ТФКП, М3238-39

1 марта 2019 г.

1 Комлексные числа

1.1 Решить уравнение $\bar{z} = z^{n-1}, (n \neq 2)$

1.2 Доказать, что оба значения $\sqrt{z^2 - 1}$ лежат на прямой, проходящей через начало координат и параллельной биссектрисе внутреннего угла треугольника с вершинами в точках $-1, 1$ и z, проведённой из вершины z.

1.3 Доказать, что $(\sqrt[n]{z})^m$ $(n, m$ - целые числа, а (n, m) - наибольший общий делитель) имеет $\frac{n}{(n,m)}$ различных значений

1.4 Доказать $|1 - \bar{z_1} z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)$

1.5 Доказать, что если $|z_1 + z_2 + z_3| = 0$ и $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, то точки z_1, z_2, z_3 являются вершинами правильного треугольника

1.6 Изобразить область или прямую:

- $|z - 2|^2 - |z + 2|^2 > 3$;
- $log_{\frac{1}{2}} \frac{|z-1|+4}{3|z-1|-2} > 1$;
- $Im(\overline{z^2 - z}) = 2 - Imz$;
- $|z| - 3Imz = 6$;

1.7 Определить семейство линий в z-плоскости$(-\infty < C < \infty)$, заданных уравнениями:

- $Re\dfrac{1}{z} = C$
- $Im\dfrac{1}{z} = C$
- $\dfrac{|z - z_1|}{|z - z_2|} = \lambda, (\lambda > 0)$

1.8 Доказать, что многочлен $f(x) = (\cos\alpha + x\sin\alpha)^n - \cos n\alpha - x\sin n\alpha$ делится на x^2+1.

1.9 Найти наибольшее и наименьшее расстояния от начала координат до линии $|z + \dfrac{1}{z}| = a, (a > 0)$

1.10 Первоначальное значение $Argf(z)$ при $z = 2$ принято равным 0. Точка z делает один оборот против часовой стрелки по окружности с центром в начале координат и возвращается в точку $z = 2$. Считая, что $Argf(z)$ меняется непрерывно при движении точки z, указать значение $Argf(2)$ после указанного поворота, если:

- $f(z) = \sqrt{z-1}$
- $f(z) = \sqrt{z^2+2z-3}$
- $f(z) = \sqrt{\dfrac{z-1}{z+1}}$

1.11 Доказать, что $\frac{x^{2m}-a^{2m}}{x^2-a^2} = \prod_{k=1}^{m-1}(x^2 - 2ax\cos\frac{k\pi}{m} + a^2)$.

1.12 Найти на сфере Римана образы окружностей с центром в начале координат

1.13 Найти на комплексной плоскости образ параллели с широтой $\phi, (\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2)$.

1.14 Найти суммы $S_n = 1 + \frac{\sin x}{\sin x} + \frac{\sin 2x}{\sin^2 x} + ... + \frac{\sin nx}{\sin^n x}, \sigma_n = 1 + \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{2x}{\sin^2 x} + ... + \frac{\cos nx}{\sin^n x}$

1.15 Решить систему уравнений $\begin{cases} z^3 + w^5 = 0 \\ z^2\bar{w}^4 = 1 \end{cases}$

1.16 Найти все корни следующих уравнений:

$$\sin z + \cos z = 2; \quad (1)$$
$$\sin z - \cos z = 3; \quad (2)$$
$$\operatorname{sh} z - \operatorname{ch} z = 2i; \quad (3)$$
$$2\operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z = i; \quad (4)$$
$$\cos z = \operatorname{ch} z; \quad (5)$$
$$\cos z = i\operatorname{sh} 2z. \quad (6)$$

2 Отображения

2.1 Как действует отображение e^z на прямую $x = y$, прямую $(y = const, x \in R)$, полосу $y \in (\phi, \psi), x \in R$?

2.2 Какая функция отображает полуплоскость $Imz > 0$ в окружность единичного радиуса с центром в начале координат, причём $z_0 \to (0;0)$?

2.3 Найти образы координатных осей ОХ и ОУ при преобразовании $w = \dfrac{z+1}{z-1}$.
2.4 Найти линейное преобразование, оторбражающий треугольник с вершинами $0, 1, i$ на подобный ему с вершинами $0, 2, 1+i$.
2.5 Найти линейную функцию, отображающую круг $|z| < 1$ на круг $|w - w_0| < R$ так, чтобы центры кругов соответсвовали друг другу и горизонтальный диаметр переходил в диаметр, образующий угол α с направлением дейтвительной оси.
2.6 Построить область на плоскости w, в которую отображается угол $0 < \phi < \pi/4$ с помощью функции $w = \frac{z}{z-1}$.
2.7 Во что преобразуется окружность $|z| = 1$ при отображении $w = \frac{1-z}{z}$?