

# Литература

1. Беклемишев Д.В. - Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник - Издательство "Лань" - 2020 - 448с. - ISBN: 978-5-8114-4748-0 - Текст электронный // ЭБС ЛАНЬ - URL: <https://e.lanbook.com/book/126146>.
2. Беклемишева Л.А., Беклемишев Д.В., Петрович А.Ю. - Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре: учебное пособие - Издательство "Лань" - 2019 - 496с. - ISBN: 978-5-8114-4577-6 - Текст электронный // ЭБС ЛАНЬ - URL: <https://e.lanbook.com/book/122183>
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра учебник/В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – 6-е изд. стер. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 280 с.
4. Апатенок Р.Ф., Маркина А.М., Попова Н.В., Хейман В.Б. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии: Учебное пособие/ Апатенок Р.Ф., Маркина А.М., Попова Н.В., Хейман В.Б Под редакцией Воднева В.Т. – 2-е изд., Мн.: 1986. – 272 с.

1\_DD-MM\_Иванов

- имя файла

veshaposhnikov@yandex.ru

- электронный адрес

# 1.Матрицы

Понятие матрицы. Виды матриц -3

Линейные операции над матрицами -7

Перемножение матриц -12

# Матрицы

## Понятие матрицы. Виды матриц

### Прямоугольная матрица

$$\dim(A) = m \times n$$

$$\left\| \begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right\| \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = A$$

$$A = \|a_{ij}\| \equiv (a_{ij}) \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$$

$a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{ij} \ \cdots \ a_{in}$  -  $i$ -ая строка матрицы

$a_{1j} \ a_{2j} \ \cdots \ a_{ij} \ \cdots \ a_{mj}$  -  $j$ -й столбец матрицы

$a_{ij}$  - элемент матрицы, стоящий на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца

Пример прямоугольной матрицы

Размерности  $\dim(A) = 2 \times 3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 5 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_j^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_j^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^i & a_2^i & \dots & a_j^i & \dots & a_n^i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_j^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix} = A$$

$a_j^i$  ←  $i$  – номер строки  
 $a_j^i$  ←  $j$  – номер столбца

$B = (b_{11} \quad b_{12} \quad \dots \quad b_{1j} \quad \dots \quad b_{1n})$  - матрица строка длины  $n$      $\dim B = 1 \times n$

$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{i1} \\ \dots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$  - матрица столбец высоты  $m$      $\dim B = m \times 1$

## Транспонированная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\dim(A) = m \times n$$

$$\dim(A^T) = n \times m$$

$$B \equiv A^T$$

$$B^T \equiv (A^T)^T = A$$

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 5 & 7 & 10 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 7 \\ -4 & 10 \end{pmatrix} \quad (A^T)^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 7 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 5 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\dim(A) = 2 \times 3 \quad \dim(A^T) = 3 \times 2$$

## Квадратная матрица

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \dim(B) = n \times n \quad \dim(B) = n$$

$a_{11} \ a_{22} \ \cdots \ a_{jj} \ \cdots \ a_{nn}$  - главная диагональ

$a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{jj} + \cdots + a_{nn} \equiv \text{tr}A \equiv \text{Sp}A$  - след матрицы (tr=trace; Sp=spoor - след)

$$\sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{jj} + \cdots + a_{nn}$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ii} = \text{Sp}A$$

Пример квадратной матрицы размерности  $\dim(B) = 3$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{Sp}B = 0 + 4 + 8 = 12$$

## Некоторые виды квадратных матриц

1. Симметричная матрица  $A^T = A$ ,  $a_{ij} = a_{ji} \quad (\forall i, j)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

2. Кососимметричная (антисимметричная) матрица

$$B^T = -B, \quad b_{ij} = -b_{ji} \quad (\forall i \neq j, \quad b_{ii} = 0 \quad \forall i = j)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -6 \\ -2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Треугольная матрица

Верхняя треугольная матрица

$$a_{ij} = 0 \quad i > j$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Нижняя треугольная матрица

$$a_{ij} = 0 \quad i < j$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

4. Диагональная матрица

$$a_{ij} = 0 \quad i \neq j$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Единичная матрица

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases}$$

$$E (\equiv I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Нулевая матрица

$$a_{ij} = 0 \quad (\forall i, j)$$

$$O_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dim(O_1) = 2$$

$$O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dim(O_2) = 2 \times 3$$



# Линейные операции над матрицами

## 1. Равенство матриц

$$A = (a_{ij}), \quad B = (b_{ij}) \quad \mathbf{\dim(A) = \dim(B)} \quad \mathbf{a_{ij} = b_{ij}} \quad i = 1 \cdots m, \quad j = 1 \cdots n$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

## 2. Сумма матриц $A = (a_{ij}), \quad B = (b_{ij}), \quad C = (c_{ij})$

$$C = A + B \quad \mathbf{\dim(A) = \dim(B) = \dim(C)} \quad \mathbf{c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}} \quad i = 1 \cdots m, \quad j = 1 \cdots n$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 4 & 5 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad C = A + B = \begin{pmatrix} 2+1 & 1+3 & 7+5 \\ 4+2 & 5+4 & 8+6 \end{pmatrix}$$

## 3. Произведение матрицы на число $A = (a_{ij}), \quad B = (b_{ij}), \quad \dim(A) = \dim(B) = m \times n$

$$B = \alpha A \quad \mathbf{b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}} \quad i = 1 \cdots m, \quad j = 1 \cdots n$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 4 & 5 & 8 \end{pmatrix} \quad D = 3A = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 1 & 3 \cdot 7 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot 8 \end{pmatrix}$$

## Свойства линейных операций над матрицами

1. Переместительное свойство (коммутативность относительно операции сложения)

$$A + B = B + A$$

2. Сочетательное свойство (ассоциативность относительно операции сложения)

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

3. Сочетательное свойство относительно числового множителя (ассоциативность относительно операции с числовым множителем)

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A) = \beta \cdot (\alpha \cdot A)$$

4. Распределительное свойство (дистрибутивность, т.е. согласованность операций) относительно суммы матриц

$$\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$$

5. Распределительное свойство (дистрибутивность) относительно суммы чисел

$$(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$$

$$A + O = A$$

$$\dim(A) = \dim(O) \quad !$$

$$C = (-1) \cdot A = -A \quad -A \text{ матрица противоположная матрице } A$$

$$A + (-A) = O \quad \dim(O) = \dim(A)$$

$$B + (-A) = B - A \quad \text{разность матриц } B \text{ и } A$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (-1) \cdot A = -A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$B - A = B + (-1)A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 2 & 0 - 0 & 1 - 1 \\ 0 + 1 & 4 - 3 & 1 - 4 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^n$$

- обозначение для большого числа слагаемых

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha a_i = \alpha \sum_{i=1}^n a_i$$

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$$

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^k a_i + \sum_{i=k+1}^n a_i$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^m a_{ij} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^m (a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{in}) \equiv \sum_{i=1}^m b_i = b_1 + b_2 + \dots + b_m =$$

$$= a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1n} + a_{21} + a_{22} + \dots + a_{mn} =$$

$$= \sum_{j=1}^n (a_{1j} + a_{2j} + \dots + a_{mj}) \equiv \sum_{j=1}^n d_j = d_1 + d_2 + \dots + d_n =$$

$$= a_{11} + a_{21} + \dots + a_{m1} + a_{12} + a_{22} + \dots + a_{mn}$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{i=1}^m (a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in})$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\left\| \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 11 \\ 2 & 5 & 8 & 15 \end{array} \right\| \quad \textcircled{30}$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n (a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{mj})$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\left\| \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & \\ 1 & 4 & 6 & \\ 2 & 5 & 8 & \\ 3 & 10 & 17 & \end{array} \right\| \quad \textcircled{30}$$

## Перемножение матриц

$$A = (a_{ij}) \quad i = 1 \dots m, \quad j = 1 \dots n$$

$$\dim(A) = m \times n$$

$$B = (b_{ij}) \quad i = 1 \dots n, \quad j = 1 \dots p$$

$$\dim(B) = n \times p$$

$$C = (c_{ij}) \quad i = 1 \dots m, \quad j = 1 \dots p$$

$$\dim(C) = m \times p$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \quad C = A * B \quad \cancel{C = B * A}$$

$$B * A \quad \dim(B) = n \times m \quad \dim(A) = m \times p$$

$$\begin{matrix} & A & & B & & C \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} & \times & \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{i1} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

Пример  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \dim(A) = 2 \times 2 \quad \dim(X) = 2 \times 1$

$$A * X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^2 a_{1i}x_i \\ \sum_{i=1}^2 a_{2i}x_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} = C$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_{11} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_{21} \end{cases}$$

Пример  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad X = (x_1 \quad x_2) \quad \dim(A) = 2 \times 2 \quad \dim(X) = 1 \times 2$

~~$A * X$~~

$X * A \quad \dim(X) = 1 \times 2 \quad \dim(A) = 2 \times 2$

$$\begin{aligned} X * A &= (x_1 \quad x_2) * \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (x_1 a_{11} + x_2 a_{21} \quad x_1 a_{12} + x_2 a_{22}) = \\ &= \left( \sum_{i=1}^2 x_i a_{i1} \quad \sum_{i=1}^2 x_i a_{i2} \right) \end{aligned}$$

Пример  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \quad \dim(A) = 2 \times 2 \quad \dim(B) = 2 \times 2$

$$A * B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^2 a_{1i}b_{i1} & \sum_{i=1}^2 a_{1i}b_{i2} \\ \sum_{i=1}^2 a_{2i}b_{i1} & \sum_{i=1}^2 a_{2i}b_{i2} \end{pmatrix}$$

Пример  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

$$A * B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 5 + 3 \times 7 & 1 \times 6 + 3 \times 8 \\ 4 \times 5 + 2 \times 7 & 4 \times 6 + 2 \times 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 30 \\ 34 & 40 \end{pmatrix}$$



# Свойства произведения матриц

## 1. Произведение матриц не коммутативно

$$A * B \neq B * A$$

$$A * B \quad B * A \quad \dim(A) = m \times n \quad \dim(B) = n \times m$$

$$C = A * B \quad \dim(C) = \dim(A * B) = m \times m$$

$C$  и  $D$  квадратные матрицы

$$D = B * A \quad \dim(D) = \dim(B * A) = n \times n$$

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = A * B = \begin{pmatrix} 0 + 1 & 0 + 1 \\ 0 + 0 & 0 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = B * A = \begin{pmatrix} 0 + 0 & 0 + 0 \\ 1 + 0 & 1 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Если  $A * B = B * A$ , то эти матрицы называются перестановочными

**Единичная матрица  $E$  является перестановочной** с любой квадратной матрицей того же порядка

$$A * E = E * A = A \quad \dim E = \dim A = n \times n$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$E, \quad E'$$

$$A * E = E * A = A \Rightarrow \begin{cases} E' * E = E \\ E * E' = E' \end{cases} \Rightarrow E = E'$$

## Нулевая матрица не является перестановочной

$$\dim(A) = m \times n \quad A * O = O' \quad \dim(O') = m \times m$$

$$\dim(O) = n \times m \quad O * A = O'' \quad \dim(O'') = n \times n$$

  $O' \neq O''$

$$\dim A = 2 \times 3 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \dim O = 3 \times 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O' \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O''$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 2. Сочетательное свойство

**Если определены** произведения  $A * B$  и  $(A * B) * C$ , **то определены**

произведения матриц  $B * C$  и  $A * (B * C)$  и выполняется равенство

$$(A * B) * C = A * (B * C)$$

## 3. Распределительное свойство (дистрибутивность) относительно суммы матриц

$$A * (B + C) \quad \longrightarrow \quad A * (B + C) = A * B + A * C$$

$$(B + C) * A \quad \longrightarrow \quad (B + C) * A = B * A + C * A$$

## 4. Сочетательное свойство относительно числового множителя

$$A * B \quad \longrightarrow \quad \alpha \cdot (A * B) = (\alpha \cdot A) * B = A * (\alpha \cdot B)$$

$$5. \quad A * B \quad \longrightarrow \quad B^T * A^T \quad \longrightarrow \quad (A * B)^T = B^T * A^T$$