ТФКП, М3238-39

15 февраля 2019 г.

1 Комлексные числа

1.1 Решить уравнение $\overline{z} = z^{n-1}$ $(n \neq 2)$.

1.2 Доказать, что оба значения $\sqrt{z^2-1}$ лежат на прямой, проходящей через начало координат и параллельной биссектрисе внутреннего угла треугольника с вершинами в точках -1, 1 и z, проведённой из вершины z.

1.3 Доказать, что $(\sqrt[n]{z})^m$ (n, m — целые числа) имеет $\frac{n}{(n,m)}$ различных значений ((n,m) — наибольший общий делитель).

1.4 Доказать, что $|1-\overline{z_1}z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)$.

1.5 Доказать, что если $|z_1+z_2+z_3| = 0$ и $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, то точки z_1, z_2, z_3 являются вершинами правильного треугольника.

1.6 Изобразить область или прямую:

- $|z-2|^2 - |z+2|^2 > 3$;
- $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{|z-1|+4}{3\,|z-1|-2} > 1$;
- $\operatorname{Im} \overline{z^2 - z} = 2 - \operatorname{Im} z$;
- $|z| - 3\operatorname{Im} z = 6$.