Общие комментарии

Все диаграммы не являются способом доказательства, а лишь использованы для понимания и наглядности.

1.

(a)

Докажите следующее тождество, используя определение равенства множеств:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

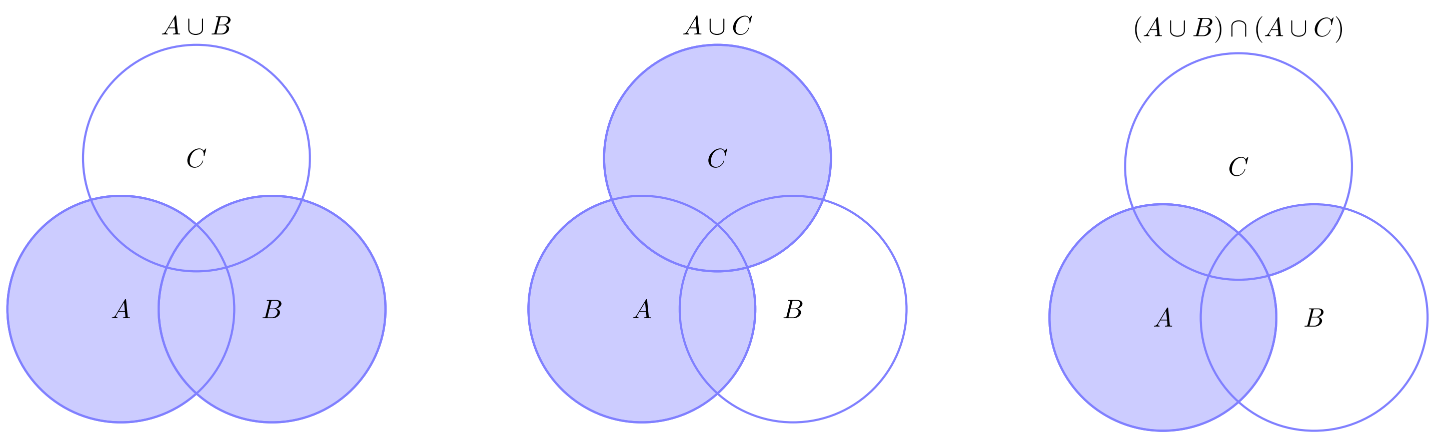
Решение: Докажем тождество, используя формулы логики высказывания и определения множеств.

$$\begin{aligned}
A \cup (B \cap C) &= \{x | x \in A \cup (B \cap C)\} \\
&= \{x | (x \in A) \vee (x \in (B \cap C))\} \\
&= \{x | (x \in A) \vee ((x \in B) \wedge (x \in C))\} \\
&= [use formula : X \vee (Y \wedge Z) = (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)] \\
&= \{x | ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge ((x \in A) \vee (x \in C))\} \\
&= \{x | ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge ((x \in A) \vee (x \in C))\} \\
&= (A \cup B) \cap (A \cup C)
\end{aligned} \tag{1}$$

Приведем для наглядности диаграммы. Диаграммы не являются способом доказательства, а лишь использованы для понимания и наглядности.

Левая часть равенства $A \cup (B \cap C)$

Правая часть равенства $(A \cup B) \cap (A \cup C)$



(б)
Докажите следующее тождество, используя определение равенства множеств:

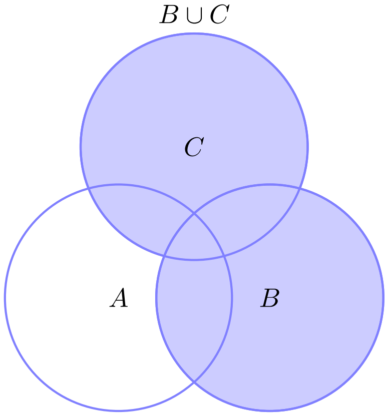
$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

Решение:
Докажем тождество, используя формулы логики высказывания и определения множеств.

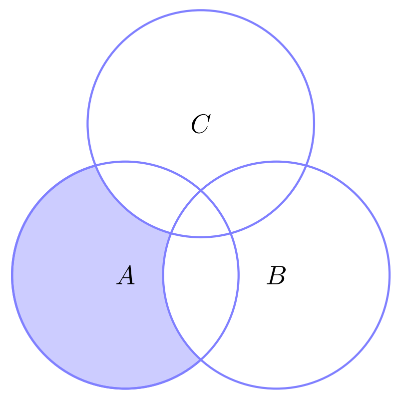
$$\begin{aligned}
A \setminus (B \cup C) &= \{x | x \in A \setminus (B \cup C)\} \\
&= \{x | (x \in A) \wedge (x \notin (B \cup C))\} \\
&= \{x | (x \in A) \wedge ((x \notin B) \wedge (x \notin C))\} \\
&= \{x | (x \in A) \wedge (x \in A) \wedge (x \notin B) \wedge (x \notin C)\} \\
&= \{x | ((x \in A) \wedge (x \notin B)) \wedge ((x \in A) \wedge (x \notin C))\} \\
&= (A \setminus B) \cap (A \setminus C)
\end{aligned} \tag{2}$$

Приведем для наглядности диаграммы.
Левая часть равенства $A \setminus (B \cup C)$

$B \cup C$

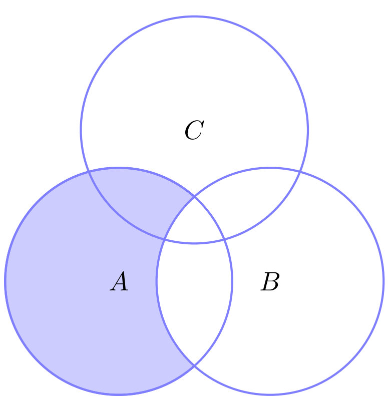


$A \setminus (B \cup C)$

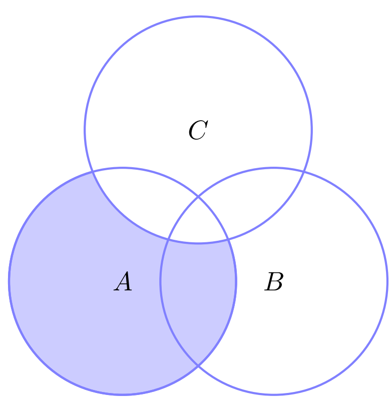


Правая часть равенства $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

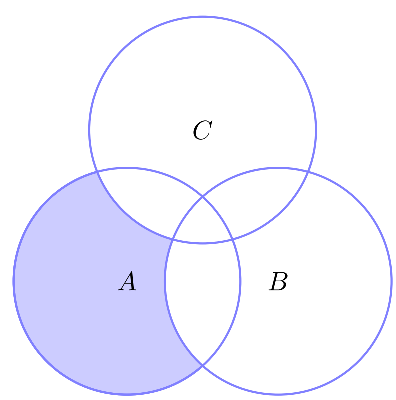
$A \setminus B$



$A \setminus C$



$(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$



2

(а)

Докажите следующее тождества, используя равносильные преобразования:

$$(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup C) \cap (B \cup D)$$

Решение: Необходимо доказать следующее тождество

$$(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup C) \cap (B \cup D)$$

$$\begin{aligned}
(A \cap B) \cup (C \cap D) = & \\
& = [X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)] \\
& = ((A \cap B) \cup C) \cap ((A \cap B) \cup D) \\
& = [X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)] \\
& = ((A \cup C) \cap (B \cup C)) \cap ((A \cup D) \cap (B \cup D)) \\
& = (A \cup C) \cap (B \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup D)
\end{aligned} \tag{3}$$

(б)

Докажите следующее тождества, используя равносильные преобразования:

$$A \oplus B \oplus (A \cap B) = A \cup B$$

Решение: Необходимо доказать следующее тождество

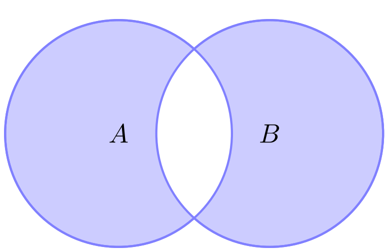
$$A \oplus B \oplus (A \cap B) = A \cup B$$

$$\begin{aligned}
A \oplus B \oplus (A \cap B) = & \\
& = [A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)] \\
& = ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \oplus (A \cap B) \\
& = [X \oplus Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)] \\
& = ((A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)) \setminus (((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \cap (A \cap B)) \\
& = [(X \setminus Y) \cup (X \cap Y) = X] \\
& = (A \cup (B \setminus A)) \setminus (((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \cap (A \cap B)) \\
& = [A \cup (B \setminus A) = A \cup B] \\
& = (A \cup B) \setminus (((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \cap (A \cap B)) \\
& = [((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \cap (A \cap B) = \emptyset] \\
& = (A \cup B) \setminus \emptyset \\
& = (A \cup B)
\end{aligned} \tag{4}$$

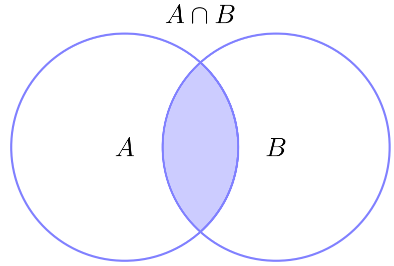
Для большего понимания и наглядности, приведем диаграммы

Левая часть равенства $A \oplus B \oplus (A \cap B)$

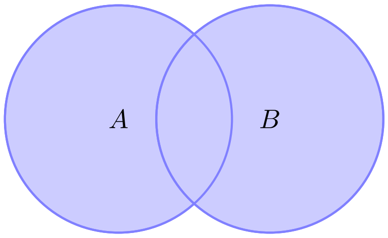
$A \oplus B$



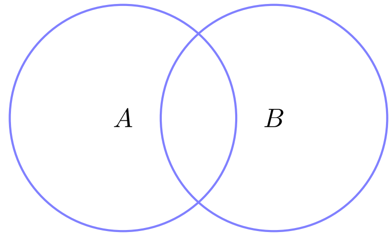
$A \cap B$



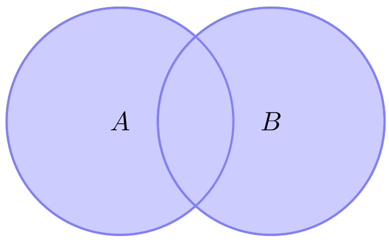
$(A \oplus B) \cup (A \cap B)$



$(A \oplus B) \cap (A \cap B)$



$(A \oplus B) \oplus (A \cap B) = ((A \oplus B) \cup (A \cap B)) \setminus ((A \oplus B) \cap (A \cap B))$



3
(a)
Докажите следующие утверждение:

$$(A \cup B) \subseteq C \iff (A \subseteq C) \wedge (B \subseteq C)$$

Решение: Необходимо доказать следующее утверждение

$$(A \cup B) \subseteq C \iff (A \subseteq C) \wedge (B \subseteq C)$$

Способ 1
Докажем с помощью рассуждений

$$(A \cup B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$$

Другими словами, все элементы в $(A \cup B)$ можно разделить на 3 группы :

- те, что входят в A, но не входят в B $(A \setminus B)$
- те, что входят в B, но не входят в A $(B \setminus A)$
- те, что входят в A и в B $(A \cap B)$

Элементы из каждой категории лежат в C (по определению понятия подмножества)

$$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$$
$$B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$$

А значит, все элементы из A лежат и в C. Аналогично, все элементы из B лежат и в C
Что и требовалось.
Способ 2
Введем следующие обозначения:

$$(x \in A) = A_0, x \in B = B_0, x \in C = C_0$$

A_0, B_0, C_0 - переменные логики высказываний $(TrueFalse)$.
Тогда условие переписывается в форме:

$$((A_0 \vee B_0) \to C_0) \sim ((A_0 \to C_0) \wedge (B_0 \to C_0))$$

- Понятие подмножество $(\subseteq)$ заменяется на импликацию $(\to)$
- Понятие обьединения $(\cup)$ заменяется на дизъюнкицию $(\vee)$
- Понятие пересечения $(\cap)$ заменяется на конъюнкицию $(\wedge)$

Преобразуем полученное выражение

$$((A_0 \vee B_0) \to C_0) \sim ((A_0 \to C_0) \wedge (B_0 \to C_0))$$

Левая часть:

$$(A_0 \vee B_0) \to C_0 = \overline{A_0 \vee B_0} \vee C_0 = (\overline{A_0} \wedge \overline{B_0}) \vee C_0 = (\overline{A_0} \vee C_0) \wedge (\overline{B_0} \vee C_0)$$

Правая часть:

$$(A_0 \to C_0) \wedge (B_0 \to C_0) = (\overline{A_0} \vee C_0) \wedge (\overline{B_0} \vee C_0)$$

Получается, что данная в условии равносильность – тавтология, т.к. левая и правая части одинаковые

$$((A_0 \vee B_0) \to C_0) \sim ((A_0 \to C_0) \wedge (B_0 \to C_0)) = True$$

(б) Докажите следующие утверждение:

$$A \subseteq (B \cup C) \iff (A \subseteq B) \wedge (A \subseteq C)$$

Решение:
Введем следующие обозначения:

$$(x \in A) = A_0, x \in B = B_0, x \in C = C_0$$

A_0, B_0, C_0 - переменные логики высказываний $(TrueFalse)$.
Тогда условие переписывается в форме:

$$(A_0 \to (B_0 \wedge C_0)) \sim ((A_0 \to B_0) \wedge (A_0 \to C_0))$$

Преобразуем:
Левая часть

$$A_0 \to (B_0 \wedge C_0) = \overline{A_0} \vee (B_0 \wedge C_0) = (\overline{A_0} \vee B_0) \wedge (\overline{A_0} \vee C_0)$$

Правая часть

$$(A_0 \to B_0) \wedge (A_0 \to C_0) = (\overline{A_0} \vee B_0) \wedge (\overline{A_0} \vee C_0)$$

Получаем, что данная в условии равносильность – тавтология, т.к. левая и правая части одинаковые
4
(а)
Решите следующие системы уравнений:

$$\begin{cases} A \cap X = B \\ A \cup X = C \\ B \subseteq A \subseteq C \end{cases}$$

Решение: Необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} A \cap X = B \\ A \cup X = C \\ B \subseteq A \subseteq C \end{cases}$$

Способ 1 (сложный, но точный)
Введем следующие обозначения:

$$(x \in A) = A_0, x \in B = B_0, x \in C = C_0, x \in X = X_0$$

Перепишем первое уравнение из системы

$$A \cap X = B \iff A \cap X \subseteq B, B \subseteq A \cap X$$

Первую часть можно преобразовать, (используя обозначения)

$$A \cap X \subseteq B = X \subseteq (\overline{A} \cup B)$$

$$[(A_0 \wedge X_0) \to B_0 = (\overline{A_0} \vee \overline{X_0} \vee B_0) = X_0 \to (\overline{A_0} \vee B_0)]$$

Вторая часть также преобразуется

$$B \subseteq A \cap X$$

Значит,

$$B \subseteq A, B \subseteq X$$

Из двух частей получаем ограничения на множество X.

$$B \subseteq X \subseteq (\overline{A} \cup B)$$

Аналогично разберем второе уравнение из системы

$$A \cup X = C \iff A \cup X \subseteq C, C \subseteq A \cup X$$

Первая часть преобразуется в

$$A \cup X \subseteq C \iff A \subseteq C, X \subseteq C$$

Вторая часть преобразуется (используя обозначения)

$$C \subseteq A \cup X = (\overline{A} \cap C) \subseteq X$$

$$[C_0 \to (A_0 \vee X_0) = (\overline{C_0} \vee A_0 \vee X_0) = (\overline{A_0} \wedge C_0) \to X_0]$$

Из двух частей получаем ограничения на множество X.

$$C \cap \overline{A} \subseteq X \subseteq C$$

Получаем систему

$$\begin{cases} B \subseteq X \subseteq (\overline{A} \cup B) \\ C \cap \overline{A} \subseteq X \subseteq C \end{cases}$$

Получаем ответ:

$$B \cup (C \cap \overline{A}) \subseteq X \subseteq C \cap (\overline{A} \cup B)$$

Однако, учитывая условие $B \subseteq A \subseteq C$, оказывается, что левая и правая части равны, тогда получаем ответ

$$X = (C \setminus A) \cup B$$