ТФКП, М3238-39

3 мая 2019 г.

1 Комлексные числа

1.1 Решить уравнение $\bar{z} = z^{n-1}, (n \neq 2)$

1.2 Доказать, что оба значения $\sqrt{z^2-1}$ лежат на прямой, проходящей через начало координат и параллельной биссектрисе внутреннего угла треугольника с вершинами в точках $-1, 1$ и z, проведённой из вершины z.

1.3 Доказать, что $(\sqrt[n]{z})^m$ (n, m - целые числа, а (n, m) - наибольший общий делитель) имеет $\frac{n}{(n,m)}$ различных значений

1.4 Доказать $|1 - \bar{z}_1 z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)$

1.5 Доказать, что если $|z_1 + z_2 + z_3| = 0$ и $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, то точки z_1, z_2, z_3 являются вершинами правильного треугольника

1.6 Изобразить область или прямую:

- $|z-2|^2 - |z+2|^2 > 3$;
- $log_{\frac{1}{2}} \frac{|z-1|+4}{3|z-1|-2} > 1$;
- $Im(\overline{z^2 - z}) = 2 - Imz$;
- $|z| - 3Imz = 6$;

1.7 Определить семейство линий в z -плоскости($-\infty < C < \infty$), заданных уравнениями:

- $Re\dfrac{1}{z} = C$
- $Im\dfrac{1}{z} = C$
- $\dfrac{|z - z_1|}{|z - z_2|} = \lambda, (\lambda > 0)$

1.8 Доказать, что многочлен $f(x) = (\cos\alpha + x\sin\alpha)^n - \cos n\alpha - x\sin n\alpha$ делится на x^2+1.

1.9 Найти наибольшее и наименьшее расстояния от начала координат до линии $|z+\dfrac{1}{z}| = a, (a>0)$

1.10 Первоначальное значение $Argf(z)$ при $z=2$ принято равным 0. Точка z делает один оборот против часовой стрелки по окружности с центром в начале координат и возвращается в точку $z=2$. Считая, что $Argf(z)$ меняется непрерывно при движении точки z, указать значение $Argf(2)$ после указанного поворота, если:

- $f(z) = \sqrt{z-1}$
- $f(z) = \sqrt{z^2+2z-3}$
- $f(z) = \sqrt{\dfrac{z-1}{z+1}}$

1.11 Доказать, что $\frac{x^{2m}-a^{2m}}{x^2-a^2} = \prod_{k=1}^{m-1}(x^2-2ax\cos\frac{k\pi}{m}+a^2)$.

1.12 Найти на сфере Римана образы окружностей с центром в начале координат

1.13 Найти на комплексной плоскости образ параллели с широтой $\phi, (\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2)$.

1.14 Найти суммы $S_n = 1+\frac{\sin x}{\sin x}+\frac{\sin 2x}{\sin^2 x}+...+\frac{\sin nx}{\sin^n x}, \sigma_n = 1+\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{2x}{\sin^2 x}+ ... + \frac{\cos nx}{\sin^n x}$

1.15 Решить систему уравнений $\begin{cases} z^3+w^5=0 \\ z^2\bar{w}^4 = 1 \end{cases}$

1.16 Найти все корни следующих уравнений:

$$\sin z + \cos z = 2; \quad (1)$$
$$\sin z - \cos z = 3; \quad (2)$$
$$\operatorname{sh} z - \operatorname{ch} z = 2i; \quad (3)$$
$$2\operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z = i; \quad (4)$$
$$\cos z = \operatorname{ch} z; \quad (5)$$
$$\cos z = i\operatorname{sh} 2z. \quad (6)$$

2 Отображения

2.1 Как действует отображение e^z на прямую $x=y$, прямую $(y=const, x\in R)$, полосу $y\in(\phi,\psi), x\in R$?
2.2 Какая функция отображает полуплоскость $Imz>0$ в окружность единичного радиуса с центром в начале координат, причём $z_0 \to (0;0)$?

2.3 Найти образы координатных осей ОХ и ОУ при преобразовании $w = \dfrac{z+1}{z-1}$.
2.4 Найти линейное преобразование, оторбражающий треугольник с вершинами $0, 1, i$ на подобный ему с вершинами $0, 2, 1+i$.
2.5 Найти линейную функцию, отображающую круг $|z| < 1$ на круг $|w - w_0| < R$ так, чтобы центры кругов соответсвовали друг другу и горизонтальный диаметр переходил в диаметр, образующий угол α с направлением дейтвительной оси.
2.6 Построить область на плоскости w, в которую отображается угол $0 < \phi < \pi/4$ с помощью функции $w = \frac{z}{z-1}$.
2.7 Во что преобразуется окружность $|z| = 1$ при отображении $w = \frac{1-z}{z}$?
2.8 В какую область преобразуется круг $|z - 1/2 + i/2| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ при отображении $w = \frac{iz-2}{z+i}$?
2.9 Найти в какую область преобразуется квадрат $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ функцией $w = z^2 + z + 1$.
2.10 Найти образ плоскости с разрезом вдоль положительной части вещественной оси при отображении однозначной ветвью логарифма, когда $z_0 = i$ переходит в $w_0 = \frac{5}{2}\pi i$.
2.11 Отобразить треугольник, заключённый между прямыми $y = 2, x = 0, y = x$ с помощью функции $w = 1/2z^2 - z$ на плоскость w.
2.12 Найти однолистное и конформное отображение вертикальной полосы $1 < Rez < 2$ на верхнюю полуплоскость $Imw > 0$.

3 Разрезы

3.1 Найти однолистное и конформное отображение полосы $0 < Imz < \pi$ с разрезом $-\inf < Rez \leq 0, Imz = \frac{\pi}{2}$ на полосу $0 < Imw < \pi$.
3.2 Найти функцию $w(z)$, конформно отображающую всю плоскость z с разрезом по дуге окружности $|z| = 1, Imz > 0$, на всю плоскость w с разрезом по отрезку $[-1, 1]$ и удолетворяющую условиям $w(1) = 1, w(\infty) = \infty$.
3.3 Найти функцию $w(z)$, конформно отображающую полукруг $|z| < 1, Imz > 0$, на всю плоскость w на круг $|w| < 1$.
3.4 Найти функцию $w(z)$, конформно отображающую разрезанную по отрезку $[0, i]$ полуплоскость $Imz > 0$ на круг $|w| < 1$ и удолетворяющую условиям $w(\frac{5i}{4}) = 0, w(i) = -i$.
3.5 Найти однолистное и конформное отображение верхней полуплоскости с разрезом по отрезку от точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = i$ на верхнюю полуплоскость $Imw > 0$.
3.6 Найти функцию $w(z)$, конформно отображающую круг $|z| < 1$, разрезаннй по радиусу $[1/3, 1]$ на круг $|w| < 1$.
3.7 Найти функцию $w(z)$, конформно отображающую верхнюю полуплоскость $Imz > 0$ с вырезанной точкой $z = ih$, где h - вещественное число, на верхнюю полуплоскость $Imz > 0$.

3.8 Найти функцию, отображающую область $\frac{\pi}{4} < arg(z) < \frac{3\pi}{4}$ с разрезом по мнимой оси в виде луча $Imz > h, Rez = 0$ на область $Imz > 0$.
3.9 Найти какую-либо функцию $w(z)$, конформно отображающую область $Im(z) > 0, z \notin [k\pi, k\pi + i\pi], (k = 0, \pm 1, ...)$, на верхнюю полуплоскость.
3.10 Найти конформное отображение расширенной плоскости z с разрезом вдоль дуги AB окружности, концы которой лежат в точках $\pm a$ вещественной оси (внешность дуги AB), на внешность круга расширенной плоскости W, граница которого проходит через те же точки $\pm a$ (*построение профилей Жуковского*)

4 Пределы функции

4.1 Найти все точки, в которых дифференцируемы функции:

- Rez;
- $x^2 + iy^2$;
- tgz;
- $\frac{cosz}{cosz - sinz}$;

4.2 Вывести условия Коши-Римана для предстаавления комплексных чисел в полярных координатах.
4.3 Функция $w = \frac{Imz}{\overline{z}}$ определена для $z \neq 0$. Можно ли доопределить ее в точке $z = 0$ так, чтобы она стала непрерывной в этой точке? 4.4 Вычислить пределы последовательностей

- $z_n = (\frac{n-2}{n+2})^{-3n} + i(1 + \frac{5}{n-2})^{4n}$;
- $z_n = \frac{sin5z}{z^2 + sh3z}$;

4.5 Найти области дифференцируемости функций:

- $w = z + i\overline{z}$;
- $Re(w) = arctg\frac{y}{x} + x^2 + y^2$;
- $w = \frac{z+5i}{iz-7}$;
- $w = e^{\overline{z}^2}$;
- $w = |x^2 - y^2| + 2i|zy|$;
- $w = sinxshy - icosxchy$;

4.6 Проверить аналитичность и восстановить, где это возможно функцию:

- $v = arctg\frac{y}{x} + e^x siny + 3y$;

- $v = e^{3x} cos3y$;
- $u = ln(x^2 + y^2) + x^2$;

4.7 Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки a и определить область сходимости:

- $z^3, a = 2$;
- $e^z, a = 3$;
- $\frac{1}{1-z^2}, a = 0$;
- $\frac{1}{z}, a = 1$;
- $\frac{z}{(1-z^2)^3}, a = 0$;
- $f(z) = \sqrt{z+3}, a = 1, f(1) = -2$;
- $f(z) = Arcsinz, a = 0, f(0) = 4\pi$.

4.8 Представить рядом Лорана по степеням $(z - a)$ и определить область сходимости:

- $\frac{z}{(z-a)^n}, a = a$;
- $\frac{1}{z^2(z-b)^3}, a = 0, (b = const)$;
- $z^3 cos\frac{1}{z}, a = 0$;
- $z^5 e^{\frac{1}{z}}, a = 0$;
- $e^z ln\frac{z-\alpha}{z-\beta}, a = 0, max(|\alpha|, |\beta|) < |z| < \infty$;
- ;

  ;

4.9 Разложить в ряд Фурье (рассмотреть как ряд Лорана с $\sum c_n z^n, z = e^{i\phi}$ на окружности $| = 1)$:

- $\frac{1-acos\phi}{1-2acos\phi+a^2}, -1 < a < 1$;
- $\frac{1}{1-asin\phi}, -1 < a < 1$;
- $\cos\phi(1 + a^2 cos^2\phi), 0 < a < 1$;
- $ln|sin\frac{\phi}{2}|$;
- $\frac{\pi-\phi}{2}$.

Hint. $ln|sin\frac{\phi}{2}| = Reln\frac{1-e^{i\phi}}{2}$ 4.10 Найти множества точек, в которых сходятся следующие ряды Лорана:

- $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-|}z^n$;
- $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{z^n}{3^n+1}$;
- $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{ch()}, \alpha > 0$;
- $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{n^2+1}$;
- $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n z^n$;

4.11 Найти главную часть ряда Лорана в окрестности особой точки:

- $\frac{z}{(z+2)^2}$;
- $\frac{e^z+1}{e^z-1}$;
- $\frac{1}{sin()}$;
- $\sqrt{z^4+b^4}, z_0 = \infty$;
- $z^3 arctgz, z_0 = \infty$.

4.12 Доказать, что функция $f(z)$ регулярна во всей комплексной плоплоскости, за исключением конечного числа изолированных особых точек однозначного характера $z_1, z_2 ... z_n$ (точка $z = \infty$ не вклю- включается). Доказать, что

$$\sum_{k=1}^{n} res_{z=z_k} f(z) + res_{z=\infty} f(z) = 0$$

5 Интегрирование функции комплексного переменного. Вычеты

5.1 Вычислить интеграл $\int (z-a)^n dz$, n-целое число, по

- полуокружности $|z-a| = R, 0 \leq arg(z-a) \leq \pi$, начало пути в точке $z = a + R$;
- по окружности $|z-a| = R$;
- по периметру квадрата с центром в точке a и сторонам, паралелльным осям координат.

5.2 Вычислить интегралы:

- $\int_{|z|=1} z^n Lnzdz$, где n-целое число, (а) $Ln(1) = 0$, (б) $Ln(-1) = \pi i$;

- $\int_0^{\inf} e^{-x^2} cos(2bx)dx;$
- $\int_0^{\inf} \frac{sinx}{x} dx;$
- $\int_0^{\inf} x^{s-1} cosxdx, 0 < s < 1, \gamma(t) = \int_0^{\inf} x^{t-1} e^{-x} dx;$

5.3 Доказать, что если $|a| \neq R$,то

$$\int_{|z|=R} \frac{|dz|}{|z-a||z+a|} < \frac{2}{|R^2 - |a|^2|}$$

. 5.4 Доказать, что "Для того чтобы изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ была существенно особой, необходимо и достаточно, чтобы главная часть лорановского разложения функции $f(z)$ в окрестности z_0 содержала бы бесконечное число членов: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} a_n (z - z_0)^n$".
5.5 Вычислить интегралы по следующим конутрам:

- $\int_{\partial D} \frac{dz}{1+z^4} (D : |z - 1| < 1);$
- $\int_{\partial D} \frac{sinz}{(z+1)^3 dz} (D : x^{2/3} + y^{2/3} < 2^{2/3});$
- $\int_{\partial D} zsin\frac{z+1}{z-1} dz (D : |z| < 2);$
- $\int_{\partial D} \frac{ctgzdz}{z} (D : |z| < 1);$
- $\int_{\partial D} \frac{edz}{2z^2 - i} (D : |z| < 1, Rez > 0, Imz > 0);$
- $\int_{\partial D} \frac{z^2 dz}{e^{2^3} - 1} (D : |z| < \sqrt[3]{n + \frac{1}{2}} (n = 0, 1, 2...));$