

ТФКП, М3238-39

26 февраля 2019 г.

1 Комплексные числа

1.1 Решить уравнение $\bar{z} = z^{n-1}$, ($n \neq 2$)

1.2 Доказать, что оба значения $\sqrt{z^2 - 1}$ лежат на прямой, проходящей через начало координат и параллельной биссектрисе внутреннего угла треугольника с вершинами в точках $-1, 1$ и z , проведённой из вершины z .

1.3 Доказать, что $(\sqrt[n]{z})^m$ (n, m - целые числа, а (n, m) - наибольший общий делитель) имеет $\frac{n}{(n, m)}$ различных значений

1.4 Доказать $|1 - \bar{z}_1 z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)$

1.5 Доказать, что если $|z_1 + z_2 + z_3| = 0$ и $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, то точки z_1, z_2, z_3 являются вершинами правильного треугольника

1.6 Изобразить область или прямую:

- $|z - 2|^2 - |z + 2|^2 > 3$;
- $\log_{\frac{1}{2}} \frac{|z-1|+4}{3|z-1|-2} > 1$;
- $Im(\overline{z^2 - z}) = 2 - Imz$;
- $|z| - 3Imz = 6$;

1.7 Определить семейство линий в z -плоскости ($-\infty < C < \infty$), заданных уравнениями:

- $Re \frac{1}{z} = C$
- $Im \frac{1}{z} = C$
- $\frac{|z - z_1|}{|z - z_2|} = \lambda, (\lambda > 0)$

1.8 Доказать, что многочлен $f(x) = (\cos \alpha + x \sin \alpha)^n - \cos n\alpha - x \sin n\alpha$ делится на $x^2 + 1$.

1.9 Найти наибольшее и наименьшее расстояния от начала координат до линии $|z + \frac{1}{z}| = a, (a > 0)$

1.10 Первоначальное значение $Argf(z)$ при $z = 2$ принято равным 0. Точка z делает один оборот против часовой стрелки по окружности с центром в начале координат и возвращается в точку $z = 2$. Считая, что $Argf(z)$ меняется непрерывно при движении точки z , указать значение $Argf(2)$ после указанного поворота, если:

- $f(z) = \sqrt{z-1}$
- $f(z) = \sqrt{z^2 + 2z - 3}$
- $f(z) = \sqrt{\frac{z-1}{z+1}}$

1.11 Доказать, что $\frac{x^{2m} - a^{2m}}{x^2 - a^2} = \prod_{k=1}^{m-1} (x^2 - 2ax \cos \frac{k\pi}{m} + a^2)$.

1.12 Найти на сфере Римана образы окружностей с центром в начале координат

1.13 Найти на комплексной плоскости образ параллели с широтой $\phi, (\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2)$.

1.14 Найти суммы $S_n = 1 + \frac{\sin x}{\sin x} + \frac{\sin 2x}{\sin^2 x} + \dots + \frac{\sin nx}{\sin^n x}, \sigma_n = 1 + \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{2x}{\sin^2 x} + \dots + \frac{\cos nx}{\sin^n x}$

1.15 Решить систему уравнений
$$\begin{cases} z^3 + w^5 = 0 \\ z^2 \bar{w}^4 = 1 \end{cases}$$

2 Отображения

2.1 Как действует отображение e^z на прямую $x = y$, прямую ($y = \text{const}, x \in R$), полосу $y \in (\phi, \psi), x \in R$?

2.2 Какая функция отображает полуплоскость $Imz > 0$ в окружность единичного радиуса с центром в начале координат, причём $z_0 \rightarrow (0; 0)$?

2.3 Найти образы координатных осей ОХ и ОУ при преобразовании $w = \frac{z+1}{z-1}$.