ТФКП, M3238-39

27 марта 2019 г.

1 Комлексные числа

1.1 Решить уравнение $\bar{z} = z^{n-1}, (n \neq 2)$

1.2 Доказать, что оба значения $\sqrt{z^2 - 1}$ лежат на прямой, проходящей через начало координат и параллельной биссектрисе внутреннего угла треугольника с вершинами в точках $-1, 1$ и z, проведённой из вершины z.

1.3 Доказать, что $(\sqrt[n]{z})^m$ $(n, m$ - целые числа, а (n, m) - наибольший общий делитель) имеет $\frac{n}{(n,m)}$ различных значений

1.4 Доказать $|1 - \bar{z}_1 z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)$

1.5 Доказать, что если $|z_1 + z_2 + z_3| = 0$ и $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, то точки z_1, z_2, z_3 являются вершинами правильного треугольника

1.6 Изобразить область или прямую:

- $|z-2|^2 - |z+2|^2 > 3;$
- $log_{\frac{1}{2}} \frac{|z-1|+4}{3|z-1|-2} > 1;$
- $Im(\overline{z^2 - z}) = 2 - Imz;$
- $|z| - 3Imz = 6;$

1.7 Определить семейство линий в z -плоскости$(-\infty < C < \infty)$, заданных уравнениями:

- $Re\dfrac{1}{z} = C$
- $Im\dfrac{1}{z} = C$
- $\dfrac{|z - z_1|}{|z - z_2|} = \lambda, (\lambda > 0)$

1.8 Доказать, что многочлен $f(x) = (\cos\alpha + x\sin\alpha)^n - \cos n\alpha - x\sin n\alpha$ делится на $x^2 + 1$.

1.9 Найти наибольшее и наименьшее расстояния от начала координат до линии $|z + \dfrac{1}{z}| = a, (a > 0)$

1.10 Первоначальное значение $Argf(z)$ при $z = 2$ принято равным 0. Точка z делает один оборот против часовой стрелки по окружности с центром в начале координат и возвращается в точку $z = 2$. Считая, что $Argf(z)$ меняется непрерывно при движении точки z, указать значение $Argf(2)$ после указанного поворота, если:

- $f(z) = \sqrt{z-1}$
- $f(z) = \sqrt{z^2+2z-3}$
- $f(z) = \sqrt{\dfrac{z-1}{z+1}}$

1.11 Доказать, что $\frac{x^{2m}-a^{2m}}{x^2-a^2} = \prod_{k=1}^{m-1}(x^2 - 2ax\cos\frac{k\pi}{m} + a^2)$.

1.12 Найти на сфере Римана образы окружностей с центром в начале координат

1.13 Найти на комплексной плоскости образ параллели с широтой $\phi, (\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2)$.

1.14 Найти суммы $S_n = 1 + \frac{\sin x}{\sin x} + \frac{\sin 2x}{\sin^2 x} + ... + \frac{\sin nx}{\sin^n x}, \sigma_n = 1 + \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{2x}{\sin^2 x} + ... + \frac{\cos nx}{\sin^n x}$

1.15 Решить систему уравнений $\begin{cases} z^3 + w^5 = 0 \\ z^2\bar{w}^4 = 1 \end{cases}$

1.16 Найти все корни следующих уравнений:

$$\sin z + \cos z = 2; \tag{1}$$
$$\sin z - \cos z = 3; \tag{2}$$
$$\operatorname{sh} z - \operatorname{ch} z = 2i; \tag{3}$$
$$2\operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z = i; \tag{4}$$
$$\cos z = \operatorname{ch} z; \tag{5}$$
$$\cos z = i\operatorname{sh} 2z. \tag{6}$$

2 Отображения

2.1 Как действует отображение e^z на прямую $x = y$, прямую $(y = const, x \in R)$, полосу $y \in (\phi, \psi), x \in R$?

2.2 Какая функция отображает полуплоскость $Imz > 0$ в окружность единичного радиуса с центром в начале координат, причём $z_0 \to (0; 0)$?

2.3 Найти образы координатных осей ОХ и ОУ при преобразовании $w = \dfrac{z+1}{z-1}$.
2.4 Найти линейное преобразование, оторбражающий треугольник с вершинами $0, 1, i$ на подобный ему с вершинами $0, 2, 1+i$.
2.5 Найти линейную функцию, отображающую круг $|z| < 1$ на круг $|w - w_0| < R$ так, чтобы центры кругов соответсвовали друг другу и горизонтальный диаметр переходил в диаметр, образующий угол α с направлением дейтвительной оси.
2.6 Построить область на плоскости w, в которую отображается угол $0 < \phi < \pi/4$ с помощью функции $w = \frac{z}{z-1}$.
2.7 Во что преобразуется окружность $|z| = 1$ при отображении $w = \frac{1-z}{z}$?
2.8 В какую область преобразуется круг $|z - 1/2 + i/2| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ при отображении $w = \frac{iz-2}{z+i}$?
2.9 Найти в какую область преобразуется квадрат $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ функцией $w = z^2 + z + 1$.
2.10 Найти образ плоскости с разрезом вдоль положительной части вещественной оси при отображении однозначной ветвью логарифма, когда $z_0 = i$ переходит в $w_0 = \frac{5}{2}\pi i$.
2.11 Отобразить треугольник, заключённый между прямыми $y = 2, x = 0, y = x$ с помощью функции $w = 1/2z^2 - z$ на плоскость w.
2.12 Найти однолистное и конформное отображение вертикальной полосы $1 < Rez < 2$ на верхнюю полуплоскость $Imw > 0$.

3 Разрезы

3.1 Найти однолистное и конформное отображение полосы $0 < Imz < \pi$ с разрезом $-\inf < Rez \leq 0, Imz = \frac{\pi}{2}$ на полосу $0 < Imw < \pi$.
3.2 Найти функцию $w(z)$, конформно отображающую всю плоскость z с разрезом по дуге окружности $|z| = 1, Imz > 0$, на всю плоскость w с разрезом по отрезку $[-1, 1]$ и удолетворяющую условиям $w(1) = 1, w(\infty) = \infty$.
3.3 Найти функцию $w(z)$, конформно отображающую полукруг $|z| < 1, Imz > 0$, на всю плоскость w на круг $|w| < 1$.
3.4 Найти функцию $w(z)$, конформно отображающую разрезанную по отрезку $[0, i]$ полуплоскость $Imz > 0$ на круг $|w| < 1$ и удолетворяющую условиям $w(\frac{5i}{4}) = 0, w(i) = -i$.
3.5 Найти однолистное и конформное отображение верхней полуплоскости с разрезом по отрезку от точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = i$ на верхнюю полуплоскость $Imw > 0$.
3.6 Найти функцию $w(z)$, конформно отображающую круг $|z| < 1$, разрезаннй по радиусу $[1/3, 1]$ на круг $|w| < 1$.
3.7 Найти функцию $w(z)$, конформно отображающую верхнюю полуплоскость $Imz > 0$ с вырезанной точкой $z = ih$, где h - вещественное число, на верхнюю полуплоскость $Imz > 0$.

3.8 Найти функцию, отображающую область $\frac{\pi}{4} < arg(z) < \frac{3\pi}{4}$ с разрезом по мнимой оси в виде луча $Imz > h, Rez = 0$ на область $Imz > 0$.
3.9 Найти какую-либо функцию $w(z)$, конформно отображающую область $Im(z) > 0, z \notin [k\pi, k\pi + i\pi], (k = 0, \pm 1, ...)$, на верхнюю полуплоскость.

4 Регулярные функции

4.1 Найти все точки, в которых дифференцируемы функции:

- Rez;
- $x^2 + iy^2$;
- tgz;
- $\frac{cosz}{cosz - sinz}$;

4.2 Вывести условия Коши-Римана для предстаавления комплексных чисел в полярных координатах.

5 Жесть

Ж.1 Найти конформное отображение расширенной плоскости z с разрезом вдоль дуги AB окружности, концы которой лежат в точках $\pm a$ вещественной оси (внешность дуги AB), на внешность круга расширенной плоскости W, граница которого проходит через те же точки $\pm a$ (*построение профилей Жуковского*)