Определение
Пусть X — произвольное множество, тогда множество $2^X = \{Y | Y \subseteq X\}$ называется булеаном множества X.
Примеры:

- $X = \{a, b, c\}$
  $2^X = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
- $X = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
  Замечание: $\emptyset \neq \{\emptyset\}$
  $2^X = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

6а
Докажите, что

$$2^{A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_n} = 2^{A_1} \cap 2^{A_2} \cap \ldots \cap 2^{A_n}$$

Решение:
Воспользуемся методом математической индукции, поэтому можно доказать для двух элементов.
Пусть у нас есть 2 множества A, B.
Элементы этих множеств можно разбить на 3 категории

- $A \setminus (A \cap B)$
- $B \setminus (A \cap B)$
- $A \cap B$

Тогда, $2^{(A \cap B)}$ – все подмножества, состоящие только из элементов третьей группы

Аналогичное определение и у величины $2^A \cap 2^B$ – среди всех подмножетств множества A и множетва B выбраны только те, в которых есть только элементы из третьей группы.

Значит,

$$2^{(A \cap B)} = 2^A \cap 2^B$$

Далее, рассуждения по методу математичсекой индукции

6б
Перечислите все элементы множества 2^A, где $A = \{1, 2, \{\{1\}, 2, 3\}\}$
Решение:
Если ввести обозначение $c = \{\{1\}, 2, 3\}$

$$2^X = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{c\}, \{1, 2\}, \{1, c\}, \{2, c\}, \{1, 2, c\}\}$$

$$2^X = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{\{\{1\}, 2, 3\}\}, \{1, 2\}, \{1, \{\{1\}, 2, 3\}\}, \{2, \{\{1\}, 2, 3\}\}, \{1, 2, \{\{1\}, 2, 3\}\}\}$$

Определение
Пусть $f : X \to Y$ – произвольное отображение.
Образ
$A \subseteq X$, $f(A) = \{f(x) | x \in A\}$ – образ множества A при отображении f.
Прообраз
$B \subseteq X$, $f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$ – прообраз множества A при отображении f.

7a
Пусть $f : X \to Y$ – произвольное отображение. $A_i \subseteq X, B_i \subseteq Y$, где $i = 1, 2, ...n$
Докажите, следующее свойство образов и прообразов.

$$f(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup ... \cup f(A_n)$$

Решение:
Воспользуемся методом математической индукции
Поэтому доказательство можно провести для двух множеств.
Доказать, что

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

Чтобы доказать, что два множества равны между собой, докажем, что каждое из них является подмножеством другого множества

- $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$

  Без потери общности, зафиксируем $x \in A$. Тогда, результат отображения лежит в образе $f(x) \in f(A)$

  Значит, $f(x) \in f(A \cup B)$, также $f(x) \in f(A) \cup f(B)$.

  x – принимает все значения из $(A \cup B)$

- $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$

  Рассуждения аналогичны.

  Без потери общности, зафиксируем $x \in A$. Тогда, результат отображения лежит в образе $f(x) \in f(A)$

8

Пусть U – универсальное множество, $S, T \subseteq U$ – фиксированные подмножества множества U. Определим отображение $f : 2^U \to 2^U$, как $f(A) = T \cap (S \cup A)$. Найдите $f^{(2)}$. Выясните, чему равно f^n.

Решение:

Дано

$$f(A) = T \cap (S \cup A)$$

$$\begin{aligned} f^{(2)}(A) &= f(f(A)) \\ &= T \cap (S \cup f(A)) \\ &= T \cap (S \cup (T \cap (S \cup A))) \\ &= [use : X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)] \\ &= (T \cap S) \cup (T \cap T \cap (S \cup A))) \\ &= (T \cap S) \cup (T \cap (S \cup A))) \\ &= [use : X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)] \\ &= (T \cap S) \cup (T \cap S) \cup (T \cap A) \\ &= (T \cap S) \cup (T \cap A) \\ &= T \cap (S \cup A) \end{aligned} \tag{1}$$

Значит, $f(f(A)) = f(A)$, $f^{(n)}(A) = f(A)$

Определение
Инъективность отображения
Если $f(x_1) = f(x_2)$, то $x_1 = x_2$
Сюръективность отображения
Если $f(X) = Y$.
Если все элементы из области значения достижимы в отображении.
Биективность отображения
Если отображение и сюръективно, и инъективно одновременно

9
Отображения $f, g, h : 2^N \times 2^N \to 2^N$ заданы следующим образом: $f(A, B) = A \cap B$, $g(A, B) = A \cup B$, $h(A, B) = A \oplus B$.
Выясните, какие из этих отображений являются инъективными, сюръективными и биективными.
Установите, какие из указанных ниже множеств не являются конечными, и перчислите элементы конечных множеств:

- $f^{-1}(\emptyset)$
- $g^{-1}(\emptyset)$
- $h^{-1}(\emptyset)$
- $f^{-1}(\{1\})$
- $g^{-1}(\{2\})$
- $h^{-1}(\{3\})$
- $f^{-1}(\{4, 7\})$
- $g^{-1}(\{8, 12\})$
- $h^{-1}(\{5, 9\})$

Решение

Функция	Инъективна	Сюрьективна	Биективная
$f(A, B) = A \cap B$	-	$+$	-
$g(A, B) = A \cup B$	-	$+$	-
$h(A, B) = A \oplus B$	-	$+$	-

Функция	
$f^{-1}(\emptyset)$	бесконечно, (A_1, A_2), где $A_1 \cup A_2 = \emptyset$
$g^{-1}(\emptyset)$	$(\emptyset, \emptyset)$
$h^{-1}(\emptyset)$	бесконечно, (A_1, A_1)
$f^{-1}(\{1\})$	бесконечно, два множества с общим элементом 1
$g^{-1}(\{2\})$	$(\emptyset, \{2\}), (\{2\}, \emptyset), (\{2\}, \{2\})$
$h^{-1}(\{3\})$	бесконечно, к примеру $(A_1, A_1 \cup \{3\})$
$f^{-1}(\{4, 7\})$	бесконечно, два множества с общими элементами $\{4, 7\}$
$g^{-1}(\{8, 12\})$	$(\emptyset, \{8, 12\}), (\{8, 12\}, \emptyset), (\{8\}, \{12\}), (\{12\}, \{8\})$
$h^{-1}(\{5, 9\})$	бесконечно, к примеру $(A_1, A_1 \cup \{5, 9\})$

10

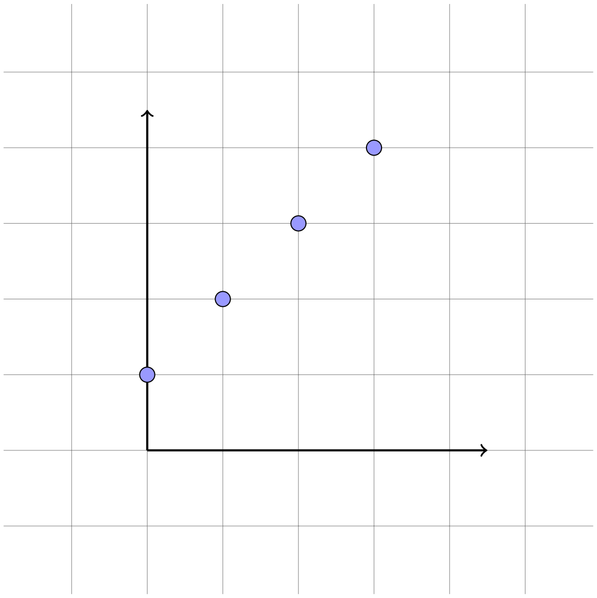
Выясните, для каких значений $n \in N$ отображение $f_n : N \cup 0 \to N$ является иньективным, сюрьективным, биективным

$$f_n(k) = \begin{cases} n - k, & \text{if } k < n \\ n + k, & \text{if } k \geq n \end{cases}$$

Решение:

Давайте посмотрим на значения функции при $n = 1$

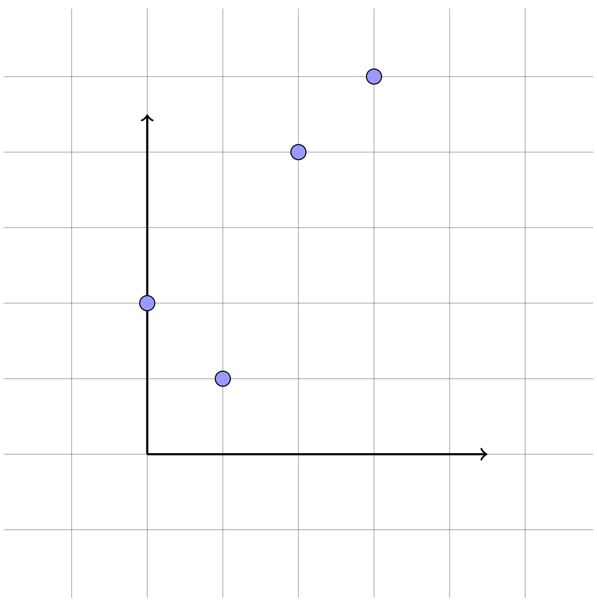
$$f_1(k) = \begin{cases} 1 - k, & \text{if } k < 1 \\ 1 + k, & \text{if } k \geq 1 \end{cases}$$



Функция	Инъективна	Сюрьективна	Биективная
$f_1(k)$	+	+	+

Давайте посмотрим на значения функции при $n = 2$

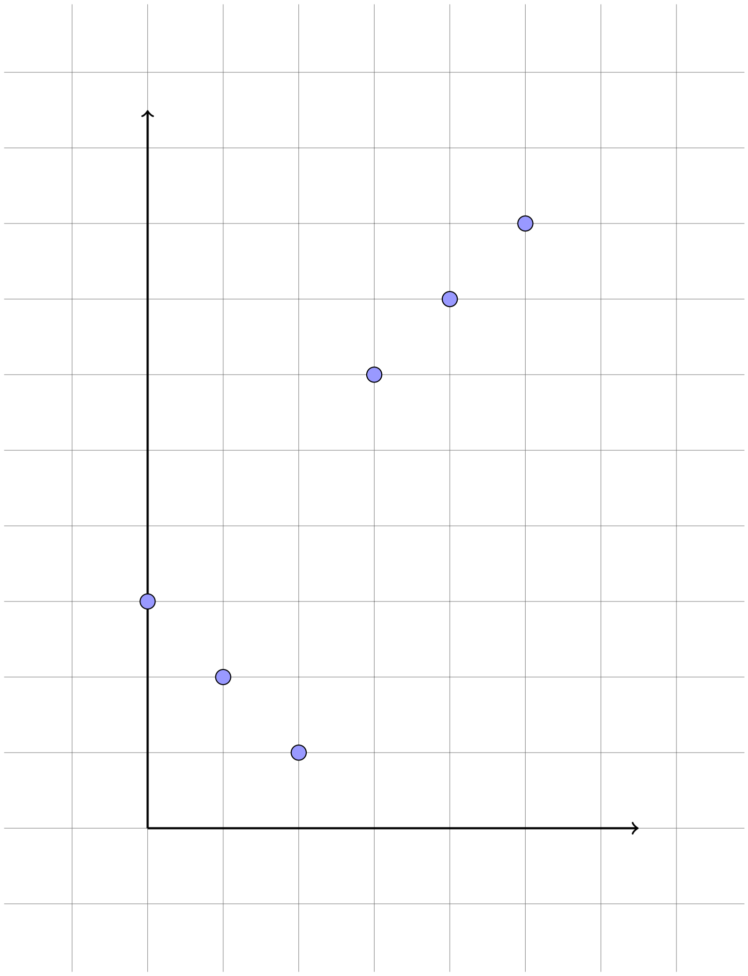
$$f_2(k) = \begin{cases} 2 - k, & \text{if } k < 2 \\ 2 + k, & \text{if } k \geq 2 \end{cases}$$



Функция	Инъективна	Сюрьективна	Биективная
$f_2(k)$	+	-	-

Давайте посмотрим на значения функции при $n = 3$

$$f_3(k) = \begin{cases} 3 - k, & \text{if } k < 3 \\ 3 + k, & \text{if } k \geq 3 \end{cases}$$



Функция	Инъективна	Сюрьективна	Биективная
$f_3(k)$	+	-	-

Видно, что график состоит из двух частей. Тогда при $n > 1$

Функция	Инъективна	Сюрьективна	Биективная
$f_n(k)$	+	-	-