Алгоритмы и структуры данных

Лекция 2. Алгоритмы сортировки.

(c) Глухих Михаил Игоревич, glukhikh@mail.ru

Основные характеристики алгоритмов сортировки

- Трудоёмкость T=O(…) – в среднем и худшем случае
- Ресурсоёмкость R=O(…)
  - Для R=O(1) говорят «сортировка на месте»

Основные характеристики алгоритмов сортировки

- Трудоёмкость T=O(…) – в среднем и худшем случае
- Ресурсоёмкость R=O(…)
  - Для R=O(1) говорят «сортировка на месте»
- Устойчивость – изменяется ли порядок равных элементов в списке
  - Бывает важна в некоторых случаях, например, при индексации баз данных
  - Точно неважна, если элемент – это только ключ сравнения
- Операции сравнения – используются или нет

Алгоритмы сортировки

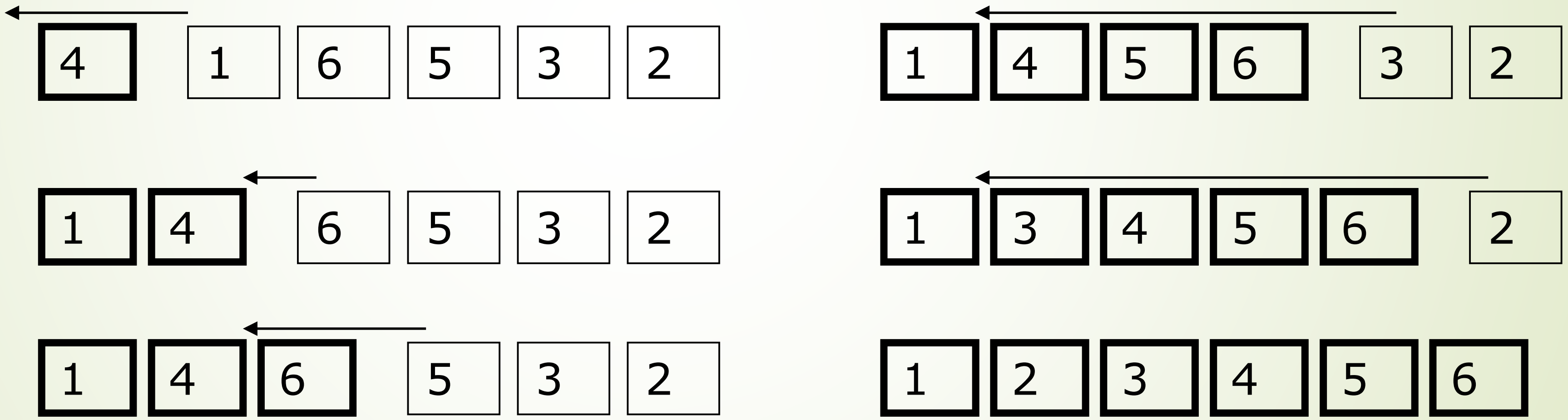
- Простые
  - $O(N^2)$, где N – число элементов
- Сложные
  - $O(N\log_2 N)$, где N – число элементов; для больших значений N существенно быстрее простых методов

Алгоритмы сортировки

- Сложные
  - слияниями
  - Хоара, или быстрая сортировка
  - двоичной кучей, или пирамидальная сортировка
- Простые
  - включениями (вставками)
  - выбором
  - обменом (пузырьком)

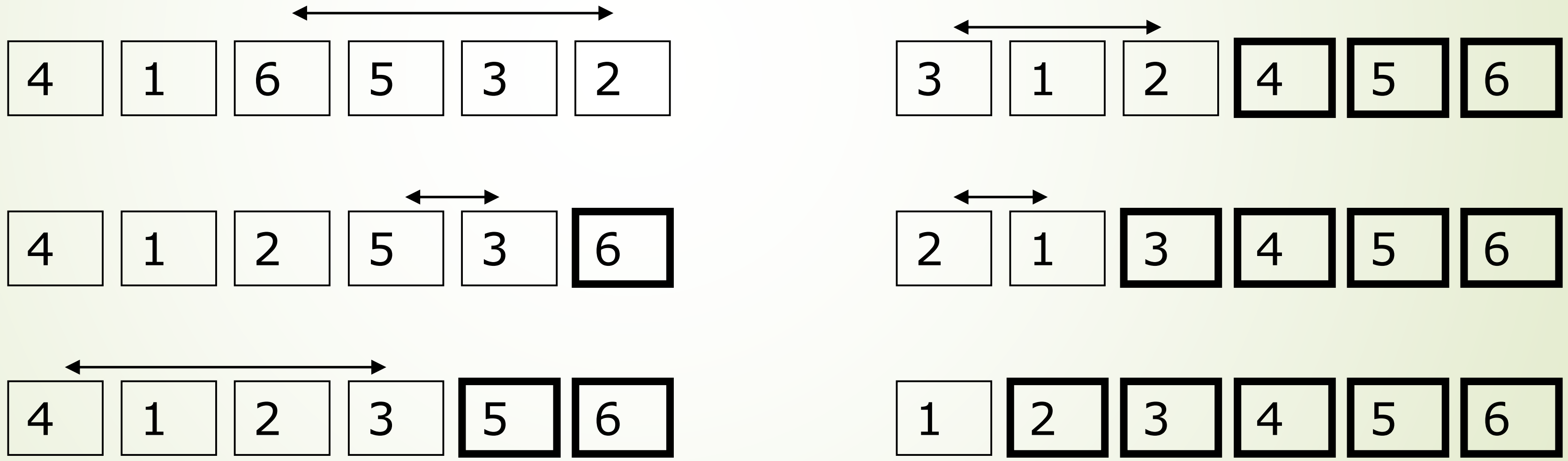
Простые алгоритмы сортировки

- Сортировка **включениями** – на каждой итерации вставляем очередной элемент в отсортированную часть массива



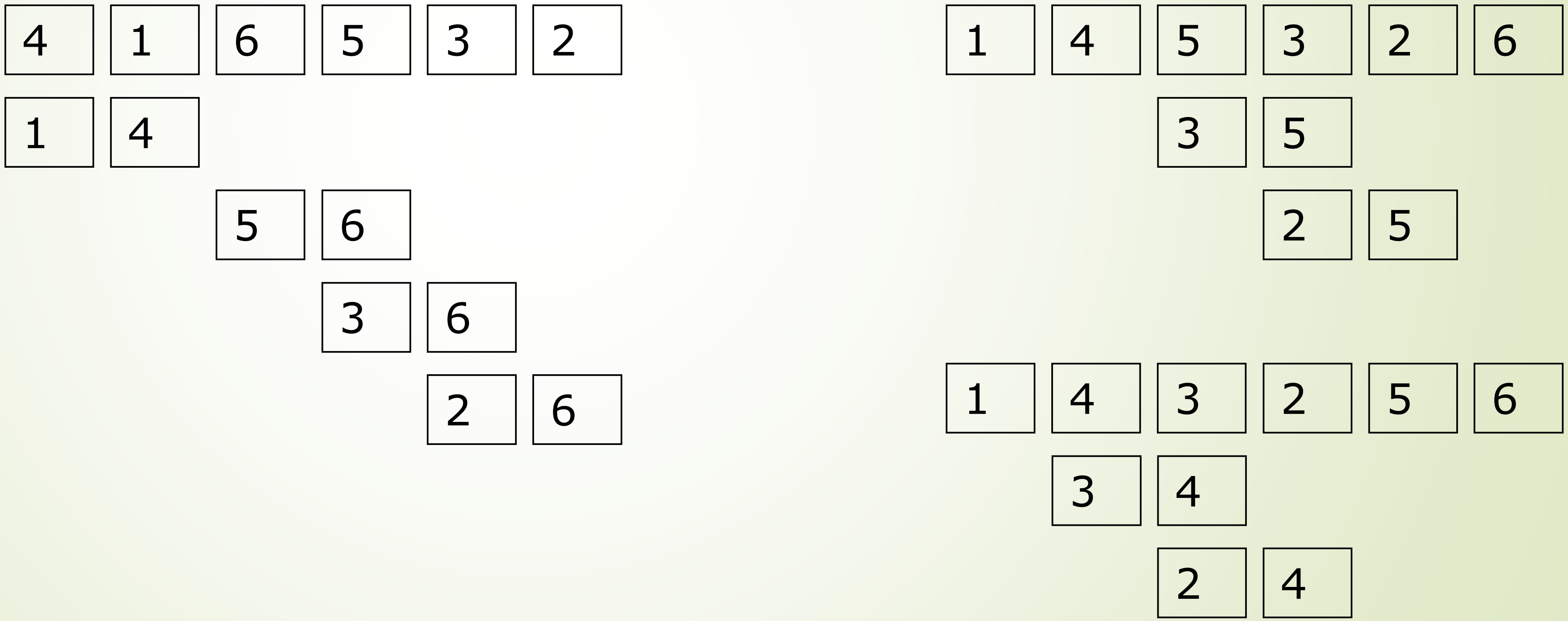
Простые алгоритмы сортировки

- Сортировка **выбором** – на каждой итерации находим максимальный элемент и меняем с последним



Простые алгоритмы сортировки

- Сортировка **обменом** – последовательно меняем местами элементы в паре, если их порядок неверен



Устойчивые сортировки

- Пузырьком $T=O(N^2)$, $R=O(1)$
- Вставками $T=O(N^2)$, $R=O(1)$
- Слиянием $T=O(N \log N)$, $R=O(N)$

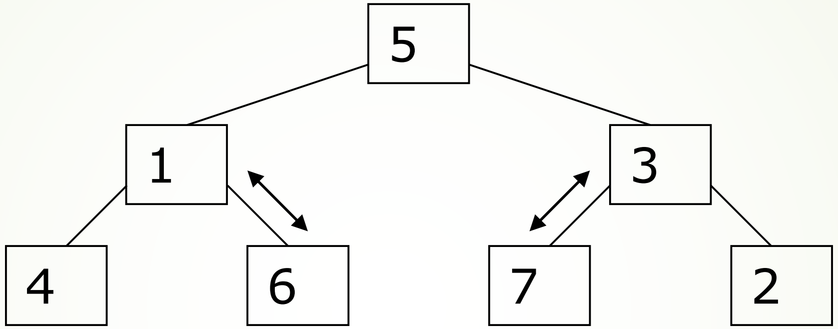
Неустойчивые сортировки

- Выбором $T=O(N^2)$, $R=O(1)$
  - Этот алгоритм уже на первом шаге меняет местами минимальный элемент в списке с первым, что и приводит к неустойчивости
  - Пример: (2A, 2B, 1) → (1, 2B, 2A) (считаем 2A == 2B)

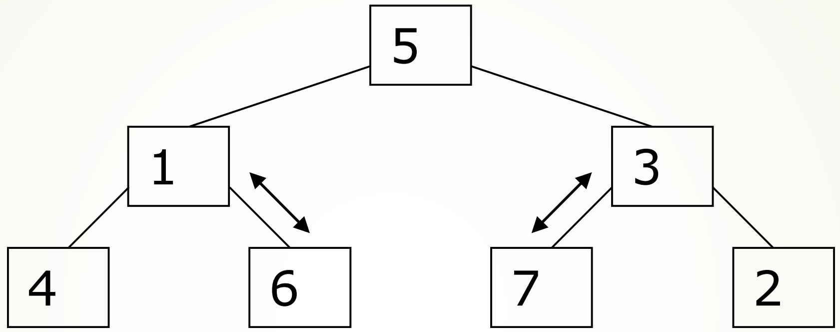
Сортировка двоичной кучей (вид бинарного дерева)

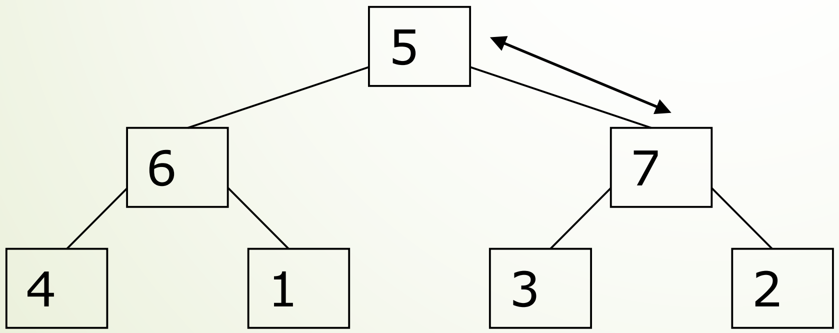
1. Подготовка (просеивание) – вершина дерева должна быть больше любого элемента в поддеревьях
2. Выбор – выкидываем вершину
3. Повтор – переходим к 1 с меньшим количеством вершин

Сортировка двоичной кучей – подготовка

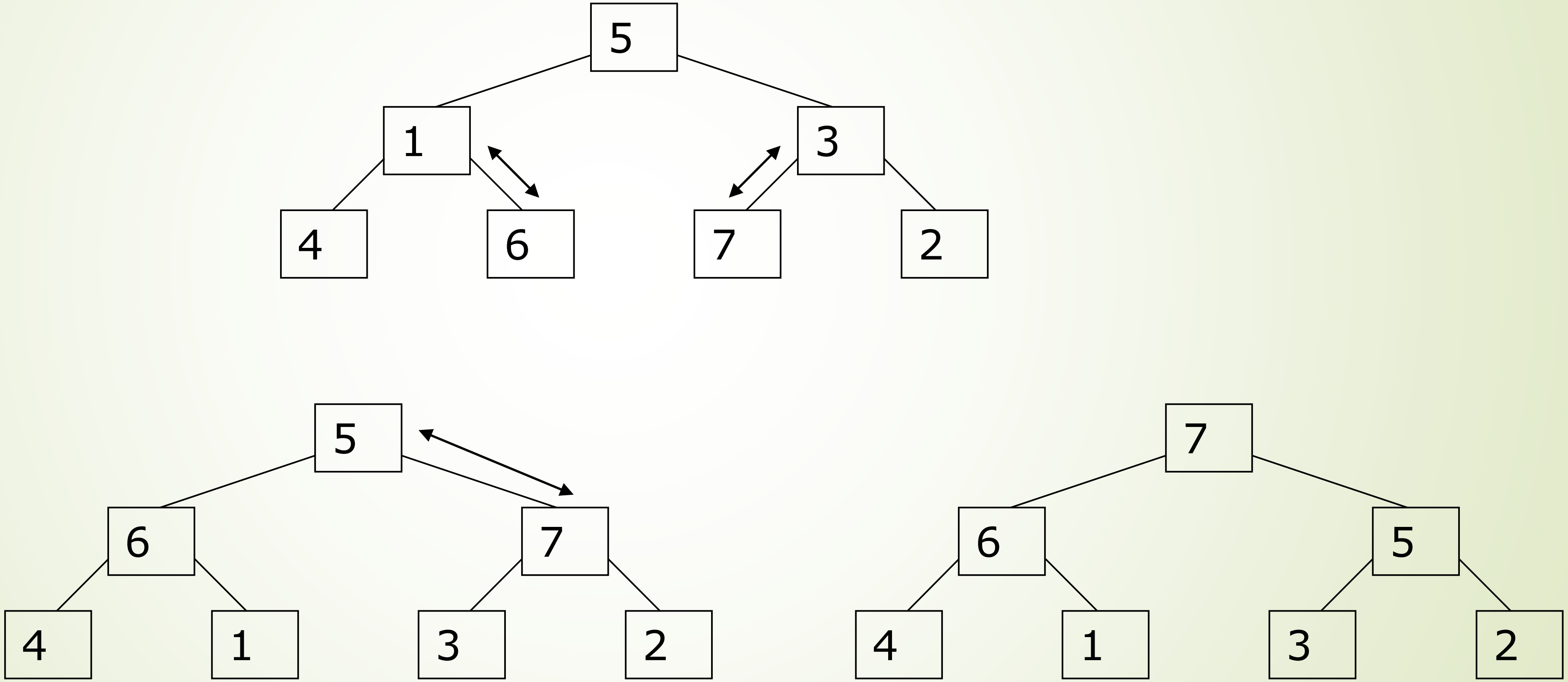


Сортировка двоичной кучей – подготовка

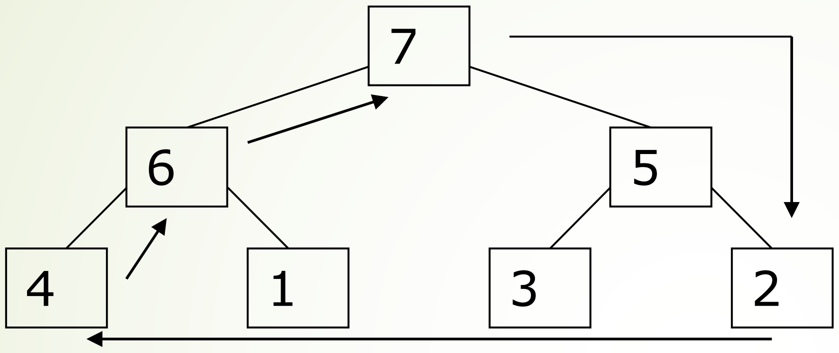




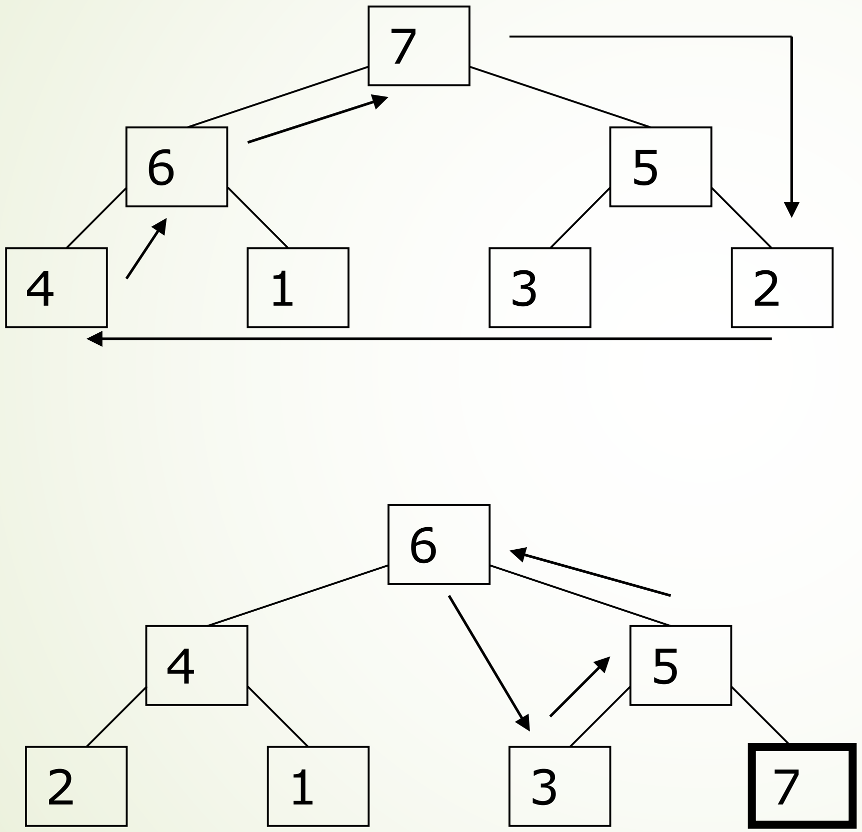
Сортировка двоичной кучей – подготовка



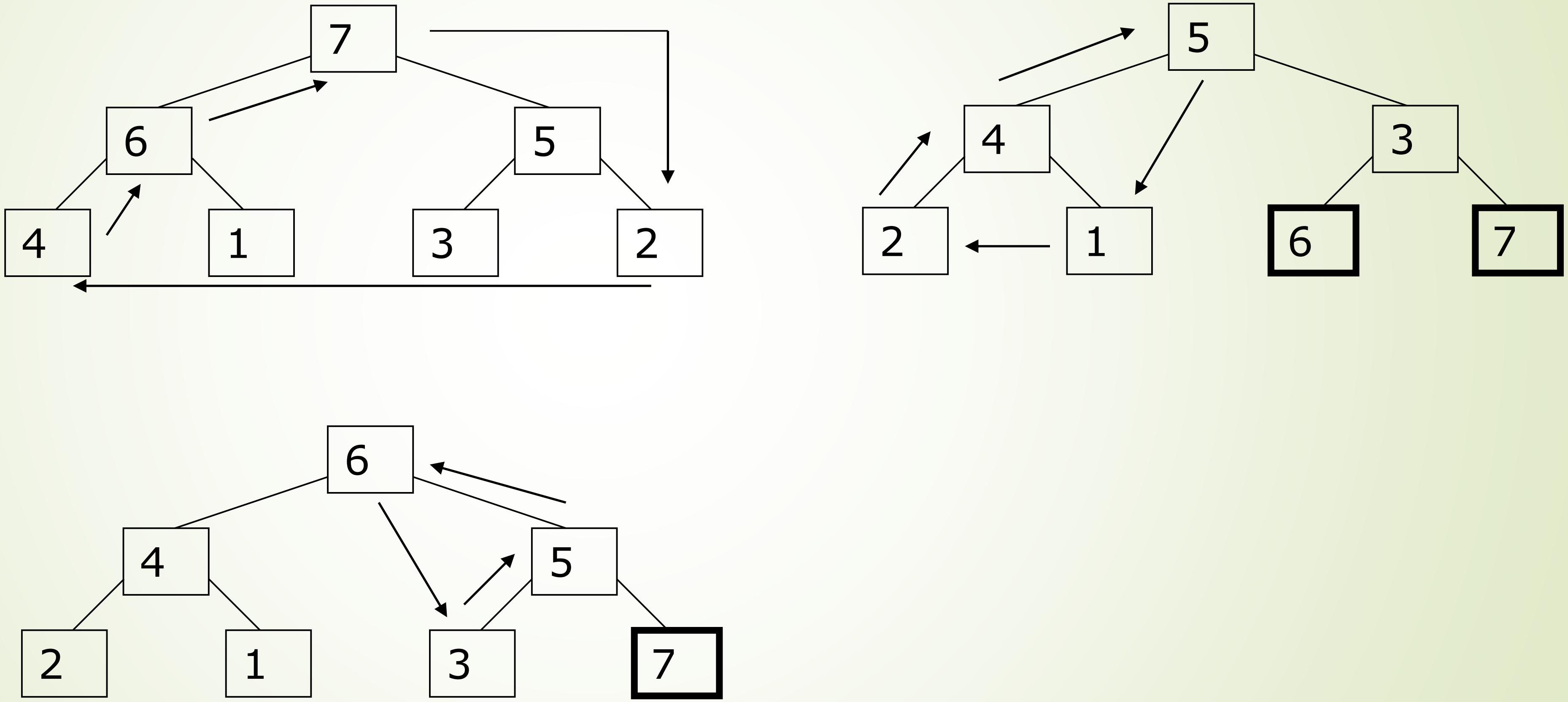
Сортировка двоичной кучей – выбор



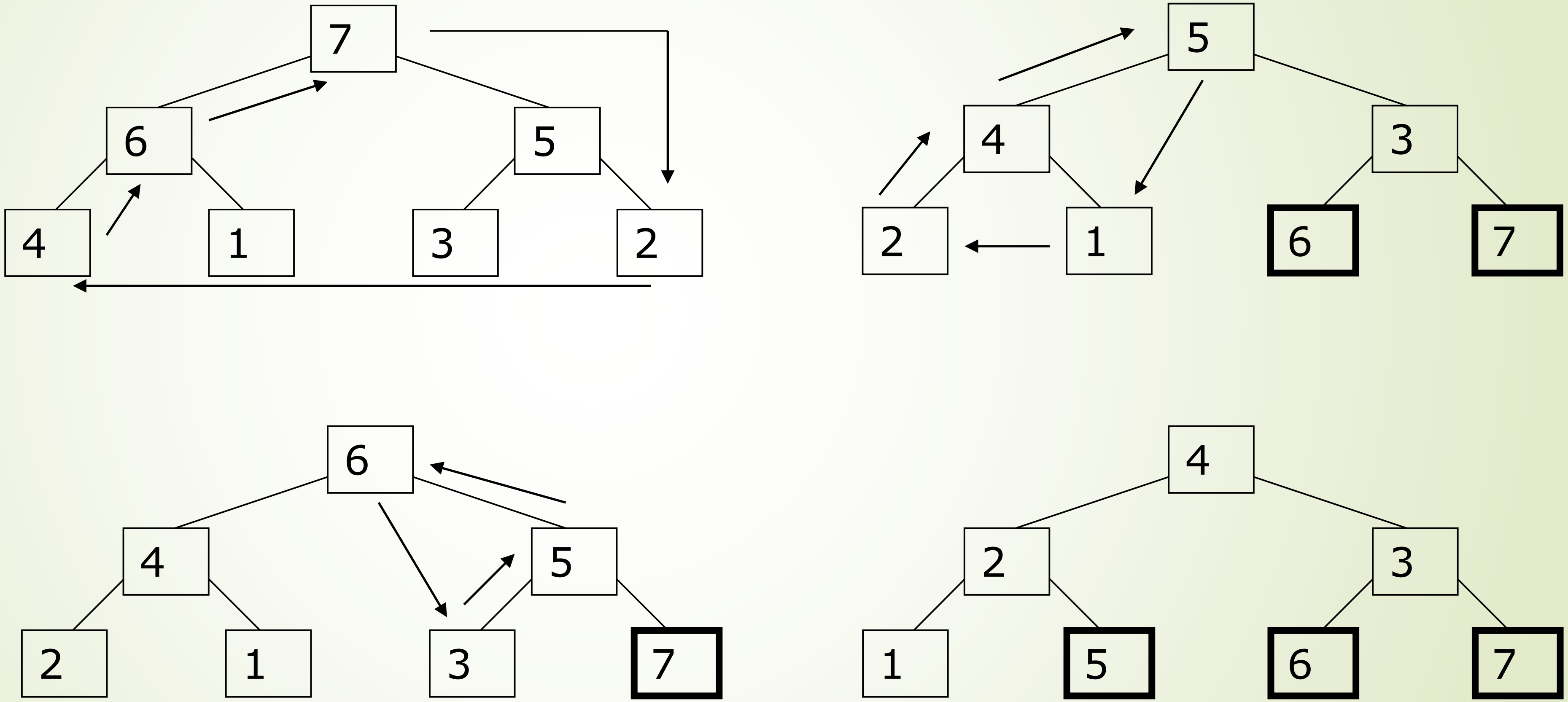
Сортировка двоичной кучей – выбор



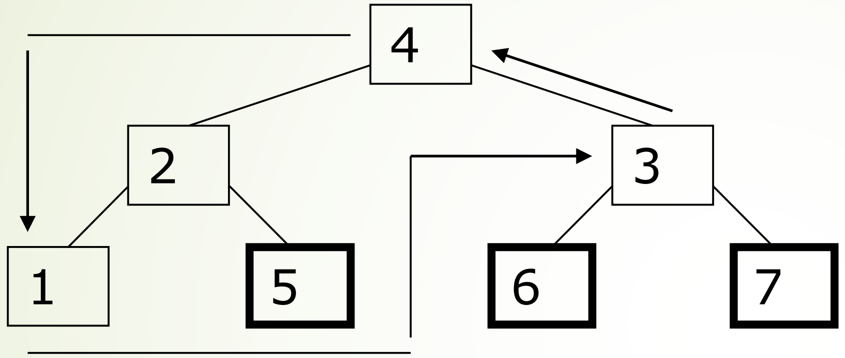
Сортировка двоичной кучей – выбор



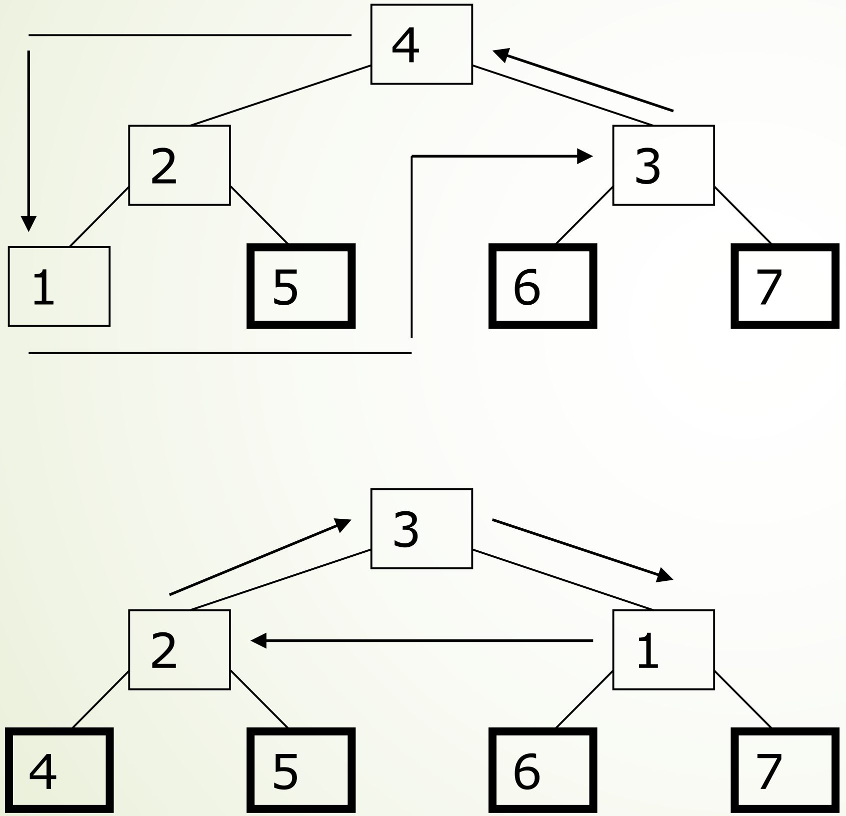
Сортировка двоичной кучей – выбор



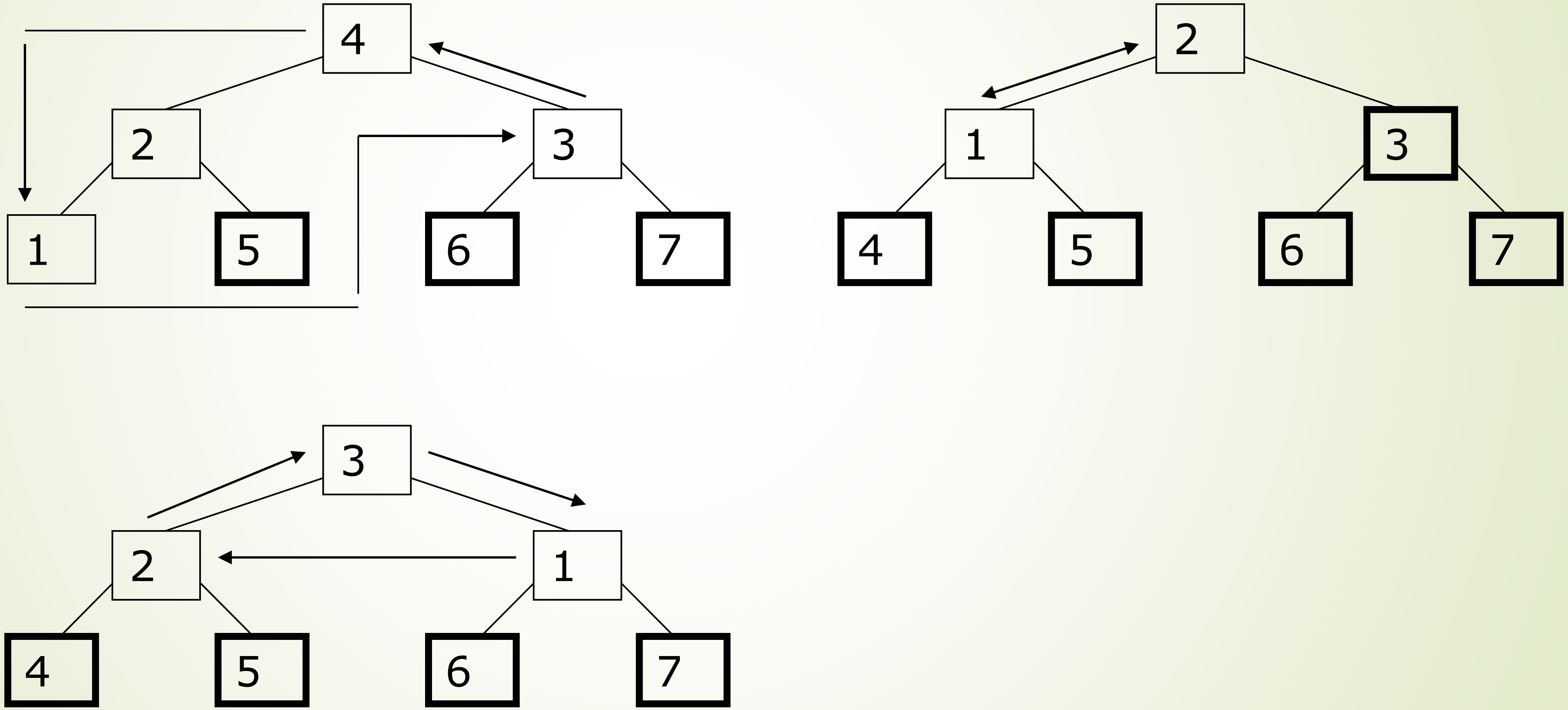
Сортировка двоичной кучей – выбор



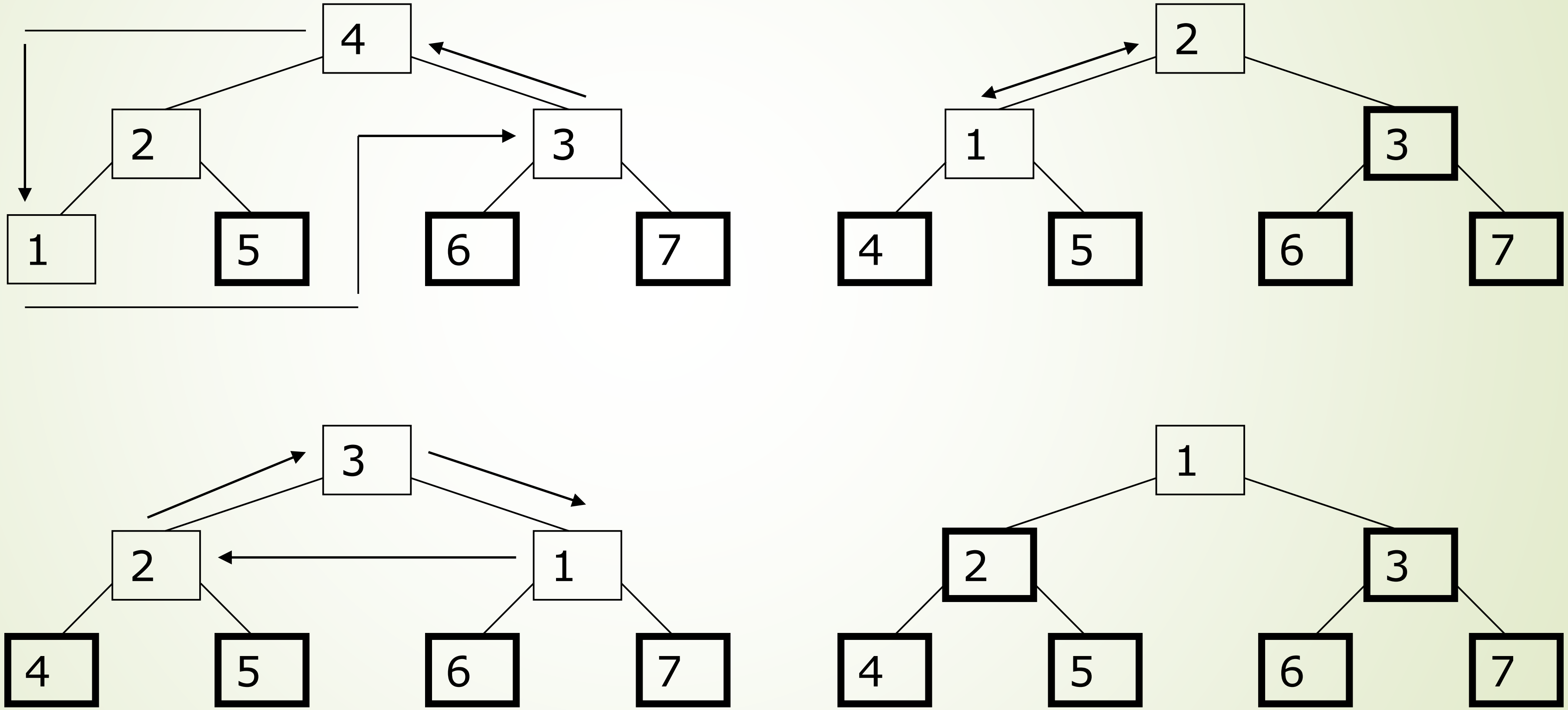
Сортировка двоичной кучей – выбор



Сортировка двоичной кучей – выбор

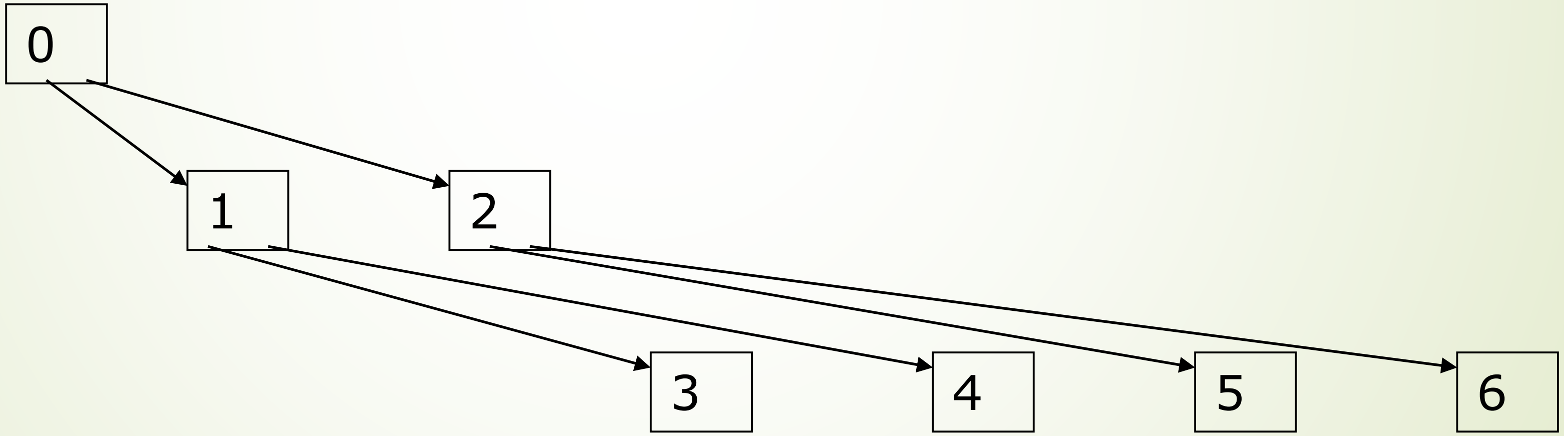


Сортировка двоичной кучей – выбор



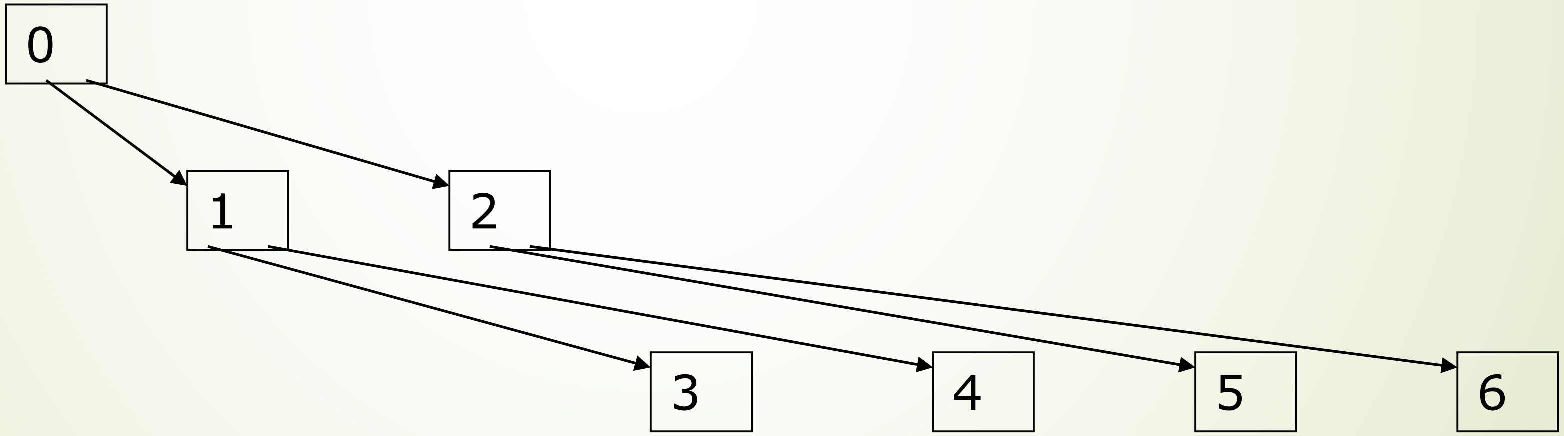
Организация двоичной кучи

- Корень бинарного дерева расположен в массиве по 0-му индексу, корни его поддеревьев – по 1-му и 2-му индексу, и так далее



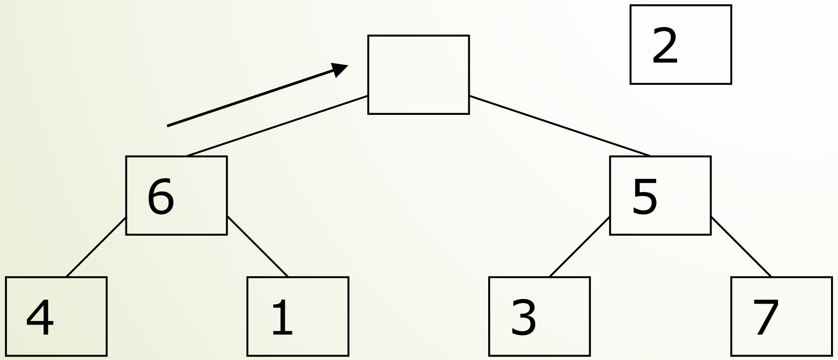
Организация двоичной кучи

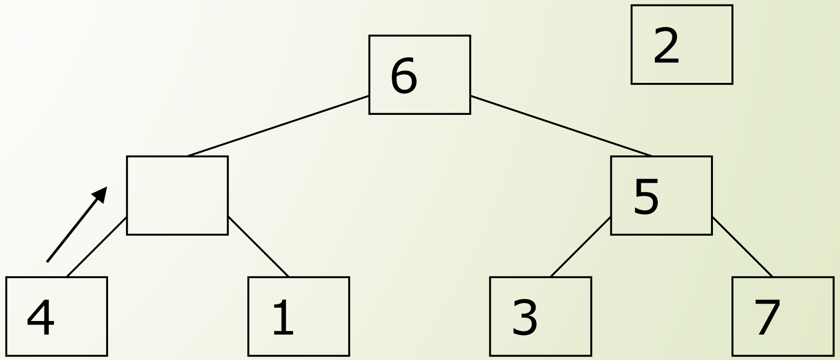
- Если корень какого-либо поддерева имеет индекс N, то поддеревья нижнего уровня имеют индексы 2N+1 и 2N+2



Организация просеивания

- Корень запоминается
- Сравнивается с корнями поддеревьев; если меньше, на его место ставится один из корней поддеревьев
- Процедура повторяется для одного из поддеревьев





Псевдокод: просеивание

```
MAX-HEAPIFY (A, J, S):
  L = 2*J
  R = 2*J+1
  Max = J
  if L < S and A[L] > A[Max]:
    Max = L
  if R < S and A[R] > A[Max]:
    Max = R
  if Max != J:
    Swap A[J] with A[Max]
    MAX-HEAPIFY(A, Max, S)
```

Псевдокод: подготовка кучи

```
BUILD-MAX-HEAP(A):
  for J = A.length / 2 - 1 downto 0:
    MAX-HEAPIFY(A, J, A.length)
```

- Трудоёмкость: O(N) просеиваний, каждое из которых имеет трудоёмкость O(logN)
- Корректность
  - Инвариант: перед каждой итерацией цикла узлы с номером больше J являются корнями бинарной пирамиды

Псевдокод: пирамидальная сортировка

```
HEAP-SORT(A):
  BUILD-MAX-HEAP(A)
  for J = A.length – 1 downto 1
    Swap A[0] with A[J]
    MAX-HEAPIFY(A, 0, J)
```

- Трудоёмкость: O(N) просеиваний, каждое из которых имеет трудоёмкость O(logN)
- Корректность: следует из того, что после Swap только корень пирамиды нарушает её свойство, и из инварианта

Неустойчивые сортировки

- Пирамидальная сортировка (сортировка двоичной кучей, Heap Sort) T=O(N logN), R=O(1)
  - Неустойчива примерно по тем же причинам – вершина в процессе сортировки «уезжает» в некоторое место кучи

Быстрая сортировка

- Используется принцип декомпозиции «Разделяй и Властвуй»
- На каждом шаге массив A[Min…Max] путём перестановки элементов разбивается на два подмассива A[Min…R] и A[R+1…Max], таких, что
  - A[J] <= A[R] для J <= R
  - A[J] >= A[R] для J > R
- Каждый из подмассивов сортируется рекурсивно

Сортировка Хоара

- На каждом шаге алгоритма выбирается **разделяющий элемент** массива (в идеале – его **медиана**), после чего элементы переставляются так, чтобы меньшие оказались слева, а большие – справа

4	1	**6**	5	7	3	**2**
4	1	2	**5**	7	**3**	6

4	1	2	**3**	|	**7**	5	6

Сортировка Хоара

- На каждом шаге алгоритма выбирается **разделяющий элемент** массива (в идеале – его **медиана**), после чего элементы переставляются так, чтобы меньшие оказались слева, а большие – справа

4	1	6	5	7	3	**2**
2	1	**6**	5	7	**3**	**4**

2	1	**3**	**5**	7	6	**4**

Псевдокод: разбиение

```
PARTITION(A, Min, Max):
  X = A[RANDOM(Min, Max)]
  L=Min, R=Max
  while L <= R:
    while A[L] < X:
      L++
    while A[R] > X:
      R--
    if (L <= R):
      Swap A[L] with A[R]
      L++, R--
```

- Инвариант: в начале каждой итерации элементы #Min…#L-1 <= X, #R+1…#Max >= X

Псевдокод: быстрая сортировка

```
QUICK-SORT(A, Min, Max):
  if (Min < Max):
    R = PARTITION(A, Min, Max)
    QUICK-SORT(A, Min, R)
    QUICK-SORT(A, R+1, MAX)
```

Производительность быстрой сортировки

- Наихудший случай: R == Min или R == Max
  - T(N) = T(N-1) + O(N)
- Наилучший случай: R == (Min + Max) / 2
  - T(N) = 2T(N/2) + O(N)
- 20 / 80: R = 0.2Min + 0.8Max
  - T(N) = T(0.8N) + T(0.2N) + O(N)
- «Средний» ~ чередование наилучшего и наихудшего

Сортировки сравнениями

- Трудоёмкость в худшем случае O(N logN) или хуже
- Бинарное дерево решений:
  - Внутренние узлы – сравнения между двумя элементами
  - Листья – всевозможные перестановки списка (их N!)
  - Отсюда минимальное число сравнений lg(N!) = O(N logN)
- Тем не менее, существуют сортировки за линейное время…

Сортировки за линейное время

- Все сортировки за линейное время основаны не на сравнениях и предполагают какие-то дополнительные требования к исходным данным
  - Сортировка подсчётом
  - Поразрядная сортировка
  - Карманная сортировка

Сортировка подсчётом

- Работает для целых чисел в интервале от 0 до K, где K = O(N)
  - Также работает для данных, сводимых к таким целым числам, например …

Сортировка подсчётом

- Работает для целых чисел в интервале от 0 до K, где K = O(N)
    - Также работает для данных, сводимых к таким целым числам, например для элементов перечислений
- Трудоёмкость O(N), ресурсоёмкость O(N), устойчива

Сортировка подсчётом

- Работает для целых чисел в интервале от 0 до K, где K = O(N)
  - Также работает для данных, сводимых к таким целым числам, например для элементов перечислений
- Трудоёмкость O(N), ресурсоёмкость O(N), устойчива
- Идея
  - Вначале подсчитать, сколько в списке целых чисел, равных J (для всех J от 0 до K): EqCount(J)

Сортировка подсчётом

- Работает для целых чисел в интервале от 0 до K, где K = O(N)
  - Также работает для данных, сводимых к таким целым числам, например для элементов перечислений
- Трудоёмкость O(N), ресурсоёмкость O(N), устойчива
- Идея
  - Вначале подсчитать, сколько в списке целых чисел, равных J (для всех J от 0 до K): EqCount(J)
  - Потом подсчитать, сколько в списке целых чисел, меньших J (опять-таки для всех J): LessCount(J)

Сортировка подсчётом

- Работает для целых чисел в интервале от 0 до K, где K = O(N)
  - Также работает для данных, сводимых к таким целым числам, например для элементов перечислений
- Трудоёмкость O(N), ресурсоёмкость O(N), устойчива
- Идея
  - Вначале подсчитать, сколько в списке целых чисел, равных J (для всех J от 0 до K): EqCount(J)
  - Потом подсчитать, сколько в списке целых чисел, меньших J (опять-таки для всех J): LessCount(J)
  - Затем мы размещаем число, равное J, по индексу LessCount(J)
  - Если в списке могут быть равные числа, схема чуть-чуть модифицируется

Сортировка подсчётом

```
COUNTING-SORT(In, Out, K):
  for J = 0 to K:                 // Clear
    Count[J] = 0
  for J = 0 to In.length - 1: // Count equals
    Count[In[j]] ++
  for J = 1 to K:                 // Count less or equals
    Count[J] += Count[J-1]
  for J = In.length - 1 downto 0:
    Out[Count[In[J]] - 1] = In[J]
    Count[In[J]]--
```

Карманная сортировка

- Она же – корзинная (bucket sort)
- Предполагает, что мы имеем числа, распределенные равномерно в некотором интервале
- Трудоёмкость O(N), ресурсоёмкость O(N)
- Идея
  - Разбить интервал на **N** карманов равного размера
  - Распределить числа по карманам в соответствии с их значениями, получив O(1) чисел в каждом кармане
  - Отсортировать числа в каждом кармане отдельно любым простым способом, например, сортировкой вставками
  - Соединить карманы

Карманная сортировка

```
N = In.length
let B: array of lists
for J = 0 to N - 1:
    B[J] = emptyList()
for J = 0 to N - 1:
    K = floor(N*In[J])
    B[K] += In[J]
Out = emptyList()
for J = 0 to N - 1:
    SORT(B[K])
    Out += B[K]
```

Итоги

- Рассмотрены
  - Простые и сложные сортировки
  - Характеристики сортировок: трудоёмкость, ресурсоёмкость, устойчивость
  - Показана нижняя граница трудоёмкости для сортировок, основанных на сравнениях
  - Сортировки за линейное время
- Далее
  - Простые структуры данных