ТФКП, М3238-39

2 июня 2019 г.

1 Комлексные числа

1.1 Решить уравнение $\bar{z} = z^{n-1}, (n \neq 2)$

1.2 Доказать, что оба значения $\sqrt{z^2 - 1}$ лежат на прямой, проходящей через начало координат и параллельной биссектрисе внутреннего угла треугольника с вершинами в точках $-1, 1$ и z, проведённой из вершины z.

1.3 Доказать, что $(\sqrt[n]{z})^m$ $(n, m$ - целые числа, а (n, m) - наибольший общий делитель) имеет $\frac{n}{(n,m)}$ различных значений

1.4 Доказать $|1 - \bar{z_1} z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)$

1.5 Доказать, что если $|z_1 + z_2 + z_3| = 0$ и $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, то точки z_1, z_2, z_3 являются вершинами правильного треугольника
1.6 Изобразить область или прямую:

- $|z - 2|^2 - |z + 2|^2 > 3;$
- $log_{\frac{1}{2}} \frac{|z-1|+4}{3|z-1|-2} > 1;$
- $Im(\overline{z^2 - z}) = 2 - Imz;$
- $|z| - 3Imz = 6;$

1.7 Определить семейство линий в z -плоскости$(-\infty < C < \infty)$, заданных уравнениями:

- $Re\dfrac{1}{z} = C$
- $Im\dfrac{1}{z} = C$
- $\dfrac{|z - z_1|}{|z - z_2|} = \lambda, (\lambda > 0)$

1.8 Доказать, что многочлен $f(x) = (\cos\alpha + x\sin\alpha)^n - \cos n\alpha - x\sin n\alpha$ делится на $x^2 + 1$.

1.9 Найти наибольшее и наименьшее расстояния от начала координат до линии $|z + \dfrac{1}{z}| = a, (a > 0)$

1.10 Первоначальное значение $Argf(z)$ при $z = 2$ принято равным 0. Точка z делает один оборот против часовой стрелки по окружности с центром в начале координат и возвращается в точку $z = 2$. Считая, что $Argf(z)$ меняется непрерывно при движении точки z, указать значение $Argf(2)$ после указанного поворота, если:

- $f(z) = \sqrt{z-1}$
- $f(z) = \sqrt{z^2 + 2z - 3}$
- $f(z) = \sqrt{\dfrac{z-1}{z+1}}$

1.11 Доказать, что $\frac{x^{2m}-a^{2m}}{x^2-a^2} = \prod_{k=1}^{m-1}(x^2 - 2ax\cos\frac{k\pi}{m} + a^2)$.

1.12 Найти на сфере Римана образы окружностей с центром в начале координат

1.13 Найти на комплексной плоскости образ параллели с широтой $\phi, (\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2)$.

1.14 Найти суммы $S_n = 1 + \frac{\sin x}{\sin x} + \frac{\sin 2x}{\sin^2 x} + ... + \frac{\sin nx}{\sin^n x}, \sigma_n = 1 + \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\cos 2x}{\sin^2 x} + ... + \frac{\cos nx}{\sin^n x}$

1.15 Решить систему уравнений $\begin{cases} z^3 + w^5 = 0 \\ z^2\bar{w}^4 = 1 \end{cases}$

1.16 Найти все корни следующих уравнений:

$$\sin z + \cos z = 2; \tag{1}$$
$$\sin z - \cos z = 3; \tag{2}$$
$$\operatorname{sh} z - \operatorname{ch} z = 2i; \tag{3}$$
$$2\operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z = i; \tag{4}$$
$$\cos z = \operatorname{ch} z; \tag{5}$$
$$\cos z = i\operatorname{sh} 2z. \tag{6}$$

2 Отображения

2.1 Как действует отображение e^z на прямую $x = y$, прямую $(y = const, x \in R)$, полосу $y \in (\phi, \psi), x \in R$?
2.2 Какая функция отображает полуплоскость $Imz > 0$ в окружность единичного радиуса с центром в начале координат, причём $z_0 \to (0; 0)$?

2.3 Найти образы координатных осей OX и OY при преобразовании $w = \dfrac{z+1}{z-1}$.
2.4 Найти линейное преобразование, оторбражающий треугольник с вершинами $0, 1, i$ на подобный ему с вершинами $0, 2, 1+i$.
2.5 Найти линейную функцию, отображающую круг $|z| < 1$ на круг $|w - w_0| < R$ так, чтобы центры кругов соответсвовали друг другу и горизонтальный диаметр переходил в диаметр, образующий угол α с направлением дейтвительной оси.
2.6 Построить область на плоскости w, в которую отображается угол $0 < \phi < \pi/4$ с помощью функции $w = \frac{z}{z-1}$.
2.7 Во что преобразуется окружность $|z| = 1$ при отображении $w = \frac{1-z}{z}$?
2.8 В какую область преобразуется круг $|z - 1/2 + i/2| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ при отображении $w = \frac{iz-2}{z+i}$?
2.9 Найти в какую область преобразуется квадрат $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ функцией $w = z^2 + z + 1$.
2.10 Найти образ плоскости с разрезом вдоль положительной части вещественной оси при отображении однозначной ветвью логарифма, когда $z_0 = i$ переходит в $w_0 = \frac{5}{2}\pi i$.
2.11 Отобразить треугольник, заключённый между прямыми $y = 2, x = 0, y = x$ с помощью функции $w = 1/2z^2 - z$ на плоскость w.
2.12 Найти однолистное и конформное отображение вертикальной полосы $1 < Rez < 2$ на верхнюю полуплоскость $Imw > 0$.

3 Разрезы

3.1 Найти однолистное и конформное отображение полосы $0 < Imz < \pi$ с разрезом $-\inf < Rez \leq 0, Imz = \frac{\pi}{2}$ на полосу $0 < Imw < \pi$.
3.2 Найти функцию $w(z)$, конформно отображающую всю плоскость z с разрезом по дуге окружности $|z| = 1, Imz > 0$, на всю плоскость w с разрезом по отрезку $[-1, 1]$ и удолетворяющую условиям $w(1) = 1, w(\infty) = \infty$.
3.3 Найти функцию $w(z)$, конформно отображающую полукруг $|z| < 1, Imz > 0$, на всю плоскость w на круг $|w| < 1$.
3.4 Найти функцию $w(z)$, конформно отображающую разрезанную по отрезку $[0, i]$ полуплоскость $Imz > 0$ на круг $|w| < 1$ и удолетворяющую условиям $w(\frac{5i}{4}) = 0, w(i) = -i$.
3.5 Найти однолистное и конформное отображение верхней полуплоскости с разрезом по отрезку от точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = i$ на верхнюю полуплоскость $Imw > 0$.
3.6 Найти функцию $w(z)$, конформно отображающую круг $|z| < 1$, разрезаннй по радиусу $[1/3, 1]$ на круг $|w| < 1$.
3.7 Найти функцию $w(z)$, конформно отображающую верхнюю полуплоскость $Imz > 0$ с вырезанной точкой $z = ih$, где h - вещественное число, на верхнюю полуплоскость $Imz > 0$.

3.8 Найти функцию, отображающую область $\frac{\pi}{4} < arg(z) < \frac{3\pi}{4}$ с разрезом по мнимой оси в виде луча $Imz > h, Rez = 0$ на область $Imz > 0$.
3.9 Найти какую-либо функцию $w(z)$, конформно отображающую область $Im(z) > 0, z \notin [k\pi, k\pi + i\pi], (k = 0, \pm 1, ...)$, на верхнюю полуплоскость.
3.10 Найти конформное отображение расширенной плоскости z с разрезом вдоль дуги AB окружности, концы которой лежат в точках $\pm a$ вещественной оси (внешность дуги AB), на внешность круга расширенной плоскости W, граница которого проходит через те же точки $\pm a$ (*построение профилей Жуковского*)

4 Пределы функции

4.1 Найти все точки, в которых дифференцируемы функции:

- Rez;
- $x^2 + iy^2$;
- tgz;
- $\frac{cosz}{cosz - sinz}$;

4.2 Вывести условия Коши-Римана для представления комплексных чисел в полярных координатах.
4.3 Функция $w = \frac{Imz}{\overline{z}}$ определена для $z \neq 0$. Можно ли доопределить ее в точке $z = 0$ так, чтобы она стала непрерывной в этой точке? 4.4 Вычислить пределы последовательностей

- $z_n = (\frac{n-2}{n+2})^{-3n} + i(1 + \frac{5}{n-2})^{4n}$;
- $z_n = \frac{sin5z}{z^2 + sh3z}$;

4.5 Найти области дифференцируемости функций:

- $w = z + i\overline{z}$;
- $Re(w) = arctg\frac{y}{x} + x^2 + y^2$;
- $w = \frac{z+5i}{iz-7}$;
- $w = e^{\overline{z}^2}$;
- $w = |x^2 - y^2| + 2i|zy|$;
- $w = sinxshy - icosxchy$;

4.6 Проверить аналитичность и восстановить, где это возможно функцию:

- $v = arctg\frac{y}{x} + e^x siny + 3y$;

- $v = e^{3x}cos3y$;
- $u = ln(x^2 + y^2) + x^2$;

4.7 Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки a и определить область сходимости:

- $z^3, a = 2$;
- $e^z, a = 3$;
- $\frac{1}{1-z^2}, a = 0$;
- $\frac{1}{z}, a = 1$;
- $\frac{z}{(1-z^2)^3}, a = 0$;
- $f(z) = \sqrt{z+3}, a = 1, f(1) = -2$;
- $f(z) = Arcsin\ z, a = 0, f(0) = 4\pi$.

4.8 Представить рядом Лорана по степеням $(z-a)$ и определить область сходимости:

- $\frac{z}{(z-a)^n}, a = a$;
- $\frac{1}{z^2(z-b)^3}, a = 0, (b = const)$;
- $z^3 cos\frac{1}{z}, a = 0$;
- $z^5 e^{\frac{1}{z}}, a = 0$;
- $e^z ln\frac{z-\alpha}{z-\beta}, a = 0, max(|\alpha|, |\beta|) < |z| < \infty$;

4.9 Разложить в ряд Фурье (рассмотреть как ряд Лорана с $\sum c_n z^n, z = e^{i\phi}$ на окружности $|z| = 1$):

- $\frac{1-acos\phi}{1-2acos\phi+a^2}, -1 < a < 1$;
- $\frac{1}{1-asin\phi}, -1 < a < 1$;
- $\cos\phi \cdot ln(1 + a^2cos^2\phi), 0 < a < 1$;
- $ln|sin\frac{\phi}{2}|$;
- $\frac{\pi-\phi}{2}$.

Hint. $ln|sin\frac{\phi}{2}| = Reln\frac{1-e^{i\phi}}{2}$ 4.10 Найти множества точек, в которых сходятся следующие ряды Лорана:

- $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-|n|} z^n$;

- $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{z^n}{3^n+1}$;
- $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{ch(\alpha n)}, \alpha > 0$;
- $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{n^2+1}$;
- $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n z^n$;

4.11 Найти главную часть ряда Лорана в окрестности особой точки:

- $\frac{z}{(z+2)^2}$;
- $\frac{e^z+1}{e^z-1}$;
- $\frac{1}{sin(\pi z)}$;
- $\sqrt{z^4+b^4}, z_0 = \infty$;
- $z^3 arctgz, z_0 = \infty$.

4.12 Доказать, что функция $f(z)$ регулярна во всей комплексной плоплоскости, за исключением конечного числа изолированных особых точек однозначного характера $z_1, z_2 ... z_n$ (точка $z = \infty$ не вклю- включается). Доказать, что

$$\sum_{k=1}^{n} res_{z=z_k} f(z) + res_{z=\infty} f(z) = 0$$

5 Интегрирование функции комплексного переменного. Вычеты

5.1 Вычислить интеграл $\int (z-a)^n dz$, n-целое число, по

- полуокружности $|z-a| = R, 0 \leq arg(z-a) \leq \pi$, начало пути в точке $z = a + R$;
- по окружности $|z-a| = R$;
- по периметру квадрата с центром в точке а и сторонам, паралелльным осям координат.

5.2 Вычислить интегралы:

- $\int_{|z|=1} z^n Lnz dz$, где n-целое число, (а) $Ln(1) = 0$, (б) $Ln(-1) = \pi i$;
- $\int_0^{\inf} e^{-x^2} cos(2bx) dx$;
- $\int_0^{\inf} \frac{sinx}{x} dx$;

- $\int_0^{\inf} x^{s-1} cosxdx, 0 < s < 1, \gamma(t) = \int_0^{\inf} x^{t-1}e^{-x}dx;$

5.3 Доказать, что если $|a| \neq R$,то $\int_{|z|=R} \frac{|dz|}{|z-a||z+a|} < \frac{2\pi R}{|R^2-|a|^2|}$. 5.4 Доказать, что "Для того чтобы изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ была существенно особой, необходимо и достаточно, чтобы главная часть лорановского разложения функции $f(z)$ в окрестности z_0 содержала бы бесконечное число членов: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} a_n(z-z_0)^n$". **5.5 Вычислить интегралы по следующим контурам:**

- $\int_{\partial D} \frac{dz}{1+z^4}(D : |z-1| < 1);$
- $\int_{\partial D} \frac{sinz}{(z+1)^3 dz}(D : x^{2/3} + y^{2/3} < 2^{2/3});$
- $\int_{\partial D} zsin\frac{z+1}{z-1}dz(D : |z| < 2);$
- $\int_{\partial D} \frac{ctgzdz}{z}(D : |z| < 1);$
- $\int_{\partial D} \frac{e^{\pi z}dz}{2z^2-i}(D : |z| < 1, Rez > 0, Imz > 0);$
- $\int_{\partial D} \frac{z^2 dz}{e^{2\pi i z^3}-1}(D : |z| < \sqrt[3]{n+\frac{1}{2}}(n = 0, 1, 2...));$

5.6 Посчитать с помощью вычетов:

- $\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{1-2a\ cos\ \phi+a^2}, |a| < 1;$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^4};$
- $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}};$
- $\int_0^{\infty} \frac{sin\ x}{x}dx;$

G. Подобие последних самостоятельных

G.1 Пусть $f(z)$—мероморфная функция с полюсами $a_1, a_2...$, имеющими главные части $g(z; a_1), g(z; a_2), ...,$ соответственно. Конечную область G будем считать ограниченной простой кусочно-гладкой замкнутой кривой C, не проходящей через полюсы функции f(z). Доказать, что в области G функцию f(z) можно представить в виде $f(z) = f_1(z) + \sum_{a_k \in G} g(z; a_k)$, где функция $f_1(z)$ регулярна в области G и равна $f_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta(z)$.
G.2 Доказать формулу: $\frac{\pi \operatorname{ctg} \pi\sqrt{z}}{\sqrt{z}} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\inf} \frac{2}{z-n^2}$, и убедиться, что ряд, стоящий в правой части этой формулы, равравномерно сходится в каждой ограниченной части плоскости.
G.3 Пусть F(z)—целая функция, удовлетворяющая неравенству $|F(x+iy)| \leq Me^{a|y|}, \pi < a < \pi$, при всех действительных x и y. Доказать, что $\frac{\pi F(z)}{sin} = \sum_{n=-\inf}^{\inf}(-1)^n \frac{F(n)}{z-n}$ и $\frac{\pi F(z)}{cos} = \sum_{n=-\inf}^{\inf}(-1)^{n-1}\frac{F(n+1/2)}{z-n-1}$.
G.4 Пусть f(z) — мероморфная функция с полюсами $a_1, a_2...$ и нулями $b_1, b_2, ...$

(каждый нуль и каждый полюс пишем столько раз, каков его порядок), причем точка $z = 0$ не является ни нулем, ни полюсом функции $f(z)$. Предположим, что $\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{\inf} \frac{1}{z-b_n} - \sum_{n=1}^{\inf} \frac{1}{z-a_n}$ причем оба ряда равномерно сходятся в каждой ограниченной части плоскости. Доказать, что $f(z) = \frac{\prod_{n=1}^{\inf}(1-\frac{z}{b_n})}{\prod_{n=1}^{\inf}(1-\frac{z}{a_n})} f(0)$ причем оба произведения также равномерно сходятся на каждой ограниченной части плоскости.