УНАРНОЕ ОТНОШЕНИЕ

Пусть X — непустое множество. Любое подмножество $R \subseteq X$ называется отношением в множестве X (унарным отношением).

Пример. $X = \mathbb{N}$, $R \subseteq X$, $R = \{x \in \mathbb{N}, x — \text{чётное число}\}$, $R = \{2, 4, \ldots, 2n, \ldots\}$.

БИНАРНОЕ ОТНОШЕНИЕ

Пусть X и Y — произвольные непустые множества. Произвольное подмножество $R \subseteq X \times Y$ называется **бинарным отношением**, определённым в паре множеств X и Y.

Пример. $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^2$, $(m, n) \in R \iff n \mid m$. $(6, 3) \in R$, $(6, 4) \notin R$. Тогда $D_R = \mathbb{N}$, $E_R = \mathbb{N}$.

Если $R \subseteq X \times Y$ и $(x, y) \in R$, то пишут xRy.

- **Областью определения** бинарного отношения R называют множество

  $$D_R = \{x \in X \mid xRy \text{ для некоторого } y \in Y\}$$

  .

- **Областью значений** бинарного отношения R называют множество

  $$E_R = \{y \in Y \mid xRy \text{ для некоторого } x \in X\}$$

  .

1

Найдите $D_R, E_R, R^{-1}, R \circ R, R \circ R^{-1}, R^{-1} \circ R$

- (A) $R = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{N} \& x|y\}$
- (B) $R = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R} \& x + y \leq 0\}$

Решение

- (A) $R = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{N} \& x|y\}$

  $D_R = \mathbb{N}$

  $E_R = \mathbb{N}$

  $R^{-1} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{N} \& y|x\}$

  $R \circ R = \{(x, z) : \text{найдется такой } y \in \mathbb{N}, \text{ для которого } xRy, yRz\} = \{(x, z) : \text{найдется } y \in N, \text{ что } x|y, y|z\} = R$, если $y := x$

  $R \circ R^{-1} = \{(x, z) : \text{найдется } y \in \mathbb{N}, \text{ что } x|y, z|y\} = \{(x, z) : x \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{N}\}$, если взять $y := z \cdot x$

  $R^{-1} \circ R = \{(x, z) : \text{найдется } y \in \mathbb{N}, \text{ что } y|x, y|z\} = \{(x, z) : x \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{N}\}$, если взять $y := 1$

- (B) $R = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R} \& x + y \leq 0\}$

  $D_R = \mathbb{R}$

  $E_R = \mathbb{R}$

  $R^{-1} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R} \& y + x \leq 0\}$

  $R \circ R = \{(x, z) : \text{найдется такой } y \in \mathbb{R}, \text{ для которого } xRy, yRz\} = \{(x, z) : \text{найдется } y \in R, \text{ что } x + y \leq 0, y + z \leq 0\} = \mathbb{R}^2$, если $y := -|x| - |z|$

  $R \circ R^{-1} = R \circ R$

  $R^{-1} \circ R = R \circ R$

Возможные операции

Пусть $R, R_1, R_2 \subseteq X \times Y$. Тогда:

1. $R_1 \cup R_2 = \{(x, y) \mid xR_1y$ или $xR_2y\}$
2. $R_1 \cap R_2 = \{(x, y) \mid xR_1y$ и $xR_2y\}$
3. $R_1 \setminus R_2 = \{(x, y) \mid xR_1y$ и $(x, y) \notin R_2\}$
4. $\overline{R}_{X\times Y} = \{(x, y) \mid (x, y) \notin R\} = (X \times Y) \setminus R$
5. $R^{-1} = \{(y, x) \mid xRy\}$ — обратное отношение к R

2

Пусть R, R_1, R_2 - бинарные отношения, опрделенные на паре множеств A, B, S, T - бинарные отношения, опрделенные на паре множеств B, C. Докажите, что

(a) $(R^{-1})^{-1} = R$

(b) $\overline{R^{-1}} = (\overline{R})^{-1}$

(c) $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$

Решение

(a) $(R^{-1})^{-1} = R$

Доказательство:

$(R^{-1})^{-1} = (\{(x, y) \mid x \in A, y \in B, yRx\})^{-1} = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B, xRy\} = R$

(b) $\overline{R^{-1}} = (\overline{R})^{-1}$

Доказательство:

$\overline{R^{-1}} = B \times A \setminus \{(y, x) \mid y \in B, x \in A, xRy\} = \{(y, x) \mid (x, y) \notin R\}$

$(\overline{R})^{-1} = (A \times B \setminus \{(x, y) \mid x \in A, y \in B, xRy\})^{-1} = B\times A\setminus\{(y, x) \mid y \in B, x \in A, xRy\} = \{(y, x) \mid (x, y) \notin R\}$

(c) $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$

Доказательство:

$(R_1 \cup R_2)^{-1} = \{(x, y) \mid (x, y) \in R_1 \text{или} (x, y) \in R_2\} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R_1 \text{или} (x, y) \in R_2\}$

$R_1^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R_1\}$

$R_2^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R_2\}$

$R_1^{-1} \cup R_2^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R_1 \text{или} (x, y) \in R_2\}$

3

Выясните, для каких бинарных отношений R, определенных на паре множеств A и B, выполняетс соотношение $R^{-1} = \overline{R}$

Решение

$R^{-1} = \{(y, x)|y \in B, x \in A, (x, y) \in R\}$
$\overline{R} = \{(x, y)|(x, y) \notin R\}$
Для равенства множеств нужно, чтобы $A = B$.
Рассмотрим два случая.

- $(x,x) \in R$. Тогда (x,x) не лежит в $\overline{R}$, но лежит в R^{-1}
- $(x,x) \notin R$. Тогда (x,x) лежит в $\overline{R}$, но не лежит в R^{-1}

Получили противоречие, значит, таких бинарных отношений не существует.

Бинарное отношение R называют:

1. **рефлексивным**, если $\forall a \in A : aRa$
2. **симметричным**, если $\forall a, b \in A : (aRb \Longrightarrow bRa)$
3. **антисимметричным**, если $\forall a, b \in A : (aRb$ и $bRa \Longrightarrow a = b)$
4. **транзитивным**, если $\forall a, b, c \in A : (aRb$ и $bRc \Longrightarrow aRc)$

4
Пусть $R \subseteq A^2$ и $E = \{(a,a) : a \in A$ - диагональ множества A. Докажите, что

- R рефлексивно тогда и только тогда, когда $E \subseteq R$

Решение
R рефлексивно тогда и только тогда, когда $E \subseteq R$
Доказательство
По определению.
Отношение называется **рефлексивным**, если $\forall a \in A : aRa$
Значит, все пары (a,a) должны входить в отношение

$$\forall a \in A : (a,a) \in R$$

$$E \subseteq R$$

Бинарное отношение $R \subseteq A^2$ называется **отношением эквивалентности** на множестве A, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Пусть $R \subseteq A^2$ — бинарное отношение, и $a \in A$ — фиксированный элемент. Тогда $[a]_A = \{x \in A \mid xRa\}$ — смежный класс множества A по эквивалентности R или просто **класс эквивалентности** множества A.

6

(а) $A = \mathbb{Z}$ и $R = \{(a,b) \colon a + b = 0\}$

(б) $A = \mathbb{Z}$ и $R = \{(a,b) \colon a + b$ четно$\}$;

(в) $A = \mathbb{Z}$ и $R = \{(a,b) \colon a^2 = b^2\}$;

(г) $A = \mathbb{Z}$ и $R = \{(a,b) \colon a^3 = b^3\}$;

(д) $A = 2^{\{a,b,c,d\}}$ и $R = \{(X,Y) \colon |X| = |Y|\}$;

(е) $A = \mathbb{Z}$ и $R = \{(a,b) \colon \exists k \in \mathbb{Z}\ (a - b = 5k)\}$.

Решение

(а) $A = \mathbb{Z}$ и $R = \{(a, b)\colon a + b = 0\}$

Нет, не является рефлексивным.

рефлексивно: если $\forall a \in A : aRa$

(б) $A = \mathbb{Z}$ и $R = \{(a, b)\colon a + b \text{ четно}\}$;

Нужно показать, что отношение R рефлексивно, симметрично и транзитивно

– **рефлексивно**: если $\forall a \in \mathbb{Z} : aRa$

  $(a, a) \in R$ тогда и только тогда, $a + a$ - четно. Это правда.

– **симметрично**: если $\forall a, b \in \mathbb{Z} : (aRb \Longrightarrow bRa)$

  Если $(a, b) \in R$, значит, $a + b$ - четно, значит, $b + a$ - четно, значит $(b, a) \in R$.

– **транзитивно**: если $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : (aRb \text{ и } bRc \Longrightarrow aRc)$

  Если $(a, b) \in R, (b, c) \in R$, значит, $a + b$ - четно и $b+$ - четно, значит, $a + c$ - четно значит $(a, c) \in R$.

Классы эквивалентности:

– Все четные числа

– Все нечетные числа.

Бинарное отношение $R \subseteq A^2$ называется **отношением эквивалентности** на множестве A, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Пусть $R \subseteq A^2$ — бинарное отношение, и $a \in A$ — фиксированный элемент. Тогда $[a]_A = \{x \in A \mid xRa\}$ — смежный класс множества A по эквивалентности R или просто **класс эквивалентности** множества A.

7

Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{x, y, z\}$ и $f\colon A \to B$ – сюръективная функция вида $f = \{(1, x), (2, z), (3, x), (4, y), (5, z), (6, y), (7, x)\}$. Определим бинарное отношение R на множестве A следующим образом: aRb тогда и только тогда $f(a) = f(b)$. Докажите, что R –отношение эквивалентности и найдите классы эквивалентности.

Решение

Нужно показать, что отношение R рефлексивно, симметрично и транзитивно

- **рефлексивно**: если $\forall a \in A : aRa$

  $(a, a) \in R$ тогда и только тогда, $f(a) = f(a)$. Это правда.

- **симметрично**: если $\forall a, b \in A : (aRb \Longrightarrow bRa)$

  Если $(a, b) \in R$, значит, $f(a) = f(b)$, значит, $f(b) = f(a)$, значит $(b, a) \in R$.

- **транзитивно**: если $\forall a, b, c \in A : (aRb \text{ и } bRc \Longrightarrow aRc)$

  Если $(a, b) \in R, (b, c) \in R$, значит, $f(a) = f(b), f(b) = f(c)$, значит, $f(a) = f(c)$, значит $(a, c) \in R$.

Давайте, найдем R.
Относительно x

$$(1,3),(1,7),(3,7),(3,1),(7,1),(7,3),(1,1),(3,3),(7,7)$$

Относительно y

$$(4,6),(6,4),(4,4),(6,6)$$

Относительно z

$$(2,5),(5,2),(2,2),(5,5)$$