ТФКП, М3238-39

18 февраля 2019 г.

1 Комлексные числа

1.1 Решить уравнение $\bar{z} = z^{n-1}, (n \neq 2)$

1.2 Доказать, что оба значения $\sqrt{z^2 - 1}$ лежат на прямой, проходящей через начало координат и параллельной биссектрисе внутреннего угла треугольника с вершинами в точках $-1, 1$ и z, проведённой из вершины z.

1.3 Доказать, что $(\sqrt[n]{z})^m$ $(n, m$ - целые числа, а (n, m) - наибольший общий делитель) имеет $\frac{n}{(n,m)}$ различных значений

1.4 Доказать $|1 - \bar{z_1} z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)$

1.5 Доказать, что если $|z_1 + z_2 + z_3| = 0$ и $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, то точки z_1, z_2, z_3 являются вершинами правильного треугольника

1.6 Изобразить область или прямую:

- $|z - 2|^2 - |z + 2|^2 > 3$;
- $log_{\frac{1}{2}} \frac{|z-1|+4}{3|z-1|-2} > 1$;
- $Im(\overline{z^2 - z}) = 2 - Imz$;
- $|z| - 3Imz = 6$;

1.7 Определить семейство линий в z-плоскости$(-\infty < C < \infty)$, заданных уравнениями:

- $Re\dfrac{1}{z} = C$
- $Im\dfrac{1}{z} = C$
- $\dfrac{|z - z_1|}{|z - z_2|} = \lambda, (\lambda > 0)$

1.8 Доказать, что многочлен $f(x) = (\cos\alpha + x\sin\alpha)^n - \cos n\alpha - x\sin n\alpha$ делится на $x^2 + 1$.

1.9 Найти наибольшее и наименьшее расстояния от начала координат до линии $|z + \dfrac{1}{z}| = a, (a > 0)$

1.10 Первоначальное значение $Argf(z)$ при $z = 2$ принято равным 0. Точка z делает один оборот против часовой стрелки по окружности с центром в начале координат и возвращается в точку $z = 2$. Считая, что $Argf(z)$ меняется непрерывно при движении точки z, указать значение $Argf(2)$ после указанного поворота, если:

- $f(z) = \sqrt{z-1}$
- $f(z) = \sqrt{z^2 + 2z - 3}$
- $f(z) = \sqrt{\dfrac{z-1}{z+1}}$

2 Отображения

2.1 Как действует отображение e^z на прямую $x = y$, прямую $(y = const, x \in R)$, полосу $y \in (\phi, \psi), x \in R$?
2.2 Какая функция отображает полуплоскость $Imz > 0$ в окружность единичного радиуса с центром в начале координат, причём $z_0 \to (0;0)$?
2.3 Найти образы координатных осей ОХ и ОУ при преобразовании $w = \dfrac{z+1}{z-1}$.