4.
(в)
Разберем первую часть

$$\exists x(P(x) \wedge (P(x) \sim (Q(x) \vee \overline{P}(x)))) = True$$

Значит, существует $x_0 \in M$, такое, что при подстановке получается истинное выражение

$$P(x_0) \wedge (P(x_0) \sim (Q(x_0) \vee \overline{P}(x_0))) = True$$

Решим это как уравнение. Составим систему:

$$\begin{cases} P(x_0) = True \\ P(x_0) \sim (Q(x_0) \vee \overline{P}(x_0)) = True \end{cases}$$

Подставляем первое во второе

$$\begin{cases} P(x_0) = True \\ Q(x_0) \vee False = True \end{cases}$$

$$\begin{cases} P(x_0) = True \\ Q(x_0) = True \end{cases}$$

Из полученного следует, что существует x_0 такое, что

$$P(x_0) \wedge Q(x_0) = True$$

Значит,

$$\exists x(P(x) \wedge Q(x)) = True$$

Что и требовалось доказать
(г)
Рассмотрим первую часть

$$\forall x(\overline{P}(x) \to (P(x) \vee \overline{\overline{Q}(x) \to P(x)})) = False$$

Преобразуем высказывание

$$\forall x(P(x) \vee (P(x) \vee \overline{Q(x) \vee P(x)})) = False$$

$$\forall x(P(x) \vee (\overline{Q}(x) \wedge \overline{P}(x))) = False$$

Получаем, что существует $x_0 \in M$ такое, что

$$\begin{cases} P(x_0) = False \\ \overline{Q}(x_0) \wedge \overline{P}(x_0) = False \end{cases}$$

$$\begin{cases} P(x_0) = False \\ Q(x_0) = True \end{cases}$$

Значит,

$$\forall x P(x) = False \exists x Q(x) = True$$

Что и требовалось доказать
5
(а)
Рассмотрим внимательно последнюю часть коньюнкции

$$\forall x \exists y P(x, y)$$

В силу того, что M - конечно, получаем, что

$$\forall x \exists y P(x, y) = False$$

Т.к. если зафиксировать $x_0 = n$, то для этого значения не существует значения y, $x_0 < y$.
Значит, и все высказывание, данное в условии - ложное.
(б)

Рассуждения аналогичны пункту 5а. Однако в данном примере множество значений - бесконечное. А значит,

$$\forall x \exists y P(x,y) = True$$

Остальные части конъюнкции доказываются просто.
Значит, и все высказывание, данное в условии - истинное.
(в)

$$P(y) = "23 - False$$

Если подставить $x_0 = 2$, то получим, что $P(x_0) = "23 - True$
А значит, $\exists x P(x) = True$.
Собирая результаты обоих частей импликации получаем, что данное высказывание - ложное.
(г)
Обе части равносильности - ложные, т.к.

$$\forall P(x) = \forall x"3x - False$$

$$\forall Q(x) = \forall x"2x - False$$

А значит, получаем, что данное исходное высказывание - истинное.
8
(а)
1. Пусть левая части равносильности - истинна. Тогда для любого значения $x = x_0 \in M$ верно,

$$P(x_0) \wedge Q(x_0) = True$$

Из этого следует, что P, Q - тождественные истины на множестве M. Получаем, что

$$\forall x P(x) = True, \forall x Q(x) = True$$

Левая часть высказывания получается также истинной.

$$(\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x)) = True$$

2. Пусть левая части равносильности - ложная.
Тогда существует x_0 такое, что

$$P(x_0) \wedge Q(x_0) = False$$

Значит,

$$P(x_0) = False, Q(x_0) = False$$

Тогда

$$\forall x P(x) = False, \forall x Q(x) = False$$

Что и требовалось.
(б)
Рассмотри левую часть равносильности

$$\overline{\exists x P(x)}$$

1. Пусть она истинна. Тогда

$$\exists x P(x) = False$$

Это значит, что ни при каких значениях x выражение $P(x)$ не обращается в истинное.
Другими словами, для любых значений - $P(x) = False$. Если записать математически, то получим, что

$$\forall x \overline{P(x)}$$

2. Пусть левая часть равносильности ложная. Тогда

$$\exists x P(x) = True$$

Другими словами,

$$P(x_0) = True$$

. Или

$$\overline{P}(x_0) = False$$

Тогда выражение

$$\forall x \overline{P}(x)$$

является ложным, потому что есть значение, которое обращается все высказывание в ложное.

(в)