

# ТФКП, М3238-39

17 марта 2019 г.

## 1 Комплексные числа

1.1 Решить уравнение  $\bar{z} = z^{n-1}, (n \neq 2)$

1.2 Доказать, что оба значения  $\sqrt{z^2 - 1}$  лежат на прямой, проходящей через начало координат и параллельной биссектрисе внутреннего угла треугольника с вершинами в точках  $-1, 1$  и  $z$ , проведённой из вершины  $z$ .

1.3 Доказать, что  $(\sqrt[n]{z})^m$  ( $n, m$  - целые числа, а  $(n, m)$  - наибольший общий делитель) имеет  $\frac{n}{(n, m)}$  различных значений

1.4 Доказать  $|1 - \bar{z}_1 z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)$

1.5 Доказать, что если  $|z_1 + z_2 + z_3| = 0$  и  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ , то точки  $z_1, z_2, z_3$  являются вершинами правильного треугольника

1.6 Изобразить область или прямую:

- $|z - 2|^2 - |z + 2|^2 > 3$ ;
- $\log_{\frac{1}{2}} \frac{|z-1|+4}{3|z-1|-2} > 1$ ;
- $Im(\overline{z^2 - z}) = 2 - Imz$ ;
- $|z| - 3Imz = 6$ ;

1.7 Определить семейство линий в  $z$ -плоскости ( $-\infty < C < \infty$ ), заданных уравнениями:

- $Re \frac{1}{z} = C$
- $Im \frac{1}{z} = C$
- $\frac{|z - z_1|}{|z - z_2|} = \lambda, (\lambda > 0)$

1.8 Доказать, что многочлен  $f(x) = (\cos \alpha + x \sin \alpha)^n - \cos n\alpha - x \sin n\alpha$  делится на  $x^2 + 1$ .

1.9 Найти наибольшее и наименьшее расстояния от начала координат до линии  $|z + \frac{1}{z}| = a, (a > 0)$

1.10 Первоначальное значение  $Argf(z)$  при  $z = 2$  принято равным 0. Точка  $z$  делает один оборот против часовой стрелки по окружности с центром в начале координат и возвращается в точку  $z = 2$ . Считая, что  $Argf(z)$  меняется непрерывно при движении точки  $z$ , указать значение  $Argf(2)$  после указанного поворота, если:

- $f(z) = \sqrt{z-1}$
- $f(z) = \sqrt{z^2 + 2z - 3}$
- $f(z) = \sqrt{\frac{z-1}{z+1}}$

1.11 Доказать, что  $\frac{x^{2m} - a^{2m}}{x^2 - a^2} = \prod_{k=1}^{m-1} (x^2 - 2ax \cos \frac{k\pi}{m} + a^2)$ .

1.12 Найти на сфере Римана образы окружностей с центром в начале координат

1.13 Найти на комплексной плоскости образ параллели с широтой  $\phi, (\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2)$ .

1.14 Найти суммы  $S_n = 1 + \frac{\sin x}{\sin x} + \frac{\sin 2x}{\sin^2 x} + \dots + \frac{\sin nx}{\sin^n x}, \sigma_n = 1 + \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{2x}{\sin^2 x} + \dots + \frac{\cos nx}{\sin^n x}$

1.15 Решить систему уравнений  $\begin{cases} z^3 + w^5 = 0 \\ z^2 \bar{w}^4 = 1 \end{cases}$

1.16 Найти все корни следующих уравнений:

$$\sin z + \cos z = 2; \quad (1)$$

$$\sin z - \cos z = 3; \quad (2)$$

$$\operatorname{sh} z - \operatorname{ch} z = 2i; \quad (3)$$

$$2 \operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z = i; \quad (4)$$

$$\cos z = \operatorname{ch} z; \quad (5)$$

$$\cos z = i \operatorname{sh} 2z. \quad (6)$$

## 2 Отображения

2.1 Как действует отображение  $e^z$  на прямую  $x = y$ , прямую ( $y = \operatorname{const}, x \in R$ ), полосу  $y \in (\phi, \psi), x \in R$ ?

2.2 Какая функция отображает полуплоскость  $\operatorname{Im} z > 0$  в окружность единичного радиуса с центром в начале координат, причём  $z_0 \rightarrow (0; 0)$ ?

- 2.3 Найти образы координатных осей  $OX$  и  $OY$  при преобразовании  $w = \frac{z+1}{z-1}$ .
- 2.4 Найти линейное преобразование, отображающий треугольник с вершинами  $0, 1, i$  на подобный ему с вершинами  $0, 2, 1+i$ .
- 2.5 Найти линейную функцию, отображающую круг  $|z| < 1$  на круг  $|w - w_0| < R$  так, чтобы центры кругов соответствовали друг другу и горизонтальный диаметр переходил в диаметр, образующий угол  $\alpha$  с направлением действительной оси.
- 2.6 Построить область на плоскости  $w$ , в которую отображается угол  $0 < \phi < \pi/4$  с помощью функции  $w = \frac{z}{z-1}$ .
- 2.7 Во что преобразуется окружность  $|z| = 1$  при отображении  $w = \frac{1-z}{z}$ ?
- 2.8 В какую область преобразуется круг  $|z - 1/2 + i/2| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$  при отображении  $w = \frac{iz-2}{z+i}$ ?
- 2.9 Найти в какую область преобразуется квадрат  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$  функцией  $w = z^2 + z + 1$ .
- 2.10 Найти образ плоскости с разрезом вдоль положительной части вещественной оси при отображении однозначной ветвью логарифма, когда  $z_0 = i$  переходит в  $w_0 = \frac{5}{2}\pi i$ .
- 2.11 Отобразить треугольник, заключённый между прямыми  $y = 2, x = 0, y = x$  с помощью функции  $w = 1/2z^2 - z$  на плоскость  $w$ .
- 2.12 Найти однолистное и конформное отображение вертикальной полосы  $1 < Rez < 2$  на верхнюю полуплоскость  $Imw > 0$ .
- 2.13 Найти однолистное и конформное отображение полосы  $0 < Imz < \pi$  с разрезом  $-\inf < Rez \leq 0, Imz = \frac{\pi}{2}$  на полосу  $0 < Imw < \pi$  (устранить разрез).
- 2.14 Найти функцию  $w(z)$ , конформно отображающую всю плоскость  $z$  с разрезом по дуге окружности  $|z| = 1, Imz > 0$ , на всю плоскость  $w$  с разрезом по отрезку  $[-1, 1]$  и удовлетворяющую условиям  $w(1) = 1, w(\infty) = \infty$ .
- 2.15 Найти функцию  $w(z)$ , конформно отображающую полукруг  $|z| < 1, Imz > 0$ , на всю плоскость  $w$  на круг  $|w| < 1$ .
- 2.16 Найти функцию  $w(z)$ , конформно отображающую разрезанную по отрезку  $[0, i]$  полуплоскость  $Imz > 0$  на круг  $|w| < 1$  и удовлетворяющую условиям  $w(\frac{5i}{4}) = 0, w(i) = -i$ .
- 2.17 Найти функцию  $w(z)$ , конформно отображающую круг  $|z| < 1$ , разрезанный по радиусу  $[-1, 0]$  на круг  $|w| < 1$  и удовлетворяющую условиям  $w(1) = -1, w(-1+i) = \frac{7-4i\sqrt{2}}{9}, w(-1-i) = \frac{7+4i\sqrt{2}}{9}$ .

### 3 Жесть

Ж.1 Найти конформное отображение расширенной плоскости  $z$  с разрезом вдоль дуги  $AB$  окружности, концы которой лежат в точках  $\pm a$  вещественной оси (внешность дуги  $AB$ ), на внешность круга расширенной плоскости  $W$ , граница которого проходит через те же точки  $\pm a$  (построение профилей

*Жуковского)*

Ж.2 Найти однолистное и конформное отображение верхней полуплоскости с разрезом по отрезку от точки  $z_1 = 0$  до точки  $z_2 = i$  на верхнюю полуплоскость  $\text{Im} w > 0$  (устранить разрез).