

$y'' = \dfrac{16e^y}{(1 - e^y)^3}$

Тренажер (5):

См. примеры на листочке

Таблица производных
1. $(C)' = 1$, $(x)' = 1$
2. $(x^{a})' = \alpha x^{\alpha-1}$
3. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$
4. $(a^x)' = a^x \ln a$, $(e^x)' = e^x$
5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
6. $(\sin x)' = \cos x$
7. $(\cos x)' = -\sin x$
8. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
9. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
10. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
13. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Интегралы

1 страница Неопределенный интеграл

Неопределенным интегралом называют комплекс всех первообразных функции f(x).

Формулу для расчета неопределенного интеграла можно записать в такой форме:

$\int f(x)dx = F(x)+C$, где

- $f(x)$ - подынтегральная функция;
- $F(x)$ - первообразная функция функции $f(x)$;
- dx - дифференциал;
- C - численная константа интегрирования.

<u>Основные свойства неопределенного интеграла:</u>

1. $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$
2. $\int d\big(F(X)\big) = F(x) + C$
3. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$
4. $\int\big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Таблица интегралов элементарных функций (скачать файл)!

Пример:

$$\int(x^5 + \tfrac{1}{\sqrt{x}})dx$$

Решение:

Интеграл суммы можно разложить на сумму интегралов:

$$\int x^5 dx + \tfrac{1}{\sqrt{x}}dx$$

Таким образом, каждый из интегралов преобразован в табличный вид. Решение можно найти с помощью таблицы:

$$\frac{x^6}{6} + 2\sqrt{x} + \mathrm{C}$$

Тренажер (1):

См. примеры на листочке

2 страница Метод подведения под знак дифференциала

$f'(x)dx = d(f(x))$

Если в подынтегральной функции прослеживается произведение двух функций, одна из которых является дифференциалом другой, тогда внесите под знак дифференциала нужную функцию.

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d(\varphi(x)) = \int f(u)du$$

$$u=\varphi(x)$$

Подведение основных функций:

$dx = d(x+c), c = const$	$-\sin x dx = d(\cos x)$
$dx = \frac{1}{a}d(ax)$	$\cos x dx = d(\sin x)$
$x dx = \frac{1}{2}d(x^2+a)$	$\frac{dx}{x} = d(\ln x)$
$-\frac{dx}{x^2} = d(\frac{1}{x})$	$\frac{dx}{\cos^2 x} = d(tgx)$

Пример: $\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}\int f(kx+b)d(kx+b) = \frac{1}{k}F(kx+b)+C$

Тренажер (2):

См. примеры на листочке

3 страница Метод замены переменной в интеграле

Замена переменной в неопределенном интеграле используется при нахождении интегралов, в которых одна из функций является производной другой функции.

Таким образом, если в задаче задан интеграл вида:

$\int f(\phi(x))\cdot\phi'(x)dx$

Целесообразно выполнить замену переменной на новую:

$t = \phi(x)$

$dt=\phi'(t)dt$

После этого интеграл будет представлен в виде, который легко взять основными методами интегрирования:

$\int f(\phi(x))\cdot\phi'(x)dx = \int f(t)dt$

Не нужно забывать также вернуть замененную переменную назад к $\boldsymbol{x}$.

Пример:

$$\int e^{3x}dx$$

Решение:

Выполняем замену переменной в интеграле на t=3x, dt=3dx:

$$\int e^{3x}dx = \int e^t \frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int e^t dt =$$

$$= \frac{1}{3}e^t + C = \frac{1}{3}e^{3x} + C$$

Тренажер (3):

См. примеры на листочке

4 страница Метод интегрирования по частям

Интегрирование по частям – метод для решения интегралов от произведения двух элементарных функций.

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Для применения формулы интегрирования по частям подынтегральное выражение нужно разбить на два множителя. Один из них обозначается через ***u***, а остальная часть относится ко второму множителю и обозначается через ***dv***. Затем дифференцированием находится ***du*** и интегрированием - функция ***v***. При этом за ***u*** следует брать такую часть подынтегральной функции, которая при дифференцировании сильно не усложняется, а за ***dv*** - такую часть подынтегрального выражения, которая легко интегрируется.

<u>По частям берутся интегралы следующих видов:</u>

1) Подынтегральная функция – это произведение логарифма и многочлена.

$\int (x^2+3)\ln x dx$, где u = логарифм

2) Подынтегральная функция – это экспоненциальная функция, умноженная на многочлен.

$\int xe^x dx$, где u - многочлен

3) Подынтегральная функция – тригонометрические функции, умноженные на многочлен.

$\int x\cos 6x dx$, где u - многочлен

4) Подынтегральная функция – это обратные тригонометрические функции, умноженные на многочлен.

$\int \arcsin x dx$, где u - обратная тригонометрическая функция

Пример:

$$\int xe^x dx$$

Решение:

Для решения интеграла используем метод интегрирования по частям.

$u = x \to du = dx$, а $dv = e^x dx \to v = e^x$

Подставляем найденные значения в формулу интегрирования и получаем:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Тренажер (4): !

См. примеры на листочке

3 страница Определенный интеграл

Определенным интегралом называют приращение одной из первообразных функции f(x), соответствующих отрезку [a; b].

Отличительная черта написание определенного интеграла от неопределенного в том, что есть пределы интегрирования a и b.

$$\int_a^b f(x)dx$$

Основные свойства определенного интеграла:

- если определенный интеграл обладает одинаковыми пределами интегрирования, то его значение соответствует нулю;
- значение определенного интеграла является независимой от обозначения переменной интегрирования величиной;
- постоянный множитель допустимо выносить за знак определенного интеграла;
- определенный интеграл в случае алгебраической суммы конечного числа функций рассчитывается как алгебраическая сумма определенных интегралов;
- при разбивке отрезка интегрирования на части определенный интеграл в отношении всего отрезка соответствует сумме определенных интегралов его частей;

- перестановка пределов интегрирования не меняет абсолютную величину определенного интеграла, а изменяет его знак;
- определенный интеграл рассчитывается как произведение длины отрезка интегрирования и значения подынтегральной функции в какой-то точке x0 внутри него;
- в том случае, если верхний предел интегрирования больше, чем нижний, и подынтегральная функция соответствует неотрицательному или положительному значению, определенному интегралу будет соответствовать неотрицательная или положительная величина;
- когда верхний предел интегрирования больше, чем нижний, и функции f(x) и g(x) не прерываются, то допустимо почленно интегрировать неравенство f(x) >=g(x).

Основные свойства интегралов:

$$\int C * f(x)dx = C * \int f(x)dx$$
$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad c \in (a; b)$$

Дифференцирование

Основные понятия дифференциальных уравнений

Со школы нам известны простейшие уравнения, в которых нужно найти неизвестную x. По сути, **дифференциальные уравнения** лишь чуточку отличаются от них – вместо переменной ***x*** в них нужно найти функцию ***y(x)***, которая обратит уравнение в тождество.

Дифференциальное уравнение (ДУ) – это уравнение, содержащее производные функции y(x), саму функцию, независимые переменные и иные параметры в различных комбинациях.

Существует множество видов дифференциальных уравнений: обыкновенные дифференциальные уравнения, линейные и нелинейные, однородные и неоднородные, дифференциальные уравнения первого и высших порядков, дифуры в частных производных и так далее.
Решением дифференциального уравнения является функция, которая обращает его в тождество. Существуют общие и частные решения ДУ.
Общим решением ДУ является общее множество решений, обращающих уравнение в тождество. Частным решением дифференциального уравнения называется решение, удовлетворяющее дополнительным условиям, заданным изначально.
Порядок дифференциального уравнения определяется наивысшим порядком производных, входящих в него.

Дифференциальные уравнения первого порядка

Однородное уравнение первого порядка: