

Каждое задание можно выполнять в группах. Каждый должен знать хоть какой-то разумный кусок математических выкладок.

Рассмотрим в некоторой области векторное поле $A = (\frac{dx}{dt} = A_x, \frac{dy}{dt} = A_y)$, $A = A_x + iA_y$. Нас интересует семейство фазовых траекторий $y(x)$, которые необходимо визуализировать. Поток векторного поля через границу γ области: $N = \int_{\gamma} (A, n) ds = \int_{\gamma} -A_y dx + A_x dy$ (второе равенство не определение - надо показать), введём дивергенцию для перехода к интегралу по площади: $\text{div } A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y}$ (применить формулу Грина). Аналогично для циркуляции $\Gamma = \int_{\gamma} (A, t) ds$ и ротора $\text{rot } A = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$. Интеграл по сопряжению векторного поля есть мнимый вектор, состоящий из потока и циркуляции: $\Gamma + iN = \int_{\gamma} \overline{A(z)} dz$.

Обтекание тел

1 ÷ 5 человек

Рассмотреть поле скоростей жидкости $V = (v_x, v_y)$ (как мы знаем, жидкости несжимаемы $\text{div } V = 0$) с соответствующим комплексным потенциалом $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, где $V = \overline{f'(z)}$. Рассмотреть односвязную область в потоке жидкости с заданной скоростью на бесконечности V_{inf} , причём $f'(\text{inf}) = \overline{V_{\text{inf}}}$. Разложить в ряд на бесконечности (c_{-1} будет интересовать особенно). Скорость на бесконечности считать заданной, условие на границе обтекаемой области не изменная комплексная составляющая скорости, потому что на границе скорость направлена по касательной.

Теорема: Потенциал $w = f(z)$ обтекания тела конформно отображает область D на внешность отрезка, параллельного действительной оси.

Отсюда мы хотим рассмотреть конформное преобразование области на внешность отрезка $[0, 1]$. Прodelать разложения комплексного потенциала для областей:

- круговой срез цилиндрического тела;
- тела с эллиптическим срезом;
- профиля Жуковского, для которого функция $w = \frac{1}{2}(z + \sqrt{z^2 - a^2})$ конформно отображает профиль на внешность круга.