

# ТФКП, М3238-39

25 апреля 2019 г.

## 1 Комплексные числа

1.1 Решить уравнение  $\bar{z} = z^{n-1}, (n \neq 2)$

1.2 Доказать, что оба значения  $\sqrt{z^2 - 1}$  лежат на прямой, проходящей через начало координат и параллельной биссектрисе внутреннего угла треугольника с вершинами в точках  $-1, 1$  и  $z$ , проведённой из вершины  $z$ .

1.3 Доказать, что  $(\sqrt[n]{z})^m$  ( $n, m$  - целые числа, а  $(n, m)$  - наибольший общий делитель) имеет  $\frac{n}{(n, m)}$  различных значений

1.4 Доказать  $|1 - \bar{z}_1 z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)$

1.5 Доказать, что если  $|z_1 + z_2 + z_3| = 0$  и  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ , то точки  $z_1, z_2, z_3$  являются вершинами правильного треугольника

1.6 Изобразить область или прямую:

- $|z - 2|^2 - |z + 2|^2 > 3;$
- $\log_{\frac{1}{2}} \frac{|z-1|+4}{3|z-1|-2} > 1;$
- $Im(\overline{z^2 - z}) = 2 - Imz;$
- $|z| - 3Imz = 6;$

1.7 Определить семейство линий в  $z$ -плоскости ( $-\infty < C < \infty$ ), заданных уравнениями:

- $Re \frac{1}{z} = C$
- $Im \frac{1}{z} = C$
- $\frac{|z - z_1|}{|z - z_2|} = \lambda, (\lambda > 0)$

1.8 Доказать, что многочлен  $f(x) = (\cos \alpha + x \sin \alpha)^n - \cos n\alpha - x \sin n\alpha$  делится на  $x^2 + 1$ .

1.9 Найти наибольшее и наименьшее расстояния от начала координат до линии  $|z + \frac{1}{z}| = a, (a > 0)$

1.10 Первоначальное значение  $Argf(z)$  при  $z = 2$  принято равным 0. Точка  $z$  делает один оборот против часовой стрелки по окружности с центром в начале координат и возвращается в точку  $z = 2$ . Считая, что  $Argf(z)$  меняется непрерывно при движении точки  $z$ , указать значение  $Argf(2)$  после указанного поворота, если:

- $f(z) = \sqrt{z-1}$
- $f(z) = \sqrt{z^2 + 2z - 3}$
- $f(z) = \sqrt{\frac{z-1}{z+1}}$

1.11 Доказать, что  $\frac{x^{2m} - a^{2m}}{x^2 - a^2} = \prod_{k=1}^{m-1} (x^2 - 2ax \cos \frac{k\pi}{m} + a^2)$ .

1.12 Найти на сфере Римана образы окружностей с центром в начале координат

1.13 Найти на комплексной плоскости образ параллели с широтой  $\phi, (\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2)$ .

1.14 Найти суммы  $S_n = 1 + \frac{\sin x}{\sin x} + \frac{\sin 2x}{\sin^2 x} + \dots + \frac{\sin nx}{\sin^n x}, \sigma_n = 1 + \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{2x}{\sin^2 x} + \dots + \frac{\cos nx}{\sin^n x}$

1.15 Решить систему уравнений  $\begin{cases} z^3 + w^5 = 0 \\ z^2 \bar{w}^4 = 1 \end{cases}$

1.16 Найти все корни следующих уравнений:

$$\sin z + \cos z = 2; \quad (1)$$

$$\sin z - \cos z = 3; \quad (2)$$

$$\operatorname{sh} z - \operatorname{ch} z = 2i; \quad (3)$$

$$2 \operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z = i; \quad (4)$$

$$\cos z = \operatorname{ch} z; \quad (5)$$

$$\cos z = i \operatorname{sh} 2z. \quad (6)$$

## 2 Отображения

2.1 Как действует отображение  $e^z$  на прямую  $x = y$ , прямую ( $y = \operatorname{const}, x \in R$ ), полосу  $y \in (\phi, \psi), x \in R$ ?

2.2 Какая функция отображает полуплоскость  $\operatorname{Im} z > 0$  в окружность единичного радиуса с центром в начале координат, причём  $z_0 \rightarrow (0; 0)$ ?

- 2.3 Найти образы координатных осей  $OX$  и  $OY$  при преобразовании  $w = \frac{z+1}{z-1}$ .
- 2.4 Найти линейное преобразование, отображающий треугольник с вершинами  $0, 1, i$  на подобный ему с вершинами  $0, 2, 1+i$ .
- 2.5 Найти линейную функцию, отображающую круг  $|z| < 1$  на круг  $|w - w_0| < R$  так, чтобы центры кругов соответствовали друг другу и горизонтальный диаметр переходил в диаметр, образующий угол  $\alpha$  с направлением действительной оси.
- 2.6 Построить область на плоскости  $w$ , в которую отображается угол  $0 < \phi < \pi/4$  с помощью функции  $w = \frac{z}{z-1}$ .
- 2.7 Во что преобразуется окружность  $|z| = 1$  при отображении  $w = \frac{1-z}{z}$ ?
- 2.8 В какую область преобразуется круг  $|z - 1/2 + i/2| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$  при отображении  $w = \frac{iz-2}{z+i}$ ?
- 2.9 Найти в какую область преобразуется квадрат  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$  функцией  $w = z^2 + z + 1$ .
- 2.10 Найти образ плоскости с разрезом вдоль положительной части вещественной оси при отображении однозначной ветвью логарифма, когда  $z_0 = i$  переходит в  $w_0 = \frac{5}{2}\pi i$ .
- 2.11 Отобразить треугольник, заключённый между прямыми  $y = 2, x = 0, y = x$  с помощью функции  $w = 1/2z^2 - z$  на плоскость  $w$ .
- 2.12 Найти однолистное и конформное отображение вертикальной полосы  $1 < \operatorname{Re} z < 2$  на верхнюю полуплоскость  $\operatorname{Im} w > 0$ .

### 3 Разрезы

- 3.1 Найти однолистное и конформное отображение полосы  $0 < \operatorname{Im} z < \pi$  с разрезом  $-\infty < \operatorname{Re} z \leq 0, \operatorname{Im} z = \frac{\pi}{2}$  на полосу  $0 < \operatorname{Im} w < \pi$ .
- 3.2 Найти функцию  $w(z)$ , конформно отображающую всю плоскость  $z$  с разрезом по дуге окружности  $|z| = 1, \operatorname{Im} z > 0$ , на всю плоскость  $w$  с разрезом по отрезку  $[-1, 1]$  и удовлетворяющую условиям  $w(1) = 1, w(\infty) = \infty$ .
- 3.3 Найти функцию  $w(z)$ , конформно отображающую полукруг  $|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0$ , на всю плоскость  $w$  на круг  $|w| < 1$ .
- 3.4 Найти функцию  $w(z)$ , конформно отображающую разрезанную по отрезку  $[0, i]$  полуплоскость  $\operatorname{Im} z > 0$  на круг  $|w| < 1$  и удовлетворяющую условиям  $w(\frac{5i}{4}) = 0, w(i) = -i$ .
- 3.5 Найти однолистное и конформное отображение верхней полуплоскости с разрезом по отрезку от точки  $z_1 = 0$  до точки  $z_2 = i$  на верхнюю полуплоскость  $\operatorname{Im} w > 0$ .
- 3.6 Найти функцию  $w(z)$ , конформно отображающую круг  $|z| < 1$ , разрезанный по радиусу  $[1/3, 1]$  на круг  $|w| < 1$ .
- 3.7 Найти функцию  $w(z)$ , конформно отображающую верхнюю полуплоскость  $\operatorname{Im} z > 0$  с вырезанной точкой  $z = ih$ , где  $h$  - вещественное число, на верхнюю полуплоскость  $\operatorname{Im} w > 0$ .

- 3.8 Найти функцию, отображающую область  $\frac{\pi}{4} < \arg(z) < \frac{3\pi}{4}$  с разрезом по мнимой оси в виде луча  $Imz > h, Rez = 0$  на область  $Imz > 0$ .
- 3.9 Найти какую-либо функцию  $w(z)$ , конформно отображающую область  $Im(z) > 0, z \notin [k\pi, k\pi + i\pi], (k = 0, \pm 1, \dots)$ , на верхнюю полуплоскость.
- 3.10 Найти конформное отображение расширенной плоскости  $z$  с разрезом вдоль дуги АВ окружности, концы которой лежат в точках  $\pm a$  вещественной оси (внешность дуги АВ), на внешность круга расширенной плоскости  $W$ , граница которого проходит через те же точки  $\pm a$  (*построение профилей Жуковского*)

## 4 Пределы функции

4.1 Найти все точки, в которых дифференцируемы функции:

- $Rez$ ;
- $x^2 + iy^2$ ;
- $tgz$ ;
- $\frac{\cos z}{\cos z - \sin z}$ ;

4.2 Вывести условия Коши-Римана для представления комплексных чисел в полярных координатах.

4.3 Функция  $w = \frac{Imz}{z}$  определена для  $z \neq 0$ . Можно ли доопределить ее в точке  $z = 0$  так, чтобы она стала непрерывной в этой точке? 4.4 Вычислить пределы последовательностей

- $z_n = \left(\frac{n-2}{n+2}\right)^{-3n} + i\left(1 + \frac{5}{n-2}\right)^{4n}$ ;
- $z_n = \frac{\sin 5z}{z^2 + \sin 3z}$ ;

4.5 Найти области дифференцируемости функций:

- $w = z + i\bar{z}$ ;
- $Re(w) = \arctg \frac{y}{x} + x^2 + y^2$ ;
- $w = \frac{z+5i}{iz-7}$ ;
- $w = e^{\bar{z}^2}$ ;
- $w = |x^2 - y^2| + 2i|zy|$ ;
- $w = \sin x \sin y - i \cos x \cos y$ ;

4.6 Проверить аналитичность и восстановить, где это возможно функцию:

- $v = \arctg \frac{y}{x} + e^x \sin y + 3y$ ;

- $v = e^{3x} \cos 3y$ ;
- $u = \ln(x^2 + y^2) + x^2$ ;

4.7 Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки  $a$  и определить область сходимости:

- $z^3, a = 2$ ;
- $e^z, a = 3$ ;
- $\frac{1}{1-z^2}, a = 0$ ;
- $\frac{1}{z}, a = 1$ ;
- $\frac{z}{(1-z^2)^3}, a = 0$ ;
- $\int_0^z \frac{\sin z}{z}, a = 0$ ;
- $\int_0^z e^{z^2}, a = 0$ ;
- $f(z) = \sqrt{z+3}, a = 1, f(1) = -2$ ;
- $f(z) = \operatorname{Arcsin} z, a = 0, f(0) = 4\pi$ .

4.8 Представить рядом Лорана по степеням  $(za)$  и определить область сходимости:

- $\frac{z}{(z-a)^n}, a = a$ ;
- $\frac{1}{z^2(z-b)^3}, a = 0, (b = \text{const})$ ;
- $z^3 \cos \frac{1}{z}, a = 0$ ;
- $z^5 e^{\frac{1}{z}}, a = 0$ .

4.9 Разложить в ряд Фурье (рассмотреть как ряд Лорана с  $\sum c_n z^n, z = e^{i\phi}$  на окружности  $|z| = 1$ ):

- $\frac{1-a\cos\phi}{1-2a\cos\phi+a^2}, -1 < a < 1$ ;
- $\frac{1}{1-a\sin\phi}, -1 < a < 1$ ;
- $\cos\phi(1+a^2\cos^2\phi), 0 < a < 1$ ;
- $\ln|\sin \frac{\phi}{2}|$ ;
- $\frac{\pi-\phi}{2}$ .

Hint.  $\ln|\sin \frac{\phi}{2}| = \operatorname{Re} \ln \frac{1-e^{i\phi}}{2}$

## 5 Интегрирование функции комплексного переменного. Вычеты

5.1 Вычислить интеграл  $\int (z - a)^n dz$ ,  $n$ -целое число, по

- полуокружности  $|z - a| = R, 0 \leq \arg(z - a) \leq \pi$ , начало пути в точке  $z = a + R$ ;
- по окружности  $|z - a| = R$ ;
- по периметру квадрата с центром в точке  $a$  и сторонам, параллельным осям координат.

5.2 Вычислить интегралы:

- $\int_{|z|=1} z^n \operatorname{Ln} z dz$ , где  $n$ -целое число, (а)  $\operatorname{Ln}(1) = 0$ , (б)  $\operatorname{Ln}(-1) = \pi i$ ;
- $\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(2bx) dx$ ;
- $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ ;
- $\int_0^{\infty} x^{s-1} \cos x dx, 0 < s < 1, \gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$ ;

5.3 Доказать, что если  $|a| \neq R$ , то

$$\int_{|z|=R} \frac{|dz|}{|z - a||z + a|} < \frac{2}{|R^2 - |a|^2|}$$

.