

# Логические операции над высказываниями

[anastasiya.zhyrkevich@yandex.ru](mailto:anastasiya.zhyrkevich@yandex.ru)

Дискретная математика  
Семинар 2

15 February, 2020

# Краткое содержание

Проверка домашнего задания

Решение уравнений

Полезные преобразования

Доказательство равносильностей

Доказательство равносильностей

Домашнее задание

# Домашнее задание

Построить таблицу истинности 36

$$((A \sim B) \rightarrow \overline{C}) \cdot (A \vee C) = \alpha$$

A	B	C	$(A \sim B)$	$\overline{C}$	$((A \sim B) \rightarrow \overline{C})$	$(A \vee C)$	$\alpha$
0	0	0	.	.	.	.	.
0	0	1	.	.	.	.	.
0	1	0	.	.	.	.	.
0	1	1	.	.	.	.	.
1	0	0	.	.	.	.	.
1	0	1	.	.	.	.	.
1	1	0	.	.	.	.	.
1	1	1	.	.	.	.	.

# Домашнее задание (cont.)

Ответ:

A	B	C	$(A \sim B)$	$\overline{C}$	$((A \sim B) \rightarrow \overline{C})$	$(A \vee C)$	$\alpha$
0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	1	0

## Задание 4 (а)

Задание:

Решите следующее логическое уравнение:

$$(A \rightarrow C) \cdot \overline{((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))} = \text{True}$$

## Задание 4 (а) (cont.)

Задание:

Решите следующее логическое уравнение:

$$(A \rightarrow C) \cdot \overline{((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))} = \text{True}$$

Решение:

Составим систему

$$\begin{cases} A \rightarrow C = T \\ \overline{((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))} = T \end{cases}$$

## Задание 4 (а) (cont.)

$$\left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow C = T \\ \overline{((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))} = T \end{array} \right.$$

Первое - неинформативное

Второе - работаем

$$\overline{((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))} = T$$

## Задание 4 (a) (cont.)

$$(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C) = F$$

Единственный случай:

Система :

$$\begin{cases} B \rightarrow C = T \\ (A \vee B) \rightarrow C = F \end{cases}$$



## Задание 4 (a) (cont.)

$$\begin{cases} B \rightarrow C = T \\ (A \vee B) \rightarrow C = F \end{cases}$$

$$\begin{cases} B \rightarrow C = T \\ A \vee B = T \\ C = F \end{cases}$$

## Задание 4 (а) (cont.)

$$\begin{cases} B \rightarrow C = T \\ A \vee B = T \\ C = F \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = F \\ A \vee B = T \\ C = F \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = F \\ A = T \\ C = F \end{cases}$$

## Задание 4 (а) (cont.)

$$\begin{cases} B = F \\ A = T \\ C = F \end{cases}$$

Возвращаемся к  $A \rightarrow C = T$

Оно неверное.

Ответ: Решений нет.

## Задание 4 (а) (cont.)

Резюме решения:

$$\left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow C = T \\ \hline ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)) = T \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow C = T \\ (B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C) = F \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow C = T \\ B \rightarrow C = T \\ (A \vee B) \rightarrow C = F \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow C = T \\ B \rightarrow C = T \\ A \vee B = T \\ C = F \end{array} \right.$$

## Задание 4 (а) (cont.)

- ▶ Решений могут быть все
- ▶ Несколько решений
- ▶ Нет решений.

## Задание 4 (6)

Задание:

Решите следующее логическое уравнение:

$$((A \cdot B) \sim C) \rightarrow (C \vee \bar{A}) = \textit{False}$$

## Задание 4 (6) (cont.)

Задание:

Решите следующее логическое уравнение:

$$((A \cdot B) \sim C) \rightarrow (C \vee \bar{A}) = \textit{False}$$

Решение:

$$\begin{cases} ((A \cdot B) \sim C) = T \\ C \vee \bar{A} = F \end{cases}$$

## Задание 4 (6) (cont.)

$$\begin{cases} ((A \cdot B) \sim C) = T \\ C \vee \bar{A} = F \end{cases}$$

$$\begin{cases} ((A \cdot B) \sim C) = T \\ C = F \\ \bar{A} = F \end{cases}$$

$$\begin{cases} ((A \cdot B) \sim C) = T \\ C = F \\ A = T \end{cases}$$



## Задание 4 (6) (cont.)

$$\begin{cases} A \cdot B = F \\ C = F \\ A = T \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = F \\ C = F \\ A = T \end{cases}$$

## Задание 4 (6) (cont.)

Ответ:

$$\begin{cases} B = F \\ C = F \\ A = T \end{cases}$$

## Задание 4 (г)

Задание:

Решите следующее логическое уравнение:

$$(\overline{(A \sim B)} \cdot \overline{(A \sim C)}) \rightarrow \overline{(A \sim (B \cdot D))} = \textit{False}$$

## Задание 4 (г) (cont.)

Задание:

Решите следующее логическое уравнение:

$$((\overline{A \sim B}) \cdot \overline{(A \sim C)}) \rightarrow \overline{(A \sim (B \cdot D))} = \text{False}$$

Решение:

$$\begin{cases} ((\overline{A \sim B}) \cdot \overline{(A \sim C)}) = T \\ \overline{(A \sim (B \cdot D))} = F \end{cases}$$

## Задание 4 (г) (cont.)

$$\begin{cases} ((\overline{A \sim B}) \cdot \overline{A \sim C}) = T \\ \overline{A \sim (B \cdot D)} = F \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{A \sim B} = T \\ \overline{A \sim C} = T \\ A \sim (B \cdot D) = T \end{cases}$$

## Задание 4 (г) (cont.)

$$\begin{cases} \overline{(A \sim B)} = T \\ \overline{(A \sim C)} = T \\ A \sim (B \cdot D) = T \end{cases}$$

$$\begin{cases} A \sim B = F \\ A \sim C = F \\ A \sim (B \cdot D) = T \end{cases}$$

## Задание 4 (г) (cont.)

$$\begin{cases} A \sim B = F \\ A \sim C = F \\ A \sim (B \cdot D) = T \end{cases}$$

Рассмотрим 2 случая

Пусть  $A = T$ , Тогда

$$\begin{cases} A = T \\ B = F \\ C = F \\ B \cdot D = T \end{cases}$$

Противоречие

## Задание 4 (г) (cont.)

$$\begin{cases} A \sim B = F \\ A \sim C = F \\ A \sim (B \cdot D) = T \end{cases}$$

Рассмотрим второй случай

Пусть  $A = F$ , Тогда

$$\begin{cases} A = F \\ B = T \\ C = T \\ B \cdot D = T \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = F \\ B = T \\ C = T \\ D = F \end{cases}$$



Логически эквивалентные формулы  $A$  и  $B$ .

Если они являются следствием друг друга

$$A = B$$

Неформально:

- Последние столбцы соответствующих таблиц истинности совпадают  
(Формулы имеют одинаковые значения при любой интерпретации)

Интерпретация - подстановка значений, к примеру  
(*True*, *True*), (*True*, *False*), ...

Стандартные преобразования:

1.  $A \vee A = A, A \cdot A = A$  идемпотентность
2.  $A \vee B = B \vee A, A \cdot B = B \cdot A$  коммутативность
3.  $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C, A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$   
Ассоциативность
4.  $\overline{\overline{A}} = A$
5.  $A \cdot (B \vee C) = (A \cdot B) \vee (A \cdot C)$  Дистрибутивность
6.  $(A \vee B) \cdot A = A$  поглощение
7.  $(A \cdot B) \vee A = A$  поглощение

Преобразования для 5а:

1.  $A \rightarrow B = \bar{A} \vee B$

2.  $A \cdot (B \vee C) = (A \cdot B) \vee (A \cdot C)$

3.  $\bar{A} \vee (A \cdot B) = \bar{A} \vee B$

Доказать

$$\overline{A} \vee (A \cdot B) = \overline{A} \vee B$$

Доказать

$$\overline{A} \vee (A \cdot B) = \overline{A} \vee B$$

Решение:

$$\overline{A} \vee (A \cdot B) = (\overline{A} \vee A) \cdot (\overline{A} \vee B) =$$

$$= [\textbf{FORMULA} : A \vee \overline{A} = \text{True}] = T \cdot (\overline{A} \vee B) = \overline{A} \vee B$$

## Задание 5 (а)

Задание:

Докажите следующую равносильность без использования таблиц истинности:

$$(A \cdot (B \vee \overline{C})) \vee \overline{A} \vee (B \cdot C) \vee (A \cdot \overline{C}) \equiv \overline{A} \vee B \vee \overline{C}$$

## Задание 5 (a) (cont.)

Задание:

Докажите следующую равносильность без использования таблиц истинности:

$$(A \cdot (B \vee \overline{C})) \vee \overline{A} \vee (B \cdot C) \vee (A \cdot \overline{C}) \equiv \overline{A} \vee B \vee \overline{C}$$

Решение:

Преобразуем левую часть

$$(A \cdot (B \vee \overline{C})) \vee \overline{A} \vee (B \cdot C) \vee (A \cdot \overline{C})$$

## Задание 5 (a) (cont.)

$$(A \cdot (B \vee \overline{C})) \vee \overline{A} \vee (B \cdot C) \vee (A \cdot \overline{C}) \equiv$$

$$[\textbf{FORMULA} : A \cdot (B \vee C) = (A \cdot B) \vee (A \cdot C)]$$

$$(A \cdot B) \vee (A \cdot \overline{C}) \vee \overline{A} \vee (B \cdot C) \vee (A \cdot \overline{C}) \equiv$$



## Задание 5 (a) (cont.)

$$(A \cdot B) \vee (A \cdot \overline{C}) \vee \overline{A} \vee (B \cdot C) \vee (A \cdot \overline{C}) \equiv$$

(Одинаковые конъюнкции)

$$(A \cdot B) \vee (A \cdot \overline{C}) \vee \overline{A} \vee (B \cdot C) \equiv$$

## Задание 5 (a) (cont.)

$$(A \cdot B) \vee (\mathbf{A} \cdot \overline{\mathbf{C}}) \vee \overline{\mathbf{A}} \vee (B \cdot C) \equiv$$

$$[\mathbf{FORMULA} : \overline{\mathbf{A}} \vee (A \cdot B) = \overline{\mathbf{A}} \vee B]$$

$$(A \cdot B) \vee \overline{\mathbf{C}} \vee \overline{\mathbf{A}} \vee (B \cdot C) \equiv$$

## Задание 5 (a) (cont.)

$$(A \cdot B) \vee \overline{C} \vee \overline{A} \vee (B \cdot C) \equiv$$

$$[\textbf{FORMULA} : \overline{A} \vee (A \cdot B) = \overline{A} \vee B]$$

$$B \vee \overline{C} \vee \overline{A} \vee (B \cdot C) \equiv$$

$$B \vee \overline{C} \vee \overline{A} \vee B \equiv$$

$$B \vee \overline{C} \vee \overline{A}$$

# Домашнее задание

Домашнее задание:

4В - уравнение (преобразование)

5В - преобразования