Принцип Дирихле

n -коробок для голубей, $n+1$ голубь

Как ни сади голубей по коробкам, найдется коробка в которой как минимум два голубя.

13

Докажите, что в любом множестве из 52 целых чисел найдутся по крайней мере два числа, сумма или разность которых делится на 100.

Решение:

Пусть множество из 52 чисел – множество X.

Рассмотрим множество, состоящее из остатков элементов множества X на 100.

$$A = \{x\%100 | x \in X\}$$

Если в множестве среди чисел в множестве X было два числа, с одинаковыми остатками при делении на 100, то разность этих чисел делится на 100.

Предположим, что таких нет.

Значит, в множестве A 52 различных числа из промежутка $[0, 99]$.

Рассмотрим пары, которые в сумме дают 100

$$(1, 99), (2, 98), ...(50, 51)$$

По принципу Дирихле, если взять 51 число, то получится, что в хотя бы одной паре взяты оба числа.

А тогда сумма соответствующих чисел из X делится на 100.

14

Точка $(x, y, z) \in R^3$ называется *целой*, если $x, y, z \in Z$.

Докажите, что среди девяти целых точек найдутся по крайней мере две точки, для которых середина отрезка с концами в этой точке, также является целой точкой.

Решение:

Рассмотрим, четность каждого компонента в данных 9 точках.

Всего существует 8 различных комбинаций:

- (Ч, Ч, Ч)
- (Ч, Ч, Н)
- (Ч, Н, Ч)
- (Ч, Н, Н)
- (Н, Ч, Ч)
- (Н, Ч, Н)
- (Н, Н, Ч)
- (Н, Н, Н)

Значит, по признаку Дирихле, будет 2 точки с одинаковой расстановкой четности.

Пусть это (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2). Тогда, все величины $x_1 + x_2$, $y_1 + y_2$, $z_1 + z_2$ являются четными числами, а тогда

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

является *целой* точкой.

15

Докажите, что любое подмножество $S \subset \{1, 2, ...200\}$ мошности $|S| = 101$ содержит по крайней мере два взаимно простых числа x, y, т.е. $HOD(x, y) = 1$

Решение

Лемма Два последовательных целых числа $x, x+1$ являются взаимно простыми, т.е. $HOD(x, x+1) = 1$

Доказательство

Пусть $HOD(x, x+1) = d$. Тогда x делится на d, $(x+1)$ делится на d. Тогда и разность величин тоже делится на d, $(x+1) - x = 1$ делится на d.

Значит, $d = 1$.

Конец доказательства

Разобьем все числа множества $\{1, 2, ...200\}$ на 100 пар последовательных чисел:

$$\{(1, 2), (3, 4,), ...(199, 200)\}$$

По принципу Дирихле, если выбрать 101 элементов, то будет существовать 2 числа, которые из одной пары.
Эти числа и будут взаимн простыми, необходимыми в условии задачи.

16

Докажите, что любое подмножество $S \subset \{1, 2, ...200\}$ мошности $|S| = 101$ содержит по крайней мере два числа x, y, что либо $x|y$, либо $y|x$.

Решение

Лемма Если у двух чисел совпадают наибольший нечетный делитель, то одно из чисел делится на другое.
Доказательство
Пусть, наибольший нечетный делитель P.
Первое число расписывается в виде

$$x = 2^a \cdot P$$

Второе число расписывается в виде

$$y = 2^b \cdot P$$

Очевидно, что меньшее число делится на большее.
Конец доказательства
Разобьем все числа множества

$$\{1, 2, ...200\}$$

на группы относительно наибольшего нечетного делителя числа.

$$\{(1, 2), (3, 6), (5, 10), (7, 14), ...(99, 198), (101)...(199)\}$$

Всего групп - 100.
По принципу Дирихле, если выбрать 101 элементов, то будет существовать 2 числа, которые из одного множества.

$$2^a \cdot P$$

где P – нечетное
Пусть 2 числа, $a \leq b$

$$2^a \cdot P$$

$$2^b \cdot P$$

$$HOD(2^a \cdot P, 2^b \cdot P) = 2^a \cdot P$$

$$2^a \cdot P|2^b \cdot P$$

Если P одинаковый, то меньшее делит большее
Коробки

- $P = 1 : \{1, 2, 4, 8, 16, ...128\}$
- $P = 3 : \{3, 6, 12, 24, 48, 192\}$
- $P = 5 : \{5, 10, 20, 40, 80, 160\}$
- $P = 7 : \{7, 14, 28, ...\}$
- ...
- $P = 199 : \{199\}$

Коробки не пересекаются по содержимому
Коробки 100
В одной коробке будет хотя бы 2 элемента.

17
Докажите, что для любого нечётного натурального числа m существует такое натуральное число n, что $2^n - 1$ делится на m.
Решение
Способ 1
Рассмотрим числа

$$2^0 - 1, 2^1 - 1, ..., 2^m - 1$$

Этих чисел $m+1$. Какие-то два из них дают одинаковые остатки при делении на m, потому что различных таких остатков существует всего m.
Пусть, скажем, числа $2^k - 1$ и $2^p - 1$ дают одинаковые остатки при делении на m и $k < p$.
Тогда число

$$(2^p - 1) - (2^k - 1) = 2^k(2^{p-k} - 1)$$

делится на m и, поскольку m нечётно, $2^{p-k} - 1$ делится на m.
Способ 2
От противного.
Пусть $2^a - 1$ никогда не делится на m
Тогда, остатки

$$1, ...m - 1$$

Существует a, b:

$$2^a - 1, 2^b - 1$$

дают одинаковые остатки на m.
Тогда разность делится на m

$$2^a - 1 - (2^b - 1) = 2^b(2^{a-b} - 1)$$

$2^b(2^{a-b} - 1)$ делится на m
По условию, m – нечетное
$HOD(2^b, m) = 1$
Значит, $2^{a-b} - 1$ делится на m.
Получили противоречие.

18
Каждый день на протяжении четырехнедельного отпуска отдыхающий
играл по крайней мере одну партию в шахматы. Общее число сыгранных партий не
превышает 40. Докажите, что надйтеся промежуток времени,
состоящий из последовательный дней, в течении которых
было сыграно ровно 15 партий.
Решение

$$A = [1, 4, [2, 5, 7, 1,]3, 4...]$$

Есть массив из 28 элементов. Нужно найти подмассив сумма элементов = 15.
Префикс сумм – массив размера 29.

$$S_0 = 0$$

$$S_{i+1} = sum_{j=0}^{j=i} A_j$$

$$S = [0, 1, 5, 7, 12, 19, 20, ..]$$

$$S_0 = 0$$

$$S_1 = A_0 = 1$$

$$S_2 = A_0 + A_1 = 5$$

$$S_3 = A_0 + A_1 + A_2 = 7$$

$$S_4 = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = 12$$

$$S_5 = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 19$$

$$S_6 = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = 20$$

$$A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = (A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5) - (A_0 + A_1) = S_6 - S_2$$

Сумма на любом подотрезке вычисляется быстро !!

$$A_i + A_{i+1} + ... + A_j = S_{j+1} - S_i$$

$$S = [0, 1, 5, 7, 12, 19, 20, ..]$$

Строите массив $S^{`}$ ОСТАТКИ ОТ ДЕЛЕНИЯ НА 15

$$S = [0, 1, 5, 7, 12, 4, 5, ..]$$

Получили две пятерки

$$A_0 + A_1$$

- делилась на 15 с остатком 5.

$$A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$$

- делилась на 15 с остатком 5.

Если рассмотреть разность этих велчин, то получится последовательность элементов в массиве, сумма которых делится на 15.

Вопрос на понимание

Сложность вычисление

Задача: Вам дан массив. Нужно выписать в ряд все суммы на подотрезках.

$$A = [1, 0, 7]$$

$$[1, 1, 8, 0, 7, 7]$$

$$[1]$$
$$[1 + 0]$$
$$[1 + 0 + 7]$$

$$[0]$$
$$[0 + 7]$$

$$[7]$$

За сколько Вы умеете строить ? - n^2

$$A = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]$$

Многократное обращение.

n - размер A m - запросов.

Решение : Подсчитать один раз S

$func(i, j) = A_i + A_{i+1} + ...A_j = S_{j+1} - S_i$

$n + m$ операций

А если бы честно считалли сумму каждый раз, то было бы $m \cdot n$ операций